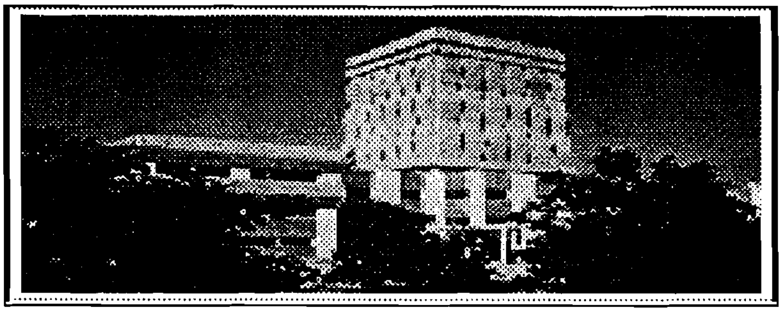
REPUBLIQUE DU SENEGAL
UNIVERSITÉ GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS
UFR DE SCIENCES ECONOMIQUES ET DE GESTION
GESTION INFORMATISEE



Mémoire de Maîtrise

QUELQUES REFLEXIONS SUR LA THEORIE DES JEUX

Présenté par :

Seynabou DIAGNE
4ème année de sciences économiques

Sous la direction de :

Ahmadou Lô GUEYE
Docteur en Economie Mathématique
Chef du Département d'Economie

Année académique 1999/2000

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS

Je remercie :

- Allah le Tout Puissant de m'avoir donné la volonté et le courage de réaliser ce travail.

- Ma famille pour les efforts immenses qu'ils ont consentis pour ma formation.

- Tous ceux qui ont participé à cette formation, principalement Monsieur Adama DIAW, Directeur de l'UFR de Sciences Economiques et de Gestion et l'ensemble des enseignants et du personnel administratif de l'UFR.

- Mon Directeur de mémoire, Monsieur Ahmadou Lô GUEYE pour sa disponibilité et son soutien.

- Sans oublier Monsieur François MBAYE qui m'a appris la rigueur dans la démarche.

- Le personnel du Centre Culturel Français de Dakar.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- Mon père Matamoura DIAGNE ;
- Ma tante Ndeye Siga NAME (que la terre lui soit légère) ;
- Ma tante Astou DIOP ;
- Ma mère Fatou Seye MBODJ ;
- Mes sœurs Aïda, Farmata, Fatou Djiby, Fatou, Malado, Anna et Aminata, Awa, à qui je souhaite un bon rétablissement ;
- Mes frères Fakha, Amath, Cheikh, Alioune, Ousmane, Papa Amadou, Babacar, Madické, Souleymane, Ablaye, Papa Adiouma, Mbaye Diégui et Mansour ;
- Ma grand-mère Noumbé FALL ;
- Mes amies Sophie, Antoinette, Marame et Awa qui n'a cessé de m'encourager ;
- **Lá communauté daganoise** : Gora, Cheikhou, Ameth, Bassirou, Ablaye Ndiaye...
- Tous mes camarades de promotion.

INTRODUCTION

Le sujet que nous avons choisi de traiter dans ce mémoire porte sur la théorie des jeux. La théorie des jeux étudie toute situation dans laquelle les agents rationnels interagissent. Elle est définie comme étant l'analyse mathématique des principes dictant les prises de décision dans des situations qui impliquent deux ou plusieurs personnes, dont les intérêts sont au moins parfaitement contradictoires. En effet, son domaine d'application est extrêmement vaste. Il englobe les problèmes sociaux, économique, et politique.

Dès lors, une étude historique révèle d'importants résultats heuristique. En 1654, Antoine GOMBAULD , posa une énigme à Blaise PASCAL « comment répartir entre deux joueurs l'enjeu d'un jeu de hasard, lorsque celui-ci est inachevé et qu'un des joueurs a l'avantage sur l'autre. ». Pascal se tourne à son tour vers FERMAT, mathématicien du XVII siècle. Il en résulte le fait de prévoir l'avenir grâce à la manipulation des nombres.

Par ailleurs, en 1663, le physicien et philosophe espagnol Girolamo CARDANO exposa dans son livre publié à titre posthume, le concept d'anticipation, il expliqua les lois de la répétition des événement et enfin il définit formellement la notion de probabilité comme une fréquence relative.

En outre, en1697Leibniz sur une lettre adressée à BERNOUILLI , exprime de voir un « traité mathématique des jeux de toute sorte. ». Rémond MONMORT adressa à son tour , en 1713, une lettre à Nicolas BERNOUILLI, le cousin de Daniel BERNOUILLI, dans laquelle il lui propose un jeu de « raison pure ». Cependant, pour MONMORT ce problème paraissait insoluble mais un anglais, James WALDEGRAVE avait résolu un problème similaire.

En effet, au début du XVII, Jean et Jacques BERNOUILLI définissent respectivement les concepts de permutation et de combinaison, et la loi des grands nombres. Ainsi, en 1738, Daniel BERNOUILLI, fils de Jean définit « le processus par lequel les individus font des choix et prennent des décisions. ». De son côté, le mathématicien français Abrahams DEMOIVRE découvrit la structure de la loi normale en sus du concept d'écart type.

Suite aux paradoxes, dont celui de Saint Petersbourg proposé par Nicolas BERTNOUILLI, que suscite la notion d'espérance mathématique de HUYGHENS, un siècle plus tard Daniel BERNOUILLI le remplace par le principe de l'utilité espérée. Ce principe sera axiomatisé plus tard par NEUMANN et MORGENSTERN. Et puis, WALDEGRAVE introduit le concept de stratégie mixte. Il étudia un jeu de cartes avec deux joueurs. De l'examen de ce jeu, il conclut que « tous les jeux de chances sont caractérisés par des stratégies pures alternatives ».

Au XIX^{ème} siècle, à partir des modèles de COURNOT, BERTRAND, et STACKELBERG est montré que les stratégies sur un marché révèlent de la théorie des jeux. En effet, un modèle économique axé sur les choix individuels, par définition correspond à un ensemble d'hypothèses portant, à la fois sur la forme d'organisation sociale des individus et sur leurs objectifs, leurs comportement et leurs caractéristiques. On observe que la théorie des jeux des questions identiques. Mais la théorie des jeux en sus de ces questions essaie d'expliciter toutes les hypothèses et notamment celles qui ont trait au contexte dans lequel les décisions sont prises. Supposons par exemple que nous soyons dans un marché de concurrence parfaite , le théoricien des jeux ne se satisferait pas des hypothèses de la concurrence parfaite, à savoir la transparence de l'information, la flexibilité des prix, et l'homogénéité dans la libre entrée des biens . Maintes interrogations portent plus sur l 'existence d 'un seul prix par bien.

Si tel est le cas, il sera amené à répondre à certaines questions :qui propose ce prix ? Comment les joueurs en sont informés ?quelle est leur domaine de choix ? Cela nous montre comment l'approche de la théorie des jeux oblige à approfondir les choses .

En 1912, E. ZERMELO démontre le premier théorème mathématique de la théorie des jeux : la décidabilité du jeu d'échecs. Le théorème justifie « l'introduction du concept mathématique de jeu à deux joueurs de somme nulle ». Emile BOREL contribuera également à la théorie des jeux entre 1921 et 1927 :application du concept de jeu aux sciences sociales et en donne une approche mathématique.

En sus, Von NEUMANN avec le théorème de minimax en 1928 « tout jeu à somme nulle et deux joueurs qui ont fait leurs choix dans des ensembles finis de stratégies pures, comporte au moins un équilibre en stratégies mixtes ». On entend par stratégie, les objets ou variables parmi lesquels chaque joueur effectue son choix. Et la stratégie mixte est la distribution de probabilité effectuée par un joueur à l'ensemble des stratégies pures (variables incertaines).

Au terme de sa démonstration, NEUMANN montre que le jeu comporte une solution en terme de stratégie pure. Mais Bertrand MUNIER note que « ..., le résultat n'a pas pu être étendu pour le moment au jeu à n personnes ». En outre, en 1929 John Von NEUMANN a formulé comme suit son problème central : « n joueurs $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ jouent un jeu stratégique donné, G. Comment doit jouer l'un des participants pour obtenir le résultat le plus avantageux ? ». Un jeu stratégique selon NEUMANN, consiste en une série d'événements dont chacun peut comporter un nombre fini de résultats distincts.

Les résultats de certains événements sont déterminés par le hasard et les résultats d'autres par les libres décisions des joueurs. On sait par chaque événement quel est le joueur qui doit prendre une décision et ce qu'il connaît des événements antérieurs au moment ou il prend sa décision. Quand on connaît le résultat de tous les événements, on calcule d'après une règle déterminée les versements que les joueurs $s_1,s_2,s_3,\ldots,s_n$ doivent se faire les uns aux autres . Von NEUMANN affirmait que presque tous les événements de la quotidienne pouvaient être considérés comme un jeu stratégique et que l'objet principal de l'économie classique était : « comment l'homo œconomicus parfaitement égoïste agira-t-il face à des circonstances extérieures données ? ».

John VON NEUMANN était un mathématicien de génie dont les travaux ont eu une influence dans plusieurs domaines des mathématiques pures et appliquées et dans la physique. Son article de 1928 « Si la théorie des jeux stratégiques »,fut publié en langue allemande dans une revue mathématique ;il est passé presque inaperçu chez les économistes. L'Economiste Oscar MORGENSTERN, qui arriva en 1938 à l'université de Princeton alors VON NEUMANN y était professeur, l'incita à faire une oeuvre magistrale dans le domaine de la théorie des jeux. De leur collaboration résulta en 1944 l'ouvrage intitulé [***Théorie of Game and Economique Behavior***],ou« ***Théorie des jeux et comportement économique*** ».

Dans cet ouvrage, il présente les motivations économique au chapitre I dans une série de sections relatives aux méthodes mathématiques en économie, au problème du comportement rationnel, à la notion d'utilité, à la structure de la théorie des jeux :méthode de résolution et norme de comportement. Les autres chapitres sont consacrées à l'interprétation économique des jeux généraux à somme nulle lorsqu'il y a un, deux ou trois joueurs face à un marché général.

Jusqu'à la fin des années cinquante, le développement et l'extension de la théorie des jeux ont été presque exclusivement assurés par les mathématiciens. Parmi les concepts qui se sont révélés de première importance pour les économistes, on peut citer l'équilibre de Nash en 1951, ou l'équilibre de Cournot-Nash, qui singularise des actions (ou stratégies), chacune sélectionnée par un joueur et toutes telles qu'aucun des joueurs ne trouve intérêt sur la base de son utilité, à dévier de son propre fait ; la valeur de Shapley en 1953, le cœur de D.B Gillies en 1953. En 1956, Harsanyi a souligné qu'une solution du problème de négociation proposée par l'économiste Zenthen en était mathématiquement équivalent à celle de NASH, et en 1959 SHUBIK a démontré que le cœur d'un jeu à n personnes était équivalent à la courbe des contrats découverte par l'économiste Edgeworth en 1881.

Ainsi pendant plus de trois décennies la théorie des jeux est demeurée en veilleuse, domaine réservé à quelques mathématiciens occupant une place marginal dans l'enseignement supérieur. Contrairement aux années 80 ou l'on a observé une résurgence de la théorie des jeux, qui s'explique selon GUERRIEN par le recul du marxisme et l'offensive des partisans de l'individualisme méthodologique, qui pense qu'elle va permettre avec ses outils mathématiques élaborés, de progresser dans la compréhension des relations et des conflits sociaux. En outre, selon GUERRIEN, elle est mise en avant par ceux qui émettent des réserves sur les discours ultra-libéraux, à propos du caractère harmonieux optimal du système des marchés. En sus, elle constitue une source inépuisable de publications.

Pendant les années soixante, de plus en plus d'économistes se sont intéressés à reformuler les problèmes posés par la structure des marchés et la concurrence dans les termes de la théorie des jeux. Et à la fin des années soixante dix, c'était l'un des domaines les plus actifs et les plus prestigieux de la recherche économique.

En 1979, presque tous les écrits publiés qui appartiennent à cette tradition avait pour objet de clarifier la théorie économique. TELSER a été l'un des rares qui aient tenté de confronter concernant l'oligopole au domaine du marché. La contribution de RIKER est expressément fondée sur une approche de la théorie des jeux de coalition politique en contraste avec celle de DOWN qui fait appel à un modèle de marché.

Il faut cependant noter qu'il existe des applications à la psychologie avec le célèbre exemple du dilemme du prisonnier[1]. Ainsi, ce cas est important du fait qu'il implique un conflit entre rationalité individuelle et rationalité collective. Il faut souligner les recherches en matière militaire. Il s'agit de l'affectation d'une force de frappe contre les emplacements de missile, les emplacements ou sont stockés lesdits missiles. BERKOVITZ et DRESHER (1959,1960,1961) ont présenté une analyse en termes des théories des jeux de la guerre aérienne tactique impliquant es forces aériennes tactiques avec défense aérienne et appuis au sol .

