

REPUBLIQUE DU SENEGAL



GC.0552

Ecole Polytechnique de Thiès

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR DE CONCEPTION

Titre :

**TRAITEMENT DES SINGULARITES DE
CHARGES SUR LES DALLES -
PROLONGEMENT POUR L'ANISOTROPIE.**

Présenté par : Gorgui Djibril NIANG

Directeur interne : Dr. Moustapha NDIAYE

Année académique : 2008-2009

DEDICACES

Je dédie ce travail :

à mon père,

ma mère,

mes frères et sœurs

ainsi qu'à tous mes amis,

à tous ceux que j'ai connus à l'école.

Nous réservons une mention spéciale à tous nos professeurs, à tous ceux qui nous ont appris à lire et à écrire de droite à gauche, de gauche à droite, de haut en bas.

REMERCIEMENTS

D'aucuns disent : un travail de recherche ne peut s'accomplir seul ; notre projet est bien loin de faire l'exception. Au terme de notre projet, nous aimerions exprimer toute notre gratitude à tous ceux qui, de près ou de loin, nous ont apporté leur aide. D'abord, Nous exprimons toute notre reconnaissance à notre Directeur de Projet, le **Docteur Moustapha NDIAYE** qui nous a donné la possibilité d'effectuer ce travail dans le domaine des structures. Nous tenons à le remercier pour sa disponibilité et pour l'aide précieuse apportée durant nos discussions, pour ses conseils, ses encouragements et sa patience.

Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble du corps professoral de l'école Supérieure Polytechnique (centre de Thiès) pour leurs enseignements, redevenue **Ecole Polytechnique de Thiès** en 2008, à nos camarades de promotion, ainsi que l'ensemble des étudiants de l'école.

Nous remercions également le Directeur de l'**EPT** ainsi que l'ensemble de ses professeurs et administrateurs.

SOMMAIRE

L'ingénieur, pendant longtemps confronté à des difficultés de résolution rapide et fiable des problèmes complexes, est souvent contraint d'adopter certaines hypothèses simplificatrices comme la linéarité, l'homogénéité, la continuité, l'isotropie pour étudier certaines structures dont l'analyse exacte peut s'avérer assez fastidieuse. Cependant, avec les mutations techniques et technologiques (performances offertes par l'ordinateur), des normes de dimensionnement plus strictes apparaissent et les projets de constructions sont de plus en plus rationnels et complexes d'où la nécessité de mise en place de méthodes d'analyse structurale plus efficaces et plus réalistes c'est-à-dire avec le minimum de simplifications.

Le but de ce Projet est de contribuer au traitement, par la méthode de Trefftz (notamment grâce à la formulation générale de l'élément HT), des singularités de charges appliquées sur une dalle anisotrope. En effet, par opposition aux singularités géométriques (discontinuités au niveau de la forme de la structure), les charges concentrées et les charges sectorielles induisent des discontinuités donc des singularités au niveau des efforts internes. On parlera de singularités dues aux charges.

L'analyse structurale de ce type complexe de plaque revêt une importante envergure à l'état actuel de la recherche en ingénierie civile : elle doit relever deux défis à l'occurrence l'anisotropie de la structure en question et la discontinuité de son chargement.

Dans ce document, nous avons, d'abord, donné une présentation des dalles, des charges singulières, et de la méthode des éléments finis ainsi qu'une formulation de l'élément hybride-Trefftz HT basée sur la minimisation de la norme énergétique de la différence entre les deux champs (internes et conformes) de déplacements et son application aux plaques minces. Ensuite, nous avons rappelé la solution singulière de l'équation fondamentale des dalles anisotropes selon l'hypothèse de Kirchhoff. De ce fait, la solution w (déflexion) pour une charge sectorielle ou linéique est déduite en intégrant celle de la force ponctuelle sur le domaine recevant le chargement. Enfin, pour une charge sectorielle, il a été élaboré une bibliothèque complète des fonctions concernées dont les intégrales de surface ont été transformées en intégrales de bord (plus facile à programmer et avec une meilleure précision).

Mots-clés : plaque, dalle, singularités de charge, Méthode des Eléments Finis, élément HT, théorie de Kirchhoff, fonction-delta de Dirac, fonction homogène, théorème de la divergence.

TABLE DES MATIERES

<i>DEDICACES</i>	I
<i>REMERCIEMENTS</i>	II
<i>SOMMAIRE</i>	III
<i>TABLE DES MATIERES</i>	IV
<i>LISTE DES FIGURES</i>	VI
<i>LISTE DES TABLEAUX</i>	VII
<i>LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS</i>	VIII
<i>INTRODUCTION</i>	- 1 -
<i>1. RAPPELS SUR LES DALLES, LES SINGULARITES DE CHARGES ET LA METHODE DES ELEMENTS FINIS</i>	- 2 -
1.1. QUELQUES DEFINITIONS	- 2 -
1.1.1. Notion de plaque et de dalle	- 2 -
1.1.2. Notion de charges singulières	- 4 -
1.2. FORMULATION MATHEMATIQUE DES SINGULARITES DE CHARGE : LA FONCTION-DELTA DE DIRAC	- 5 -
1.3. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	- 7 -
1.3.1. Rappel de la mécanique des milieux continus	- 8 -
1.3.2. Méthode de résolution numérique	- 10 -
1.3.3. Formulation variationnelle	- 11 -
1.3.4. Principe des travaux virtuels	- 15 -
1.3.5. Energie potentielle totale	- 16 -
<i>2. QUELQUES ELEMENTS DU TRAITEMENT DES SINGULARITES DE CHARGES SUR LES DALLES ANISOTROPES</i>	- 21 -
2.1. FORMULATION GENERALE DE L'ELEMENT HT ET SON APPLICATION AUX PLAQUES MINCES	- 21 -
2.1.1. Formulation basée sur la minimisation de la norme énergétique	- 21 -
2.1.1.1. Un champ de Trefftz non conforme	- 23 -
2.1.1.2. Un champ auxiliaire de déplacements conforme	- 24 -
2.1.2. Application à la flexion des plaques minces	- 27 -
2.1.3. Solution du problème dans le cas de dalles isotropes	- 27 -

2.2.	TRAITEMENT DE LA CHARGE CONCENTREE POUR LES DALLES ANISOTROPES _____	- 29 -
2.2.1.	Théorie de Kirchhoff pour les dalles anisotropes _____	- 29 -
2.2.2.	La solution fondamentale singulière _____	- 30 -
2.2.3.	Le champ de déplacements et les efforts internes en un point interne du domaine Ω de la dalle _____	- 33 -
2.2.4.	Définitions des vecteurs déplacements v_e et de tractions t_e (ou forces équivalentes de bord) _____	- 34 -
2.2.5.	Conditions de bord _____	- 35 -
2.2.6.	Applications pratiques : Déterminations des déplacements et des efforts internes _____	- 36 -
2.2.7.	Commentaire sur la singularité due à la charge ponctuelle _____	- 37 -
2.3.	TRAITEMENT DES CHARGES SECTORIELLE ET LINEAIRE _____	- 38 -
2.3.1.	Utilisation du théorème de la divergence _____	- 38 -
2.3.1.1.	Définition d'une fonction homogène _____	- 39 -
2.3.1.2.	Utilité du théorème de la divergence _____	- 39 -
2.3.2.	Résultats généraux des transformations _____	- 40 -
	CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS _____	- 41 -
	<i>BIBLIOGRAPHIE et WEBIOGRAPHIE</i> _____	- 43 -
	<i>ANNEXES</i> _____	- 44 -
	ANNEXE I : TRANSFORMATION DES INTEGRALES DE SURFACE EN INTEGRALES DE BORD _____	a
	ANNEXE II : DETERMINATION DES DERIVEES PARTIELLES _____	h
	ANNEXE III: ALLURES DES DEPLACEMENTS ET DES EFFORTS INTERNES AU VOISINAGE DE LA SINGULARITE _____	j
	ANNEXE III-1 : CAS DE LA DALLE CARREE ISOTROPE _____	j
	ANNEXE III-2 : CAS DE LA DALLE CIRCULAIRE ISOTROPE _____	l
	ANNEXE III-3 : CAS DE LA DALLE CARREE ORTHOTROPE _____	n
	ANNEXE III-4 : CAS DE LA DALLE CIRCULAIRE ORTHOTROPE _____	p
	ANNEXE IV : BIBLIOTHEQUE DES INTEGRALES DE SURFACE TRANSFORMEES EN INTEGRALES DE BORD DE TOUTES LES FONCTIONS INTERVENANT DANS LA SOLUTION SINGULIERE FONDAMENTALE ET SES DERIVEES. _____	r

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Plaque ou dalle circulaire.....	02
Figure 1.2 : Plaque ou dalle rectangulaire.....	03
Figure 1.3 : Différents types de singularités de charges appliquées sur une dalle rectangulaire.....	04
Figure 1.4 : Fonction mathématique d'une charge répartie (non singulière) appliquée sur une poutre.....	05
Figure 1.5 : Charge singulière concentrée appliquée sur une poutre.....	07
Figure 2.1 : Plaque qui occupe un domaine Ω ; Γ_v : partie de la frontière où les déplacements sont imposés ; Γ_t : partie de la frontière où les tractions sont imposées.....	23
Figure 2.2 : Plaque qui occupe un domaine Ω subdivisé en n sous-domaines Ω_e ($\Omega = \sum \Omega_e$).....	24
Figure 2.3 : Dalle infinie soumise à une charge ponctuelle P au point (X_p, Y_p) du domaine Ω	29
Figure 2.4 : Charge répartie $p(x, y)$ occupant le domaine Ω_c de frontière Γ_c sur une dalle de domaine Ω et de bord Γ	30
Figure 2.5 : Charge ponctuelle P appliquée au point (X_p, Y_p) sur une dalle finie.....	31
Figure 2.6 : Définition des tractions de bord d'un élément de plaque en flexion. Les tractions sont exprimées suivant un système de référence fixe.....	36

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 : Transformations des différents types d'intégrales de surface
en intégrales de bord.....41

LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS

$[]$	Matrice rectangulaire ou carré
$\{ \}$	Vecteur Colonne
$[]^{-1}$	Inverse Matrice
$[]^T$	Matrice transposé
U	Champ de déplacement
$\{u_e\}$ ou u_e	Champs de Trefftz interne (non conforme)
$\{\tilde{u}_e\}$ ou \tilde{u}_e	Champs de Trefftz conforme
$[N]$ ou N	Matrice des fonctions d'interpolation
N	fonction d'interpolation
$[\sigma]$ ou σ	Champ de contraintes
$[\varepsilon]$ ou ε	Champ de déformations
L	Opérateur de dérivation
$[B]$ ou B	Matrice déformation déplacements
E	Module d'élasticité de YOUNG
ν	Coefficient de poisson
T	Epaisseur de l'élément surfacique
$[D_e]$ ou D_e	Matrice des coefficients de rigidité de la dalle
$[K]$ ou K	Matrice de raideur de la structure
$[K_e]$ ou K_e	Matrice de raideur d'un élément
$\{f_v\}$ ou f_v	Force de volume
$[L_i]$	Matrice de localisation globale

$\{R\}$ ou \mathbf{R}	Vecteur des charges appliquées sur la structure
DLL	Degrés de liberté libres
NDDL	Nombre de degrés de liberté
NRIG	Nombre de modes rigides
EDP	Equations aux dérivées partielles
MEF	Méthode des éléments finis
P	Charge ponctuelle perpendiculaire au feuillet moyen de la plaque
P_s	Charge sectorielle perpendiculaire au feuillet moyen de la plaque
Pl	Charge linéaire perpendiculaire au feuillet moyen de la plaque
Ω	Domaine délimitant la dalle ou parfois la charge (charge sectorielle)
Γ	Frontière du domaine Ω
Ω_c	Domaine délimitant la charge sectorielle
Γ_c	Frontière du domaine Ω_c
(O, X, Y, Z)	Système global en coordonnées cartésiennes
(O, x, y, z)	Système local en coordonnées cartésiennes
(O, r, θ , z)	Système local en coordonnées cylindriques
\mathbf{x}	Vecteur position dans l'un des systèmes locaux
\mathbf{n}	Vecteur unitaire normale extérieure à la frontière en un point donnée

INTRODUCTION

En génie civil, l'analyse structurale des ouvrages dépend de deux paramètres essentiels :

- ✦ Le type de chargement : volumique, surfacique, linéique ou concentré. Ces différentes charges peuvent se répartir de plusieurs manières : uniforme, variable, sectorielle.
- ✦ La géométrie des éléments chargés et la nature des matériaux qui les constituent surtout lorsque la structure à étudier est hyperstatique. Le cas échéant, les caractéristiques mécaniques (module de Young E et coefficient de poisson ν) permet d'obtenir les relations contraintes-déformations indispensables à la résolution du problème.

Souvent, ni le type de chargement, ni la géométrie, ni les paramètres rhéologiques des structures ne se présentent sous une forme simple et aisée à traiter. De ce fait, l'ingénieur est souvent contraint d'adopter certaines hypothèses simplificatrices comme la linéarité, l'homogénéité, la continuité, l'anisotropie.

Cependant, avec les mutations techniques et technologiques (performances offertes par l'ordinateur), des normes de dimensionnement plus strictes apparaissent et les projets de constructions sont de plus en plus rationnels et complexes nécessitant ainsi l'utilisation de méthodes d'analyse structurale plus efficaces et plus réalistes.

Actuellement, le calcul précis et fiable des éléments surfaciques tels que les dalles (plaques en flexion) soumises à des singularités de charge est un problème fréquent et leur résolution est souvent très ardue.

Dans ce document, après avoir défini les notions de plaque, dalle et de charges singulières et présenté brièvement la méthode de résolution par éléments finis [1], une formulation de l'élément HT [2] et son application aux plaques minces anisotropes est introduite.

Pour le cas de charges sectorielles, une méthode de transformation des intégrales de surface en intégrales sur le bord (plus facile à programmer et avec une meilleure précision) est aussi présentée.

1. RAPPELS SUR LES DALLES, LES SINGULARITES DE CHARGES ET LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1.1. QUELQUES DEFINITIONS

Dans ce document, plusieurs mots-clés ont été utilisés. Leur définition a été jugée nécessaire pour une bonne compréhension de ce travail.

1.1.1. Notion de plaque et de dalle

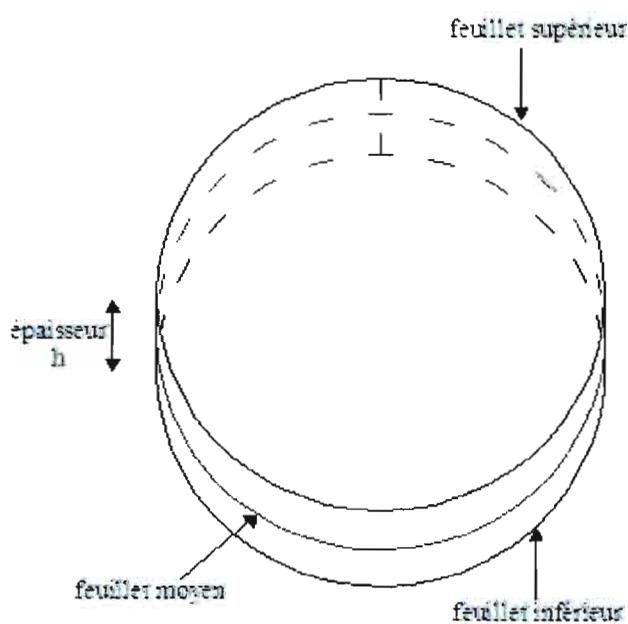


Figure 1.1 : Plaque ou dalle circulaire

On appelle plaque, un solide délimité par deux plans parallèles distants de h et par une surface cylindrique fermée normale à ces plans (Fig. 1.1 et 1.2) ; elles sont dites minces lorsque que cette épaisseur h est faible devant les autres dimensions. Cependant, pour les coques à épaisseur constante, les deux surfaces parallèles les délimitant ne sont pas planes.

Les dalles sont des plaques : elles travaillent en flexion (leur chargement est considéré perpendiculaire aux deux plans extrêmes ou, plus généralement, au feuillet moyen).

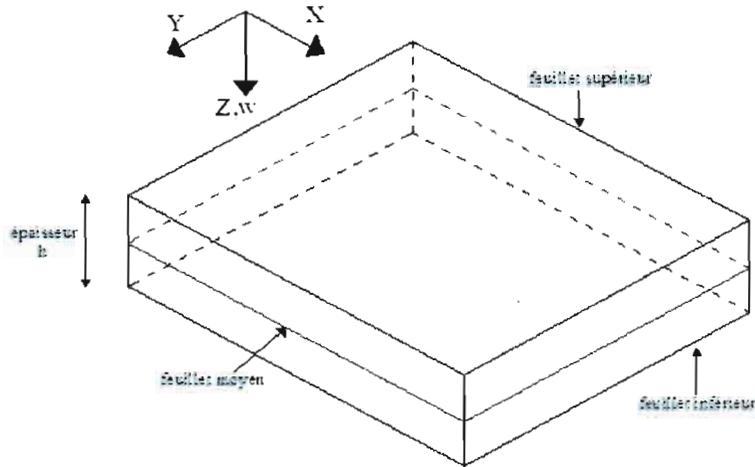


Figure 1.2 : Plaque ou dalle rectangulaire

La mécanique des structures permet de décrire le comportement des dalles, grâce à des équations aux dérivées partielles (équation fondamentale de Kirchhoff) et parmi les méthodes qui existent, la méthode des éléments finis est actuellement la plus utilisée.

