

REPUBLIQUE DU SENEGAL
UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE THIES
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTROMECHANIQUE



GM.0081

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR DE CONCEPTION

SUJET

ANALYSE DES CAUSES DE DYSFONCTIONNEMENT DU
TURBOALTERNATEUR PRINCIPAL (T.A.P) DES I.C.S
DAROU 1

Auteur : M. Mangou Paulin MALOMAR

Directeur Interne

M. Papa Mody NDIAYE

Directeur Externe

M. Momath BA

1

DEDICACES

A tous ceux qui m'ont aimé et béni

REMERCIEMENTS

Je veux témoigner ici toute ma gratitude et adresser mes vifs et sincères remerciements à toutes les personnes qui de près ou de loin tant dans l'espace que dans le temps m'ont aidé à la réalisation de cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement :

- Mon Directeur interne Monsieur Papa Mouy NDIAYE
- Monsieur Momath BA Chef de département de la maintenance mon directeur externe
- M. NDOYÉ contre maitre surlinque utiles
- Monsieur Mohamadou DIEYE Ingénieur electricien au département maintenance
- Monsieur Harold Gerard KOUKOUÏ qui matériellement a participé à la réalisation de ce projet

Que tous les professeurs qui ont contribué à notre formation trouvent ici leurs reconnaissances

Enfin je remercie tous mes camarades de promotion pour leur soutien moral

SOMMAIRE

Ce présent projet intitulé *analyse des causes de dysfonctionnement du TAP* a pour but la détermination des causes des arrêts de cette machine de trouver des solutions visant la mise en marche en fonctionnement normal avec des perturbations limitées.

Le premier chapitre est consacré à une présentation de la plate-forme des unités sulfurique/utilités et phosphorique.

Dans le second chapitre un diagnostic est fait afin de déterminer les causes des déclenchements du TAP.

Le troisième chapitre nous donne quelques notions sur les vibrations des structures.

Le quatrième chapitre permet de trouver un modèle mathématique permettant de décrire les vibrations.

Enfin des conclusions sont tirées suivies d'un certain nombre de recommandations pour limiter les perturbations et revenir à un fonctionnement normal du TAP.

LISTE ALPHABETIQUE DES SYMBOLES

<i>Symboles</i>	<i>Désignations</i>
$DA, X3$	Débit de vapeur à l'admission
\hat{DAX}	Déplacement axial
ES	Erreur standard
LCL	Limites de contrôle inférieure
ME	Moyenne des écarts
MG	Moyenne de toutes les données
LWI	Limite inférieure
$PA, X1$	Pression de la vapeur à l'admission
$PBE, X4$	Pression de la boîte étanche
$Reg \hat{y}$	Résultat obtenu par la régression
$Pert$	Perturbations
SS_f	Somme des carrés des écarts
SS_R	Somme des carrés des résidus
SS_T	Somme totale des carrés
$TA, X2$	Température de la vapeur à l'admission
UCL	Limites de contrôle supérieure
UWI	Limite supérieure
VC	Vide au condenseur
VPA_R, y	Vibration du palier arrière
VPA_V	Vibration du palier avant
VTD	Variance de toutes les données

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Titre	
1	valeur moyenne de la température de vapeur à l'admission	21
2	coefficient de corrélation linéaire	4
3	matrice de la régression	44
4	analyse de la variance pour une régression linéaire multiple	41
5	Données et résultats de la régression	47

TABLE DES MATIERES

Dedicaces	I
Remerciements	II
Sommaire	III
Liste alphanbetique des symboles	v
Liste des tableaux	v
<hr/>	
Introduction	1
Chapitre I Presentation des ICS Plate-forme de Darou	3
I-1 Unite phosphorique	
I-2 Unite sulfurique/utilites	4
I-2-1 Atelier sulfurique	
I-2-2 Utilites	6
I-3 Les sources d'energie electrique	7
<hr/>	
Chapitre II Diagnostic	9
II-1 Causes des vibrations	10
II-2 Dynamique des rotors en torsion	16
II-2 Traitement des donnees	18
II-2-1 Description numerique	
II-2-1-1 Controle statistique des processus	
II-2-1-2 Determination des limites	19
II-2-2 Description graphique	22
<hr/>	