Cependant pour résoudre ces genres de problèmes posés, il faut faire appel à un arbitre indépendant des joueurs. Cet arbitre peut être, soit, des règles extérieures qui seront acceptées et respectées par les joueurs, soit, des institutions, normes conventions qui viendront en complément au jeux. Face à un problème, le premier réflexe est de chercher un ensemble se traduisant par des équations inter-dépendantes ou schéma, c'est à dire une représentation par un modèle. Or, toute modélisation nécessite une délimitation préalable du problème étudié, à travers une description verbale le plus détaillée possible. Ce qui n'est pas toujours aisé.

En effet, même si l'on constate que le problème posé a été bien délimité, les règles du jeu ont définies avec précision, et qu'il y a une information parfaite(les caractéristiques du jeu ainsi que ceux de tous les joueurs sont connus par tous), il existe généralement plusieurs méthodes d'approcher un problème, de le résoudre. Ce qui nécessite des concepts de solution, c'est à dire des types de solutions de nature différentes et comparables .

Ces concepts de solution se répartissent en deux grandes catégories. A savoir les concepts de solution coopératifs et non coopératifs. Les concepts de solution dits coopératifs partent du point de vue que les individus forment des coalitions pour défendre leurs intérêts. Alors que, dans les concepts de solution non coopératifs, l'unité d'analyse est l'individu, le joueur se comporte sur la base de ses intérêts personnels.

Ainsi , nous serons amenés à analyser notre sujet sous deux angles. Dans un premier temps nous parlerons de l'approche coopérative de la théorie des jeux. Dans un second temps, nous évoquerons l'approche non coopérative. Et enfin, nous nous pencherons sur la synthèse des deux approches dans la conclusion générale.

PREMIERE PARTIE : APPROCHE COOPERATIVE DE LA THEORIE DES JEUX

Dans la théorie, une coalition est un sous-ensemble quelconque de joueur (ou l'ensemble dans son entier), considéré sous l'angle de leur possible collaboration. Dès lors le concept de solution coopératif part du point de vue selon lequel des individus forment des coalitions pour défendre leurs intérêts.

CHAPITRE I : REFERENCE COLLECTIVE ET UTILITE

Les comportements économiques et sociaux auxquels nous nous intéressons sont soit des comportements collectifs soit ceux d'un individus agissant pour un groupe. La femme au foyer, le dirigeant d'ELSE. Le dirigeant d'ELSE, tous agissant pour le compte d'un groupe. Par conséquent, les préférences collectives peuvent être considérées, soit comme une agrégation des préférences individuelles soit, soit comme un attribut inhérent au groupe lui même par contre les méthodes de la ORIE des jeux exclues le fait de traiter un groupe commun s'il s'agissait d'un individu fictif. On peut considérer les membres du groupe comme des joueurs d'un sous - jeu organisationnel, rivalisant pour le contrôle des actions du groupe.

Quand on passe à un groupe plus grand ou à la société tout entière, le concept d'utilité collective fait intervenir une notion de valeur : il exprime le bien être social au lieu d'être qu'un simple mécanisme permettant d'expliquer ou de prédire les actions d'un groupe. En effet le bien-être social est l'objectif des planificateurs et des décideurs quand ils essaient de réglementer ou de réformer des systèmes qui, laissés à eux mêmes, ne conduiraient pas nécessairement à l'optimum social.

A./ – LE PRINCIPE DE PARETO

Pour passer des préférences individuelles à des préférences collectives, une hypothèse simple est toujours faite appelée **principe d'unanimité** ou, **principe de paréto** par les économistes. Il s'annonce de la façon suivante[1] :

$x > i\ y$ pour tout $i \in N \Rightarrow x \underset{N}{>} Y$ pour tout x,y de D – (a)

OU

$x \geq i\ y$ pour tout $I \in N \Rightarrow x \underset{N}{\geq} Y$

X y de D – (b)

D étant le plan réel tel que

Littéralement ou 0 :

Si chaque membre de la collectivité préfère x à y, alors le groupe lui-même dans son ensemble, préfère aussi x à y par conséquent on a[2] :

$X \cong i\ y$ pour tout $i \in N \Rightarrow x \cong N\ y$ pour tout

x, y de D – i e si 2 résultats dans D sont indifférent aux yeux de chaque individu, alors ils doivent le rester pour le groupe.

PREUVE :

Hypothèse I : Les préférences individuelles sont transitives, elles génèrent un classement complet.

On peut construire une échelle d'utilité (B) pour chaque individu µi, ainsi qu'une fonction d'utilité µi de D dans µi, telle que [3]:

[1] - > Indicateur de préférence

[2] - ≅ Indicateur d »indifférence

[3] - L'échelle d'utilité a pour but de mesurer ou au moins d'ordonner. En effet, à chaque individu on associe un ensemble ordonne µi, appelé échelle d'utilité et une application.

$\mu i : D \rightarrow vi$ telle que :

$X > y \Leftrightarrow \mu (x) > ui (y)$, appelée ganglion d'ulilisaté.

$x >_i y \Leftrightarrow \mu i(x) > \mu i(y)$ pour tout , y de D – (c) chaque résultat x dans D peut être représenté par un vecteur $\mu(x) = \{\mu^1(x), \mu^2(x), \mu^n(x)\}$ de l'espace d'utilité collective UN.

En plus de nombreux résultats peuvent être représentés par le même point dans UN, or la condition (c) garantit que deux résultats ayant le même vecteur d'utilité doivent être indifférents par la collectivité. =>

$\alpha >_\mu \beta \Leftrightarrow \Upsilon >_N$ avec $\alpha = \sqcup(x)$, $\beta = U(x)$

Hypothèse 2 :

Les U^1 sont des droites réelles, faisant des UN un espace vectoriel réel à n dimensions.

Les vecteurs de UN sont accessibles, par chaque α de UN, il existe un x de D tel que $\alpha = U(x)$ -

Appelons par $P_N(x)$ l'ensemble des préférences "supérieur" et l'ensemble β tels que P>N α, et Qu (α) l'ensemble des préférences "inférieurs" et l'ensemble α tels que α >N λ. Graphiquement ou a :

$\alpha \cong N \quad \wp \Rightarrow P_N(\alpha) = P_N(\wp)$ et $Q_N(x) = Q_N(\alpha)$

d'où $y = \mu \Rightarrow x = n\,\mu$.

Sous sa forme élargie , le principe de Paréto s'écrit :

$x \geq sj\ y$ (j= 1 ; 2 - ; p) $\Rightarrow x >s\ y$

et

$x \geq sj\ y$ (j= 1 =2 … p) $\Rightarrow x \geq s\ y$

En imaginant que chaque sous-ensemble S de la "société" N est, au moins potentiellement, une unité sociale à laquelle une relation de préférence >s peut être attribué => S sous-ensemble quelconque de N. (S_1 S_2… Sp) une partition quelconque de S, io chaque membre de S appartient à un et un seul Sj.

Ainsi en posant l'hypothèse selon laquelle :

Chaque fois où la collectivité N est indifférente entre x et y, elle l'est aussi entre x et toute combinaison convexe de x et y. En fait, en dehors de certains cas, on peut trouver des coefficients positifs permettant de représenter les préférences de chaque sous-groupe comme une somme pondérée des utilisés individuelles :

$$U^S(x) = \sum_{i \in S} Ci\, u^i(x)$$

avec Σ ci = 1

B./- FONCTION DE BIEN-ETRE SOCIAL : Le théorème d'ARROW

Théorème : Par une fonction de bien-être social, on signifiera un procédé ou une règle qui pour chaque ensemble de classements individuels R_1, R_2... Rn face à des états alternatifs de la société donne un classement R, celui de la société[4]. Ce théorème dit "théorème général de possibilité" de Kenneth ARROW a fait époque en ce qui concerne l'application des méthodes mathématiques rigoureuses aux sciences sociales. Son objet est d'analyser les fonctions de bien-être quand le nombre d'alternatives est fini.

Shubik a en effet montré que le résultat du théorème est qu'une telle fonction n'existe pas si elle doit satisfaire un certain nombre de propriétés raisonnables ou souhaitables. Cependant, Martin Shubik a considéré deux modèles différents dans leur structure mais donnant lieu à la même interprétation verbale dans le langage ordinaire.

Dans le modèle I, une fonction de bien-être social est définies comme une fonction $\varphi 1$ de $\pi \times \pi \times \ldots \times \pi$ (n fois) dans π, ou π est l'ensemble de tous les classements possibles, $\omega = \varphi_I(\omega^1, \omega^2, \ldots \omega^n)$

[4] - ARROW, 1951, p. 23.

ω peut être considéré comme une sorte de consonnes, déduit des opinions individuelles ω tandis que φ_I peut être considéré comme une méthode générale d'atteindre le consensus.

Dans le modèle II, il suppose qu'il y a des échelles d'utilité μ^{i} de D dans U'qui expriment leurs jugements sur les candidats et qui définissent des classements sur D. Une fonction de bien-être peut être définie comme une fonction φ_{II} dans $U_N= U^1 \times U^2 x.....x\ U^N$ dans un ensemble ordonné
$U^N \leftrightarrow\ U^d(d) = \varphi_{II}\ \{U^1(d), U^2(d)...\ U^u(d)\}$.

En somme, Shubik a déduit que deux traductions en langage mathématique de la même description verbale, peuvent aboutir à des résultats formelle radicalement différentes. La description verbale doit par conséquent être reprise pour expliciter les hypothèses implicites de façon à pouvoir différencier le modèle I du modèle II. Le théorème est en effet, relatif à un système formel particulier. Pour appliquer ce théorème à de sociétés réelles on doit s'assurer que les conditions sous jacentes du système formel sont vérifiées ; en particulier que les individus réellement existants ne sont pas seulement des ordinalistes mais aussi des relativistes, capables de distinguer le meilleur du pire, mais non le bien du mal.

Signalons cependant, que les approches relatives au problème de l'agrégation de l'utilité, ou du bien-être sembleront trop étroites pour la plupart des théoriciens des jeux. Une des particularités caractéristiques de la théorie des jeux est de ne pas exiger du groupe ou de la société d'être un individu généralisé, capable de choix et de jugements sur les actions ou les résultats à l'aide d'une fonction de bien-être.

Dans notre approche, où l'ensemble des joueurs s'engage dans un jeu, différents concepts de solution vont être appréhendés.

CHAPITRE II : FONCTION CARACTERISTIQUE, CŒUR ET ENSEMBLE STABLE

Une théorie est souvent considérée comme comportant deux parties. Une partie descriptive qui concerne la représentation des joueurs et leurs préférences. Les règles et les possibilités stratégiques, les résultats et les gains ; et une partie relative à la solution . Cette dernière concerne les résultats finales des activités des joueurs. En fait, dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux concepts de solutions, et en particulier aux solutions coopératives.

Ces concepts de solution présentés dans ce chapitre sont le cœur et ces solutions de Von NEUMANN, MORGENSTERN. Ensembles équilibrés et jeux de marchés ; et cependant, nous allons commencer par présenter certains concepts qui seront à la base de l'analyse des jeux coopératifs qui sont la fonction caractéristique, l'ensemble de PARETO et l'espace des imputations.

A./ - LA FONCTION CARACTERISTIQUE

La fonction caractéristique mesure la valeur potentielle de chaque coalition de joueurs. Elle a été d'abord formulé par John Von NEUMANN en 1928. Et elle peut,. en effet, être considérée comme la clé de voûte de la théorie des jeux coopératifs. Elle est aussi considérée comme une pré-solution, c'est-à-dire une première tentation de solution. Pour les jeux dits <u>inessentiels</u>, et ceux où il n'existe aucune base valable pour une coopération entre les joueurs, la fonction caractéristique est la solution finale, tandis que pour les jeux essentiels, la fonction caractéristique est considérée comme une généralisation de la solution dans les jeux de somme nulle à deux personnes.

Elle fournit dans ce cas, les valeurs et les stratégies optimales pour les coalitions. Cette fonction, traditionnellement désignée par la lettre U, est définie de l'ensemble des sous-ensembles de joueurs vers l'ensemble des nombres réels.

Dans un jeu à n personnes, le nombre possible de coalition est de $2^n - 1$. Par exemple, aux échecs, la connaissance de la fonction caractéristique préciserait si la partie est comportée par les blancs ou par les noirs ou bien si elle est nulle. En outre, sa détermination n'est pas une étape facile ; mais sa connaissance nous permet d'éliminer autant de confusions que possible.

<u>Propriétés</u> :

1./ - **Super additive** : si pour 2 coalitions $V(SUT) \geq V(S) + V(T)$ - S 0 + T qui n'ont pas quelque s joueurs en commun.

2./ - **Essentiel** : S'il existe au moins certaines coalitions qui font strictement mieux en s'unissant.

3./ - **La symétrie** –. Si chaque couple de joueurs a la même incitation à coopérer.

a) - Le concept de C -jeu

On appelle c- jeu, les jeux qui sont représentés de façon appropriée par leur fonction caractéristique. Toutefois, deux types importants de jeu facilement reconnaissant relève de la catégorie des c- jeux, quel que soit le concept des solutions retenu.