En plus, en fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les dalles peuvent être classées en trois catégories :

- **Les dalles isotropes** : elles sont constituées de matériau isotrope (acier, béton parfaitement mis en œuvre, par exemple) et leur section transversale est homogène. Elles ont les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions. Elles sont définies par deux paramètres rhéologiques élastiques : module d'élasticité ou module de YOUNG E et le coefficient de poisson ν . On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art...).
- **Les dalles orthotropes** : l'orthotropie, naturelle (bois) ou technique (dalles raidies), fait que les propriétés élastiques de ces dalles sont différentes dans deux directions perpendiculaires. Le comportement de ces dalles est défini par quatre caractéristiques élastiques et on les retrouve dans les ouvrages navals, aéronavals, d'offshores, de réservoirs de l'industrie chimiques, des bâtiments et d'ouvrages d'art.
- **Les dalles anisotropes** : leurs paramètres élastiques sont différents dans toutes les directions. Six paramètres élastiques sont suffisants pour les décrire. Elles sont

souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale ou aérospatiale.

1.1.2. Notion de charges singulières

Sur les dalles, plusieurs types de charges peuvent s'appliquer. Cependant, contrairement à celles réparties sur tout le domaine occupé par les dalles, les charges concentrées et les charges sectorielles induisent des discontinuités donc des singularités au niveau des efforts internes. On parlera de singularités dues aux charges ou charges singulières par opposition aux singularités géométriques.

Ces singularités de charges peuvent être de trois types (Fig. 1.3) :

- ✚ Les charges concentrées ou ponctuelles ;
- ✚ Les charges linéaires ou linéiques, rectilignes ou curvilignes;
- ✚ Les charges sectorielles surfaciques

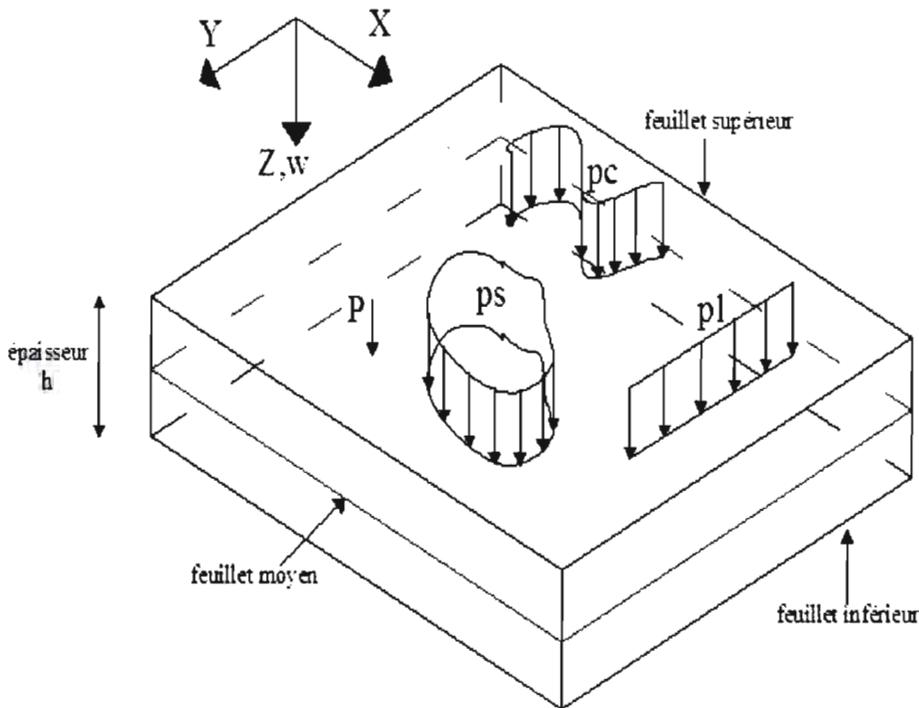


Figure 1.3 : Différents types de singularités de charges appliquées sur une dalle rectangulaire.

1.2. FORMULATION MATHÉMATIQUE DES SINGULARITES DE CHARGE : LA FONCTION-DELTA DE DIRAC

La notion de fonction est, parfois, mal adaptée pour représenter certains faits physiques [3]. Ainsi, une fonction f , à valeurs réelles, définie sur l'ensemble R des réels est une application qui à tout $x \in R$ fait correspondre un nombre $y \in R$ noté $y = f(x)$. Soit :

$$\forall x \in R, \quad x \xrightarrow{f} y = f(x) \in R$$

Nous allons voir que l'on ne peut, à l'aide d'une fonction, représenter correctement les charges concentrées que l'on rencontre en particulier en mécanique et en électromagnétisme ou les sources lumineuses en optique.

Prenons, par exemple, le cas de la mécanique et supposons que nous voulions représenter une charge répartie sur une poutre de longueur L , encadrée à ses extrémités. (Fig. 1.4).

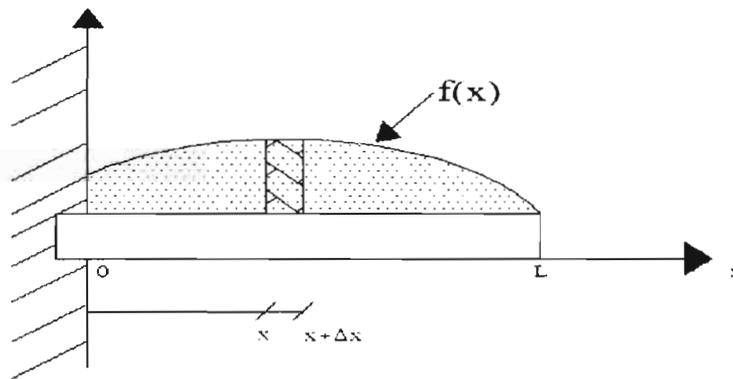


Figure 1.4 : Fonction mathématique d'une charge répartie (non singulière)

appliquée sur une poutre.

Nous pouvons représenter cette charge par une fonction densité f telle que la charge Δm sur la portion de la poutre comprise entre les points d'abscisses x et $x + \Delta x$ soit donnée par :

$$\Delta m = f(x)\Delta x .$$

D'autre part $f(x)$ sera supposé nul à l'extérieur de l'intervalle $[0, L]$. La masse totale sur la poutre sera donnée par :

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (1.1)$$

Les bornes d'intégration se réduisant, en fait, à 0, L. Le moment d'encastrement au point 0 sera donné par :

$$M'_0 = g \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (1.2)$$

g étant l'accélération de la pesanteur. Le moment d'inertie par rapport au point 0 sera :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx. \quad (1.3)$$

On pourrait également calculer la déformation de la poutre en différents points etc.

Mais supposons que nous voulions, maintenant, représenter une charge unité concentrée au point d'abscisse $x = x_0$. L'on pourrait, alors, penser définir une fonction la fonction densité correspondante par un passage à la limite. On partirait d'une fonction densité constante et égale à $\frac{1}{2\varepsilon}$ sur l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ et nulle ailleurs. La charge totale serait donc bien égale à 1 et serait concentrée dans un voisinage du point x_0 . Il ne nous suffirait donc plus qu'à faire tendre ε vers zéro pour avoir la représentation d'une charge concentrée au point x_0 .

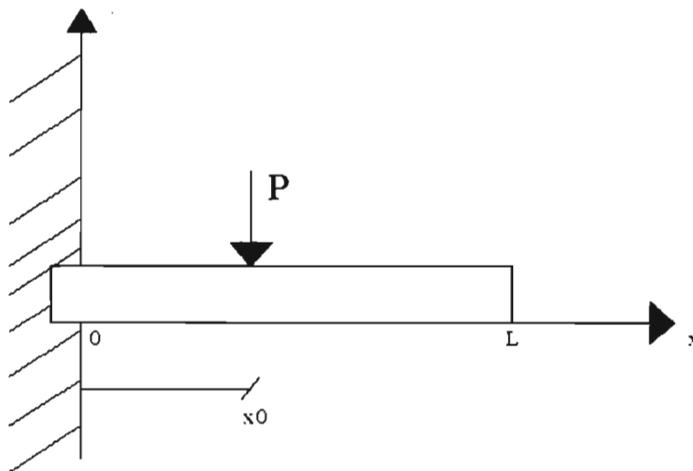


Figure 1.5 : Charge singulière concentrée appliquée sur une poutre.

La fonction densité obtenue est alors la fameuse ‘‘fonction de Dirac’’ δ définie par :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \delta(x - x_0) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq x_0 \\ 2) \quad & \delta(x - x_0) = \infty \quad \text{si} \quad x = x_0 \\ 3) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Malheureusement, cette définition est contradictoire. En effet, une fonction nulle partout sauf en un point ne peut avoir pour valeur de son intégrale définie autre que zéro. Cela provient de ce qu’une famille de fonctions $\{f_\varepsilon\}$ n’a pas forcément pour limite une fonction lorsque ε tend vers zéro.

Il en est de même, par exemple, dans l’ensemble des nombres rationnels où une suite de rationnels n’a pas toujours pour limite un rationnel. L’on sait que l’on peut alors construire l’ensemble des réels plus vaste que l’ensemble des rationnels et qui comprend, outre les rationnels, toutes les limites de suites de rationnels satisfaisant à la condition de Cauchy. L’on pourrait, par un procédé analogue, généraliser la notion de fonction. (Théorie de Mikuzinski et Sikorsky).

Connaissant la formulation mathématique d’une charge concentrée, on peut calculer son influence sur chaque point de la structure considérée et le traitement des charges singulières surfaciques et linéiques (Fig. 1.3) se fait par conséquent en intégrant cette influence sur le domaine d’application de la charge répartie.

1.3. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

De très nombreux problèmes physiques s’expriment sous forme d’équations aux dérivées partielles soumises à des conditions aux limites particulières et la résolution de ces équations est souvent impossible mathématiquement d’où le recours à la méthode des éléments finis pour une discrétisation du problème comme il a été évoqué dans [1], [4], [5] et [6]. C’est le cas pour les problèmes d’élasticité linéaire en particulier pour les éléments surfaciques (plaque et coque) dont les caractéristiques seront étudiées au cours de cet exposé. Nous procéderons tout d’abord à un rappel de mécanique des milieux continus puis

nous mettrons en évidence l'ensemble de la théorie sous-jacente à la méthode des éléments finis et expliciterons les différentes étapes de la résolution d'un problème d'élasticité linéaire par la méthode des éléments finis.

1.3.1. Rappel de la mécanique des milieux continus

Le concept de milieu continu est une modélisation physique macroscopique issue de l'expérience courante. Dans la formulation mathématique classique de ce concept, un système mécanique est représenté par un volume Ω constitué, au niveau différentiel, de particules $d\Omega$. L'état géométrique de ces particules est caractérisé par la seule connaissance de leur position. Au cours de l'évolution du système les particules initialement voisines demeurent voisines.

L'analyse de l'évolution du comportement du système se fait en déterminant la position dans l'espace des particules du système. La représentation mathématique de ce comportement, en utilisant les coordonnées cartésiennes, aboutit aux Equations aux Dérivées Partielles (EDP).

Résoudre un problème d'élasticité c'est :

- Déterminer le vecteur déplacement en tout point de la structure, ce qui pour un solide en 3-D représente les 3 inconnues du champ de déplacement noté \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

- Déterminer le tenseur de déformations en tout point de la structure, ce qui donne les 6 inconnues du champ des déformations noté $\varepsilon(x)$:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

- Déterminer le tenseur de contraintes en tout point de la structure, ce qui représente les 6 inconnues du champ des contraintes noté $\sigma(x)$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Ce qui nous fait un total de 15 inconnues à déterminer. Cette analyse se fait grâce aux équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire dans le cadre des petites déformations. Ces équations proviennent de différentes relations que sont celles qui lient les déformations aux déplacements ainsi que les relations contraintes – déformations ; nous avons :

- Les relations de compatibilité qui lient les déplacements (3 composantes) et les déformations (6 composantes) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} ; \varepsilon_z = \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z} \quad (1.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} ; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.9)$$

- La loi de comportement ou loi de Hooke qui lie le tenseur de contraintes au tenseur des déformations, elle s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0) \quad (1.10)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont respectivement le tenseur de contraintes et de déformations et \mathbf{H} est la matrice qui définit le comportement du solide et dépend du milieu.

Pour un milieu homogène isotrope, elle s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\sigma & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_T \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

avec

$$\mathbf{H}_\sigma = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{H}_T = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; E: \text{module de YOUNG et } \nu: \text{coefficient de POISSON}$$

Nous avons donc la matrice 6x6 du type :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

➤ Les équations d'équilibre pour un solide quelconque s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\{\text{div } \boldsymbol{\sigma}^T\} + \{f\} = 0 \quad (1.14)$$

Avec σ_{ij} étant les composantes du tenseur de contraintes et f_x, f_y, f_z les composantes du vecteur chargement dans un repère cartésien (x, y, z) .

1.3.2. Méthode de résolution numérique

Bien que la connaissance de ces équations aux dérivées partielles soit parfois ancienne, seul très peu de cas peuvent être résolus par les mathématiques classiques. On remplace

donc le problème continu par un problème approché en discrétisant la structure et obtenir des solutions approchées via des méthodes numériques. La méthode numérique la plus utilisée de nos jours reste celle des éléments finis. Celle-ci englobe trois domaines principaux :

- Les méthodes de discrétisation qui permettent de transformer un problème continu en une approximation discrète ;
- les méthodes variationnelles qui permettent de transformer une équation aux dérivées partielles (EDP) en une forme approchée « variationnelle » ;
- les méthodes numériques qui permettent de résoudre les systèmes d'équations linéaires, non linéaires et de rechercher des valeurs propres ;

Le tout étant allié à des moyens de calcul qui exécutent les instructions de plus en plus rapidement actuellement.

1.3.3. Formulation variationnelle

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, l'équation représente l'équilibre des forces et des moments qui agissent sur un élément de matière. Elle s'écrit sous la forme d'une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est le champ de déplacement.

Mathématiquement, l'équation est difficile, voire même impossible à résoudre dans le cas général. Dans ce contexte, la formulation variationnelle de l'EDP apparaît comme une forme équivalente de l'équation mais qui a pour avantage de pouvoir par la suite être résolue de manière approchée ; ce qui sera le cas dans la méthode des éléments finis.

Dire qu'un solide sous l'action d'un ensemble de forces est en équilibre, équivaut à dire que la puissance totale mise en jeu par ces forces lors d'un déplacement quelconque, est nulle, en d'autres termes :

$$\{\sum \vec{F}_i = \vec{0}\} \Leftrightarrow \{\dot{P} = \sum \dot{P}_i = (\sum \vec{F}_i) \cdot \overline{\delta U} = 0\} \forall \delta U \quad (1.15)$$

avec δU étant un déplacement virtuel.

Cette équation faisant intervenir les puissances est appelée forme variationnelle des équations d'équilibre. Elle est identique à l'équation originale d'équilibre, tant qu'elle est vérifiée pour tout déplacement virtuel δU .

Mais dans le cadre de l'équilibre interne des forces de cohésion de la matière, représentées par les contraintes, la puissance virtuelle mise en jeu lors d'un déplacement virtuel est une fonction d'une part du déplacement virtuel, et d'autre part du déplacement réel. En effet, les contraintes peuvent être calculées à partir des déformations via la loi de comportement du matériau, et les déformations peuvent être calculées à partir du champ de déplacement.

Ainsi la seule inconnue de notre problème variationnelle demeure le champ de déplacements \bar{U} . En définitif on peut écrire :

$$\bar{P} = P(\bar{U}, \delta\bar{U}) \quad \forall \delta\bar{U} \quad (1.16)$$

Supposons maintenant que l'on cherche une forme approchée de \bar{U} à l'aide d'une discrétisation par éléments finis \bar{U}_a . On a vu que le champ approché \bar{U}_a se calcule à partir de la valeur du déplacement en chaque nœud \bar{U}_r , l'indice r étant le numéro du nœud. Dans ce cas, la puissance virtuelle est une fonction des valeurs aux nœuds :

$$\bar{P} = P(\bar{U}_r, \delta\bar{U} = \bar{0}) \quad \forall \delta\bar{U} \quad (1.17)$$

Lorsque l'on connaît toutes les valeurs aux nœuds, appelées valeurs nodales, le problème est résolu. Si N est le nombre de nœuds, le problème comporte 3xN inconnues (pour un modèle 3D), que l'on appelle degrés de liberté du problème.

Sachant que chaque déplacement virtuel δU conduit à une équation qui doit être vérifiée pour satisfaire l'équilibre, il nous reste à déterminer 3xN déplacements virtuels possibles.

Soit un nœud donné, par exemple le numéro s, et choisissons un déplacement δU_s^a tel que ce déplacement soit nul au niveau de tous les nœuds sauf au nœud s où il vaut la valeur 1, et pour la composante a (=1 ou 2 ou 3), qu'il passe d'une manière continue de 1 à 0 du nœud s aux autres nœuds. Il est clair que cette méthode de construction de déplacement virtuel permet de déterminer 3xN déplacements virtuels, élémentaires. A l'aide de ces déplacements, nous allons pouvoir générer 3xN équations, dont les inconnues sont les déplacements aux nœuds.