Chapitre III. Notion sur les vibrations des structures	23
III-1 Définition théorique d'une vibration	24
III-1-1 Vibrations sinusoïdales	
III-1-2 1) fréquence/amplitude	24
III-1-3 Vibrations périodiques	25
III-1-4 Vibrations aléatoires	
III-2 Description des vibrations	26
III-2-1 Logarithme	
III-2-2 Niveau en decibel dB	27
III-2-3 Niveau d'accélération	
III-2-4 Niveau de vitesse	
III-2-5 Niveau de déplacement	
III-3 Accélération, vitesse, déplacement	28
III-4 Résonances liées aux vibrations mécaniques	30
III-5 Applications des vibrations	32
III-5-1 Analyse structurelle	
III-5-2 Test de vibration	33
III-5-3 Surveillance de l'état des machines et Diagnostic des défauts	
III-5-4 Mesures des vibrations appliquées à l'homme	34
<hr/>	
III-6 Métrologie	
III-6-1 La mesure du niveau global	
III-6-2 L'analyse spectrale	35
III-6-3 Le spectre	36
Chapitre IV. Modélisation	36
IV-1 Identification des variables pertinentes	
IV-1-a Définition d'une turbomachine	
IV-1-b Variables pertinentes	39

IV-2 Indépendance des variables	40
IV-3 Analyse de régression	4
IV-4 Interprétation des résultats	61
IV-5 Propositions	58

Conclusion et Recommandations	60
-------------------------------	----

Bibliographie	62
---------------	----

Annexes	63
---------	----

Annexe 1 Résultats d'analyse vibratoire du TAP

Annexe 2 Caractéristiques de fonctionnement du TAP

Annexe 3 Résultats de la statistique de contrôle des processus

Annexe 4 Tableaux des statistiques F et t

INTRODUCTION

Implantées en Décembre 1983, les I.C.S (Industries Chimiques du Sénégal) sont spécialisées dans la fabrication d'acide sulfurique et d'acide phosphorique.

Elles comprennent : la plate-forme de Darou, la plate-forme de Taïba et la plate-forme de Mbao.

Les I.C.S occupent une place importante dans l'économie du pays.

C'est dans la plate-forme de Darou précisément au site ACIDE où est effectuée la synthèse de l'acide sulfurique et de l'acide phosphorique.

Cette plate-forme constitue le cœur des I.C.S.Elle comprend : l'usine ICS1(Darou1) et l'usine ICS2 (Darou2) implantée grâce au projet doublement.

Depuis une année environ, plusieurs cas de dysfonctionnement du système se sont produits dans l'usine Darou1 Ces dysfonctionnements sont la conséquence d'un déclenchement du turboalternateur principal (T.A.P) qui est la principale source autonome de production d'énergie électrique. Ces déclenchements conduisent à l'arrêt du système de production et des installations de l'usine

Pour revenir à un fonctionnement normal des installations, des études ont été effectuées dans le sens d'éliminer ces dysfonctionnements.

C'est dans ce cadre que s'inscrit ce projet intitulé *analyse des causes de dysfonctionnement du turboalternateur principal (T.A.P)*.

Pour mener à bien ce travail, l'état des lieux sera d'abord effectué, ensuite un diagnostic sera effectué pour déceler les problèmes fréquents et leurs causes. Enfin, nous passerons à la modélisation pour montrer l'influence des différents paramètres mis en jeu sur les causes fondamentales de ces déclenchements

CHAPITRE I PRESENTATION DES I.C.S : PLATEFORME DE DAROU

La plate-forme de Darou est constituée de deux usines. Chaque usine comprend deux unités de production : une unité phosphorique et unité sulfurique/utilités.

Dans l'usine Darou 1 nous avons :

I-1 UNITE PHOSPHORIQUE

Cette installation est prévue pour produire de l'acide phosphorique à 54% de P_2O_5 en utilisant un mélange de 90% de phosphate standard et 10% de schlamms enrichis.