Le premier est formé par les jeux à <u>somme constante</u>. Il suffit que la fonction caractéristique, soit de somme constante ; … vérifie $U(s) \times U(N-S) = U(N)$ pour tout S. Dans un tel jeu la valeur caractéristique d'une coalition représente exactement sa véritable valeur, car les pires menaces contre les coalitions correspondent au déroulement du jeu qui maximisent les gains des joueurs ne faisant pas partie de la coalition.

Le deuxième appelé, jeu de consentement ou jeu de coalitions orthogonales est d'un intérêt capital pour l'analyse économique. L'idée est rien ne peut changer l'intérêt d'un joueur à moins qu'il soit actif : soit vous coopérer avec quelqu'un, soit vous l'ignorer. On rencontre ce deuxième cas dans les modèles de concurrence pure.

b)- La théorie alpha et bêta

En définition mathématique de U (S) induit qu'il y a deux façons de définir l'efficacité d'une coalition. La première est la théorie Alpha, c'est-à-dire : un vecteur de genre est dans (U (S) si et seulement si la coalition S a une stratégie qui assure à tous ses membres ce montant ou plus, quel que soit le comportement des joueurs extérieurs à S. La deuxième est dite théorie Bêta, c'est-à-dire : un vecteur de gains est admis (U (S) si et seulement si les joueurs extérieurs à S n'ont aucune stratégie qui empêche tous les membres de S d'obtenir ce montant ou plus.

Le principe, généralement admis, est que l'efficacité de Bêta est plus aisée que l'efficacité Alpha. En effet, les ensembles caractéristiques Bêta comprennent toujours les ensembles caractéristiques de Alpha. En sus dans un jeu de coalition orthogonale, les deux fonctions caractéristiques coïncident pour de tels jeux, le choix entre les deux fonctions (Alpha ou Bêta) dépendra du concept de solution appliquée qui dépend de deux fonctions caractéristiques à la fois n'est pas inconcevable[5]

[5] - SCARF, 1971.

Cependant, on note une catégorie particulière de jeux qui fournit des outils importants pour la modélisation des organisations et des processus de décisions collectives. Ils sont appelés jeux simples et se distinguent par la propriété de ne faire intervenir que deux types de coalition, à savoir les gagnantes et les perdantes. Sa fonction est linéaire.

$$U(S) = \begin{cases} 0 \text{ si perdants} \\ 1 \text{ si gagnants} \end{cases}$$

Ces jeux ont d'abord été définis et étudiés par Von NEUMANN et MORGENSTERN. Il existe maintenant une importante étude sur leurs solutions coopératives de toutes sortes. Certes, nous avons fait connaissance des solutions coopératives, mais il n'en demeure pas les seules.

B./ - IMPUTATIONS

Ces solutions coopératives prennent des formes variables. En effet, une imputation est un ensemble de n valeurs numériques (α_1 , α_2 ... α_4) représentant les gains des joueurs à l'issue du jeu. Une imputation est possible s'il existe un ensemble d'actions possibles de n joueurs permettant la réalisation des gains que cette imputation comporte.

Le plus souvent, il existe pour chaque agent une valeur minimum du gain qu'il peut s'assurer, quelles que soient les actions des autres agents (ou joueurs). Par ailleurs, dans l'économie d'échanges, c'est l'utilité qu'il obtient s'il s'abstient de tout échange. Le terme d'imputation sera utilisé pour les vecteurs de gains dont les solutions vérifient ces trois conditions :

1./ - réalisables, s'il vérifie

$\sum \alpha i \leq V(\mu)$ N étant l'ensemble de tous les joueurs $\alpha i \Rightarrow$ vecteurs de gain.

2./ - l'optimalité de PARETO: S'il vérifie à la fois la première condition et

$\sum \alpha i \geq V$ (NI -).

3./ - Individuellement rationnel, s'il vérifie :

$\alpha i \geq V(\{i\})$ pour tout i.

Il semble en effet que l'on peut exclure a priori une issue dans laquelle un joueur (ou agent) particulier n'obtiendrait pas le minimum de gain qu'il peut s'assurer. On pourrait encore dire que l'imputation α est refusée par i ou encore bloquée par aucun agent.

En effet, une coalition C bloque l'imputation $(\alpha^0{}_1\ \alpha^0{}_{2\ldots\alpha n})$ s'il existe une imputation pour C et telle que $\alpha^1{}_i \geq \alpha^0{}_1$ pour tout joueur i de C et $\alpha^1{}_i > \alpha^0{}_1$ pour au moins un joueur de C. Dès lors, une imputation est dite possible pour la coalition C, si C peut assurer à ses membres les gains αi (pour i α C) quelles que soient les actions adoptées par les joueurs extérieurs à C. Par conséquent, considérons à titre d'exemple le cas du monopole bilatéral, l'Entreprise A étant alors le joueur 1, l'Entreprise B le joueur 2. La coalition (1) constituée du seul joueur 1 bloque toute imputation qui attribue à 1 un gain inférieur à C_1 (0) i la coalition (2) bloque toute imputation qui attribue à 2 un gain inférieur à R_2 (0). La coalition {1,2} formée sur les deux Entreprises bloque toute imputation qui ne maximise pas $\alpha 1$ pour une valeur donnée de α_2.

En effet, nous remarquons que le noyau est alors constitué de toutes les combinaisons correspondant à des imputations qui ne soient bloquées par aucune coalition. Ainsi, le noyau est constitué de l'ensemble des imputations possibles qui ne sont pas bloquées par aucune coalition. En outre, l'intérêt de cette définition est que le jeu devrait naturellement conduire à une imputation appartenant au noyau. Toutefois, il peut exister des situations dans lesquelles le noyau est vide. Cependant, on conçoit aisément que pour traiter de la coopération et des confrontations dans les situations où interviennent plusieurs agents, la théorie des jeux ne s'en soit pas tenue aux seuls concepts déjà étudiés.

C./ - LE CŒUR

Parmi les différents concepts de solutions coopératives, le cœur est le plus utilisé (lorsqu'il existe). Il est formé par l'ensemble des issues du jeu telle qu'aucune coalition n'ait intérêt à s'en éloigner. Autrement dit, le cœur est décrit comme l'ensemble des imputations qui ne laissent aucune coalition dans une position où elle pourrait améliorer les gains de tous ses membres. Une définition formelle peut être donnée en ayant recours à la fonction caractéristique : le cœur est l'ensemble des vecteurs de gains α réalisables tels que :

$\Sigma \alpha i \geq V(S)$ pour tout $S \subseteq N$

Cette définition a été formulée de façon à exclure la possibilité d'un cœur vide : soit il y a des gains possibles vérifiant l'inégalité, soit le jeu n'a pas de cœur. Un jeu qui a un cœur comporte potentiellement moins de conflits qu'un jeu sans cœur, puisque tout désir de coopération ou d'attente peut être satisfait. Dans un jeu sans cœur, par contre il doit rester au moins une coalition insatisfaite. Au moins un groupe de joueurs peut faire mieux en quittant ou en abandonnant cette coalition à son sort. Un autre groupe peut ainsi faire une meilleure offre au groupe sortant. D'où la nécessité de certaines contraintes sur la formation des coalitions, sinon elles apparaîtront durant le déroulement du jeu.

Remarquons, cependant que la condition de rationalité est très partante. Ainsi, il ne s'ensuit pas que lorsqu'il y a un cœur tous les autres résultats sont mauvais et doivent être écartés d'un tour de main. En effet, le cœur ou l'absence de cœur est une caractéristique indiscutablement importante de tout jeu coopératif. Son existence, sa taille, sa forme, sa localisation dans l'espace des imputations et d'autres caractéristiques sont cruciales pour l'analyse, quel que soit le concept de solution retenu. Le cœur est habituellement la première chose à chercher, une fois que l'on a fini le travail descriptif.

Ce cœur a beaucoup été étudié en référence à des modèles économiques. En particulier, les propriétés du cœur pour les marchés avec un grand nombre d'agents sont reliés de façon frappante aux propriétés de systèmes de prix.

Exemple : Le Marché a trois coins (adaptés de Von NEUMANN et MORGENSTERN - 1944).
Un fermier possède un terrain qu'il évalue à 100.000$ en ce qui concerne son usage, pour un industriel, il vaut 200.000$ en tant que si f0 pour l'implantation d'une usine ; alors qu'un promoteur immobilier serait prêt à payer jusqu'à 300.000$ pour l'obtenir.

Déterminons d'abord, la fonction caractéristique. Pour cela, posons M

M = l'industriel

S = le fermier

Et les coalitions possibles seront FM, FS, MS, FMS.

Supposons que la situation où il n'obtient pas le terrain est représentés par zéro pour chaque joueur. Ainsi on obtient le tableau suivant .

COALITIONS	VALEUR
F	100.000$
M	0$
S	0$
FM	200.000$
FS	300.000$
MS	0$
FMS	300.000$

On observe que V n'est pas la somme constante. La somme peut-être 100.000$, 200.000$, 300.000$; selon les coalitions envisagées. Dans ce jeu, l'espace d'imputation est l'ensemble de tous les vecteurs (αF, αM, αS) qui majorent le vecteur d'utilité initial (100.000, 0, 0) et dont la somme des composantes vaut 300.000.

La coalition FS est plus forte et satisfaite (c'est-à-dire incapable d'améliorer son sort). Par contre, Ms est une coalition inessentielle qui ne peut rien apporter que M et S ne puisse atteindre individuellement. La connaissance du cœur dans cet exemple permet de prévoir que le fermier F vendra son terrain au promoteur immobilier S à un prix compris entre 200.000$ et 300.000$. Géométriquement, le cœur est obtenu en considérant l'ensemble de tous les vecteurs de gains réalisables puis en excluant les sous-ensembles non désirés : on élimine successivement les vecteurs pour lesquels une coalition particulière est efficace. Ce qui reste à la fin, s'il reste quelque chose est le cœur.

En fait, deux définition proches l'une de l'autre, parmi les nombreuses qui peuvent être imaginées, sont ici d'un intérêt fondamental. Pour tout nombre $\in$ positif, le $\in$ - cœur fort est l'ensemble des α optimaux au sens de PARETO, s'ils existent, tels que :

$$\sum_{S} \alpha i \geq V(S) - \in \text{ pour tout } S \subseteq M$$

le $\in$ - cœur faible étant l'ensemble des α optimaux au sens de PARETO, tels que :

$$\sum_{S} \alpha i \geq V(S) - S\in \text{ pour tout } S \subseteq M$$

Ces quasi-cœurs rendent compte de façon grossière des coûts aux frictions associées à la formation réelle des coalitions. Toutefois, il serait erroné de faire exclure les ensembles stables de NEUMANN et RORGENSTERN de concepts de solutions coopératifs.

D./ - ENSEMBLES STABLES : Théorie de VON NEUMANN et MORGENSTERN

Une autre façon de décrire le cœur à partir d'une relation entre les vecteurs de gains est appelée domination. En effet, un vecteur de gains en domine un autre, s'il est préféré par une quelconque coalition qui peut réaliser cette préférence. Formellement α domine β s'il existe une coalition S telle que

$\alpha i > \beta i \leq V(S)$ pour tout $i \in S$ et

$$\sum_{i \in S} \alpha i \leq V(S)$$

Ce qui nous permet de déduire que le cœur est l'ensemble des imputations qui ne sont pas dominées par d'autres imputations, quelle que soit la coalition. En fait face à un résultat inacceptable, une coalition peut n'avoir rien de mieux à faire que de proposer quelque chose d'inacceptable pour une autre coalition.

Un tel cœur n'a pas la propriété de stabilité externe, qui se définit par la capacité des membres d'un ensemble d'imputations à dominer toutes les imputation extérieures à cet ensemble. Cette stabilité n'est pas trop facile à atteindre. Cependant, la stabilité interne est semblable à la propriété de non dominance qui caractérise le cœur.

La solution d'un jeu de VON NEUMANN et RORGENSTERN est un ensemble d'imputation stable à la fois intérieurement et extérieurement et un sous-ensemble de l'espace des imputations qui domine son complémentaire. Généralement, aucun ensemble stable n'est complètement inclus dans un autre ; bien qu'il puisse avoir de nombreux ensembles stables d'intersection non vide.

S'il y a un cœur, chaque ensemble stable doit le comprendre puisque les éléments du cœur ne sont pas dominés. Pour les jeux dont les fonctions caractéristiques vérifient $V (S N T) \geq V (S) + V (T) - U (S \cap T)$ pour tout S et T alors le cœur vérifie la stabilité externe et c'est l'unique ensemble stable. La définition de l'ensemble stable à un ensemble circulaire et il n'y a aucune méthode directe pour calculer les ensembles stables ou même pour savoir s'il existe.

Ces ensembles stables ont fasciné beaucoup de théoriciens des jeux. Par conséquent, la théorie des ensembles stables est particulièrement difficile, et l'expérience a montré que la plupart des jeux sont pourvus d'ensembles stables. Cependant, de nombreuses propositions ont été avancées pour en modifier la définition. D'après NEUMANN et RORGENSTERN, un ensemble stable est considéré comme une norme de comportement ou une tradition, qui sert de référence lorsque sont envisagés les divers résultats.