Dans le cas où ces équations sont linéaires en inconnues (c'est-à-dire forment une combinaison linéaire des inconnues) on parle de problème linéaire, c'est le cas par exemple

de l'étude de la déformation élastique d'un corps (ou structure) en petite déformation, sinon on parle de problème linéaire.

Les problèmes linéaires sont évidemment les plus simples à résoudre. Le système d'équation s'écrit alors sous une forme matricielle équivalente à :

$$KU = F \text{ ou } [K]\{U\} = \{F\} \quad (1.18)$$

où :

- (U) est le vecteur déplacement inconnu, ses composantes sont en fait les composantes des déplacements inconnus pour chaque nœud du maillage,
- (F) est le vecteur second membre connu, ses composantes sont en fait les composantes des forces imposées en chaque nœud.

$$F_i = \langle f, P_i \rangle - k(u_d, P_i) \quad (1.19)$$

[K] est la matrice de raideur, c'est une matrice de composantes connues, fonction de la forme de la pièce calculée et de la loi de comportement : élastique, plastique...

$$K_{ij} = k(P_i, P_j) \quad (1.20)$$

ou dans un cas plus général

$$F_i = \langle f, P_i \rangle - \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma^T \varepsilon(P_i)) d\omega - k(u_d, P_i) \quad (1.21)$$

Résoudre le problème équivaut alors à résoudre ce système matriciel par exemple en inversant la matrice à condition que le déterminant de [K] soit non nul :

$$U = K^{-1}F \text{ ou } \{U\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (1.22)$$

Dans le cas d'un problème non linéaire, par exemple lors de l'étude de grandes transformations, en général on utilise une méthode de résolution numérique, par exemple la méthode de NEWTON-RAPHSON qui consiste à remplacer le problème original par une succession de problèmes linéaires. Il est clair que la résolution est alors plus complexe et

que les temps de calcul plus longs. Néanmoins, la prise en compte de ce type de problème tend aujourd'hui à se généraliser, due en particulier aux grandes vitesses des calculateurs modernes.

Cette formulation variationnelle découlant du Principe des Puissances Virtuelles est connue sous le nom de méthode de GALERKIN.

On se donne n fonctions de base $\{P_i(x)\}$ appartenant au cinématiquement admissible à zéro et on cherche la solution du problème comme une combinaison linéaire de ces fonctions. Dans le cas où il existe des déplacements imposés on rajoute une fonction les réalisant c'est-à-dire :

$$\ddot{u}(x) = P_i(x) \quad (1.23)$$

\in C.A. (champ de déplacements cinématiquement admissibles)

$$\ddot{u}(x) = P_i(x) \quad (1.24)$$

En supposant que Le problème d'élasticité étant équivalent à la formulation variationnelle nous obtenons :

$$k(u(x), P_i(x)) = P_{donné}(P_i(x)) \quad (1.25)$$

Il suffit alors de faire varier i de 1 à n pour avoir un système linéaire de n équations à n inconnues. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[K][U] = [F] \quad (1.26)$$

La matrice K est symétrique. L'équation mise sous sa forme matricielle correspond à la forme générale d'un problème discrétisé. En effet, nous sommes passés d'un problème continu à un problème discrétisé, de l'étude $u(x, y, z)$ à l'étude de n inconnues U_i .

En résumé, il faut retenir que la formulation variationnelle alliée aux techniques de discrétisation permet de transformer l'équation originale d'équilibre, en un système d'équations, linéaires dans les cas simples, qui après résolution fournit les déplacements aux nœuds du maillage.

On remarque que plus le nombre de nœuds est important, plus la taille du système linéaire à résoudre est importante. Couramment la dimension des systèmes à résoudre atteint plusieurs milliers voire plusieurs dizaines de milliers.

1.3.4. Principe des travaux virtuels

Une autre forme de formulation variationnelle est obtenue en utilisant la méthode des résidus pondérés :

$$W = - \int_V \dot{\mathbf{u}} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V) dV = 0 \quad (1.27)$$

Pour tout champ de déplacements virtuels.

En intégrant par parties nous obtenons la forme faible de W :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall \dot{\mathbf{u}}(x, y, z) \quad (1.28)$$

avec

$$W_{int} = - \int_V \left[\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \sigma_{zz} + \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \sigma_{xy} + \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) \sigma_{yz} \right] dV$$

$$W_{int} = - \int_V \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{D}} \boldsymbol{\sigma}) dV = - \int_V \langle \dot{\mathbf{D}} \rangle \{ \boldsymbol{\sigma} \} dV \quad (1.29)$$

et

$$W_{int} = \int_V (\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle \{ \mathbf{f}_V \}) dV + \int_{S_i} (\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle \{ \mathbf{f}_S \}) dS + \int_{S_u} (\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle \{ \boldsymbol{\sigma}(n) \}) dS \quad (1.30)$$

où :

$\dot{\mathbf{u}} = \dot{u} \dot{v} \dot{w}$ est le champ de déplacement virtuel

$f_v = f_x f_y f_z$ représente les forces volumiques qui s'appliquent au niveau du volume du solide V

$\sigma(n) = \sigma_{xn} \sigma_{yn} \sigma_{zn}$ représente les contraintes

$f_s = f_{sx} f_{sy} f_{sz}$ sont les forces surfaciques sur la partie S_f de la frontière du solide

$$\dot{D} = \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}; \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}; \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}; \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}; \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}; \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)$$

et

$$\sigma^T = (\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \sigma_{zz}; \sigma_{xy}; \sigma_{xz}; \sigma_{yz})$$

1.3.5. Energie potentielle totale

Le principe des travaux virtuels traduit, sous forme d'intégrale, l'équilibre du solide soumis à l'action de forces de volume f_v et de surface f_s ;

$$W_{int} = \int_V (\langle \dot{\varepsilon} \rangle \{ \sigma \}) dV + \int_V (\langle \dot{u} \rangle \{ f_v \}) dS + \int_{S_i} (\langle \dot{u} \rangle \{ f_s \}) dS \quad (1.30)$$

$$\forall \{ u \} \text{ avec } \{ u \} = 0 \text{ sur } S_u.$$

En introduisant dans l'expression du Principe des Travaux Virtuels la loi de Hooke généralisée, les relations déformations-déplacements et les conditions aux limites on obtient la forme intégrale suivante, en fonction de u^* et de u :

$$W(\dot{u}, u) = \int_V \dot{\varepsilon}^T (H \varepsilon + \sigma_0) dV - \int_V \dot{u}^T f_v dS - \int_{S_i} \dot{u}^T f_s dS = 0 \quad (1.31)$$

$$\forall \dot{u} \text{ avec } \dot{u} = 0 \text{ et } \dot{u} = \bar{u} \text{ sur } S_u.$$

Cette forme variationnelle sert de base pour **construire** les modèles déplacements éléments finis.

En admettant que les fonctions de pondération u^* et les fonctions solutions u appartiennent au même espace de fonctions (même base de représentation), on obtient la formulation de type Galerkin conduisant aux modèles déplacements en éléments finis. Les déplacements virtuels u^* sont alors définis comme les variations des déplacements réels :

$$\dot{\mathbf{u}} = \delta(\mathbf{u}) = \delta \mathbf{u} \quad (1.32)$$

où δu représente la variation de la fonction u , l'opérateur δ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\delta(\delta(\mathbf{u})) = \delta^2 \mathbf{u} ; \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \delta(u) ; \int_V \delta u \, dV = \delta \int_V u \, dV \quad (1.33)$$

L'expression de W de type Galerkin est alors :

$$W(u) = \int_V \delta \mathcal{E} ([H]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\}) \, dV - \int_V \delta u \{f_v\} \, dV - \int_{S_v} \delta u \{f_s\} \, dS = 0 \quad (1.34)$$

$$\forall \{\delta u\} \text{ avec } \{\delta u\} = 0 \text{ et } \{u\} = \{u\} \text{ sur } S_u$$

On définit la fonctionnelle Π appelée énergie potentielle totale telle que :

$$W = \delta(\Pi_{int}(u)) = \frac{\partial \Pi}{\partial u} \delta u \quad (1.35)$$

$$\text{Avec } \Pi(u) = \Pi_{int}(u) - \Pi_{ext}(u) \quad (1.36)$$

où Π_{int} est l'énergie interne de déformation :

$$\begin{aligned} \Pi_{int}(u) &= \int_V \left(\frac{1}{2} \langle \varepsilon(u) \rangle [H] \{ \varepsilon(u) \} + \langle \varepsilon(u) \rangle \{ \sigma_0 \} \right) \, dV \\ &= \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) \, dV \end{aligned} \quad (1.37)$$

et $-\Pi_{ext}$ est le potentiel des forces de volume et de surface (forme linéaire de u) :

$$\Pi_{ext}(u) = \int_V u \{f_v\} \, dV + \int_{S_v} u \{f_s\} \, dS \quad (1.38)$$

La seconde variation de Π est donnée par :

$$\delta^2 \Pi(u) = \int_V \delta \varepsilon [H] \{\delta \varepsilon\} dV > 0 \quad \forall \{\delta u\} \neq \{0\} \quad (1.39)$$

Puisque $[H]$ est définie positive et que $\{\delta^2 \varepsilon\}$, δf_v , $\delta \{\sigma_0\}$, $\delta \{\sigma_{th}\}$ sont nuls par définition.

La solution $\{u\}$ du problème correspond ainsi au minimum de l'énergie potentielle totale. Le principe du minimum de l'énergie potentielle s'énonce ainsi : « Parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles celui qui rend Π minimum correspond à la solution du problème ».

En supposant que le champ de déplacements puisse se mettre sous la forme :

$$u = Nq \quad (1.40)$$

où q est le vecteur des degrés de liberté choisis pour représenter le comportement (coordonnées généralisées particulières), et N la matrice des fonctions d'interpolation.

La discrétisation de la forme variationnelle de l'EDP nous donne :

$$W = \sum W^e = 0 \quad \forall u^* \quad (1.41)$$

avec

$$W^e = \int_{V^e} \varepsilon^* [H] \{\varepsilon\} dV - \int_{V^e} u^* \{f_v\} dV + \int_{V^e} \varepsilon^* \{\sigma_0\} dV - \int_{S_f^e} u^* \{f_s\} dS \quad (1.42)$$

et

$$W^e = W_{int}^e + W_{ext}^e \quad (1.43)$$

$$W_{int}^e = \int_{V^e} \varepsilon^* [H] \{\varepsilon\} dV + \int_{V^e} \varepsilon^* \{\sigma_0\} dV \quad (1.44)$$

$$W_{ext}^e = \int_{V^e} u^* \{f_v\} dV + \int_{S_f^e} u^* \{f_s\} dS \quad (1.45)$$

De façon générale l'approximation par éléments finis se traduit par :

$$\{u(\xi, t)\} = [N(\xi)]\{u_n(t)\} \quad (1.46)$$

avec
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} = [j] \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} \quad (1.47)$$

Les relations déformations déplacements s'écrivent :

$$\{\mathcal{E}\} = [B]\{u_n\} \quad (1.48)$$

La matrice [B] est fonction de ξ, η, ζ et des termes de [j] matrice jacobienne de la transformation des coordonnées paramétriques en coordonnées cartésiennes. Les relations déformations-déplacements en coordonnées cartésiennes peuvent s'écrire sous la forme :

$$\{\mathcal{E}\} = [A]\{\mathcal{E}_\xi\} \quad (1.49)$$

où [A] contient les termes de [J].

Pour un élément isoparamétrique :

$$\begin{aligned} x &= N \{x_n\} ; y = N \{y_n\} ; z = N \{z_n\} \\ u &= N \{u_n\} ; v = N \{v_n\} ; w = N \{w_n\} \end{aligned} \quad (1.50)$$

avec
$$N = N_1(\xi, \eta, \zeta) \quad N_2(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots$$

L'expression de $\{\mathcal{E}_\xi\}$ est donc :

$$\{\mathcal{E}_\xi\} = [B_\xi]\{u_n\} \quad (1.51)$$

avec
$$u_n = u_1 \quad v_1 \quad w_1 ; u_2 \quad v_2 \quad w_2 ; \dots \quad (1.52)$$

$$[B]_\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dots \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \dots \quad (1.53)$$

Avec

$$\left\langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right\rangle$$

Ce qui nous donne :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_n\} \quad ; \quad [B]=[A][B_\xi] \quad (1.54)$$

La matrice [N] est :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & & \\ \dots & 0 & N_i & 0 & \dots \quad i=1,2,\dots \\ & 0 & 0 & N_i & \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

La discrétisation du problème permet d'obtenir une solution approchée dont la précision dépend de nombreux paramètres ; mais des méthodes permettant de minimiser l'erreur commise et d'accroître ainsi la précision. Parmi celle-ci deux méthodes se sont avérées très efficaces : il s'agit de la méthode-P et de la méthode-H.

La méthode-P désigne une stratégie de contrôle de l'erreur qui consiste à faire varier le degré d'interpolation des éléments tout en conservant leur taille. Elle s'oppose à la méthode-H qui consiste à faire varier la taille des éléments tout en conservant leur degré d'interpolation.

Dans ce document, pour le traitement des singularités de charges dans les dalles anisotropes, notre choix s'est porté sur le **modèle hybride-Trefftz (H-T)** [2]. L'approximation ne porte, de ce fait, que sur les conditions aux limites et la continuité aux interfaces, conditions que la solution de l'assemblage des éléments tend implicitement à satisfaire de manière optimale dans le sens des moyennes pondérées. Le développement de l'élément HT ne fait appel qu'à des intégrales de contours ; par conséquent, il est aisé de générer des éléments polygonaux aux cotés curvilignes en nombre optionnel.

2. QUELQUES ELEMENTS DU TRAITEMENT DES SINGULARITES DE CHARGES SUR LES DALLES ANISOTROPES

2.1. FORMULATION GENERALE DE L'ELEMENT HT ET SON APPLICATION AUX PLAQUES MINCES

Dans ce document, pour le traitement des singularités de charges dans les dalles anisotropes, notre choix s'est porté sur le **modèle hybride-Trefftz (H-T)** [2]. En effet, le modèle d'éléments finis dit conventionnel, basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz utilise un seul champ de déplacement conforme qui vérifie approximativement l'équilibre alors que le modèle hybride-Trefftz (H-T) utilise deux champs de déplacements : **un champ interne** (non conforme) qui vérifie à priori l'équation différentielle fondamentale du problème mais qui viole la continuité aux interfaces (champ non conforme) et **un champ conforme** mais défini uniquement sur la frontière

Dans ce chapitre, nous rappellerons la formulation basée sur la minimisation de la norme énergétique du modèle d'éléments finis HT.

2.1.1. Formulation basée sur la minimisation de la norme énergétique

Les équations qui régissent le comportement d'une plaque (figure 2.1) peuvent s'écrire avec les variables définies comme suit :

u et **b** : vecteurs conjugués* des déplacements généralisés et des forces de volume

ϵ_e et **σ** : vecteurs conjugués* des déformations et des contraintes

v et **t** : vecteurs conjugués* des déplacements et des tractions de bord généralisés.

$$L^T \sigma = \bar{b} \quad (2.1a)$$

$$\epsilon = L u \quad (2.1b)$$

$$\sigma = D \epsilon \quad (2.1c)$$

(2.1a, b et c) sont respectivement les conditions d'équilibre interne, les relations cinématiques et la loi constitutive qui conduisent aux équations différentielles fondamentales :

$$\alpha \mathbf{u} = \bar{\mathbf{b}} \quad (2.1c)$$

avec

$$\alpha = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \quad (2.1c)$$

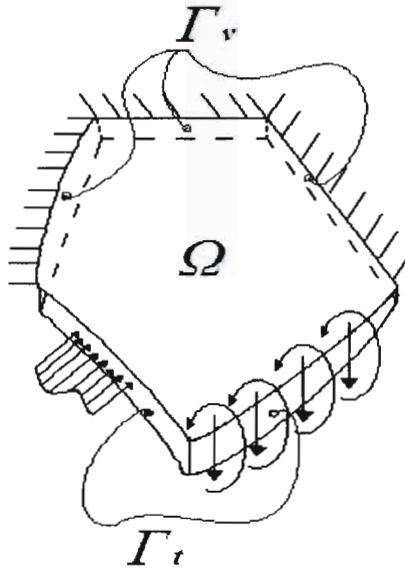


Figure 2.1 : Plaque qui occupe un domaine Ω ;

Γ_v : partie de la frontière où les déplacements sont imposés ;

Γ_t : partie de la frontière où les tractions sont imposées.