Le procédé de fabrication d'acide phosphorique comporte plusieurs phases :

- La préparation d'une pulpe de phosphate à 40% d'eau à partir du phosphate avec une humidité variable (30% Max) et/ou sous forme de schlamms (à environ 40% d'eau) ;
- La fabrication de l'acide à 30% de P_2O_5 qui comprend :
 - L'attaque qui consiste à faire le dosage des matières premières, puis le mélange exothermique (attaque du phosphate par l'acide sulfurique) dans une cuve violemment agitée sans cloisonnement intérieur ;
 - La séparation de l'acide phosphorique à 30% de P_2O_5 et du gypse fabriqués dans la cuve c'est la filtration ;

- L'épuration et le stockage avec une dé saturation et une décantation de l'acide.
- Clarification de l'acide à 40-42% de P_2O_5 qui consiste à préparer de l'acide à 42% de P_2O_5 par mélange d'acides 30% et 54% de P_2O_5 , à le dé saturer pour obtenir un acide clarifié ;
- Concentration de l'acide de 40 à 54% de P_2O_5 : dans cette étape, l'acide clarifié à 40-42% de P_2O_5 est concentré sous vide après réchauffe à la vapeur à 54% de P_2O_5 . La concentration fournit également un sous produit : l'acide fluosilicique ;
- Stockage de l'acide 40% P_2O_5 et 54% P_2O_5 dans des bacs, l'acide 40% P_2O_5 alimente l'atelier de concentration.

I-2 UNITE SULFURIQUE/UTILITES

I-2-1 ATELIER SULFURIQUE :

Avec une capacité de production de 3000 tonnes par jour, cet atelier produit de l'acide sulfurique H_2SO_4 concentré à 98.5% à une température de 45°C à partir du soufre qui a une pureté de 99.5% à sec, et au maximum 0.4% de cendres, 0.1% de carbone, une acidité de 0.02% en H_2SO_4 , une humidité de 1%.

Au cours du processus de fabrication, le soufre subit les différentes transformations suivantes :

➤ FUSION-FILTRATION-STOCKAGE :

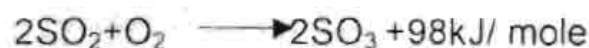
Le soufre solide est d'abord stocké en tas dans l'aire de stockage puis repris par des engins chargeurs pour l'alimentation des fondoirs. A la sortie des fondoirs, le soufre liquide est d'abord stocké puis envoyé par des pompes vers les filtres avant d'être stocké dans le bac de soufre filtré ;

➤ COMBUSTION DU SOUFRE :

La combustion se fait dans un four équipé de brûleurs à soufre, d'un système d'admission d'air de combustion, d'une turbo soufflante produisant l'air de combustion, d'un briquetage interne, des moyens de mesure, d'une chaudière de récupération d'énergie.

➤ CONVERSION DU SO₂ EN SO₃

La conversion s'effectue dans une caisse de catalyse contenant de l'oxyde de vanadium. L'étape la plus critique de la fabrication d'acide sulfurique est la transformation, par oxydation du dioxyde de soufre SO₂ en trioxyde de soufre SO₃. La réaction



est exothermique, réversible et le degré maximum de formation du trioxyde de soufre est déterminé par l'équilibre de cette réaction. Une large partie de l'énergie thermique est récupérée dans un surchauffeur pour surchauffer en amont de la chaudière de récupération, une autre

partie de cette énergie est utilisée pour réchauffer dans un économiseur l'eau alimentant la chaudière.

➤ ABSORPTION DU SO_3

Le trioxyde de soufre traverse une tour d'absorption où il est soumis à une pluie d'acide sulfurique à 98.5%. A la sortie de la tour, le gaz aura cédé grâce à de multiples le SO_3 est transformé en acide sulfurique. Les gaz résiduels sont échappés dans une cheminée placée à 70 mètres.

➤ SECHAGE (ABSORPTION D'EAU)

En quittant les précipitations de brouillard, le gaz est saturé d'eau et doit être séché jusqu'à une teneur en humidité de $100 \text{ mg H}_2\text{O/Nm}^3$ avec de l'air sec. Une baisse de la teneur en humidité est nécessaire puisqu'elle influence directement sur le point de rosée du gaz SO_3 quittant la caisse de catalyse. Plus la teneur en humidité est basse, plus le point de rosée est bas et moindres sont les chances de condensation de l'acide dans les zones les plus froides des équipements.

L'eau absorbée dans la tour de séchage est combinée au trioxyde de soufre pour produire l'acide sulfurique de production (voir équation de la réaction ci-dessus).