Dans le marché à trois coins, une contrainte sociale possible pourrait être de fournir une compensation à un acheteur pour qu'il reste en dehors du marché même si, en agissant ainsi il peut aider un autre acheteur à obtenir un meilleur gain. L'ensemble stable est représenté ici par une droite. Dans cette solution, le joueur M n'obtient rien quel que soit l'accord passé entre F et S.

La théorie des ensembles stables ne traduit pas un résultat quand la norme de comportement est connue. Elle nous dit plutôt si un ensemble de procédures économiques et sociales est stable. Un ensemble stable peut être en effet, interprété comme un type d'accord particulier concernant les prix, comprenant éventuellement des paiements latéraux à des tierces personnes.

E./ - ENSEMBLES EQUILIBRES ET JEUX DE MARCHES

Tout constructeur de marchés ou d'autres institutions économiques doit prêter une grande attention et aux caractéristiques particulières de la situation à analyser et aux objectifs particuliers de sa recherche. Cependant, il existe un lieu fondamental entre les jeux coopératifs à n personnes et les processus de marché.

Pour exemple, dans un marché où il y a un nombre de biens à échanger entre eux - le gain d'un joueur se réduit à l'utilité résultant de la détention finale du bien et de monnaie. On suppose que la fonction d'utilité est, soit continue, concave et mesurée en unité monétaire. Un tel modèle peut être mis sous la forme d'une fonction caractéristique. Par conséquent, c'est un jeu de coalitions orthogonales d'où un c- jeu. Les concepts de solution étudiés semblent être les seuls, pourtant, il existe d'autres concepts de solution coopératifs à savoir ceux basés sur les fonctions caractéristiques.

CHAPITRE III : AUTRES CONCEPTS DE SOLUTION COOPERATIVE

Dans ce chapitre, nous étudierons les autres solutions coopératives de la théorie des jeux. Bien que nous ne puissions pas les étudier de façon détaillée, nous ferons l'effort de dégager les points saillants et les relations logiques qui existent entre elles.

A./ - AUTRES SOLUTIONS BASEES SUR FONCTION CARACTERISTIQUES

1./ - Le Nucléolus

Ce terme utile dans cette partie est l'excédent d'une coalition pour un vecteur de gains donné, ou la différence entre la valeur de la coalition et ses gains, soit :

$$e(S, \alpha) = V(S) - \sum_{i \in S} \alpha i$$

Ainsi, le cœur est l'ensemble des imputations, telles que e (s, α) < O. L'$\in$ - cœur, l'ensemble des imputations, telles que e (S, α) $\leq \in$. Par conséquent, le quasi-cœur qui est le plus petit des $\in$ - cœurs est l'ensemble ou l'excédent maximum est le plus petit possible, si les excédents sont variables, et qu'il y a coalitions, il faut chercher à minimiser les excédents tout en restant dans le quasi-cœur. Ce qui conduit à l'obtention d'un ensemble plus petit, plus petit que le quasi-cœur. Si l'ensemble ne se réduit pas à un point, on peut, en effet, minimiser les excédents de coalition qui le forment. Et l'application répétée de la procédure mène à un point appelé Nucléolus.

En effet, le Nucléolus minimise l'insatisfaction, les coalitions les plus insatisfaites ayant la priorité. Le Nucléolus représente la localisation du cœur du jeu. Autrement dit, si le cœur existe le Nucléolus est son centre effectif.

On peut considérer le Nucléolus comme un point de subvention (ou de taxation). En outre, lorsque la monnaie est considérée comme une bonne approximation d'une utilité dont la valeur marginale est constante, le Nucléolus peut être interprété en terme de taxation ou de subvention.

2./ - L'ensemble de marchandage

Un point de marchandage de (N, V) est une imputation telle que pour chaque couple, i, j $\in$ N, toute "objection" faite peu i contre j aura pour contrepartie une "contre-objection" de la part de j - La contre objection étant formée par une coalition T contenant j et non i. En effet, si α est l'imputation d'origine, (S, β) l'objection et (T, α) la contre objection, on a :

$$\sum_{\kappa \in S} \beta\kappa \leq (S) \text{ et } \beta\kappa > \alpha\kappa \text{ pour tout } \kappa \in S$$

$$\sum_{\kappa \in T} \lambda\,\kappa \leq U(T) \text{ et } \begin{cases} \lambda\,\kappa \geq \beta\kappa \text{ pour tout } \kappa \in T \cap S \\ \lambda\,\kappa \geq \alpha\kappa \text{ pour tout } \kappa \in T - S \end{cases}$$

L'idée de ce concept est venue en observant des joueurs sur un plan expérimental. Toutefois, il faut remarquer que le concept présenté ici, concerne la stabilité d'une seule imputation, alors Von NEUMANN et RORGENSTERN traitent de la stabilité d'un ensemble d'imputation. En effet, Rasher, Pelog et Shapley (1972) ont montré que l'ensemble de marchandage coïncide avec le cœur d'un jeu convexe.

Le modèle de marchandage apparaissent aussi dans des cadres institutionnels très variés . Les plus importants traitent des échanges bilatéraux entre individus, tels le marché de chevaux de Böhn - Bawerk (189&) et le modèle de Bowley (1928). Cependant, la référence la plus fréquemment utilisée est celle du commerce international, ou de la négociation Employeur, Employé - le dernier cas servait de base de départ au célèbre modèle d'Edgeworth (1881).

Ce travail d'Edgeworth est clairement en relation avec la solution du cœur, telle que la définit la théorie des jeux. Et Shubik pense que la modélisation du monopole bilatéral, du marchandage et des problèmes de partage équitable par la théorie des jeux devrait fournir une aide considérable pour choisir les variables et pour intégrer les conditions d'information.

B./ - CONDITIONS SUR LA STRUCTURE DES COALITIONS

L'approche originelle de Von NEUMANN et MORGENSTERN (1944) sur les jeux coopératifs à n - personnes consistait à considérer un jeu de somme constante dans lequel, ce que peut obtenir une coalition S est naturellement obtenu en calculant le maximum de S dans un jeu à deux personnes ou S joue contre son complémentaire $\bar{S}$. En effet, ils montreront alors qu'un jeu à n personnes de somme non constante peut être considérés comme stratégiquement équivalant à un jeu à n + i personnes de somme constante avec un joueur passif supplémentaire. Ce dernier absorbe les pertes ou les gains résiduels de façon que le jeu soit à somme constante ; ce qui donne le moyen de calculer la fonction caractéristique.

Cependant, il est démontré qu'une économie avec des marchés organisés où il est demandé aux individus de faire des transactions n'est, généralement pas modélisés comme un c - jeu. Dès lors que la représentation par la fonction caractéristique de NEUMANN et MORGENSTERN n'est pas toujours adéquate, quelles sont les alternatives qui existent ?

1./ - Jeux sous la forme de fonctions de partition :

Thrall et Lucas (1963) ont considéré des jeux sous la forme de fonctions de partition, définis :Soit N + ... 1 2 - N { l'ensemble de n joueurs
Soit P = { P_1 P_2 - Pr { une partition arbitraire de N en r coalitions, P_1, P_2... Pr}
l'ensemble de toutes les partitions de N est noté $\bar{\Pi}$.

Pour chaque partition P, il existe une fonction : Fp : P $\rightarrow$ R'

R' : l'ensemble des nombres réels. Cette fonction attribue à chaque partition, l'issue à la coalition Pi. Par ailleurs, la fonction F : $\bar{\Pi} \rightarrow \} Fp \{$ qui attribue à chaque partition sa fonction d'issue est appelée fonction de paiement. Le couple Γ = (N,F) est appelé jeu à n personnes sous la forme d'une fonction de partition. Et pour chaque sous-ensemble non vide M de N, la valeur de M est :

V (M) = min (Fp M)

Autrement dit, la valeur d'une coalition est le minimum qu'elle peut atteindre pour sa participation dans les partitions auxquelles elles appartiennent.

Thrall et Lucas (1963) montrent que si (N, V') est un jeu de Von NEUMANN ou N est l'ensemble des joueurs, V' une fonction caractéristique super additive, alors il existe une fonction de partition se mettant sous la forme d'un jeu qui a les mêmes solutions du type ensemble stable. La valeur des jeux utilisant la fonction de partition dépend en grande mesure de la capacité à utiliser cette structure en tant qu'alternative plus simple pour la construction des modèles des processus de formation d'une coalition.

En effet, il faut remarquer que le modèle économique d'échange qui peut être mis sous la forme d'un jeu de marché fait apparaître la même structure que celle de la fonction caractéristique de Von NEUMANN et MORGENSTERN ou que l'on utilise la fonction de partition.

2./ - La ψ - Stabilité

Alors que l'utilisation des fonctions de partition élargit les possibilités de formation de coalitions, la fonction ψ de Lucas et Raiffa (1957) fournit un moyen de réduire ces possibilités ; soit la règle limitant la formation de coalition, Lucas a proposé une solution coopérative formée des couples (x, h), ou l'allocation x et la partition h sont en équilibre.

Pour que S soit en équilibre on impose les conditions suivantes :

1 - Pour tout S en ψ (h), $V(S) \leq \sum_{i \in S} \kappa i$

2 - si $\kappa i = V(\{i\})$, alors [i} est dans ha avec S une coalition de Ψ (h)

Par conséquent, tous les points du cœur sont ψ - stables. En effet, la théorie des ensembles stables donne des exemples de phénomènes, tels que les solutions discriminatoires et le transfert de ressources entre des groupes apparemment indépendants, qui soulèvent des questions intéressantes lors de la modélisation de processus économique, politique ou sociaux.

Ces solutions et présolutions discutées dans cette première partie ont été étudiées et corrigées par beaucoup de spécialistes de la théorie des jeux. Cependant, cette approche dite coopérative présente quelques points faibles : elle ne dit rien sur la façon dont se forment les coalitions, sur le partage des gains entre ses membres et sur les raisons qui font que ceux-ci ne la désertent quand il est avantageux pour eux de la faire. Dès lors, est-ce pour cela que cette approche semble actuellement en relative défaveur, sauf pour l'étude des mécanismes de vote, où les coalitions jouent un rôle essentiel. Toutefois, quand est-il des concepts de solution dits non coopératifs ?

DEUXIEME PARTIE : APPROCHE NON COOPERATIVE DE LA THEORIE DES JEUX

CHAPITRE I : JEUX A DEUX JOUEURS DE SOMME NULLE

Ces concepts de solutions discutés jusqu'ici font partie de ceux qui sont habituellement appelée la théorie des jeux coopératifs. Pour ces concepts, les joueurs sont supposés capables de se parler pour former des coalitions et s'engager mutuellement. En outre, dans ce chapitre, et ceux qui suivent, nous allons étudier la branche non coopérative de la théorie des jeux. Ses concepts de solution seront totalement différents de ceux que nous avons vus jusqu'à maintenant.

En effet, l'hypothèse faite ici est que les joueurs, sous aucun prétexte ne font de tentatives pour coordonner leurs décisions stratégiques. En outre l'idée centrale de cette approche est l'indifférence aux désirs des autres : l'individualisme. Dès lors, dans ce chapitre, nous allons étudier les jeux à deux joueurs de somme nulle. Ces problèmes seront posés selon les termes duopole (deux concurrents partageant un marché).

A./ - JEU A DEUX JOUEURS A SOMME NULLE AVEC POINT SELLE

Ce concept de point de selle a été mis en avant pour la première fois par Emile Borel en 1921. Mais sa portée réelle ne fut comprise que quelques années plus tard, quand John Von Neumann (1928) énonça le "théorème du minimax" : "Si on considère aussi bien des stratégies, chaque matrice de jeu admet un point. Pour vous permettre de bien saisir les jeux à deux joueurs à somme nulle avec point de selle, nous allons vous l'expliquer à travers un exemple : soit deux magasins situés dans une même rue, face à face, commercialisant le même produit au même prix.

Le marché total est considéré comme un paramètre fixe. Le jeu ainsi dénommé à somme nulle, car la part du marché détenue par le magasin A échappe au magasin B et réciproquement.

Autrement dit, si A augmente ses quantités vendues de 100, les quantités vendues par B diminuent d'autant. La matrice suivante va définir les quantités vendues par A en fonction de la politique de A et des réactions qu'elle entraîne chez B.

Décision de A	**Réactions de B aux décisions de A**	
	B ne baisse pas ses prix (d'1)	B baisse son prix (d'2)
A ne baisse pas son prix (d'1)	10.000 articles	90.000 articles
A baisse son prix (d'2)	11.000 articles	10.200 articles

Remarque : Lorsque les deux concurrents baissent leurs prix, A réussit à prélever une part de marché de 10.2000 - 10.000, soit de 200. On supposera que B a établi la même matrice et que son objectif sera de contrer A.