Les conditions aux frontières sont spécifiées pour les déplacements et tractions généralisés :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{sur } \Gamma_v \quad (2.2)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (2.3)$$

Ici,

$$\Gamma_t \cup \Gamma_v = \partial\Omega$$

Subdivisons le domaine Ω en sous-domaines Ω_e ($\Omega = \cup \Omega_e$) comme à la figure (2.2) et établissons la formulation en supposant pour chaque élément les deux champs de déplacements suivants :

2.1.1.1. Un champ de Trefftz non conforme

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e^0 + \sum_{j=1}^m N_j \mathbf{c}_j = \mathbf{u}_e^0 + N_e \mathbf{c}_e \quad (2.4)$$

Où les \mathbf{c}_j sont des coefficients indéterminés, \mathbf{u}_e^0 et N_e sont respectivement la solution particulière et une série de solutions homogènes linéairement indépendantes de l'équation (2.1d) :

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{u}_e^0 = \bar{\mathbf{b}} \\ \alpha N_e = \mathbf{0} \end{cases} \text{ sur } \Omega \quad (2.5)$$

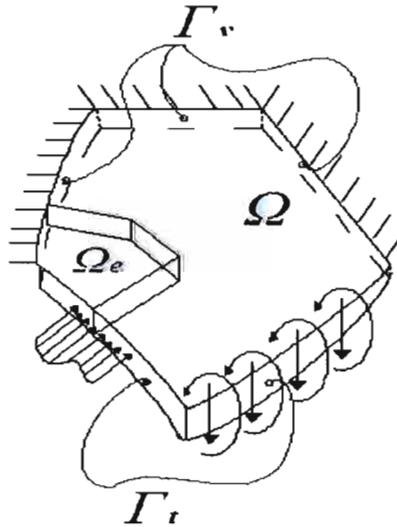


Figure 2.2 : Plaque qui occupe un domaine Ω subdivisé

en n sous-domaines Ω_e ($\Omega = \sum \Omega_e$).

Pour $m \rightarrow \infty$, N_1, N_2, \dots est une série convergente de fonctions linéairement indépendantes qui vérifient les équations différentielles fondamentales homogènes (les fonctions N_1, N_2, \dots forment une série complète de fonctions de Trefftz). Herrera a montré que dans des

conditions très générales (forme du domaine et des conditions de bord), un algorithme de « résolution aux frontières » basé sur de telles fonctions converge vers la bonne solution.

2.1.1.2. Un champ auxiliaire de déplacements conforme

Il est défini en fonction des paramètres nodaux d_e comme dans le modèle classique (déplacement conforme) d'éléments finis. Les éléments de \tilde{N}_e sont des fonctions d'interpolation.

$$\tilde{u}_e = \tilde{N}_e d_e \quad (2.6)$$

La conformité du champ u_e est ensuite imposée en minimisant la norme énergétique de la différence $u_e - \tilde{u}_e$ [31] :

$$U(u_e - \tilde{u}_e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}_e - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e)^T D (\boldsymbol{\varepsilon}_e - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e) d\Omega = \min \quad (2.7)$$

avec

$$u_e \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e^0 + \mathbf{B}_e \mathbf{c}_e \quad (2.8a)$$

$$\tilde{u}_e \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \tilde{\mathbf{B}}_e d_e \quad (2.8b)$$

On obtient :

$$\int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_e^T (\boldsymbol{\varepsilon}_e - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e) d\Omega = 0 \quad (2.8c)$$

Une équation permettant d'exprimer les coefficients indéterminés \mathbf{c}_e du champ de Trefftz en fonction des déplacements \mathbf{d}_e du champ compatible.

$$\mathbf{c}_e = -\mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{h}_e + \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e \quad (2.9)$$

où

$$\mathbf{H}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T D \mathbf{B}_e d\Omega \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{h}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T D \boldsymbol{\varepsilon}_e^0 d\Omega \quad (2.9b)$$

$$\mathbf{G}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T D \tilde{\mathbf{B}}_e d\Omega \quad (2.9c)$$

\mathbf{H}_e est une matrice symétrique définie positive puisque $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$, et la forme quadratique $\mathbf{c}_e^T \mathbf{H}_e \mathbf{c}_e$ représente le double de l'énergie de déformation générée par la partie homogène du champ de déplacements \mathbf{u}_e . Pour une contrainte virtuelle $\delta\sigma_e$, la variation de $U(\mathbf{u}_e - \tilde{\mathbf{u}}_e)$ se traduit par :

$$\delta U(\mathbf{u}_e - \tilde{\mathbf{u}}_e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}_e^T (\boldsymbol{\varepsilon}_e - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e) d\Omega \quad (2.10)$$

Les intégrales sur le domaine Ω_e peuvent être transformées en intégrales sur le contour $\partial\Omega_e$. ceci est possible puisque la matrice \mathbf{D} est symétrique, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$, et le produit $\mathbf{B}^T \mathbf{D} = (\mathbf{B}\mathbf{D})^T$ représente une matrice de contraintes auto-équilibrées dont le travail virtuel, en vertu du théorème de Clapeyron, est égal à celui des tractions de bord correspondantes. Si l'on désigne les déplacements généralisés dérivés des champs \mathbf{u}_e et $\tilde{\mathbf{u}}_e$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_e^0 + \mathbf{V}_e \mathbf{c}_e \\ \tilde{\mathbf{u}}_e \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}_e = \tilde{\mathbf{V}}_e \mathbf{c}_e \end{array} \right\} \quad (2.11a, b)$$

Les tractions issues du champ \mathbf{u}_e par :

$$\mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{t}_e = \mathbf{t}_e^0 + \mathbf{T}_e \mathbf{c}_e \quad (2.12)$$

Et l'on observe que $\delta \mathcal{B} = L^T (D L \delta \mathbf{u}) = 0$, l'équation (2.10) peut s'écrire comme :

$$\delta U(\mathbf{u}_e - \tilde{\mathbf{u}}_e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \mathbf{t}_e^T (\mathbf{v}_e - \tilde{\mathbf{v}}_e) d\Omega \quad (2.13)$$

ainsi,

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T D (\boldsymbol{\varepsilon}_e^0 + \mathbf{B}_e \mathbf{c}_e - \tilde{\mathbf{B}}_e \mathbf{d}_e) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}_e^T (\mathbf{v}_e^0 + \mathbf{V}_e \mathbf{c}_e - \tilde{\mathbf{V}}_e \mathbf{d}_e) d\Gamma \quad (2.13a)$$

D'où on tire :

$$\mathbf{H}_e = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{T}_e^T \mathbf{V}_e d\Gamma \quad (2.13b)$$

$$\mathbf{h}_e = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{T}_e^T \mathbf{v}_e^0 d\Gamma \quad (2.13c)$$

$$\mathbf{G}_e = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{T}_e^T \tilde{\mathbf{V}}_e d\Gamma \quad (2.13d)$$

Puisque l'intégration se fait sur le bord $\partial\Omega_e$, une définition explicite de $\tilde{\mathbf{u}}_e$ dans le domaine n'est plus nécessaire. On peut alors se limiter à choisir directement le champ de déplacement

$$\tilde{\mathbf{v}}_e = \tilde{\mathbf{V}}_e d_e \quad \text{sur } \partial\Omega_e \quad (2.14)$$

Cette démarche permet une grande liberté dans le choix de la géométrie de l'élément (élément à contour ^polygonal, par exemple, avec un nombre de coté optionnel) et en particulier, la construction aisée des éléments pour des problèmes où la conformité C^1 des fonctions d'interpolation $\tilde{\mathbf{V}}_e$ est nécessaire (plaques de Kirchhoff).

Comme les contraintes dérivées du champ \mathbf{u}_e vérifient exactement l'équilibre interne et qu'avec l'équation (2.9), la conformité des déplacements est imposée, il ne reste plus qu'à s'assurer la continuité des tractions \mathbf{t}_e à travers les interfaces et d'introduire l'effet des tractions aux bords libres ($\partial\Omega_e \cap \Gamma_l$). on utilisera l'équivalence des travaux virtuels suivante :

$$\delta d_e^T r_e + \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_l} \delta \tilde{\mathbf{v}}_e^T \mathbf{t}_e d\Gamma = \int_{\partial\Omega_e} \delta \tilde{\mathbf{v}}_e^T \mathbf{t}_e d\Gamma \quad (2.15)$$

Pour en tirer la relation forces-déplacements habituelle :

$$r_e = r_e^0 + k_e d_e \quad (2.16)$$

avec

$$r_e^0 = g_e - G_e^T H_e^{-1} h_e \quad (2.16a)$$

$$k_e = G_e^T H_e^{-1} G_e \quad (2.16b)$$

Où \mathbf{H}_e , \mathbf{h}_e , \mathbf{G}_e sont donnés par les intégrales de contours (2.13b-d), et

$$g_e = \int_{\partial\Omega_e} \tilde{V}_e^T t_e^0 d\Gamma - \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \tilde{V}_e^T t_e d\Gamma \quad (2.17)$$

Il est clair que l'élément obtenu passera le rapiéçage (patch test) si \tilde{u}_e représente exactement les modes rigides. Il est important d'observer que la matrice \mathbf{H}_e serait singulière si une des fonctions \mathbf{N}_j représente un mode rigide (qui conduirait à des tractions de bord nulles). Par conséquent, \mathbf{u}_e doit alors être dépourvu des modes rigides. Seules seront retenues les fonctions \mathbf{N}_j indépendantes qui conduisent à des déformations non nulles. La condition nécessaire (mais non suffisante) pour que le rang de la matrice de rigidité soit correct est alors

$$m \geq NDDL - NRIG \quad (2.18)$$

Où m est le nombre de fonctions homogènes linéairement indépendantes de \mathbf{N}_e , NDDL est le nombre de degré de liberté (vecteur \mathbf{d}_e) et NRIG est le nombre de modes rigides. Le champ \mathbf{u}_e décrit correctement l'état de contraintes mais les déplacements ne sont connus qu'à des modes rigides près. Au besoin, une fois les paramètres \mathbf{c}_e connus, ces modes pourront être ajoutés par un ajustement des vecteurs de déplacement \mathbf{v}_e et $\tilde{\mathbf{v}}_e$.

2.1.2. Application à la flexion des plaques minces

Dans la théorie de Kirchhoff, le comportement des plaques minces en flexion est décrit par le déplacement transversal w que l'on assimile à \mathbf{u}_e . L'expression

$$w = w^0 + N_e c_e \quad (2.18)$$

est choisie de manière à vérifier l'équation différentielle des plaques minces.

2.1.3. Solution du problème dans le cas de dalles isotropes

L'expression de la flèche w , pour la **dalle infinie isotrope** (figure 2.3) soumise à une force ponctuelle P appliquée en (X_p, Y_p) où on assimile u à w , est donnée à un point A (X, Y) par :

$$w = \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (2.19)$$

où $r^2 = x^2 + y^2$ et $x = X - X_p$; $y = Y - Y_p$

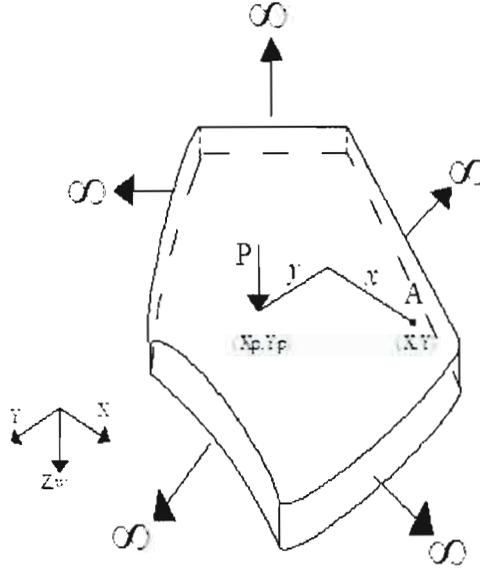


Figure 2.3 : Dalle infinie soumise à une charge ponctuelle P
au point (X_p, Y_p) du domaine Ω .

Les éléments des vecteurs déplacements v et de tractions t de bord, les efforts tranchants, les moments internes s'expriment en fonction des dérivées de w qui s'écrivent sous les formes suivantes :

$$X^n Y^m \ln r ; \frac{X^n Y^m}{r^2} ; \frac{X^n Y^m}{r^4}$$

La différence entre une plaque ou dalle infinie est celle correspondante finie réside dans la prise en compte des conditions de bord.

2.2. TRAITEMENT DE LA CHARGE CONCENTREE POUR LES DALLES ANISOTROPES

2.2.1. Théorie de Kirchhoff pour les dalles anisotropes

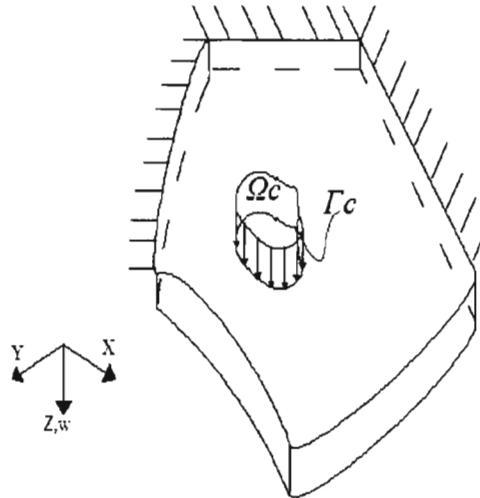


Figure 2.4 : Charge répartie $p(x, y)$ occupant le domaine Ω_c de frontière Γ_c
sur une dalle de domaine Ω et de bord Γ .

Supposons une plaque anisotrope [7] dans un système de coordonnées cartésiennes O-xyz (figure 2.4), occupant le domaine Ω de frontière Γ . Cette plaque est chargée par une intensité de force transversale $p(x, y)$. Selon la théorie de Kirchhoff des plaques anisotropes en flexion (dalles), les équations essentielles du problème peuvent s'écrire comme suit :

$$\Delta\Delta(w) = p(x, y) \quad (2.20)$$

$$\text{Avec } \Delta\Delta(\circ) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial x^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

En effet, dans le cas des dalles anisotropes, la matrice d'élasticité D est pleine et se présente sous la forme :

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}$$

2.2.2. La solution fondamentale singulière

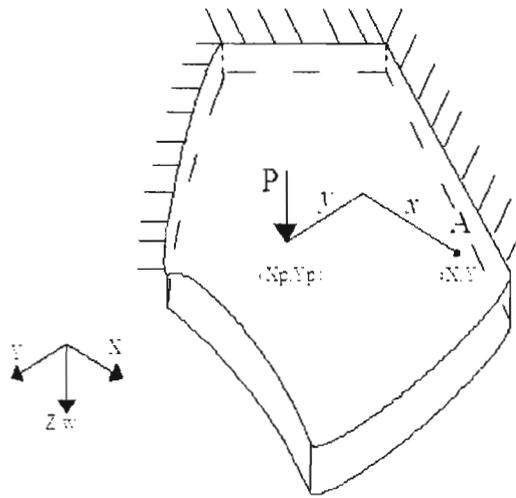


Figure 2.5 : Charge ponctuelle P appliquée au point (X_p, Y_p) sur une dalle finie.

Introduisons maintenant la solution fondamentale singulière w (pour une charge ponctuelle appliquée présentée à la figure 2.5) qui satisfait :

$$\Delta\Delta w(A, P) = \delta(A, P) \tag{2.21}$$

$$\text{Où } \Delta\Delta(\circ) = \frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{4D_{16}}{D_{22}} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{4D_{26}}{D_{22}} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Et $\delta(A, P)$ est la fonction-delta de Dirac qui devient singulière au point source $P(x_p, y_p)$.

La solution de l'équation (2.21) représente la déflexion au point $A(x, y)$ d'une plaque anisotrope infinie soumise à une charge latérale concentrée D_{22} appliquée en $P(x_p, y_p)$.

Pour avoir la solution singulière dans le cas d'une charge concentré P , il suffit de multiplier celle de la charge latérale concentrée D_{22} par $\frac{P}{D_{22}}$.

Lekhnitskii a prouvé que l'équation caractéristique de l'équation différentielle fondamentale (2.21) c'est-à-dire:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0 \quad (2.22)$$

Ne peut pas avoir des racines réelles dans le cas des plaques élastiques homogènes anisotropes. Ses solutions sont complexes :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= d_1 + e_1 i & \mu_1 &= d_1 - e_1 i \\ \mu_2 &= d_2 + e_2 i & \mu_2 &= d_2 - e_2 i \end{aligned} \quad (2.23)$$

Définissant le système de coordonnées polaires (r, θ) comme suit :

$$r = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} \text{ et } \theta = \arctan\left(\frac{y - y_p}{x - x_p}\right) \quad (2.24)$$

La solution fondamentale singulière $w(r, \theta) = w(A, P)$ peut donc être exprimée comme suit :

$$w(r, \theta) = \frac{1}{8\pi} \{C_1 R_1(r, \theta) + C_2 R_2(r, \theta) + C_3 (S_1(r, \theta)) - (S_1(r, \theta))\} \quad (2.25)$$

Où

$$\begin{aligned} R_k(r, \theta) &= r^2 [(\cos \theta + d_k \sin \theta)^2 - e_k^2 \sin^2 \theta] \left\{ \ln \left[\frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_k \sin \theta)^2 + e_k^2 \sin^2 \theta) \right] - 3 \right\} \\ &- 4r^2 e_k \sin \theta (\cos \theta + d_k \sin \theta) \arctan\left(\frac{e_k \sin \theta}{\cos \theta + d_k \sin \theta}\right) \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} S_k(r, \theta) &= r^2 e_k \sin \theta (\cos \theta + d_k \sin \theta) \left\{ \ln \left[\frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_k \sin \theta)^2 + e_k^2 \sin^2 \theta) \right] - 3 \right\} \\ &+ r^2 [(\cos \theta + d_k \sin \theta)^2 - e_k^2 \sin^2 \theta] \arctan\left(\frac{e_k \sin \theta}{\cos \theta + d_k \sin \theta}\right) \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Et, en coordonnées cartésiennes, on aura cette solution fondamentale singulière $w(x, y) = w(A, P)$ exprimée comme suit :

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \{C_1 R_1(x, y) + C_2 R_2(x, y) + C_3 (S_1(x, y) - (S_1(x, y)))\} \quad (2.28)$$

où

$$R_k(x, y) = [(x + d_k y)^2 - e_k^2 y^2] \left\{ \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] - 3 \right\} - 4e_k y (x + d_k y) \arctan \left(\frac{e_k y}{(x + d_k y)} \right) \quad k = 1, 2 \quad (2.29)$$

$$S_k(r, \theta) = e_k y (x + d_k y) \left\{ \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] - 3 \right\} + [(x + d_k y)^2 - e_k^2 y^2] \arctan \left(\frac{e_k y}{(x + d_k y)} \right) \quad k = 1, 2 \quad (2.30)$$

avec

$$C_1 = \frac{(d_1 - d_2)^2 - (e_1^2 - e_2^2)}{GH e_1}$$

$$C_2 = \frac{(d_1 - d_2)^2 + (e_1^2 - e_2^2)}{GH e_2} \quad (2.31)$$

$$C_3 = \frac{4(d_1 - d_2)^2}{GH}$$

et

$$G = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 + e_2)^2$$

$$H = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 - e_2)^2 \quad (2.32)$$

Il faut noter que, dans les fonctions $R_k(r, \theta)$ et $S_k(r, \theta)$, le coefficient a est une constante arbitraire pour notre méthode. On peut toujours choisir, par exemple, que $a = 1$ (De ce fait, la valeur de a ne modifie pas la solution numérique).