1-2-2 UTILITES

Les utilités assurent l'alimentation en eau, air comprimé, vapeur et électricité de l'usine. Elle comprennent :

- une centrale électrique avec deux turboalternateurs :

un turboalternateur principale (TAP) de 13MW et un turboalternateur secondaire (TAS) de 9MW.

- deux chaudières auxiliaires à fuel de 50 tonnes /heure et de 45 tonnes /heure de vapeur à 40 bars ;
- une installation de préparation d'eau déminéralisée de 60m³/h ;
- un bac de stockage d'eau brute ;
- deux bacs de stockage d'eau déminée ;
- deux aérocondenseurs de vapeur ;
- l'alimentation en eau de l'usine ;
- la production d'air comprimé.

I-3 LES SOURCES D'ENERGIE ELECTRIQUE

Les sources d'énergie électrique des usines sont indépendantes, mais elles peuvent être couplées en parallèle en marche par flotage.

En effet, l'usine Darou 2 a un turboalternateur nommé GTA de 21MW qui assure les besoins en énergie électrique de ses installations. Tandis que l'usine Darou 1 possède deux turboalternateurs dont un turboalternateur principale (TAP) de 13MW qui doit assurer les besoins en énergie électrique de l'usine dont la consommation est de 12.5MW et un turboalternateur secondaire (TAS) de 9MW qui en cas de fonctionnement douteux ou période perturbé doit lui venir en secours. En plus, il doit fournir de l'énergie à la mine si la vapeur disponible est suffisante, assurer des besoins en vapeur basse pression (4 bars abs) pour les unités de concentration d'acide.

phosphorique, et enfin, assurer une fourniture partielle d'énergie électrique à l'usine Darou 2 qui ne consomme que 9 MW en cas d'arrêt du GTA.

CHAPITRE II DIAGNOSTIC

Des enquêtes effectuées au bureau de contrôle de la production à l'atelier sulfurique-utilités de l'usine Darou1 ont révélé que la cause des dysfonctionnements était un niveau de vibrations élevé.

En effet, le T.A.P est équipé de sondes de vibrations aux paliers avant et arrière de la turbine. Celles-ci permettent de détecter les vibrations et d'en mesurer le niveau.

De même, il possède deux dispositifs de protections antivibratoires pour sa sécurité, le premier étant une alarme réglée à $50\mu\text{m}$ et un dispositif de déclenchement réglé à $75\mu\text{m}$.

Lorsque le niveau de vibrations atteint $50\mu\text{m}$, l'alarme se déclenche automatiquement, signifiant qu'il faut intervention pour essayer de contourner cette situation. Si celui-ci augmente jusqu'à atteindre $75\mu\text{m}$, cela provoque le fonctionnement du dispositif de déclenchement de la turbine qui arrête automatiquement la machine.

Pour une maintenance prévisionnelle des machines tournantes, des analyses vibratoires sont effectuées suivant un programme bien défini ; celles-ci permettent de déceler le niveau de vibrations sur les différents machines ainsi que sur le T.A.P.

Des analyses vibratoires ont permis d'identifier certains défauts rencontrés couramment ; Nous citerons entre autre : Balourd ressenti sur

palier admission¹, balourd ressenti sur le palier échappement², l'engrènement du réducteur-altrenateur et le fouettement³ ressenti sur le palier réducteur. Des résultats d'analyse vibratoire sont donnés en annexes.

Dans la suite de ce chapitre, nous essayerons de trouver les causes des vibrations qui perturbent le bon fonctionnement du T.A.P.

II-1 CAUSES DES VIBRATIONS

Elles sont multiples, toutefois il convient de voir si elles n'ont pas de corrélation avec la puissance du TAP. Nous citerons de façon générale quelques unes :

- le balourd il est dû à une masse m_b en mouvement situé à une distance d du centre géométrique de l'arbre. Il est généralement causé par un mauvais équilibrage dynamique. Mais en ce qui concerne les turbines à vapeur, il peut être dû à une variation de la température de la vapeur, d'une fuite de vapeur sur un soutirage, d'un problème sur l'étanchéité et le refroidissement... On parle en ce moment de balourd thermique.