Stratégie de A : Si A choisit d1, B a intérêt à choisir d'2 car dans ce cas, B amoindrira à son avantage la part du marché détenue par A. Si A choisit d2, B a intérêt à choisir d'2, car de nouveau B amoindrira à son avantage la part détenue par A. Dans la mesure où A souhaite tirer le meilleur parti de ses perspectives, les plus pessimistes, la solution d2 est la meilleure. D'où A a appliqué la règle du "Maximin", ... la solution qui maximise la part du marché la plus faible -

min (part de marché) = (9.000, 10.200).

Max (9.000, 10.200) = 10.200 - qui correspond à de -

A peut également appliquer le critère du "maximax", c'est-à-dire max (11.000, 10.000) = 11.000 cette solution correspond également à d2. Dès lors, quelle que soit la politique B, A a intérêt à choisir d2. Car n'ayant un seul choix possible.

Stratégie de B : Si B choisit d'1, elle permet au pire à A de ne prélever que 10.000 à son propre détriment. Si B choisit d'2, la part du marché couvrant à A est d2 9.000 au pire des cas B va donc appliquer le critère du "minimax", c'est-à-dire sélectionner le minimum des parts de marché les plus fortes de A.

min {11.000 , 10.200} = 10.200 c'est-à-dire la décision d'_2.

Conclusion :

A prend la décision d2.

B prend la décision d'2.

Si chacun des deux adversaires connaît d'avance les réactions de l'autre, le choix sera inchangé. Il se produit une situation d'équilibre dit point de selle ou point d'équilibre. En effet, cette situation est stable et aucun des deux joueurs n'a intérêt à s'en éloigner. Par conséquent, l'Entreprise A est avantagée puisqu'elle vend 10.200 au lieu de 10.000. En effet, le jeu est considéré comme non équitable.

B./ - JEUX A DEUX PERSONNES A SOMME MULLE SANS POINT DE SELLE

Ces situations de jeux n'impliquent pas nécessairement un point d'équilibre. Dès lors, nous allons envisager le cas où l'intérêt des duopolistes n'est jamais identiques, entraînant une multitude de décisions, chronologiquement. En reprenant les hypothèses retenues précédemment imaginons la matrice des bénéfices A et B se présente comme suit :

	Réaction de B	
Décision de A	B ne modifie pas son prix de vente (d'1)	B baisse son prix de vente (d'2)
A choisit un prix de vente = B (d1)	+ 10.000	+ 2.000
A choisit un prix de vente inférieur à B (d2)	+ 6.000	+ 9.000

Stratégie de A :

A va appliquer la règle du "maximiun" soit max (2.000 , 6.000) = 6.000 qui correspond à d2. B va réagir, il va appliquer la règle du "minimax" c'est-à-dire min (10.000, 9.000) = 9.000 qui correspond à d2. Par conséquent, ces deux adversaires ne se rencontrent plus dans la même case. Si B est certain que A choisit d2, l'intérêt de B va consister à choisir d'1 car dans ce cas, sa perte passe de 9.000 à 6.000.

A va réagir à son tour en choisissant d1 et son gain va passer de 6.000 à 10.000. B va répondre en choisissant d'1, afin de faire baisser le gain de A de 10.000 à 2.000, à son profit. Ainsi, le jeu peut recommencer à l'infini.

Ce type de fréquence est dénommé "stratégie mixte" ou combinée. Ce choix revenant selon une fréquence déterminée, il convient cependant de déterminer la fréquence pris par chacun des duopolistes.

Soit $f1$, $f2$ les deux fréquences respectives de d1 - d2 pris par A ;

Soit $\vee 1$ $\vee 2$ les deux fréquences respectives de d'1 - d'2 pris par B -

telles que $f1 + f2 = 1$

$\vee 1 , \vee 2 \geq 0.$

Si A choisit uniquement d1, $f1 = 1$ et $f2 = 0$. En effet, le gain moyen de A va dépendre des fréquences de B, $\vee 1$ et $\vee 2$ sera égal à : $10.000 \vee 1 + 2.000 \vee 2$.

Par contre si A choisit d1 avec la fréquence $f1$ et d2 avec $f2$, son gain moyen sera :

$GA = (10.000 \vee 1 + 2.000 \vee 2.)\ f1 + (6.000 \vee 1 + 9.000 \vee 2)^{x f2}.$

En appliquant le même raisonnement avec B, son gain moyen est de :

$GB = (10.000\ f1 + 6.000\ f2) \vee 1 +$

$(2.000\ f1 + 9.000\ f2) \vee 2$

En développant, on a :

GA = 10.000 $f1$ v1 + 2.000 $f1$ v2.+ 6.000 $f2$ v1 + 9.000 $f2$ v2

GB = 10.000 $f1$ v1 + 6.000 $f2$ v1 + 2.000 $f1$ v2.+ 9.000 $f2$ v2

On en déduit que si les deux antagonistes raisonnent rationnellement, on obtient nécessairement une situation d'équilibre. En effet, le théorème de Von NeEUMANN est : "Etant donné un jeu à deux personnes à somme nulle, il existe toujours pour A une stratégie mixte optimale ($f1$ $f2$) qui, si elle est adoptée par A lui assurerait contre toute défense de l'adversaire B un plancher de gain v. Il existe toujours pour B une stratégie mixte optimale (v1, v2) qui, si elle est adoptée par B lui assure contre toute défense de l'adversaire de ne pas perdre plus de v -v est appelée valeur de jeu".

Pour l'Entreprise A, le problème relève de la programmation linéaire. Il s'agit désormais de déterminer $f1$ et $f2$ tel que le plancher gain U soit le plus élevé possible. D'autre part, A doit gagner au minimum U, quelles que soient les réalisation de l'adversaire. Si B choisit d'1, le gain moyen de A sera de 10.000 $f1$ + 6.000$f2$; il faut donc que 10.000$f1$ + 6.000$f2$ $\geq$ U. S'il choisit d'2, le gain moyen de A sera de 2.000 $f1$ + 9.000 $f2$, il faut donc que 2.000 $f1$ + 9.000 $f2 \geq$ U

enfin $f1 + f2 = 1$ et $f1, f2 \geq 0$

en remplaçant $f2$ par 1 - $f1$ ou :

10.000 $f1$ + 6.000 (1 -$f1$) $\geq$ U

4.000 $f1$ + 6.000 $\geq$ U

et

9.000 - 7.000 $f1 \geq$ U

Représentons graphiquement les droites :

U = 4.000 $f1$ + 6.000 et U = -7.000 $f1$ + 9.000

La zone d'acceptation est définie par la figure géométrique OAMCB. La fonction objective est de maximiser U. Ce maximum correspond au point M - M (709 ϙ, 3) on en déduit de $f1$ = 8

Π Π

Ainsi en choisissant la stratégie optimale ($f1$ = 3 , $f2$ = 8)

Π Π

l'entreprise A aura un gain moyen qui sera supérieur ou égal à 709,9.

En tenant le même raisonnement pour l'entreprise B, on obtient les résultats suivants :

La stratégie idéale est U1 = 7 U2 = 4

Π Π

B aura une perte moyenne qui sera égale ou inférieure à 709,9 quelles que soient les réactions de A. En effet, aucun des deux adversaires n'a intérêt à s'écarter des fréquences optimales. Le théorème de Von NEUMANN N est confirmé.

Ce modèle nous donne les fréquences, mais pas l'ordonnancement des décisions, le fait de savoir que 7 fois sur 11 B choisira d'1 ne nous indique pas la succession chronologique des choix. Ceci est une grosse racine.

CHAPITRE II : JEUX DE SOMME NON CONSTANTE

Dans ce chapitre nous allons étudier les jeux non coopératifs à n personnes avec un nombre fini de stratégies. En effet, ce concept de solution fondamental a été proposé par John NASH (1951) dans sa thèse de Doctorat même des théoriciens comme Augustin GOURNOT (1838) avait présenté quelques exemples de ce type de solution.

A./ - EQUILIBRE DE NASH

Contraire aux solutions coopératives, la solution de NASH n'est pas formulé en terme de gains mais plutôt en terme de stratégies. En effet, la définition de base de l'équilibre est simple :

Soit Hi (S_1, S_2... S_4) le gain du joueur Pi en fonction des stratégies de tous les joueurs, y compris la sienne. Un équilibre est un vecteur de stratégie ($S*_1$, $S*_2$,... $S*_4$) tel que quel soit i = 1,2 - n(($S*_1$, $S*_2$,... $S*_i$,....$S*_4$.

Autrement dit, un équilibre est un vecteur de stratégie tel qu'aucun joueur considérant le choix des autres joueurs comme donné, ne peut améliorer sa situation en modifiant son propre choix. En fait, l'équilibre n'est qu'une généralisation de la solution du minimax, au point - selle - des jeux de somme nulle à deux joueurs. En effet, pour NASH, les équilibres de stratégies dominantes[6] sont toujours des équilibres de NASH, mais inversement, les équilibres de NASH peuvent ne pas être de stratégie dominante. D'ailleurs, il peut avoir plusieurs équilibres de NASH dans un jeu donné. Pour illustrer cela, prenons comme exemple le bataille des sexes.

[6] - Une stratégie est dite dominante si son gain est strictement supérieur au gain de n'importe quelle autre stratégie.

Les deux joueurs sont un homme et une femme. Chacun a le choix entre deux possibilités : acheter un billet, soit pour une représentation à l'Opéra, soit pour un match de boxe. Ces possibilités seront notées respectivement par 0 et B. Ils préfèrent avant tout être ensemble, mais elle préfère l'Opéra à la boxe et lui la boxe à l'Opéra. On peut schématiser la situation par le tableau suivant dans lequel elle choisit une colonne et lui une ligne.

	B	O
B	4,2	1,1
O	0,0	2,4

La bataille des sexes admet deux équilibres : (Opéra, Opéra) et (Boxe, Boxe) de paiements respectifs (4,2) et (2,4). L'exemple où l'on note un seul équilibre est le très célèbre dilemme du prisonnier. Dans ce dilemme, chaque joueur dispose de deux stratégies, l'une "Pacifique", P, l'autre "Agressive", A, d'où le tableau suivant :

	P	A
P	1,1	-1,2
A	2,-1	0,0

Cette matrice a, sans doute, été la plus discutée en théorie des jeux : deux individus soupçonnés d'avoir accompli un sombre forfait sont placés en garde à vue dans deux cellules différentes. Le juge propose à chacun le marché suivant :
"Avoue ton crime et témoigne contre ton complice, tu bénéficieras d'une réduction de peine. Méfie-toi de lui, s'il est le seul à avouer, tu en prends pour vingt ans". En effet, ce dilemme admet qu'un seul équilibre (Agressif- Agressif). Autrement dit, un joueur possédant une stratégie strictement dominante doit nécessairement la jouer dans un équilibre.

Propriétés de l'équilibre - Relations avec les stratégies prudentes

Considérons l'exemple de la bataille des sexes, la stratégie prudente[7] se garantit 1 en choisissant l'Opéra, 0 en choisissant la boxe. L'Opéra est donc l'unique stratégie prudente. En effet, il choisira la boxe s'il joue prudemment. En outre, nous savons à travers cet exemple qu'un ensemble de stratégies prudentes (une pour chaque joueur) ne forme plus nécessairement un équilibre. Cependant, dans tout équilibre, les joueurs obtiennent au moins leur paiement maximal garanti. En effet, raisonnons par contradiction et supposons $\mu_i (\kappa^*) < \alpha_i$. Si le joueur i dévie et utilise une stratégie prudente, il obtient au moins α_i - la déviation est donc profitable et κ^* n'est pas un équilibre.

Relations avec l'élimination des stratégies strictement dominées

Si un jeu admet un équilibre obtenu par élimination successive de stratégies strictement dominantes, alors cet équilibre est un équilibre de NASH et c'est le seul.

Multiplicité des équilibres

La multiplicité des équilibres dans les jeux à somme non nulle est un phénomène général et le problème de la sélection, l'un des enjeux de recherche les plus actifs du domaine (comme sous le nom de théorie des raffinements de l'équilibre de NASH).

---

[7] - Supposons un joueur qui envisage toujours le pire des cas. Une stratégie κ_i lui garantie le paiement :
$\inf_{\kappa_{-i} \in X_{-i}} U_i (\kappa_i, \kappa_{-i})$.
Le joueur prudent cherche à maximiser ce paiement garanti.

En outre, cette question est loin d'être simple et parfois le problème importe peu ou qu'il se résout facilement. Citons un cas :

- un équilibre PARETO domine les autres, c'est-à-dire qu'il donne à chaque joueur un paiement au moins aussi bon que n'importe quel autre équilibre. Il semble alors assez naturel de choisir cet équilibre. Précisons cette idée en donnant la définition suivante :

PARETO - optimalité

Définition : Une issue X est Pareto -dominée par l'issue Y si :

$$\mu_i : (y) \geq \mu i\,(x)\ \mathrm{U} i \in N\ -$$

l'inégalité étant stricte pour au moins un joueur. Une issue est Pareto optimale, si elle n'est pas Pareto dominée par aucune issue.