Remarque : Pour l'analyse structurale des plaques (éléments surfaciques plans), il est plus de travailler :

- ⚡ En coordonnées cartésiennes pour une dalle rectangulaire ;
- ⚡ Et en coordonnées cylindriques ou polaires pour le cas circulaire.

Le passage de l'un des deux systèmes de coordonnées vers l'autre se faisant aisément.

2.2.3. Le champ de déplacements et les efforts internes en un point interne du domaine Ω de la dalle

Les déplacements v et les efforts internes dans un sens donné sont uniquement fonction de w et de ces dérivées directionnelles partielles.

- ⚡ En coordonnées cartésiennes, le champ de déplacements v et les efforts internes ($Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$) s'expriment :

$$v = \begin{pmatrix} w(x, y) \\ -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$Q_x = - \left(D_{11} \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} \right)$$

$$Q_y = - \left(D_{16} \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} \right)$$

⊕ En coordonnées cylindriques, le champ de déplacements v s'exprime :

$$v = \begin{pmatrix} w(r, \theta) \\ -\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \\ -\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Et, pour les efforts internes ($Q_r, Q_\theta, M_r, M_\theta, M_{r\theta}$), il faut d'abord déterminer $Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$ à partir de $w(r, \theta)$. Pour cela, on utilise la relation (2.36) pour dériver, suivant le système cartésien, n'importe quelle fonction $h(r, \theta)$ dérivable exprimée en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(r, \theta)}{\partial x} &= \frac{\partial h(r, \theta)}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial h(r, \theta)}{\partial \theta} \sin \theta \\ \frac{\partial h(r, \theta)}{\partial y} &= \frac{\partial h(r, \theta)}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial h(r, \theta)}{\partial \theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.36)$$

Par conséquent, on peut calculer $Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$ (exprimés en fonction de r et θ) et on déduit $Q_r, Q_\theta, M_r, M_\theta, M_{r\theta}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} M_r &= M_x \cos^2 \theta + M_y \sin^2 \theta + 2 * M_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ M_{r\theta} &= M_x \cos \theta \sin \theta + M_y \cos \theta \sin \theta + M_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ M_\theta &= M_x \sin^2 \theta + M_y \cos^2 \theta - 2 * M_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ Q_r &= Q_x \cos \theta + Q_y \sin \theta \\ Q_\theta &= -Q_x \sin \theta + Q_y \cos \theta \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.2.4. Définitions des vecteurs déplacements v_e et de tractions t_e (ou forces équivalentes de bord)

Les tractions Q_n, M_{nx} et M_{ny} (figure 2.6) sont exprimées suivant le système local d'axes cartésiens de l'élément et

$$v_e = \begin{pmatrix} w(x, y) \\ -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t_e = \begin{pmatrix} Q_n \\ M_{nx} \\ M_{ny} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

avec

$$\begin{aligned}
 Q_n &= Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \\
 M_{nx} &= M_x \cos \alpha + M_{xy} \sin \alpha \\
 M_{ny} &= M_y \sin \alpha + M_{xy} \cos \alpha
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

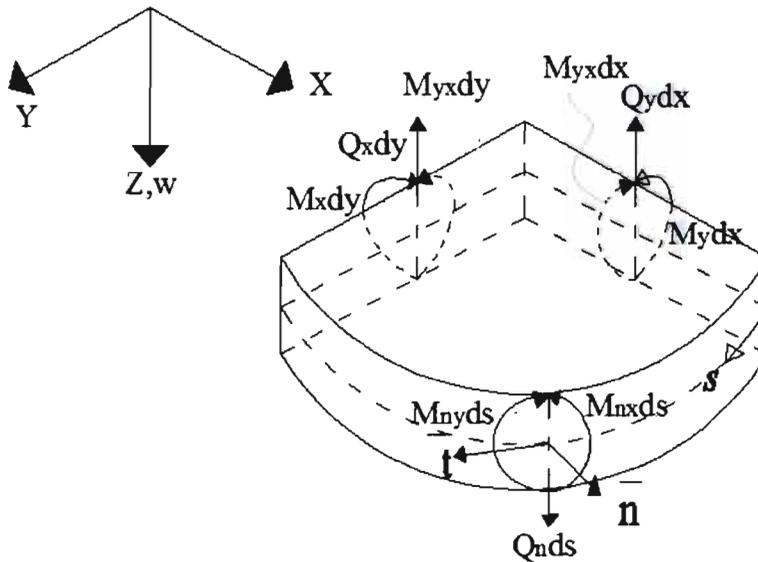


Figure 2.6 : Définition des tractions de bord d'un élément de plaque en flexion (les tractions sont exprimées suivant un système de référence fixe).

2.2.5. Conditions de bord

Sur les cotés considérés comme appuis fixes : $w = 0$ $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$

Sur les cotés simplement appuyés : $w = 0$ $M_n = 0$ (2.40)

Sur les cotés libres : $M_n = 0$ $V_n = 0$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normale extérieure à la frontière Γ , et M_n , V_n sont respectivement le moment fléchissant normal et l'effort tranchant équivalent de Kirchhoff sur la frontière Γ .

2.2.6. Applications pratiques : Déterminations des déplacements et des efforts internes

✚ Cas de l'isotrope

L'isotropie est un cas particulier et relativement simple à traiter car les propriétés de la structure restent constante quelle que soit la direction considérée.

Pour un élément plan comme une dalle mince, la matrice d'élasticité D_e est creuse et se présente sous la forme :

$$D_e = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

avec E : module de YOUNG ; ν : coefficient de POISSON ; t : épaisseur de la dalle.

Pour notre application, nous prendrons : E = 10 000 ; $\nu = 0,3$; t = 0,1.

L'application se fera sur une dalle carrée de côté 1m et une dalle circulaire de rayon 1m. Les courbes montrant l'allure des déformations et efforts internes au voisinage du point d'application de la charge concentrée font l'objet des annexes III-1 (dalle carrée isotrope) et III-2 (dalle circulaire isotrope).

✚ Cas de l'orthotrope

L'orthotropie est un état intermédiaire entre l'isotropie (relativement simple à traiter) et l'anisotropie (assez complexe). Les propriétés élastiques de dalles orthotropes sont différentes dans deux directions perpendiculaires (x, y). Le comportement de ces dalles est défini par quatre caractéristiques élastiques (les deux modules de YOUNG : E_x , E_y et les deux coefficients de POISSON : ν_x , ν_y). Pour un élément plan comme une dalle mince, la matrice d'élasticité D_e est creuse et se présente sous la forme :

$$D_e = \begin{bmatrix} D_x & \frac{1}{2}(D_1 + D_2) & 0 \\ \frac{1}{2}(D_1 + D_2) & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

et ces coefficients dépendent du type d'orthotropie (naturelle ou technique) du matériau.

Pour notre application, nous considérerons l'orthotropie naturelle avec :

$$E_y = 10\,000 ; \nu_y = 0,3 ; t = 0,1.$$

Ainsi, les coefficients s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} D_x &= nD_y & D_y &= \frac{E_y t^3}{12(1 - n\nu_y^2)} \\ D_1 &= D_2 = n\nu_y D_y & \text{et} & & D_{xy} &= m(1 - n\nu_y^2)D_y \\ n &= \frac{E_x}{E_y} & \text{et} & & m &= \frac{G_{xy}}{E_y} = \frac{1}{(1 + \nu_y)} \end{aligned}$$

G_{xy} étant le module d'élasticité en cisaillement. On a pris arbitrairement $n = 1,5$.

L'application se fera sur une dalle carrée de côté 1m et une dalle circulaire de rayon 1m. Les courbes montrant l'allure des déformations et efforts internes au voisinage du point d'application de la charge concentrée font l'objet des annexes III-3 (dalle carrée orthotrope) et III-4 (dalle circulaire orthotrope).

2.2.7. Commentaire sur la singularité due à la charge ponctuelle

La charge concentrée pourrait induire une instabilité au niveau de la structure en faisant tendre les forces internes et les déplacements (donc les champs de contraintes et de déformations) vers l'infini lorsqu'on se rapproche de la charge et par conséquent l'énergie interne U aussi. Rappelons que :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega$$

Or, les efforts internes et les déplacements dépendent de la déflexion et des dérivées partielles donc de \mathbf{R}_k , \mathbf{S}_k et leurs dérivées. En nous référant à l'annexe II, nous pouvons affirmer que l'instabilité due à la singularité ne pourra se ressentir qu'au niveau des efforts

de cisaillement Q_x et Q_y ou Q_r et Q_θ (voir annexe III). Les cisaillements prennent des proportions extraordinaires (vers l'infini) au voisinage du point où est appliquée la charge concentrée.

2.3. TRAITEMENT DES CHARGES SECTORIELLES ET LINEAIRES

Nous avons remarqué que les éléments des vecteurs déplacements et de forces internes (les efforts tranchants, les moments internes) s'expriment en fonction des dérivées de w qui s'écrivent sous les formes suivantes (voire Annexes II) :

$$X^n Y^m \ln r ; \frac{X^n Y^m}{r^2} ; \frac{X^n Y^m}{r^4} ; X^n Y^m \arctan \left(\frac{\alpha X + \beta Y}{\gamma X + \eta Y} \right)$$

Pour les charges linéaires ou sectorielles appliquées (figure 2.4), la solution singulière et ses dérivées sont obtenues en intégrant celles de la charge ponctuelle.

Plusieurs techniques d'intégrations peuvent être utilisées pour calculer de manière précise ces intégrales. Ici, le théorème de la divergence sera choisi pour transformer de telles intégrales de surface en intégrales de bord (plus facile à programmer et avec une meilleure précision).

2.3.1. Utilisation du théorème de la divergence

Le théorème de la divergence, tel qu'il a été utilisé dans ce document, se présente comme suit :

*Soit une fonction f définie de R^N vers R , l'intégrale sur un domaine Ω de $f * \vec{x}$ est égal à la circulation de $f * \vec{x} \cdot \vec{n}$ sur la frontière Γ de Ω c'est-à-dire :*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [f(x) * \vec{x}] d\Omega = \int_{\Gamma} [f(x) * \vec{x} \cdot \vec{n}] d\Gamma$$

avec \mathbf{n} : vecteur normal extérieur en tout point du contour Γ de vecteur position x .

Pour une charge sectorielle appliquée sur une partie de la dalle, il faudra intégrer, sur tout le domaine occupé par cette charge répartie, les expressions précédentes obtenues avec une

charge ponctuelle : on va donc manipuler des intégrales de surface de la solution singulière fondamentale w et de ses dérivées.

Le théorème de la divergence ou théorème de Gauss est une méthode directe permettant de transformer les intégrales de surface de **certaines fonctions** en intégrales sur les bords. En effet, cette loi ne s'applique pas, de manière intéressante, à toutes les intégrales : les fonctions convenables appelées fonctions homogènes ([8] et [9]) doivent vérifier des conditions spécifiques.

2.3.1.1. Définition d'une fonction homogène

On dit qu'une fonction f définie de \mathbb{R}^N vers \mathbb{R} est homogène de degré α si :

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^\alpha f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

Exemple : les fonctions de la forme $f(\lambda \mathbf{x}) = f(X, Y) = X^n Y^m$ de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} sont des fonctions homogènes de degré $(n+m)$ car :

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x}) &= f(\lambda(X, Y)) = (\lambda X)^n (\lambda Y)^m = \lambda^{n+m} (X^n Y^m) \\ &= \lambda^{n+m} f(X, Y) = \lambda^{n+m} f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.3.1.2. Utilité du théorème de la divergence

Les intégrales de w , R_k et S_k et de leurs dérivées sur un domaine Ω de frontière Γ sont donc de la forme :

$$I_1 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} f: \text{fonction homogène de degré } \alpha \\ \mathbf{x} = (X; Y) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } \vec{\mathbf{x}} = X\vec{i} + Y\vec{j} \end{array} \right.$$

$$I_2 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \ln r d\Omega \quad \text{où} \quad r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$I_3 = \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x})}{r^\beta} d\Omega$$

$$I_4 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\Omega \quad \text{où} \quad p(\mathbf{x}) = \ln [(X + d_k Y)^2 + e_k^2 Y^2]$$

$$I_5 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Omega \quad \text{où} \quad q(\mathbf{x}) = \arctan \left(\frac{e_y Y}{X + d_k Y} \right)$$

2.3.2. Résultats généraux des transformations

Grâce au théorème de Green, la transformation de ces types d'intégrales de surface en intégrales sur les bords a fourni les résultats suivants (pour les preuves, se référer à l'annexe D). Les intégrales de surface de l'ensemble des fonctions ont été transformées, par la méthode exposée ci-dessus, en intégrales du bord et constituent la bibliothèque de fonctions de l'annexe IV.

Conditions	Intégrales de surface	Intégrales sur le bord
$N + \alpha \neq 0$	$I_1 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega$	$I_1 = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} d\Gamma$
$N + \alpha = 0$ $N = 2$	$I_1 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega$	$I_1 = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \ln r \vec{x} \cdot \vec{n} d\Gamma$
$N + \alpha \neq 0$	$I_2 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \ln r d\Omega$	$I_2 = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} \left[\ln r - \frac{1}{N + \alpha} \right] f(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} d\Gamma$
$N - \beta + \alpha \neq 0$	$I_3 = \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x})}{r^{\beta}} d\Omega$	$I_3 = \frac{1}{N - \beta + \alpha} \int_{\Gamma} \frac{f(\mathbf{x})}{r^{\beta}} \vec{x} \cdot \vec{n} d\Gamma$
$N + \alpha \neq 0$	$I_4 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\Omega$	$I_4 = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} \left[p(\mathbf{x}) - \frac{2}{N + \alpha} \right] f(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} d\Gamma$
$N + \alpha \neq 0$	$I_5 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\Omega$	$I_5 = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} d\Gamma$

Tableau 2.1 : Transformations des différents types d'intégrales de surface

en intégrales de bord.

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

La finalité de ce Projet était de contribuer au traitement, par la méthode de Trefftz (notamment grâce à la formulation générale de l'élément HT), des singularités de charges appliquées sur une dalle anisotropes. L'analyse structurale de ce type de plaque revêt une importante envergure à l'état actuel de la recherche en ingénierie civile : elle doit relever deux défis à l'occurrence l'anisotropie de la structure en question et la discontinuité de son chargement. Rares sont les scientifiques et ingénieurs qui se sont frottés à ce type de problème.

Dans ce document, nous avons, d'abord, donné une présentation des dalles, des charges singulières, et de la méthode des éléments finis ainsi qu'une formulation de l'élément hybride-Trefftz HT basée sur la minimisation de la norme énergétique de la différence entre les deux champs (internes et conformes) de déplacements et l'application de cette modélisation aux plaques minces. Ensuite, la solution singulière de l'équation fondamentale de Kirchhoff des dalles anisotropes a été énoncée. De ce fait, la solution w pour une charge sectorielle ou linéique est déduite en intégrant celle de la force ponctuelle sur le domaine recevant le chargement. Enfin, pour une charge sectorielle, la bibliothèque complète des intégrales de surface transformées en intégrales de bord (plus facile à programmer et avec une meilleure précision) a été créée pour l'ensemble des fonctions intervenant dans la solution singulière, dans le champ de déplacements et dans les efforts internes.

Il reste énormément à faire pour la solution du problème car notre travail n'a presque intervenu que sur les charges (détermination des forces équivalentes de bord ou tractions de bord et des déplacements de bord). Le raffinement de la détermination de ces champs de contour, l'évaluation de la matrice de rigidité, l'assemblage pour la résolution ainsi que l'implémentation sur C++ voire même sur Visual C++ de leurs différents résultats constituent, tous, des Projets de Fin d'Etude aussi intéressants et importants les uns que les autres.

Cependant, comme il a été mentionné ci-dessus, ce problème est complexe et peu de chercheurs s'y aventurent. Certes, il faudrait plus qu'un projet de fin d'études pour le traiter intégralement. Il nous a, cependant, permis d'enrichir nos connaissances sur les notions de plaques et dalles, de singularités de charges et de comprendre l'influence de certaines hypothèses simplificatrices qui idéalisent les problèmes et amoindrissent les difficultés de résolution.