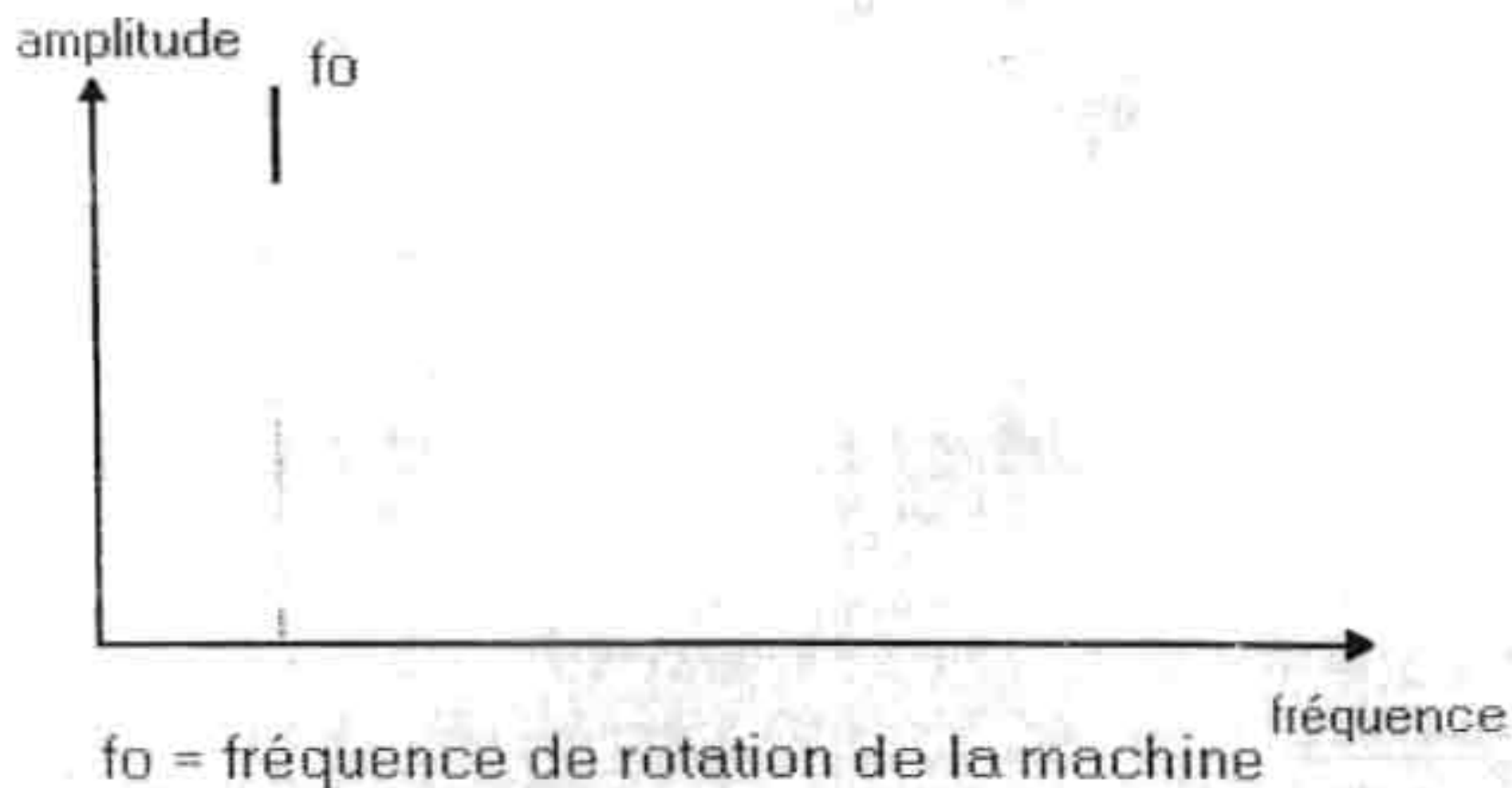
La fréquence du balourd est la fréquence de rotation de la machine soit $N/60$, où N est la vitesse de rotation de la machine.

L'analyse spectrale indique une amplitude du niveau global très élevée à la fréquence du balourd.