L'exemple du dilemme du prisonnier montre qu'un équilibre de NASH peut être Pareto-dominé. Autrement dit, même si aucun des joueurs n'a intérêt à dévier unilatéralement, ils peuvent dons profiter d'unè déviation coordonnée et simultanée. L'exemple de la batille des sexes illustre le cas de deux équilibres de NASH dont aucun ne domine. Ceci est typique des situations de jeux non coopératifs. Ces équilibres ne sont pas nécessairement Pareto - optimaux et le problème de la sélection peut rarement être résolu à l'aide de ce critère.

B./ - LES JEUX FINIS

Remarquons d'emblée que le théorème de NASH ne s'applique pas directement à un jeu fini : un ensemble fini n'est pas connexe, sauf s'il est réduit à un seul élément. Et, en effet, un jeu fini ne possède pas nécessairement d'équilibre. Cependant, nous montrons ici comment restaurer l'existence d'un équilibre en considérant des stratégies aléatoires.

1/ - Le prolongement mixte d'un jeu

Supposons finis les ensembles de départ définissant les stratégies. Supposons maintenant qu'un joueur puisse choisir comme stratégie non seulement un point de l'ensemble de départ, mais aussi une loterie sur ces points. On dit qu'une telle loterie est une stratégie mixte.

Définition : Une stratégie mixte du joueur i est une loi de probabilité sur Xi.
Si $\lambda i = \lambda i\ (ki)$, $xi \in Xi$ est une telle loi, $\lambda i\ (ki)$ représente la probabilité de tirer xi et l'ensemble $\bar{X}i$ des stratégies mixtes est :

$\bar{X}i = \{\lambda i, \Sigma\ \lambda i\ (xi)= 1, \lambda i\ (xi) \geq 0\ \ , \forall\ \kappa i \in Xi\}$.

Une stratégie de Xi s'interprété comme une stratégie mixte particulière formellement $\lambda i\ (yi) = 0$ si $yi \neq xi$, $\lambda i\ (xi) = 1$

Ces stratégies de Xi sont appelées stratégies pures. Si chaque joueur i tire au sort sa stratégie suivant λi indépendamment des autres, l'issue $x = (x_1\ x_2 \ldots x_n)$ se réalise avec une probabilité égale à

$$\lambda i(x) = \prod_{i \in N} \lambda i\ (xi).$$

Nous supposons que les fonctions d'utilité d'un joueur sont de fonctions de NEUMANN et de MORGENSTERN. Ce qui signifie que le niveau d'utilité associée à une issue aléatoire est égal à son espérance d'utilité, soit :

$$\grave{u}i\ (a) = \Sigma\ \lambda\ (x)\ ui\ (x), x \in X.$$

ou

$$\lambda = (\lambda i)\ i \in N, \lambda\ (x) = \Pi_{\ i \in N}\ \lambda i\ (xi).$$

En regroupant les termes associés à chaque xi et en notant $\lambda i\ (x\text{-}i) = \Pi\ i\ i \neq i$ $\lambda j\ (xj)$ on peut aussi écrire :

$$\grave{u}i\ (\lambda) = \sum_{xi \in Xi} \lambda i\ (xi)\ \{\Sigma\lambda\text{-}i\ (x\text{-}i)\ Ui\ (xi, x\text{-}i)\}$$

Or le terme entre crochets est égal à $\grave{u}i$ (xi, λ-i), donc :

$\grave{u}i (x) = \Sigma \lambda i (xi) \grave{u}i (xi, \lambda\text{-}i)$

Définition : Le prolongement mixte du jeu (N, Xi, ui, i∈N) est le jeu (N, Xi, ùi, i∈N). Ces équilibres sont appelés équilibres en stratégies mixtes du jeu initial. L'intérêt de ce prolongement réside dans le théorème suivant.

Théorème : Tout jeu fini admet un équilibre en stratégies mixtes.

2./ - Propriétés des équilibres mixtes

Le théorème suivant précise les propriétés des équilibres en stratégies mixtes.

Théorème : Une issue λ^* est un équilibre en stratégies mixtes si et seulement si, pour tout i, $\lambda^*i (xi) > 0 \Rightarrow \tilde{U}i (xi, \lambda^*\text{-}i) \geq \tilde{U}i (xi, \lambda^*\text{-}i), \forall xi' \in Xi$

Ce qui signifie que toute stratégie pure utilisée avec une probabilité non nulle est une meilleure réponse à λ^*1.

Corollaire1 : Un équilibre en stratégies pures est aussi un équilibre en stratégies mixtes.

Corollaire 2 : Soit une stratégie pure xi, s'il existe une stratégie mixte λi telle que l'on ait : $\tilde{U}i (xi, x - i) < \tilde{U}i (\lambda i, x\text{-} i) \; \forall x - i \in X\text{-} i$ alors

$\lambda s^* (xi) = 0$ pour tout équilibre λ^*.

Ainsi, si la stratégie λi est une stratégie pure, le corollaire 2 signifie que xi est strictement dominée par λi. Nous savons qu'elle ne sera jamais utilisée dans un équilibre en stratégies pures. Ce corollaire a surtout un intérêt pratique. L'inégalité découlant du corollaire 2 est souvent facile à vérifier puisqu'elle ne comprend qu'un nombre fini d'inégalités. Si elle est satisfaite, elle permet d'éliminer xi dans la recherche des équilibres même en stratégies mixtes.

C./ - JEUX REPETES

Le recours aux croyances[8] permet donc de lever l'indétermination inhérente à la multiplicité des équilibres, ou à leurs absences. Reste à préciser l'origine des croyances auxquelles il est attribué un rôle si décisif. D'où l'idée de faire appel aux jeux répétés. En effet, pour définir un jeu répété il faut tout d'abord préciser si le jeu est répété en nombre fini ou infini de fois, et si les joueurs actualisent leurs gains, en valorisant les paiements présents plus que les paiements futurs.

L'introduction de l'actualisation est une source de complexité dans les jeux répétés. En sus, les jeux répétés constituent un domaine de prédilection de l'économiste. En effet, la plupart des situations économiques se situent dans un contexte plus ou moins récurrent, sans admettre ni début ni fin au sens strict. Dans cette partie, nous allons commencer par un exemple introductif illustrant un fait important : dans un jeu répété, il existe le plus souvent de nouveaux équilibres, distincts d'une simple répétition des équilibres du jeu non répété. Nous introduisons ensuite l'appareillage technique puis expliquons la mécanique des "folks théorèmes".

1./ - Exemple introductif

La répétition d'un jeu génère souvent toute une série d'équilibres de NASH de plus en plus complexes. Autrement dit, un équilibre de NASH du jeu répété ne consiste pas nécessairement à répéter les équilibres du jeu de boxe. Pour illustrer ce problème, considérons le jeu à deux joueurs représentés par le tableau qui suit :

	d	e	f
a	3,3	1,4	-1,2
b	4,1	2,2	-1,0
c	2,-1	0,-1	-2,-2

[8] - Il s'agit là des croyances des joueurs pour levée l'indétermination.

Etudions d'abord le jeu joué une seule fois. Les stratégies c et f sont strictement dominées, on peut donc les éliminer. On obtient une matrice semblables à celle du dilemme du prisonnier, où les stratégies a et d sont à leur tour dominées strictement. Ce seul équilibre de NASH obtenu après élimination des stratégies dominées, est le couple de stratégies (b, e). Supposons que ce jeu est répété deux fois, chaque joueur cherche à maximiser la somme de ses gains sur l'ensemble des deux étapes. Peut on reprendre le même raisonnement ? Imaginons le jeu répété deux fois et considérons le joueur 1.

A la première étape, il a le choix entre trois décisions possibles, a ; b ou c puis à la deuxième étape il se retrouvera face à trois éventualités (le joueur 2 aura joué d, e ou f à la première étape) en fonction desquelles, il pourra à nouveau choisir entre trois décisions possibles. Chaque joueur a donc $3 \times 3^3 = 8$ stratégies. Remarquons d'abord que si un couple de stratégies est un équilibre de NASH dans un jeu non répété, la juxtaposition de ces comportements génère un équilibre de NASH dans le jeu répété. Ainsi jouer (b, e) à la première étape puis à nouveau (b, c), quoiqu'il soit advenu à la première étape, constitue un équilibre de NASH. Mais il en existe souvent d'autres. Et ces équilibres seront précisés à l'aide du célèbre "folk théorème".

Cependant, la multiplicité des équilibres est aussi un phénomène inévitable dans les jeux répétés. Cette multiplicité est un facteur à la fois positif et négatif. Il est positif : grâce à la prise en compte de la durée de leur relation, les joueurs peuvent coopérer de façon tacite et accroître leur paiement. Mais c'est aussi un facteur négatif dans la mesure où le résultat paraît trop facile à obtenir.

Illustrons cela par l'exemple précédent. Si le couple (a, d) n'est pas joué à la première étape, alors les menaces elles-mêmes doivent être un équilibre du jeu de la deuxième étape. Or (c, f) ne constitue pas un équilibre du jeu non répété.
Remarquons maintenant que ce serait le cas si on remplaçait les paiements (-2, -2) correspondant à (c, f) par (0,0) car alors (c, f) serait un équilibre de NASH du jeu de base. Cet équilibre serait Pareto - dominé par l'autre équilibre (b, e) de paiement (2,2).

2./ - Jeu répété G_δ (T) d'horizon T et de facteur d'actualisation δ

Soit G un jeu fini ; étant donné T un nombre entier fini ou infini, et δ, un réel dans l'intervalle [0,1] ; on définit le jeu répété T fois, actualisé par, δ, comme le jeu sous forme développée suivant noté G_δ (T) :

- les joueurs connaissent à chaque étape, f, $1 \leq t \leq T$, les actions prises aux (t -1) étapes précédentes, que l'on appelle histoire. Une histoire possible h à l'étape t est donc une suite de (t -1) issues $(x^1, \ldots, x^{t-1})$ et l'ensemble des histoires possibles à t est x^{t-1} ;
- Les joueurs choisissent une stratégie de G à chaque étape t, $1 \leq t \leq T$, sur la base de l'histoire observée. Plus précisément une stratégie du joueur i définit pour toute histoire possible à l'étape t l'action prise par i et ce pour tout, $1 \leq t \leq T$. Elle se présente par : $\sigma i = \{\sigma_i(1), \ldots \sigma_i(t), \ldots\}$ ou $\sigma_i(t) : x^{t-1} \rightarrow Xi$ spécifie le comportement de i à t en fonction de l'histoire : le joueur i joue à t l'action σi (t) (h) s'il a observé h ;
- Les stratégies $\sigma = (\sigma_i, \ldots, \sigma_u)$ choisies par les joueurs déterminent par construction une séquence unique x^t, t = 1 ..., T d'issues appelées trajectoire et définie par : $x^1 = \sigma(1)$, $x^2 = \sigma(2)(x')$, $x^3 = \sigma(3)(x^1, x^2)$ et ainsi de suite...

- La fonction de paiement de chaque joueur est la moyenne actualisée de ses paiements sur toutes les étapes : si les stratégies σ conduisent à la réalisation des issues x^t, t = 1..., T le paiement du joueur i est égal à :

$$\sum_{t=1}^{t=T} \lambda^{t-1} ui(x^t) / \sum_{t=S\ t=1}^{t=T} \lambda^{t-1} \text{ Si T est fini,}$$

Lieu $(1 - \delta) \Sigma \delta^t ui(x^t)$ si T est infini

Lorsque $\delta = 1$, le paiement ainsi défini est le paiement moyen sur les T périodes. Cependant, on peut aussi envisager des stratégies mixtes mais notons que pour de telles stratégies, un tirage aléatoire a effectivement lieu à chaque étape.
Les joueurs n'observent pas les loteries mais uniquement leurs résultats. Autrement dit, il n'y a pas d'histoire aléatoire. Aussi une stratégie mixte dans le jeu répété se représente par :
$\sigma i = \sigma i(1), \dots \sigma i(t), \dots$ avec
$\sigma i(t) : x^{t-1} \rightarrow \bar{X} i$
Ou $\sigma i(t)(h)$ est l'action aléatoire choisi par i s'il a observé h. Dans ces conditions, la trajectoire n'est plus unique et le calcul des paiements s'obtient en prenant l'espérance mathématique sur l'ensemble de ces trajectoires. Explicitons cela maintenant, sur un exemple.

<u>La bataille des sexes répétés deux fois</u>

$$G = \begin{array}{c} \\ a \\ \\ B \end{array} \begin{array}{cc} c & d \\ \left[\begin{array}{cc} 4,2 & 1,1 \\ & \\ 0,0 & 2,4 \end{array}\right] \end{array}$$

Afin d'éviter seule confusion, nous avons choisi des noms différents pour les stratégies de deux joueurs. Maintenant, plaçons-nous du point de vue du joueur 1 et considérons le cas du jeu répété deux fois avec des stratégies mixtes.

Etape 1 : $\sigma 1\ (1) \in \{\ \lambda_a + (1 - \lambda)\ b$ avec $0 \leq \lambda \leq 1\}$ c'est-à-dire toute combinaison convexe des deux stratégies pures a et b. A l'issue de la première étape, la réalisation effective d'un couple de stratégies, qu'elles soient pures ou mixtes, sera l'une des quatre histoires $h \in \{ac, ad, bc, bd\}$.