Ce sujet de recherche recèle, sans conteste, des connaissances substantifiques dans le domaine des structures surtout lorsqu'on s'intéresse aux problèmes dynamiques des plaques et plus loin de coques soumises à des charges singulières surtout concentrées.

BIBLIOGRAPHIE et WEBIOBIOGRAPHIE

- [1] Moustapha NDIAYE, « *La Méthode des éléments finis appliquée à l'analyse des structures et des solides, Cours de structures II* », Ecole polytechnique de Thiès.
- [2] Moustapha NDIAYE, « *Modèle d'élément fini pour la solution des planchers-dalles, des dalles champignons et des dalles orthotropes* », thèse N° 966 (1991), Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [3] Edmond HAURIE, « *Analyse appliquée I* », 8^e édition revue et corrigée par G. Garneau. Ecole Polytechnique de Montréal.
- [4] J.L. BATOZ et G. DHATT, « *Modélisation des structures par éléments finis, poutres et plaques* », Edition Hermès, 1990.
- [5] O. A. GOUDIABY et B. LY, « *Utilisation des éléments surfaciques dans l'analyse structurale* », projet de fin d'étude 2006, Ecole Supérieure Polytechnique, 2006.
- [6] O. C. ZIENKIEWICZ, « *The Finite Element Method 3rd Edition* », England Mc Graw - Hill 1978
- [7] G. SHI and G. BEZINE, « *A General Boundary Integral Formulation for the Anisotropic Plate Bending Problems* », Laboratoires de mécanique des solides (USA CNRS 861) 1980
- [8] Wilfred KAPLAN, « *Advanced Calculus Second Edition* », 1974, Addison-Wesley Publishing Company
- [9] H.L. PINA, « *The Evaluation of Domain integrals in the Boundary Element Method* », Communication in Applied Numerical Method, Instituto Superior Técnico Lisbon, Portugal 1980

<http://www.giref.ulaval.ca>

<http://www.wikipédia.org>

ANNEXES

**ANNEXE I : TRANSFORMATION DES INTEGRALES DE SURFACE EN
INTEGRALES DE BORD**

Quelques notations

$f(\mathbf{x}) = x^n y^m z^s$: fonction homogène de degré $\alpha = m + n + s$

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in R^3 \text{ ou } \mathbf{x} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

n : vecteur unitaire normal extérieur de la frontière Γ du domaine Ω

$$r(\mathbf{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Démonstration de :

$$I_1 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

f étant une fonction homogène de degré α donc :

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^{\alpha} f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in R^N, \forall \lambda \in R \quad (\text{A-1.1})$$

Ainsi :

$$\nabla f(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(\mathbf{x}), \quad \text{avec } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \text{ pour } N = 3 \quad (\text{A-1.2})$$

En prenant $\lambda = 1$, on obtient la relation d'Euler pour les fonctions homogènes :

$$\nabla f(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{x}) \quad (\text{A-1.3})$$

En utilisant l'identité suivante :

$$\nabla \cdot (f(\mathbf{x}) \mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + f(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A-1.4})$$

Avec la propriété (A-1.3) et en remarquant que $\nabla \cdot \mathbf{x} = N$, nous obtenons :

$$\nabla \cdot (f(\mathbf{x}) \mathbf{x}) = (N + \alpha)f(\mathbf{x}) \quad (\text{A-1.5})$$

Par conséquent le théorème de la divergence donne :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (f(\mathbf{x}) \mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = (N + \alpha) \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (\text{A-1.6})$$

où \mathbf{n} représente le vecteur normal extérieur en un point \mathbf{x} de la frontière Γ du domaine Ω .

Si $N + \alpha \neq 0$, on en déduit immédiatement que :

$$I_1 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (\text{A-1.7})$$

Cas où $N + \alpha = 0$

Nous pouvons utiliser la relation (A-2.3) qui devient :

$$\nabla \cdot [f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x}] = f(\mathbf{x}) \quad (\text{A-1.8})$$

En intégrant membre à membre et utilisant le théorème de la divergence, on aboutit à :

$$I_1 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{A-1.9})$$

où f : fonction homogène de degré $\alpha = -N$

Démonstration de :

$$I_2 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \ln r d\Omega = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} \left[\ln r - \frac{1}{N + \alpha} \right] f(\mathbf{x}) \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\Gamma$$

On sait que :

$$\nabla \cdot \ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \frac{1}{r(\mathbf{x})} \nabla r(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + \ln r(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A-2.1})$$

Or,

$$\nabla r(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \right) \cdot (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$$

$$\text{C'est - à - dire } \frac{1}{r(\mathbf{x})} \nabla r(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{1}$$

Sachant que $\nabla \bullet \mathbf{x} = N$, la relation (A-2.1) devient :

$$\nabla \bullet (\ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x}) = 1 + N \ln r(\mathbf{x}) \quad (\text{A-2.2})$$

Maintenant, en dérivant les expressions suivantes et en utilisant les relations (A-1.3) et (A-2.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla \bullet [f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x}] &= f(\mathbf{x}) \nabla \bullet [\ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x}] + (\nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}) (1 + N \ln r(\mathbf{x})) + \alpha f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\nabla \bullet [f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x}] = f(\mathbf{x}) + (N + \alpha) f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \quad (\text{A-2.3})$$

En intégrant membre à membre les termes de cette relation et en utilisant le théorème de la divergence, on a :

$$(N + \alpha) \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (\text{A-2.4})$$

En substituant le dernier terme du membre de droite à l'aide de la relation (A-1.7), et on tire, pour $N + \alpha \neq 0$:

$$(N + \alpha) \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \ln r d\Omega = \int_{\Gamma} \left[f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} - \frac{1}{N + \alpha} f(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} \right] d\Gamma \quad (\text{A-2.5})$$

Et finalement

$$I_2 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} \left[f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} - \frac{1}{N + \alpha} f(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} \right] d\Gamma \quad (\text{A-2.6})$$

On peut étendre ce résultat aux intégrales de surface de la forme :

$$I_2 = \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x})}{r^{\beta}(\mathbf{x})} \ln r d\Omega \quad (\text{A-2.7})$$

Posons : $g(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{r^\beta(\mathbf{x})}$

On remarque que $g(\mathbf{x})$ est une fonction homogène de degré $\alpha - \beta$

Ainsi, en utilisant la relation (A-2.6), on arrive à :

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{N-\beta+\alpha} \int_{\Gamma} \left[f(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} - \frac{1}{N-\beta+\alpha} f(\mathbf{x}) \vec{x} \cdot \vec{n} \right] d\Gamma \quad (\text{A-2.8})$$

Démonstration de :

$$I_3 = \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x})}{r^\beta} d\Omega = \frac{1}{N-\beta+\alpha} \int_{\Gamma} \frac{f(\mathbf{x})}{r^\beta} \vec{x} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{f(\mathbf{x})}{r^\beta(\mathbf{x})} \mathbf{x} \right) &= \nabla \cdot (f(\mathbf{x}) r^{-\beta}(\mathbf{x}) \mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}) \nabla \cdot (r^{-\beta}(\mathbf{x}) \mathbf{x}) + (\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}) r^{-\beta}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A-3.1})$$

$$\nabla \cdot (r^{-\beta}(\mathbf{x}) \mathbf{x}) = r^{-\beta}(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{x} + \nabla r^{-\beta}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = N r^{-\beta}(\mathbf{x}) - \beta r^{-\beta}(\mathbf{x}) \quad (\text{A-3.2})$$

En utilisant la relation (A-1.5), l'expression (A-3.1) devient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{f(\mathbf{x})}{r^\beta(\mathbf{x})} \mathbf{x} \right) &= f(\mathbf{x}) [N r^{-\beta}(\mathbf{x}) - \beta r^{-\beta}(\mathbf{x})] + \alpha f(\mathbf{x}) r^{-\beta}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{f(\mathbf{x})}{r^\beta(\mathbf{x})} (N + \alpha - \beta) \end{aligned} \quad (\text{A-3.3})$$

En intégrant membre à membre les termes de cette relation et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient pour $N + \alpha - \beta \neq 0$:

$$I_3 = \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x})}{r^{\beta}} d\Omega = \frac{1}{N-\beta+\alpha} \int_{\Gamma} \frac{f(\mathbf{x})}{r^{\beta}} \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (\text{A-3.4})$$

Cas où $N + \alpha - \beta = 0$

Sachant que, si $f(\mathbf{x})$ est une fonction homogène de degré α alors $f(\mathbf{x})r^{-\beta}(\mathbf{x})$ est homogène de degré $\alpha - \beta$, on peut user de l'artifice :

$$\begin{aligned} \nabla \bullet [(f(\mathbf{x})r^{-\beta}(\mathbf{x})) \ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x}] &= (f(\mathbf{x})r^{-\beta}(\mathbf{x})) \nabla \bullet [\ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x}] + (\nabla (f(\mathbf{x})r^{-\beta}(\mathbf{x})) \bullet \mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \\ &= (f(\mathbf{x})r^{-\beta}(\mathbf{x})) (1 + N \ln r(\mathbf{x})) + (\alpha - \beta) (f(\mathbf{x})r^{-\beta}(\mathbf{x})) \ln r(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\nabla \bullet [(f(\mathbf{x})r^{-\beta}(\mathbf{x})) \ln r(\mathbf{x}) \mathbf{x}] = (f(\mathbf{x})r^{-\beta}(\mathbf{x})) + (N + \alpha - \beta) f(\mathbf{x})r^{-\beta}(\mathbf{x}) \ln r(\mathbf{x}) \quad (\text{A-3.5})$$

En intégrant membre à membre les termes de cette relation et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient pour $N + \alpha - \beta = 0$:

$$N - \beta + \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_3 = \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x})}{r^{\beta}} d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{f(\mathbf{x})}{r^{\beta}} \ln r \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (\text{A-3.6})$$

Démonstration de :

$$I_4 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} \left[p(\mathbf{x}) - \frac{2}{N + \alpha} \right] f(\mathbf{x}) \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\Gamma$$

En calculant le produit scalaire du gradient de $p(\mathbf{x})$ par le vecteur-position \mathbf{x} , on trouve :

$$\nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 2 \quad (\text{A-4.1})$$

Donc,

$$\nabla \cdot [p(\mathbf{x}) \mathbf{x}] = p(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{x} + \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = Np(\mathbf{x}) + 2 \quad (\text{A-4.2})$$

Par conséquent, la divergence suivante se réduit à :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \mathbf{x}] &= f(\mathbf{x}) \cdot \nabla [p(\mathbf{x}) \mathbf{x}] + (\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}) (Np(\mathbf{x}) + 2) + \alpha f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot [f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \mathbf{x}] = 2f(\mathbf{x}) + (N + \alpha)f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \quad (\text{A-4.3})$$

En intégrant membre à membre les termes de cette relation et en utilisant le théorème de la divergence, on a :

$$(N + \alpha) \int_{\Omega} f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - 2 \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (\text{A-4.4})$$

En substituant le dernier terme du membre de droite à l'aide de la relation (A-1.7), et on tire, pour $N + \alpha \neq 0$:

$$(N + \alpha) \int_{\Omega} f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} \left[f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \frac{2}{N + \alpha} f(\mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \right] d\Gamma \quad (\text{A-4.5})$$

Et finalement

$$I_4 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} \left[p(\mathbf{x}) - \frac{2}{N + \alpha} \right] f(\mathbf{x}) \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (\text{A-4.6})$$

Démonstration de :

$$I_5 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})q(\mathbf{x})d\Omega = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} f(\mathbf{x})q(\mathbf{x})\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{n}}d\Gamma$$

En calculant le produit scalaire du gradient de $q(\mathbf{x})$ par le vecteur-position \mathbf{x} , on trouve :

$$\nabla q(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{x} = 0 \quad (\text{A-5.1})$$

Donc,

$$\nabla \bullet [q(\mathbf{x}) \mathbf{x}] = q(\mathbf{x})\nabla \bullet \mathbf{x} + \nabla q(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{x} = Nq(\mathbf{x}) \quad (\text{A-5.2})$$

Par conséquent, la divergence suivante se réduit à :

$$\begin{aligned} \nabla \bullet [f(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \mathbf{x}] &= f(\mathbf{x}) \bullet \nabla [q(\mathbf{x}) \mathbf{x}] + (\nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{x})q(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x})Nq(\mathbf{x}) + \alpha f(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\nabla \bullet [f(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \mathbf{x}] = (N + \alpha)f(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \quad (\text{A-5.3})$$

Et finalement pour $N + \alpha \neq 0$:

$$I_5 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})q(\mathbf{x})d\Omega = \frac{1}{N + \alpha} \int_{\Gamma} f(\mathbf{x})q(\mathbf{x})\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{n}}d\Gamma \quad (\text{A-5.4})$$

ANNEXE II : DETERMINATION DES DERIVEES PARTIELLES

$$\frac{\partial R_k}{\partial x}(x, y) = 2(x + d_k y) \left\{ \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] - 2 \right\} - 4e_k y \arctan \left(\frac{e_k y}{x + d_k y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x, y) = 2 \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] \quad k = 1, 2$$

$$\frac{\partial^3 R_k}{\partial x^3}(x, y) = 4 \frac{x + d_k y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k}{\partial y}(x, y) &= 2(d_k x + (d_k^2 - e_k^2)y) \left\{ \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] - 2 \right\} \\ &\quad - 4e_k(x + 2d_k y) \arctan \left(\frac{e_k y}{x + d_k y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_k}{\partial y^2}(x, y) &= 2(d_k^2 - e_k^2) \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] \\ &\quad - 8e_k d_k \arctan \left(\frac{e_k y}{x + d_k y} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 R_k}{\partial y^3}(x, y) = 4 \frac{(d_k^3 - e_k^2 d_k)x + (d_k^4 - e_k^4)y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2}$$

$$\frac{\partial^2 R_k}{\partial x \partial y}(x, y) = 2d_k \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] - 4e_k \arctan \left(\frac{e_k y}{x + d_k y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = 4 \frac{d_k x + (d_k^2 + e_k^2)y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2}$$

$$\frac{\partial^2 R_k}{\partial y^2 \partial x}(x, y) = 4 \frac{(d_k^2 - e_k^2)x + d_k(d_k^2 - e_k^2)y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2}$$

$$\frac{\partial S_k}{\partial x}(x, y) = e_k y \left\{ \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] - 2 \right\} - 2(x + d_k y) \arctan \left(\frac{e_k y}{x + d_k y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2}(x, y) = 2 \arctan \left(\frac{e_k y}{x + d_k y} \right) \quad k = 1, 2$$

$$\frac{\partial^3 S_k}{\partial x^3}(x, y) = -2 \left(\frac{e_k y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_k}{\partial y}(x, y) &= e_k (x + d_k y) \left\{ \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] - 2 \right\} \\ &\quad - 2(d_k + (d_k^2 - e_k^2)y) \arctan \left(\frac{e_k y}{x + d_k y} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial y^2}(x, y) = 2d_k e_k \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] + 2(d_k^2 - e_k^2) \arctan \left(\frac{e_k y}{x + d_k y} \right)$$

$$\frac{\partial^3 S_k}{\partial y^3}(x, y) = -2e_k \left(\frac{x(3d_k^2 - e_k^2) + 2d_k(d_k^2 - e_k^2)y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} \right)$$

$$\frac{\partial S_k}{\partial x \partial y}(x, y) = e_k \ln \left[\frac{1}{a^2} ((x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2) \right] + 2d_k \arctan \left(\frac{e_k y}{x + d_k y} \right)$$

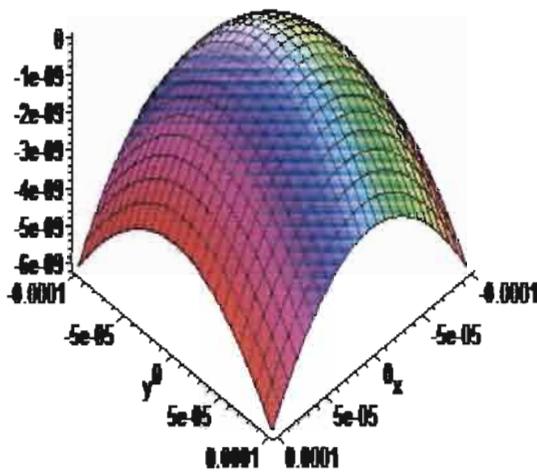
$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = 2 \left(\frac{e_k x}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x \partial y^2}(x, y) = 2e_k \left(\frac{2d_k x + (e_k^2 + e_k^2)y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} \right)$$

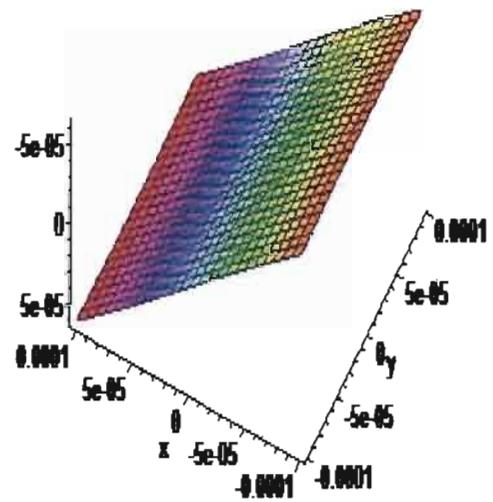
ANNEXE III: ALLURES DES DEPLACEMENTS ET DES EFFORTS INTERNES
AU VOISINAGE DE LA SINGULARITE