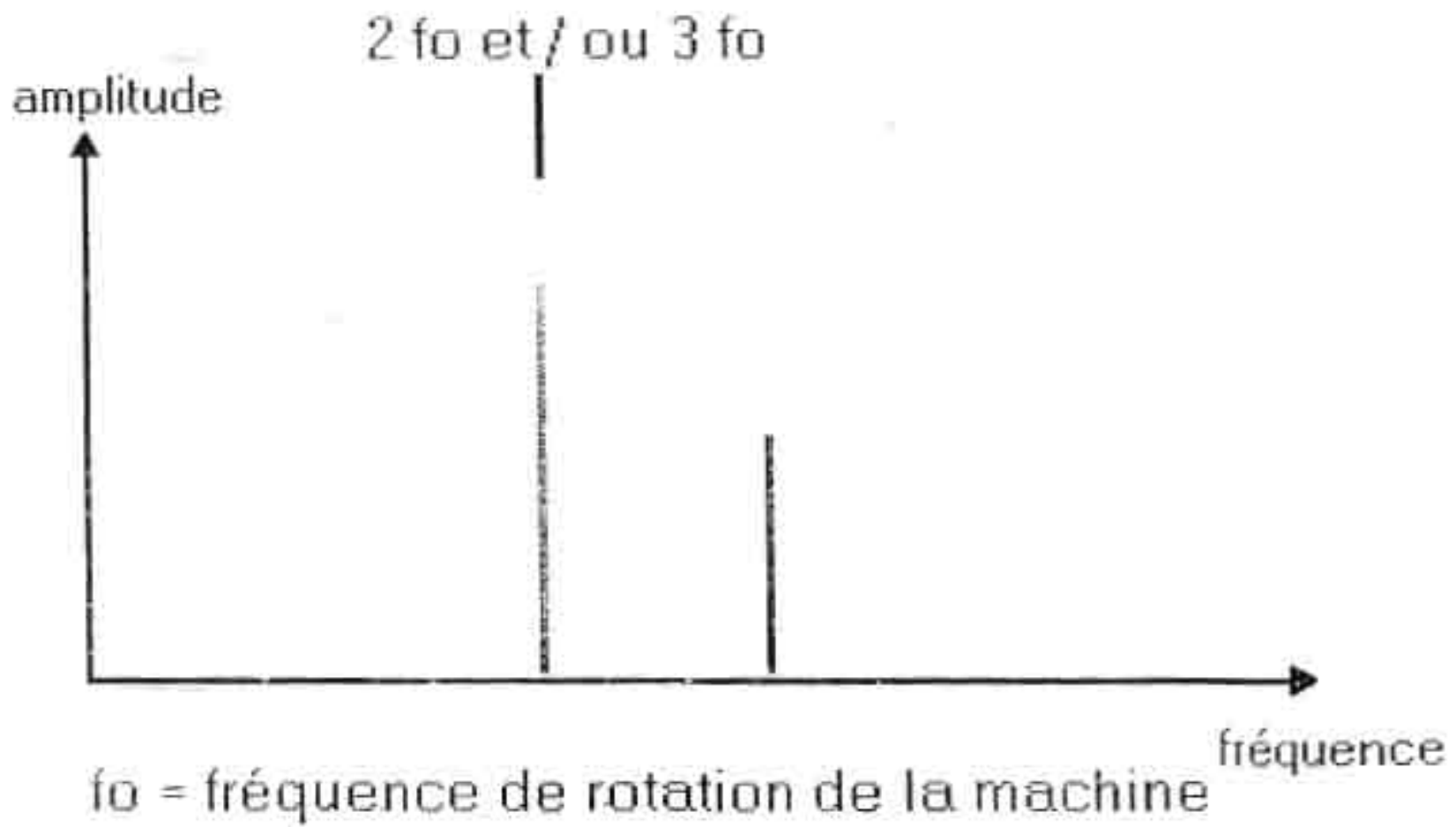
- Le lignage : c'est le défaut d'alignement avec la machine entraînée. Sa fréquence est deux ou trois fois celle de la rotation de la machine. A cette (ces) fréquence(s) , l'analyse spectrale montre une amplitude du niveau global qui se démarque de toutes les autres.
- Les chocs : l'analyse spectrale laisse apparaître des harmoniques de la fréquence fondamentales du choc.
- Fouettement du palier au fluide : à la fréquence correspondant à la vitesse critique du rotor qui correspond aussi avec la fréquence d'instabilité du film d'huile, l'amplitude du niveau global prend une valeur très grande. Cette valeur est supérieure à toutes les autres valeurs mesurées à d'autres fréquences.