Etape 2 : Est une stratégie de $\sigma 1\ (2) = \sigma 1\ (2)\ (h)$ ou $\sigma 1\ (2)\ (hu)$ est une stratégie de G_δ (1) c'est-à-dire de G conditionnée sur les quatre histoires élémentaires possibles. Si on se restreint aux stratégies pures dans G_2 (2) on pourrait croire a priori que leur nombre $2 \times 2^4 = 32$, c'est-à-dire 2 choix à la première étape et ensuite 2 choix pour chacune des quatre histoires possibles, en fait le nombre de stratégies pures n'est que 8 car le choix que le joueur 1 fait à la première étape restreint automatiquement ! Le nombre d'histoire possible à 2 et non pas à 4 : ces histoires ne dépendent plus que du choix de l'autre joueur, d'où le calcul $2 \times 2 \times 2 = 8$.

On peut par un triplet (α, β, λ) ou α représente le choix à la première étape et (β, λ) représente le choix à la deuxième étape en fonction de la réalisation de c ou d respectivement.

Plaçons-nous maintenant à la première étape et additionnons les gains conditionnels pour chaque étape possible. Le jeu se résume à une matrice 2 x 2 avec les gains totaux :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 4+0,2+0 & 1+2,1+1 \\ 0+\tfrac{1}{2},0+1 & 2+15/8,4+11/8 \end{bmatrix} \end{array}$$

L'espérance de paiement associé à $\sigma 1$ et $\sigma 2$ s'obtient aisément sans oublier de diviser par 2 puisqu'il s'agit de G_1 (2)

$U_1\ (\sigma_1, \sigma_2) = 163/128$
Et $U2\ (\sigma_1, \sigma_2) = 131/128$

3./ - Paiements réalisables et paiements minimax

La répétition du jeu permet d'agrandir l'ensemble des paiements moyens réalisables grâce à la corrélation intemporelle entre les stratégies des joueurs. En effet, nous introduirons un paiement particulier, le paiement minimax, qui jouera un rôle important. On notera O (T) l'ensemble des paiements réalisables dans le jeu G1 (T) à partir des stratégies pures. On note de même Õ (T) l'ensemble des paiements réalisables à partir des stratégies mixtes.

Proposition 1 : L'ensemble des paiements réalisables en stratégies pures ou en stratégies mixtes dans le jeu infiniment répété et non actualisé est l'enveloppe convexe Ω de O (1) :

$$O(\infty) = \tilde{O}(\infty) = \Omega.$$

Démonstration : Tout point w de l'enveloppe convexe Ω de O (1) s'écrit comme une combinaison convexe d'un nombre fini de points $\{1,\dots, P,\dots ,^{P}\}$de

O (1) :

$$W = \sum_{P=1}^{p=P} \alpha p \, u(x^{p})$$

Ou

$$\alpha p > O, \quad \sum_{p=1}^{p=P} \alpha p = 1 \text{ et } x^{p} \in X.$$

Ce qui donne, composante par composante :

$$Wi = \sum_{P=1}^{p=P} \alpha p \, Ui(x^{p}).$$

Supposons d'abord que les coefficients αp sont des nombres rationnels que l'on a réduit au même dénominateur T : $\alpha p = tp/T$ pour des entiers tp et T avec Σ tp = T. il suffit de considérer des stratégies dans lesquelles les joueurs jouent pendant les T premières étapes t1 fois x^1 puis t2 fois x^2... puis tp fois x^3 puis recommencent. Le paiement moyen de telles stratégies est w puisqu'il l'est sur chaque "cycle" de T étape. Si les coefficients α p sont irrationnels, il suffit de les approcher par des rationnels.

Pour pouvoir étudier de manière précise les conséquences de la multiplication des équilibres de NASH et des équilibres parfaits dans les jeux répétés, il est nécessaire d'introduire un point particulier parmi l'ensemble des paiements réalisables : celui qui correspond aux paiements minimax.

- **Paiements minimax :**

Le vecteur des paiements minimax $\beta = (\beta,\dots, \beta u)$ du jeu G est défini par :

$$\beta i = \min_{x\text{-}i \in X\text{-}i},\ \max_{xi \in Xi},\ ui,\ (xi, xi)$$

La valeur de βi correspond à "la plus grande punition" que les joueurs autres que i sont sûrs de pouvoir infliger à i, même si leurs stratégies sont observées. En effet, considérons les stratégies $\underline{x}^{i}$ - i. telles que :

$$\beta i = \max_{xi \in xi}\ Ui\,(xi, x^{i} - i)$$

Ces stratégies existent car on a les Xi finis. Si les joueurs autres que i jouent $\underline{x}^{i}$ - i, i obtient au mieux βi. Aussi appelons-nous $\underline{x}^{i}$ - i, i des stratégies de punition. Elles constituent des menaces qui permettent de stabiliser toute trajectoire dont le paiement moyen pour chacun est supérieur au minimax ; comme le montrera le premier folk théorème.

4./ - Le folk théorème dans les jeux infiniment répétés

Les définitions précédentes nous permettent de caractériser l'impact de la répétition d'un jeu directement en termes de paiements socialisables. Il s'agit d'identifier le sous-ensemble de Ω formé des paiements d'équilibres de NASH ou d'équilibres parfaits du jeu répété. Nous distinguerons en ces deux cas :

- **Equilibre de NASH**

__**Théorème 1**__ : (folk théorème). Dans le jeu infiniment répété non actualisé G1 (∞) : tout paiement réalisable.

Démonstration : Choisissons une suite d'issues x^1,.... x^t de paiement moyen convergent vers (une telle suite, existe d'après la proposition 1). Considérons des stratégies telles que :

- les joueurs choisissent les actions x+ à l'étape t, tant qu'ils observent la trajectoire x^1,... x^{t-1} :
- si un joueur dévie, par exemple j à l'étape t, les autres le punissent en utilisant pour tout la suite du jeu une stratégie de punition limitant son paiement à son minimax βj. En jouant ainsi, la trajectoire x^1,...x^t,... est réalisée et les joueurs obtiennent le paiement moyen w. De plus, si un joueur modifie sa stratégie et dévie pour la première fois à t, il obtient pour toute la suite du jeu son paiement minimax. Puisque le futur n'est pas actualisé, son paiement moyen est βi au lieu de wi. Comme wi > βi, il n'a pas intérêt à dévier : les stratégies sont bien en équilibre.

Par conséquent, ce résultat met en évidence le phénomène de multiplication des équilibres de NASH dans les jeux répétés. Considérons le jeu infiniment répété actualisé au facteur δ. Pour stabiliser une trajectoire, il suffit que le gain instantané obtenu par une déviation soit inférieur à la perte future due à la punition, perte escomptée au facteur δ. Par exemple, dans le dilemme du prisonnier, considérons la suite coopérative où les joueurs coopèrent à chaque étape. Si le joueur 1 dévie, il obtient 2 au lieu de 1 d'où un gain instantané de 1.

Mais par la suite, le joueur 2, en étant agressif lui inflige à toutes les étapes un paiement maximal de 0 au lieu de 1. Il n'a pas intérêt à dévier si :

$1 + \delta + \delta^2 + \ldots > 2$ soit si $\delta > ½$

Résultat : Soit x une issue de G, la trajectoire consistant à répéter x à toutes les étapes est une trajectoire d'équilibre de G_8 (∞) dès que le facteur d'actualisation est suffisamment élevé, plus précisément dès que :

$$1 - 8 < \frac{ui\ (x) - \beta i}{\max_{yi \in Xi};\ ui\ (y1, x\text{-}i) - \beta 1}$$

Résultat 2 : Considérons un jeu répété un nombre fini de fois et pour simplifier non actualisé, $G_1(T)$. Supposons que G admette un équilibre de NASH x* tel que :

Ui (x*) > βi pour tout i -

Etant donné des actions x telles que Ui (x) $\geq$ βi pour tout i, on considère la trajectoire (x,.., x,... x*,... x*) où xest joué ; les T -t premières étapes et x* les t dernières, c'est la trajectoire d'un équilibre de G_1 (T) si :

$$\max_{yi \in xi.} ui\ (yi, x\text{-}i) - Ui\ (x) \leq t\ (ui\ x^*) - \beta i)\ \text{pour tout i}$$

Par suite, tout paiement individuellement rationnel est aussi proche que l'on veut d'un paiement d'équilibre du jeu répété G1 (T) ; si T est suffisamment grand.

- **Equilibre parfait** :

Pourquoi un joueur, pour punir l'autre, se punirait-il lui-même ? Nous allons maintenant ne retenir que des représailles crédibles compatibles avec la notion d'équilibre parfait. Précisons d'abord ce concept pour la classe de jeu étudiée. Une stratégie σii recommence des actions pour toute histoire possible. Ainsi étant donné une histoire quelconque h = (u^1... u^+). On peut connaître les actions que le joueur prendrait dans les T-t étapes restantes, si jamais h était observé (ces étapes à partir de h constituent le "sous-jeu" de h). Notons σi/h cette stratégie.

- **Définition** : Les stratégies σ de G_6 (T) forment un équilibre parfait si, pour toute histoire h : σ/h forme un équilibre de NASH dans le sous jeu issu de h.

Cependant, avec l'exemple du dilemme pour obtenir (1,1) comme paiement moyen, il faut ici menacer de maintenir le déviant éventuel à 0 mais cette menace est elle-même très pénalisante à exercer puisqu'elle donne également 0 à celui qui le met en œuvre. Cette menace n'est pas crédible ; ainsi on peut la rendre crédible de la manière suivante : exercer une représaille un fois et revenir à la coopération dès que le déviant s'est repenti une fois. Cette stratégie est connue dans la littérature sous le nom de "Tit for Tat". Dans ces conditions, on voit que la déviation n'est pas payante tant qu'il reste encore une étape à jouer puisque : $(2) + (-1) < (1) + (1)$

De plus la stratégie correspondante est crédible ! l'exercer ne le pénalise pas si l'autre joueur accepte de revenir à la coopération. On peut donc lui associer un équilibre dans le sous-jeu correspondant. Ceci permet de montrer qu'on a bien un équilibre parfait. Cette idée est à la base du théorème suivant :

Théorème 2 : (folk théorème en équilibres parfaits). Dans le jeu infiniment répété non actualisé $G_1(\infty)$, tout paiement réalisable $w \in \Omega$ tel que $w > \beta$ est le paiement d'un équilibre parfait.

Démonstration :

Choisissons le même trajectoire. Si un joueur dévie, les autres le punissent suffisamment longtemps pour que son paiement moyen sur toutes les étapes passées, soit très proche de son paiement minimax. Ensuite, ils reviennent à la trajectoire de départ. Ce principe est appliqué à la fois à un déviant et un joueur qui ne punirait pas un déviant ainsi de suite. On peut montrer que ce résultat s'étend à des jeux répétés actualisés pourvu que le facteur d'actualisation δ soit suffisamment proche de 1.

CHAPITRE III : AUTRES SOLUTIONS NON COOPERATIVES

Beaucoup d'application de la théorie des jeux font intervenir la relation entre le système de prix et les différentes solutions de cette théorie pour des marchés avec beaucoup d'agents. Cette relation est si fondamentale qu'elle est présente, à la fois dans les solutions coopératives et dans les solutions non coopératives. Les solutions coopératives reposent sur un marché modélisé sous forme de coalitions, tandis que les solutions non coopératives nécessitent sous forme stratégiques.

Dès lors, dans ce chapitre, nous allons étudier les catégories spéciales de jeux sous forme stratégique. En sus, l'étude de la classe de jeux, dite jeux à information incomplète nous permettra de clore ce chapitre.

A./ - DES CATEGORIES SPECIALES DE JEUX SOUS FORME STRATEGIQUES

1./ - Une solution non stratégique.

Il existe un concept de solution important en théorie économique qui n'est pas une solution en soit de la théorie des jeux, mais qui est en relation avec bon nombre de ses solutions quand les jeux à analyser peuvent être interprétés comme des modèles de marché. C'est le "système de prix" appelé aussi "équilibre concurrentiel".

Dans la théorie économique, le système de prix a été présenté sous trois formulations différentes auxquelles on a associé les noms de Cournot (1838), d'Edgeworth (1881) et de Walras (1874). Alors que les deux premiers sont, dans leur essence et par nature liés à la théorie des jeux, le troisième évite explicitement la formulation en termes de théorie des jeux. Ici, nous allons spécifier le modèle walzarien qui, bien que ne relevant pas de la théorie des jeux, a beaucoup de points communs avec le point de vue non coopératif.