ANNEXE III-1 : CAS DE LA DALLE CARREE ISOTROPE

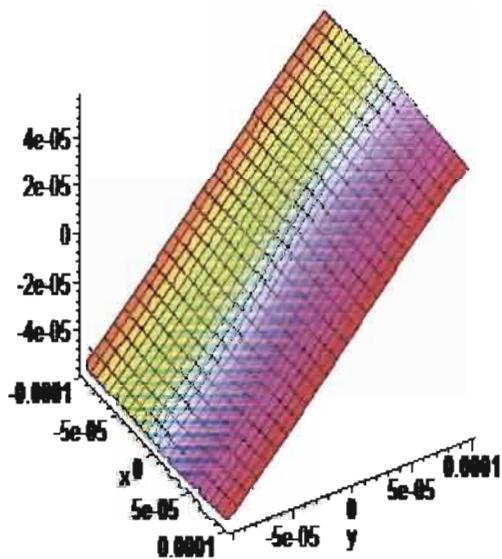
allure de w pour une dalle carrée isotrope



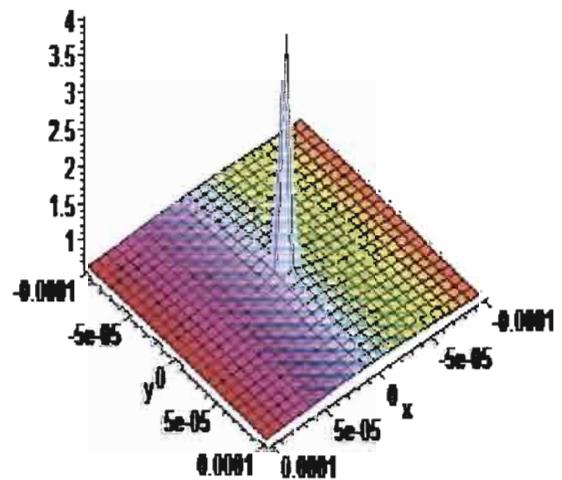
allure de $u(x)$ pour une dalle carrée isotrope



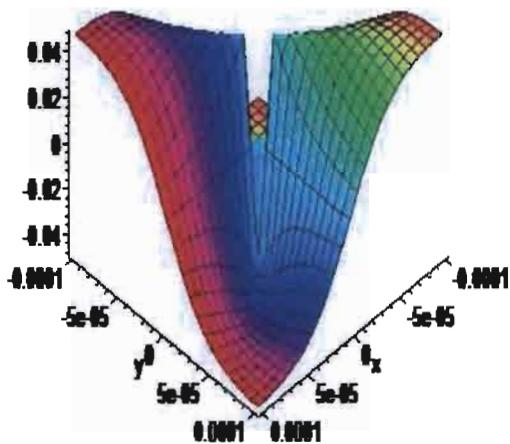
allure de $w(y)$ pour une dalle carrée isotrope



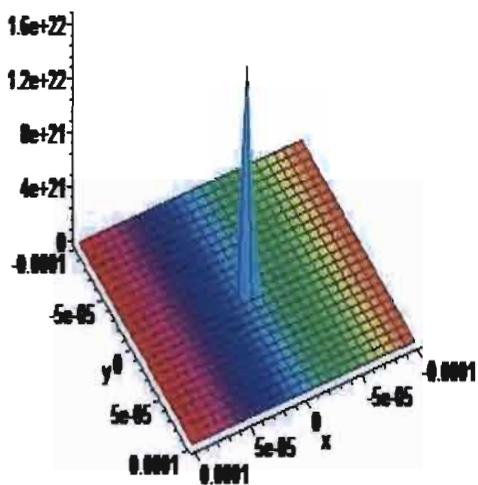
allure de $M(x)$ pour une dalle carrée isotrope



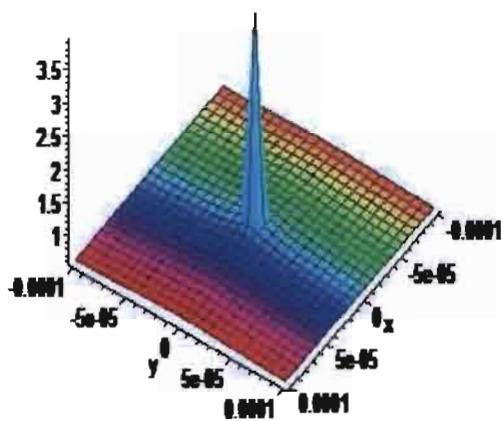
allure de $M(x,y)$ pour une dalle carrée isotrope



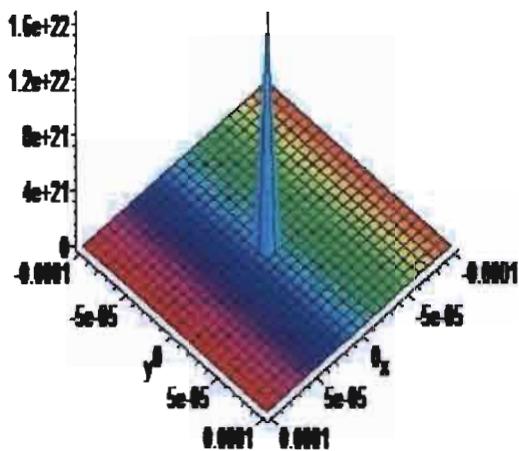
allure de $Q(x)$ pour une dalle carrée isotrope



allure de $M(y)$ pour une dalle carrée isotrope

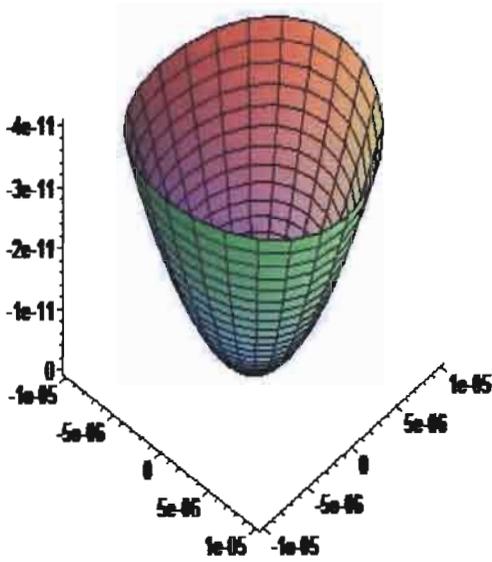


allure de $Q(y)$ pour une dalle carrée isotrope

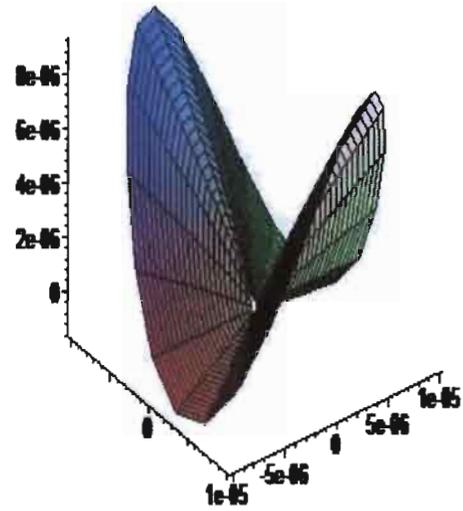


ANNEXE III-2 : CAS DE LA DALLE CIRCULAIRE ISOTROPE

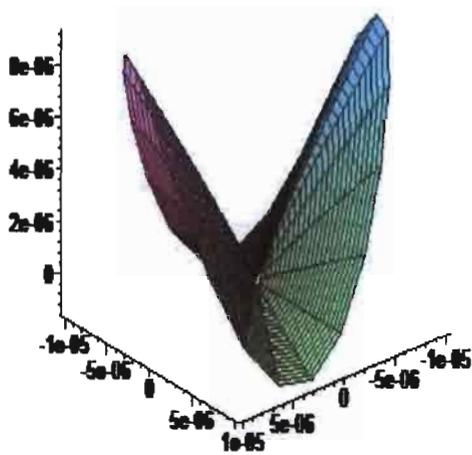
allure de w pour une dalle circulaire isotrope



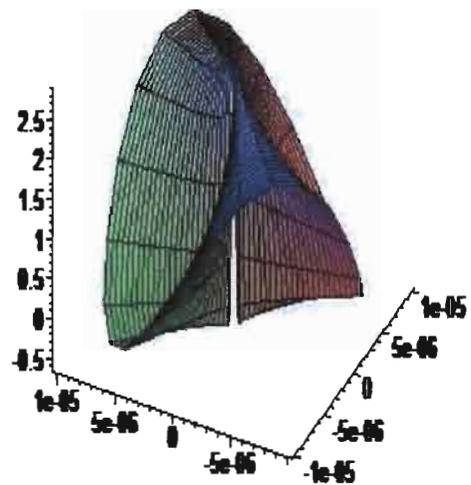
allure de $w(r)$ pour une dalle circulaire isotrope



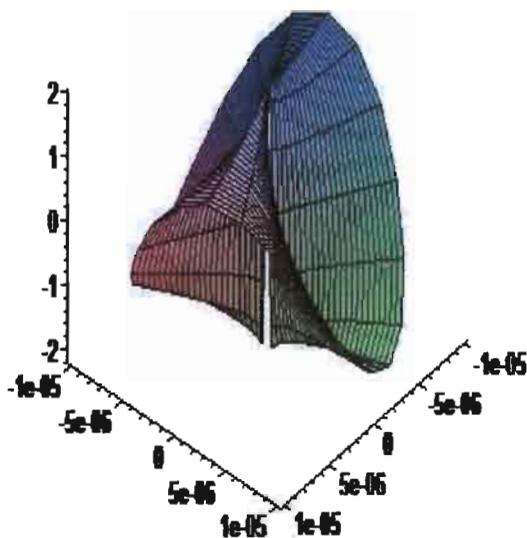
allure de $w(r)$ pour une dalle circulaire isotrope



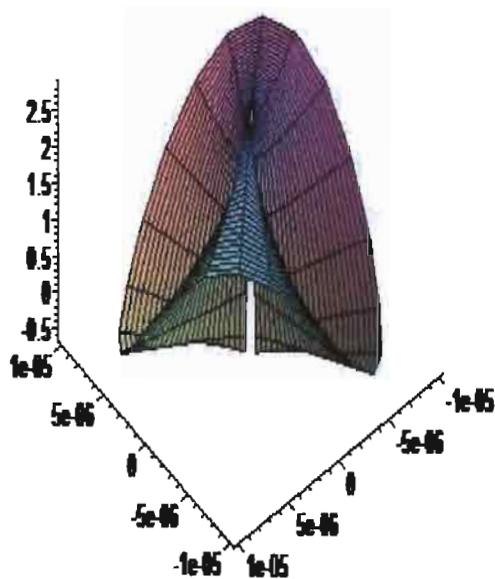
allure de $M(r)$ pour une dalle circulaire isotrope



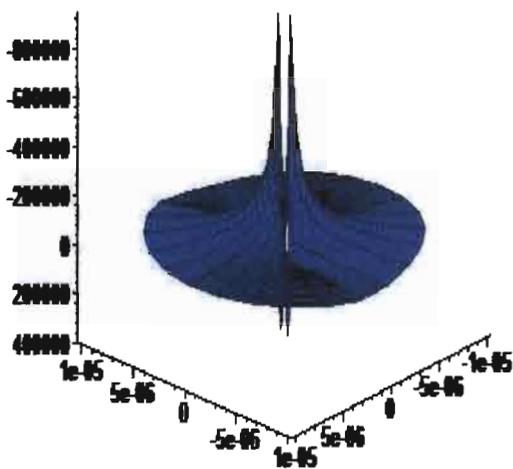
alure de $M(r, \theta)$ pour une dalle circulaire isotrope



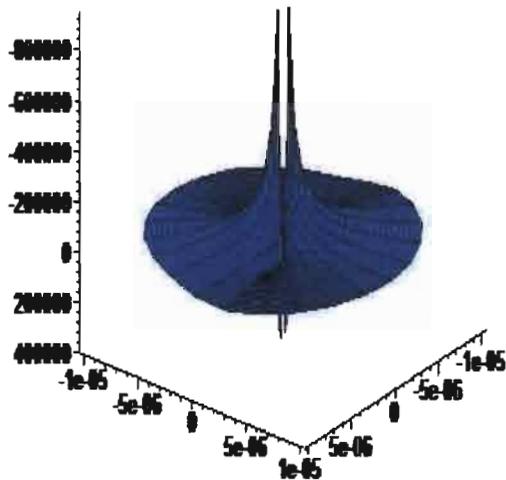
alure de $M(r, \theta)$ pour une dalle circulaire isotrope



alure de $Q(r)$ pour une dalle circulaire isotrope

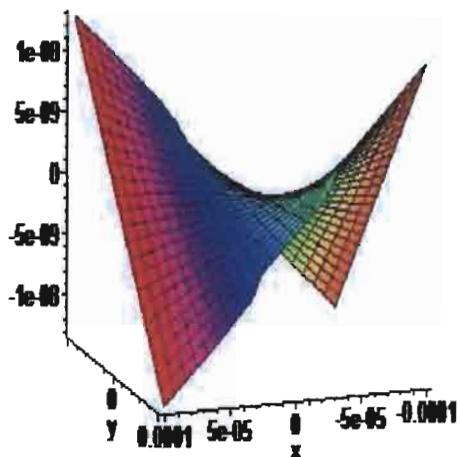


alure de $Q(r, \theta)$ pour une dalle circulaire isotrope

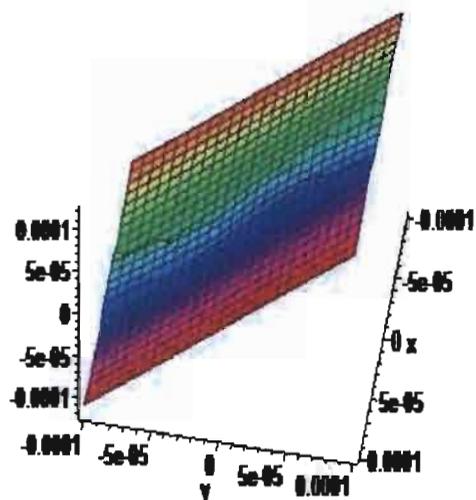


ANNEXE III-3 : CAS DE LA DALLE CARREE ORTHOTROPE

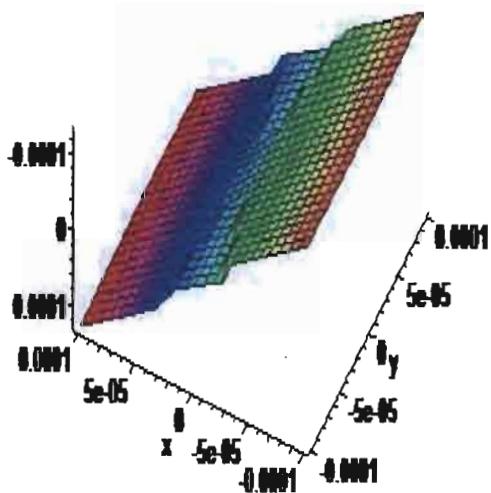
allure de w pour une dalle carree orthotrope



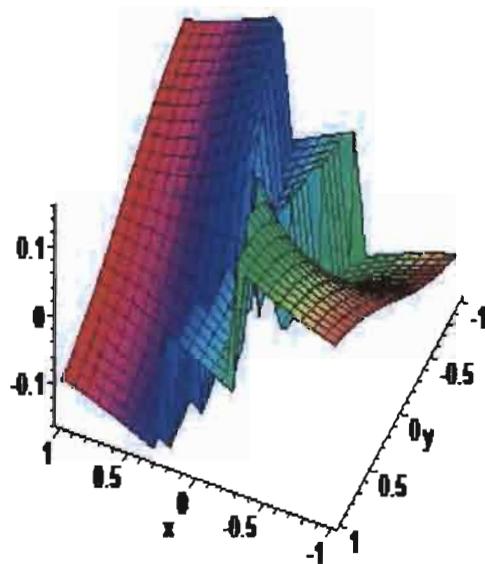
allure de $v(x)$ pour une dalle carree orthotrope



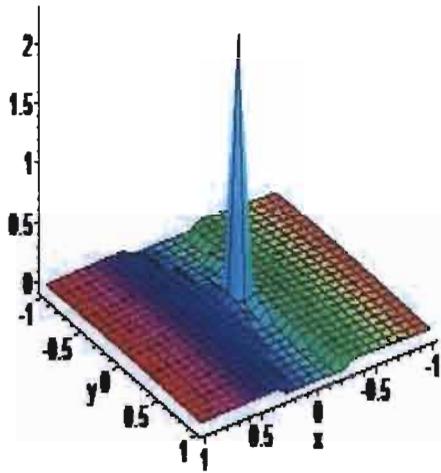
allure de $v(y)$ pour une dalle carree orthotrope