Nous parlerons dans la dynamique des rotors en torsion, des types de vibrations qui interviennent dans cette étude.

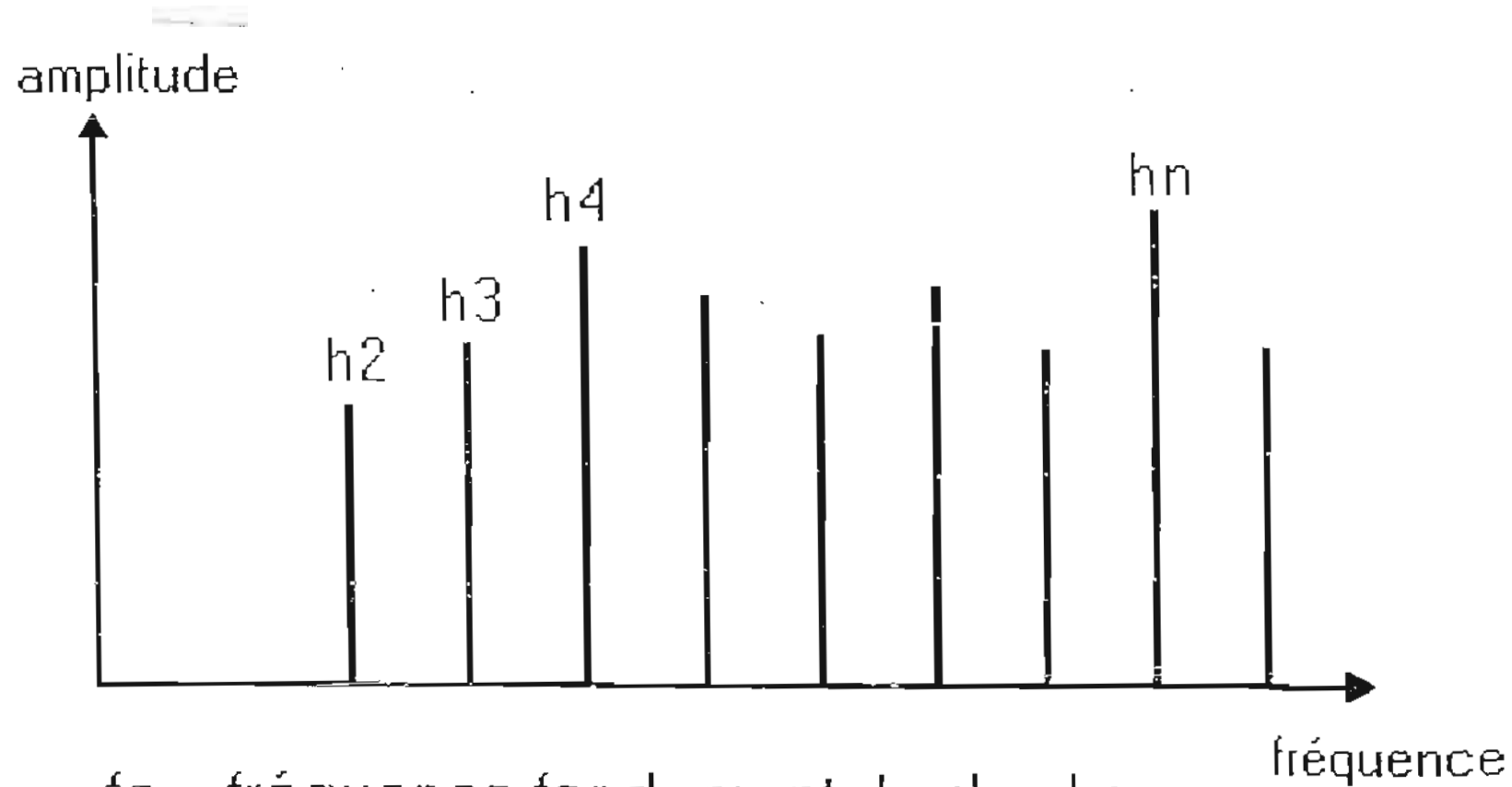