Considérons un marché avec n agents et m liens, où tous les agents ont des préférences qui peuvent être représentées par des fonctions où l'agent i a une dotation initiale

$a^1 = (a^i_1, a^i_2, \ldots a^i_m), a^i_j \geq 0$

Supposons que $aj = \sum_{i=1}^{n} aj^{i} > (j = 1,2 \ldots, m)$

ou aj représente l'offre totale du bien j - la "loi de Walras" affirme qu'il existe au moins un ensemble de prix p = (p1, p2..., pm), tel que si chaque agent achète et vend afin de satisfaire ses besoins individuels, et n'est souvent qu'à sa contrainte budgétaire, alors le résultat de ces n processus indépendants de maximisation est une distribution finale

$xi = (x^i_1, x^i_2, \ldots x^i_m) \geq 0$

pour chaque agent i qui correspond à l'égalité entre l'offre et la demande sur tous les marchés :

$$\sum_{i=1}^{n} (x^i_j - a^i_j) = 0 \quad j = 1,2\ldots m$$

et qui est, en outre, optimale au sens de Pareto.

L'équilibre concurrentiel peut être considéré, comme un moyen de décentraliser une économie en utilisant un système de prix concurrentiel (Debreu, 1952, Arrow, 1954) sont généralement non constructives ; elles n'apportent aucune lumière sur l'évolution dynamique des prix et elles sont totalement indépendantes du nombre d'agents présents sur le marché. Au contraire, les diverses approches du système de prix en termes de théorie des jeux dépendent, explicitement et souvent de façon, précise du nombre d'agents sur le marche.

Dans leur démonstration sur l'existence d'un système de prix d'équilibre dans une économie concurrentielle, ARROW et DEBREU (1954) utilisent un théorème essentiel concernant les jeux non coopératifs démontré par NASH (1950), qui établit l'existence d'un équilibre non coopératif dans un jeu à n joueurs.

Il est néanmoins instructif de considérer le modèle proposé par ARROW et DEBREU. Ils considèrent une économie avec m + n + 1 joueurs divisés en trois catégories : m consommateurs, n producteurs et un commissaire-priseur. Le consommateur i s'efforce de maximiser son utilité ui (xi), ou xi est un vecteur de consommation qui satisfait sa contrainte budgétaire.

Quant au producteur j, il s'efforce de maximiser son profit p j y j commissaire-priseur essaie de maximiser une quantité p2, où z = x - y - ∂ a pour composantes les demandes excédentaires des divers biens et où x, y et ∂ sont les vecteurs représentant respectivement la demande, l'offre provenant de la production et l'offre provenant des dotations initiales des consommateurs. La stratégie du commissaire-priseur est d'afficher un vecteur de prix p qui a pour composantes les prix des biens de l'économie. Tous les prix sont supposés être non négatifs.

La contrainte budgétaire de chaque consommateur comprend non seulement la valeur aux prix du marché et son panier initial des biens, mais aussi une part des profits faits par les producteurs. Le consommateur i reçoit une fraction αij des profits du producteur j i en d'autres termes, αij représente le pourcentage d'actions de l'entreprise j détenus par le ménage i.

Malheureusement, un consommateur ne peut savoir si une stratégie potentielle est réalisable sans connaître sa contrainte budgétaire, qui dépend du choix des autres joueurs. Ce jeu n'est donc pas complètements défini tant que ne sont pas précisées les conditions d'information et l'ordre des coups. On doit aussi préciser ce que sont les gains quand le système n'est pas en équilibre.

ARROW et DEBREU ont ignoré les difficultés associées aux questions précédentes. Ils ne cherchaient qu'à établir l'existence d'un équilibre non coopératif et ne se sentaient pas concernés par leur aspect stratégique de leur modèle. Cependant A COURNOT a été le premier a étudié le lieu entre concurrence et équilibre non coopératif. Lieu qui peut être perçu intuitivement quand le nombre d'agents augmentés : progressive, chaque individu devient stratégiquement plus faible jusqu'au moment où il n'a plus du tout de pouvoir stratégique pour influencer, de façon indépendante, le bien-être des autres et qu'il finit par accepter les prix de marché comme donnés.

2./ - Les jeux stratégiques de marché

Les jeux de marché sont une catégorie particulière de jeux destinés à montrer les aspects fondamentaux de l'échange entre les agents. Des solutions, telles que le cœur et la valeur ont des propriétés économiques et quand les jeux de marché sont dupliqués successivement, une relation apparaît entre ces solutions et l'équilibre concurrentiel. En effet, une fois qu'un ensemble d'agents S a décidé de procéder à des échanges, les agents de S agissent indépendamment des agents de $\bar{S}$, le complémentaire de S.

Les jeux de marché représentent une économie d'échange sous forme coopérative. La façon dont se font les échanges n'est pas précisée et aucune descriptions des ensembles de stratégies individuelles n'est proposés. On peut choisir la même description de base de l'économie qui a caractérisé les jeux de marché pour définir une catégorie de jeux stratégiques de marché, c'est-à-dire des jeux sous forme stratégique qui fournissent un modèle pour une économie d'échanges et dont les propriétés peuvent être étudiées au moyen de la solution d'équilibre non coopératif.

En outre, il apparaît une nouvelle caractéristique importante et une propriété très spéciale des jeux de marché est perdue. En particulier, il devient naturel de distinguer une marchandise pour des fins stratégiques et de lui faire jouer le rôle de moyen d'échange ou de monnaie. En introduisant une structure de marché et une procédure d'échange avec un mécanisme de formation de prix, on est capable de définir un jeu stratégique de marché , mais on perd la propriété de c-jeu. Si on part d'un jeu stratégique de marché pour ensuite, construire sa fonction caractéristique, on n'obtient pas la même fonction caractéristique que celle d'un jeu de marché.

Dans un jeu stratégique de marché, les agents qui participent à l'échange sont reliés entre eux par le mécanisme de formation des prix. Cependant, on peut se trouver dans des cas où chaque joueur dispose d'une information partielle sur les caractéristiques du jeu. Dès lors, faisons une brève étude des jeux à information incomplète.

B./ - JEUX A INFROMATION INCOMPLETE : APPROCHE BAYESIENNE

Nous regroupons dans cette classe les jeux dans lesquels :

- les joueurs sélectionnent simultanément leurs actions ;
- les fonctions de paiement sont incomplètement connues des joueurs ; plus précisément, chaque joueur dispose d'une information partielle sur les fonctions de paiements, cette information résultant d'un tirage aléatoire préalables au choix de l'action ;
- les règles qui caractérisent le tirage aléatoire sont connues de tous les joueurs.

Ces jeux sont dits "à information incomplète et joués par des joueurs bayesiens". En effet, d'une part, l'information sur les paiements est supposés incomplète ; d'autre part, cette incomplétude est modélisée en faisant appel à l'approche bayesienne : définition de l'ensemble des états de la nature possibles et existence d'uns distribution de probabilité, encore appelée croyance, sur ces états.

1./ - Donnée d'un jeu bayesien

L'approche bayesienne permet de prendre en compte l'information privée détenue par certains joueurs. Pour cela, on se donne :

- Un ensemble de "types" Ti pour chaque joueur i. Le type ti $\in$ Ti (appelé aussi caractéristique, état d'information) résume l'information dont dispose le joueur i avant de jouer. Ce sera, par exemple ses coûts de production, ou sa main dans un jeu de cartes, ou son estimation de la valeur d'un objet dans une enchère ; un élément

$T = (t1,\dots, ti,\dots Tn)$ de $T = \prod_{i=1\dots n} Ti$

représente l'information totale dont disposeraient les joueurs, s'ils la mettaient en commun.

- Une distribution de probabilité a priori π sur T. Par exemple, dans un jeu de cartes, chaque ti décrivant la main d'un joueur, π est la loi équiprobable sur les distributions des cartes ; noter que π est indépendante du joueur considéré. Une fois décrite, la structure d'information, le jeu est décrit par les actions possibles des joueurs et, pour chaque valeur possible t de l'information totale, les fonctions d'utilité. Plus précisément on se donne :

- des ensembles d'actions Ai,
- des fonctions d'utilité ui, définies sur A x T : ui (a, t) est le niveau d'utilité atteint par le joueur i, si les actions a = (a1, ..., ai,.... au) ont été choisies et si les types sont t = (t1...., ti,.... Tn).

En somme, un jeu à information incomplète est la donnée de :

Γ = N, Ai, Ti, Ui, i$\in$N, π), ce qui revient à se donner une famille de jeux paramétrés par les types des joueurs et uns distribution a priori sur ces types. Pendant lu jeu, une valeur précise de t est réalisée mais en général les joueurs ne savent pas exactement laquelle.

2./ - Equilibre bayesiens

Pour analyser un tel jeu, l'action choisie par un joueur en fonction de son type doit être définie. Ceci conduit au concept suivant de stratégie :

Définition : Une stratégie du joueur i est une fonction xi de Ti dans Ai : xi (ti) est l'action qu'il choisir si son type est ti. Soit xi l'ensemble de ces fonctions. Une fois fixées des stratégies, on peut calculer l'espérance des paiements de i :

ùi (x) = E {ui (x)... } = Σ ui (x (t)
où l'on note :
x(t) = {x1 (t1),..., xi (ti),..., xn (tn)}

Nous avons ainsi mis le jeu sous la forme

G = (Xi, ù1, i ∈ N)

Définition : Un équilibre bayesien du jeu simultané à information incomplète est un équilibre de NASH.

La notion de jeu à information incomplète a été introduite par Harsanyi. Les problèmes d'enchères (Wilson, 1990) en constituent l'une des applications les plus connues. Il existe par ailleurs une importante littérature sur les mécanismes bayesiens.

CONCLUSION

La théorie des jeux a le mérite d'avoir fourni un langage et un cadre de pensée permettant une réflexion approfondie sur le concept de rationalité. Réflexion, dont la principale conclusion est la confrontation entre individus maximisateurs engendrés des situations extrêmement complexes, multiples, et qui ne peuvent être résolues, au sens mathématique, qu'en faisant appel à des facteurs extérieurs à ces individus, tels que les structures sociales (qui se traduisent au niveau des règles du jeu), les normes ou les conventions, ou à des notions n'entrant pas dans le cadre de ce que l'on entend habituellement par rationalité, telles que l'équité ou la réputation.

Toutefois, on peut se demander pourquoi la théorie des jeux occupe une place si restreinte dans l'enseignement en économie, quel que soit son niveau, alors que cela fait plus de 50 ans que John Von NEUMANN et Oskar MORGENSTERN ont publié le traité fondateur de cette théorie, dont le point de départ est le critique des hypothèses qui sont à la base de ce qu'on appelle, de nos jours, la microéconomie.

En effet, il y a un problème avec la théorie des jeux qu'on peut situer à deux niveaux :

- d'une part, la théorie des jeux est essentiellement le fait des mathématiciens, dont la démarche est très particulière. Aussi, le grand nombre de paradoxes découverts par les théoriciens des jeux peut-il réjouir le mathématicien qui cherche les conséquences ultimes de l'application du principe de rationalité.

Tel n'est assurément pas le cas pour l'économiste dont l'ambition est d'apporter des réponses précises à des questions concrètes, et nous engendrer des dilemmes ! Curieusement, tandis que l'idée de départ de la théorie des jeux réside dans l'exigence d'une représentation plus fine de ce que peut être un comportement rationnel, on constate que l'application poussée de cette idée peut néanmoins conduire à des situation absurdes.

- d'autre part, l'autre facteur pouvant expliquer les réticences envers la théorie des jeux, est la part qu'occupent ces "croyances" dans la plupart des concepts de solution qu'elle propose, à commencer par l'équilibre de NASH.

  Par conséquent, si la théorie des jeux peut être considérée comme un "outil", alors c'est assurément un outil de clarification, loin d'être négligeable, même si certains aimeraient y trouver d'avantage que cela.

BIBLIOGRAPHIE

- AUMANN, R. (1991) Irrationality in Gams theory.

- ARROW, K.-J, Intriligator, M.D., Hand book of Mathematical Economic, North Holland, Amsterdam.

- BASIC, Books, New York, LOMARF.

- Cahier français (1992) "Découverte de la microéconomie".

- COURNOT, Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, Hachette, Paris.

- DEBREU, G., Théorie de la valeur, Dunod, Paris 1966.

- FISHIER, Franklin M... (1991) "Organizing Industrial Organisation.

- GUERRIER, B (1995). Théorie des jeux, Economica, Paris, 2ème édition.

- Histoire de la théorie des jeux. Mémoire de Frederic CHOUMETTE et Fréderic COLARD.
- KREPS, D. (1990). Lessons on games theory, Oxford University Press.

- Les mathématiques sociales, Dossier pour la science, édition française de Scientific American.

- Martin SHUBIK; Théorie des jeux et sciences sociales.

- PARETO, V ; Manuel d'économie politique, Grard, Paris 1909.

- Problèmes économiques, (1982).

- REEBINSTEIN, A. (1991) "Comments on the interpretation of game theory" Economotrica, 59 (traduction française dans Autour de la Stratégie, édité par B. Paulré Sorbonne.

- Théorie des jeux et analyse économique ; Gabrielle Armange ; Jean-Pierre RONSAD. (Presse Universitaire de France).

- VAN DAMMO, E (1990). Refinements of Nash equilibria. A paraître dans Advances in Economica theory, vol. I, ed. J.J. Laffont.

- VON NEUMANN J. and MORGENSTERN, O., Theory of Games and Economics Behavior, Princeton University Press, Princeton 1944.