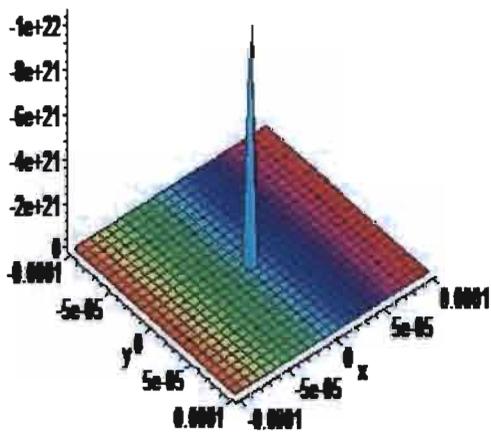
allure de $M(x)$ pour une dalle carree orthotrope



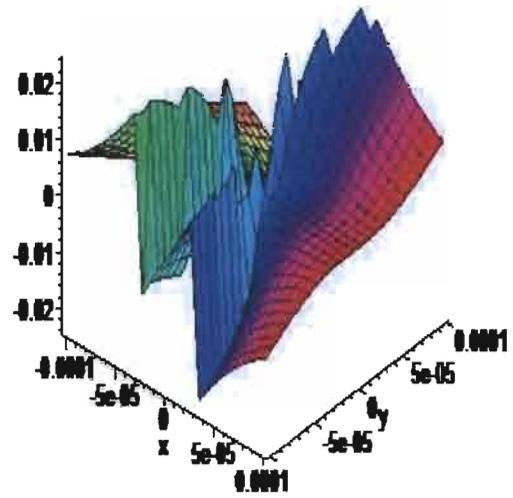
alure de $h(x,y)$ pour une dalle carrée orthotope



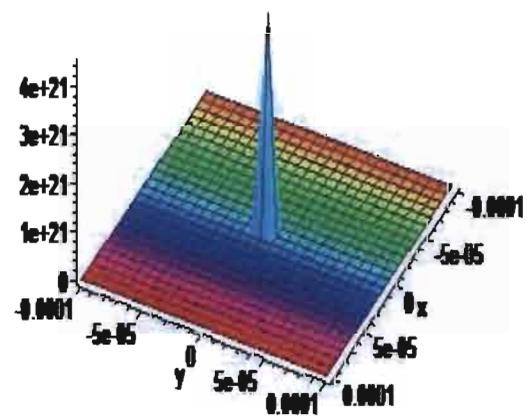
alure de $Q(x)$ pour une dalle carrée orthotope



alure de $h(y)$ pour une dalle carrée orthotope

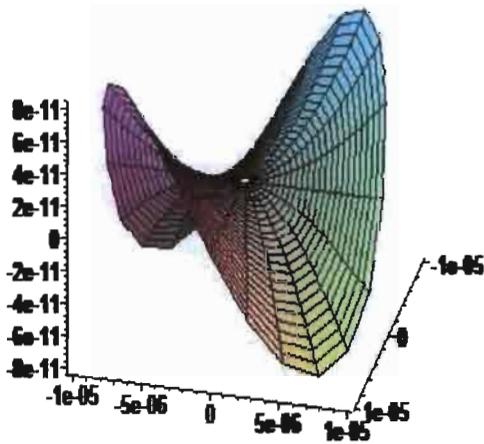


alure de $Q(y)$ pour une dalle carrée orthotope

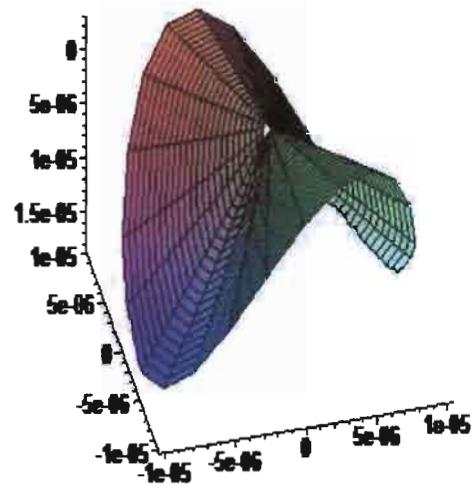


ANNEXE III-4 : CAS DE LA DALLE CIRCULAIRE ORTHOTROPE

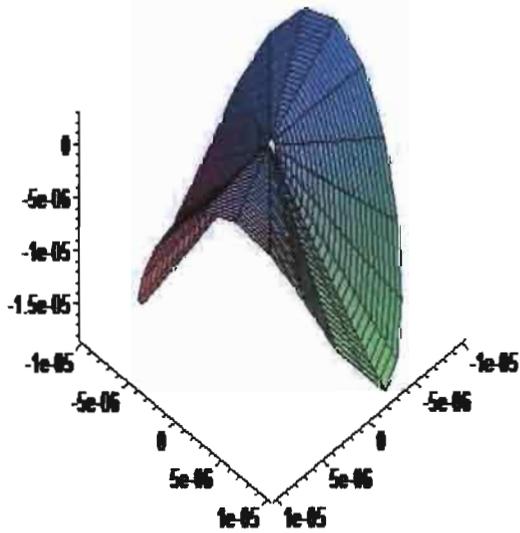
allure de w pour une dalle circulaire orthotrope



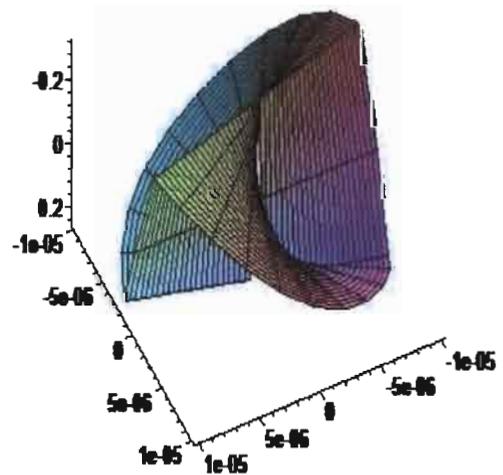
allure de $w[\theta]$ pour une dalle circulaire orthotrope



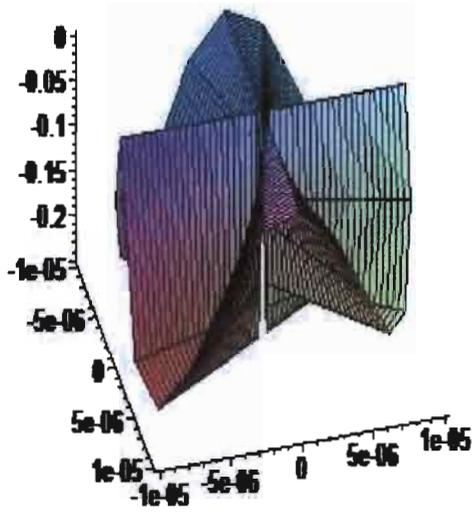
allure de $w[\rho]$ pour une dalle circulaire orthotrope



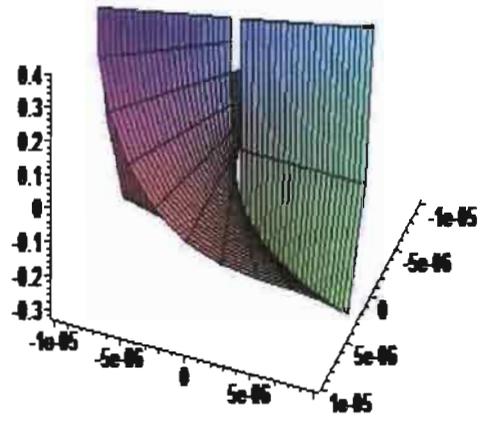
allure de $M[\theta]$ pour une dalle circulaire orthotrope



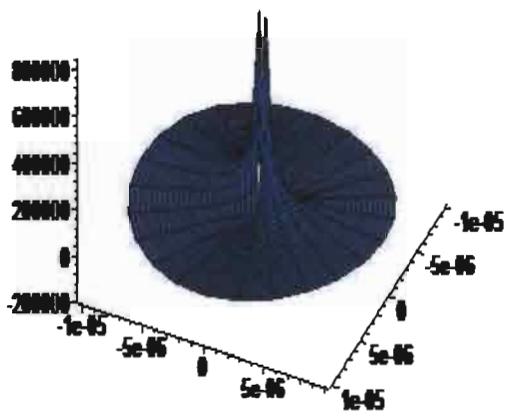
allure de $M(\rho, \eta)$ pour une dalle circulaire orthotrope



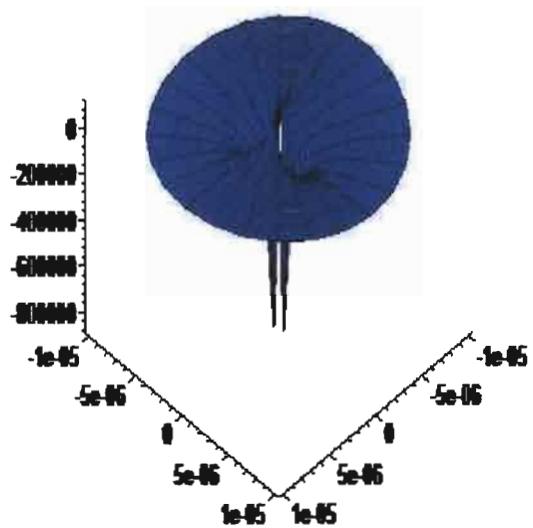
allure de $M(\rho, \eta)$ pour une dalle circulaire isotrope



allure de $Q(\rho, \eta)$ pour une dalle circulaire orthotrope



allure de $Q(\rho, \eta)$ pour une dalle circulaire isotrope



ANNEXE IV : BIBLIOTHEQUE DES INTEGRALES DE SURFACE TRANSFORMEES EN INTEGRALES DE BORD DE TOUTES LES FONCTIONS INTERVENANT DANS LA SOLUTION SINGULIERE FONDAMENTALE ET SES DERIVEES.

<i>Fonctions</i>	<i>Intégrales de surface</i>	<i>Intégrales de bord</i>
$-3(x + d_k y)^2$	$-3 \int_{\Omega} (x + d_k y)^2 d\Omega$	$-\frac{3}{4} \int_{\Gamma} (x + d_k y)^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$3e_k^2 y^2$	$3 \int_{\Omega} e_k^2 y^2 d\Omega$	$\frac{3}{4} \int_{\Gamma} e_k^2 y^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$(x + d_k y)^2 \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$\int_{\Omega} (x + d_k y)^2 \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$\frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left[\ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{4} \right] (x + d_k y)^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$-e_k^2 y^2 \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$-\int_{\Omega} e_k^2 y^2 \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$-\frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left[\ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{4} \right] e_k^2 y^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$

Bibliothèque des intégrales de surface transformées en intégrales de bord de toutes les fonctions intervenant dans la solution singulière fondamentale et ses dérivées.

$-4e_kxy \arctan\left(\frac{e_ky}{x+d_ky}\right)$	$-4 \int_{\Omega} e_kxy \arctan\left(\frac{e_ky}{x+d_ky}\right) d\Omega$	$-\frac{4}{4} \int_{\Gamma} e_kxy \arctan\left(\frac{e_ky}{x+d_ky}\right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$
$-4e_kd_ky^2 \arctan\left(\frac{e_ky}{x+d_ky}\right)$	$-4 \int_{\Omega} e_kd_ky^2 \arctan\left(\frac{e_ky}{x+d_ky}\right) d\Omega$	$-\frac{4}{4} \int_{\Gamma} e_kd_ky^2 \arctan\left(\frac{e_ky}{x+d_ky}\right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$
$-3e_kxy$	$-3 \int_{\Omega} e_kxy d\Omega$	$-\frac{3}{4} \int_{\Gamma} e_kxy \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$
$-3e_kd_ky^2$	$-3 \int_{\Omega} e_kd_ky^2 d\Omega$	$-\frac{3}{4} \int_{\Gamma} e_kd_ky^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$
$e_kxy \ln[(x+d_ky)^2 + e_k^2y^2]$	$\int_{\Omega} e_kxy \ln[(x+d_ky)^2 + e_k^2y^2] d\Omega$	$\frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left[[(x+d_ky)^2 + e_k^2y^2] - \frac{2}{4} \right] e_kxy \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$

Bibliothèque des intégrales de surface transformées en intégrales de bord de toutes les fonctions intervenant dans la solution singulière fondamentale et ses dérivées.

$e_k d_k y^2 \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$\int_{\Omega} e_k d_k y^2 \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$\frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left[[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{4} \right] e_k d_k y^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$(x + d_k y)^2 \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right)$	$\int_{\Omega} (x + d_k y)^2 \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) d\Omega$	$\frac{1}{4} \int_{\Gamma} (x + d_k y)^2 \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$-e_k^2 y^2 \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right)$	$-\int_{\Omega} e_k^2 y^2 \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) d\Omega$	$-\frac{1}{4} \int_{\Gamma} e_k^2 y^2 \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$-4x$	$-4 \int_{\Omega} x d\Omega$	$-\frac{4}{3} \int_{\Gamma} x \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$

Bibliothèque des intégrales de surface transformées en intégrales de bord de toutes les fonctions intervenant dans la solution singulière fondamentale et ses dérivées.

$-4d_k y$	$-4 \int_{\Omega} d_k y d\Omega$	$-\frac{4}{3} \int_{\Gamma} d_k y \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$-2x \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$-2 \int_{\Omega} x \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$-\frac{2}{3} \int_{\Gamma} \left[\ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{3} \right] x \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$-2d_k y \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$-2 \int_{\Omega} d_k y \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$-\frac{2}{3} \int_{\Gamma} \left[\ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{3} \right] d_k y \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$-4e_k y \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right)$	$-4 \int_{\Omega} e_k y \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) d\Omega$	$-\frac{4}{3} \int_{\Gamma} e_k y \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$2 \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$2 \int_{\Omega} \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$\frac{2}{2} \int_{\Gamma} \left[\ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{2} \right] \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$

Bibliothèque des intégrales de surface transformées en intégrales de bord de toutes les fonctions intervenant dans la solution singulière fondamentale et ses dérivées.

$4 \frac{x + d_k y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2}$	$4 \int_{\Omega} \frac{x + d_k y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} d\Omega$	$4 \int_{\Gamma} \frac{x + d_k y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$
$-4[d_k x + (d_k^2 - e_k^2)y]$	$-4 \int_{\Omega} [d_k x + (d_k^2 - e_k^2)y] d\Omega$	$-\frac{4}{3} \int_{\Gamma} [d_k x + (d_k^2 - e_k^2)y] \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$
$-4d_k x \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$-4 \int_{\Omega} d_k x \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$-\frac{4}{3} \int_{\Gamma} \left[\ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{3} \right] d_k x \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$
$-4(d_k^2 - e_k^2)y \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$-4 \int_{\Omega} (d_k^2 - e_k^2)y \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$-\frac{4}{3} \int_{\Gamma} \left[\ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{3} \right] (d_k^2 - e_k^2)y \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$

Bibliothèque des intégrales de surface transformées en intégrales de bord de toutes les fonctions intervenant dans la solution singulière fondamentale et ses dérivées.

$-4e_k x \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right)$	$-4 \int_{\Omega} e_k x \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) d\Omega$	$-\frac{4}{3} \int_{\Gamma} e_k x \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$-8e_k d_k y \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right)$	$-8 \int_{\Omega} e_k d_k y \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) d\Omega$	$-\frac{8}{3} \int_{\Gamma} e_k d_k y \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$2(d_k^2 - e_k^2) \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$2 \int_{\Omega} (d_k^2 - e_k^2) \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$-\frac{2(d_k^2 - e_k^2)}{2} \int_{\Gamma} \left[\ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{2} \right] \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$

Bibliothèque des intégrales de surface transformées en intégrales de bord de toutes les fonctions intervenant dans la solution singulière fondamentale et ses dérivées.

$-8e_k d_k \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right)$	$-8 \int_{\Omega} e_k d_k \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) d\Omega$	$-\frac{8}{2} e_k d_k \int_{\Gamma} \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$4 \frac{d_k x (d_k^2 - e_k^2) + y (d_k^4 - e_k^4)}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2}$	$4 \int_{\Omega} \frac{d_k x (d_k^2 - e_k^2) + y (d_k^4 - e_k^4)}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} d\Omega$	$4 \int_{\Gamma} \frac{d_k x (d_k^2 - e_k^2) + y (d_k^4 - e_k^4)}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$2d_k \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2]$	$2d_k \int_{\Omega} \ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] d\Omega$	$\frac{2d_k}{2} \int_{\Gamma} \left[\ln[(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2] - \frac{2}{2} \right] \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$
$-4e_k \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right)$	$-4e_k \int_{\Omega} \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) d\Omega$	$-\frac{4}{2} e_k \int_{\Gamma} \arctan\left(\frac{e_k y}{x + d_k y}\right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$

Bibliothèque des intégrales de surface transformées en intégrales de bord de toutes les fonctions intervenant dans la solution singulière fondamentale et ses dérivées.

$4 \frac{d_k x + y(d_k^2 - e_k^2)}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2}$	$4 \int_{\Omega} \frac{d_k x + y(d_k^2 - e_k^2)}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} d\Omega$	$4 \int_{\Gamma} \frac{d_k x + y(d_k^2 - e_k^2)}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$
$4 \frac{(d_k^2 - e_k^2)x + d_k(d_k^2 - e_k^2)y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2}$	$4 \int_{\Omega} \frac{(d_k^2 - e_k^2)x + d_k(d_k^2 - e_k^2)y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} d\Omega$	$4 \int_{\Gamma} \frac{(d_k^2 - e_k^2)x + d_k(d_k^2 - e_k^2)y}{(x + d_k y)^2 + e_k^2 y^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{nd}\Gamma$