Balourd : toutes machines



Lignage : toutes machines

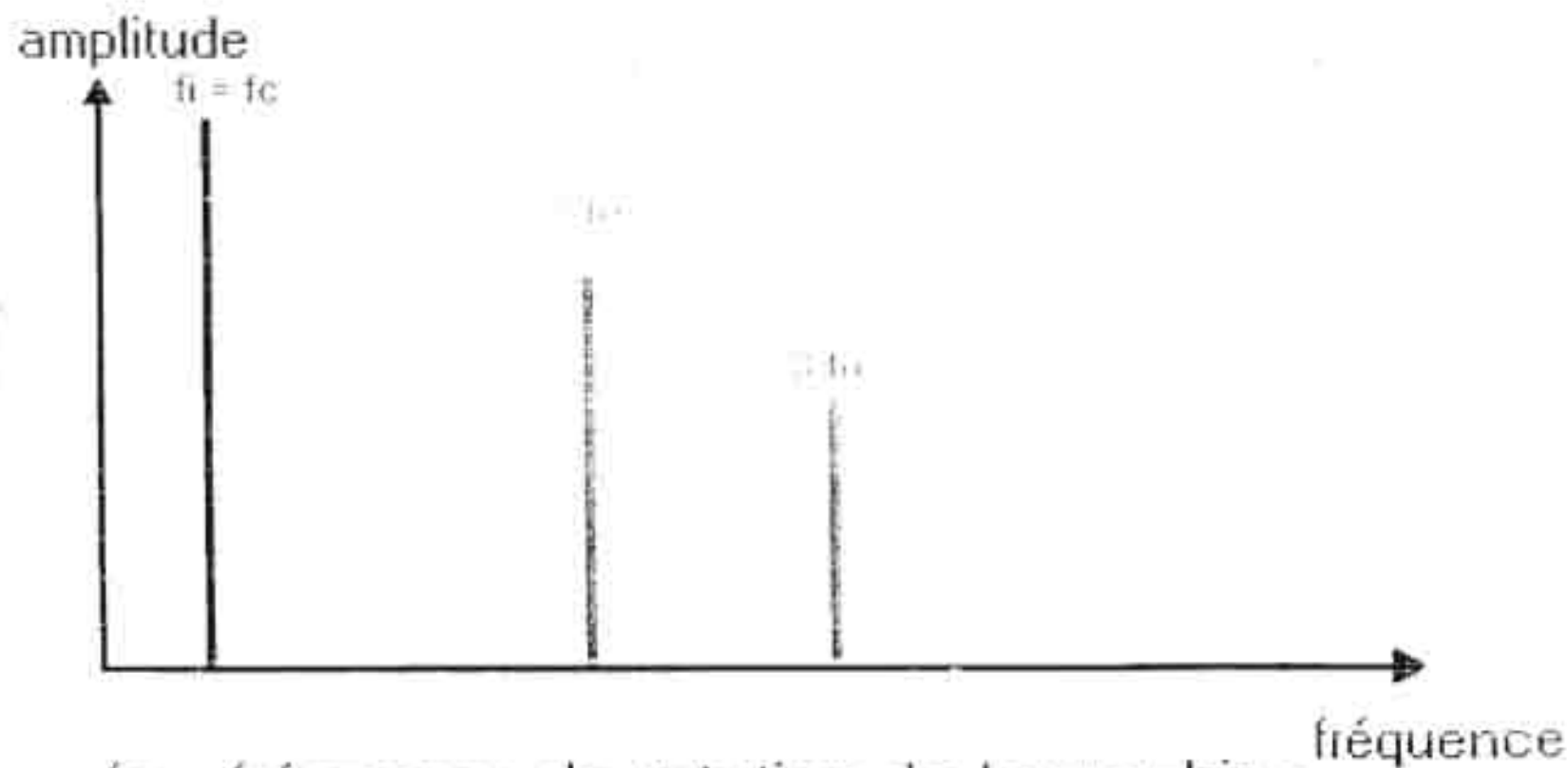


Chocs : toutes machines



f_0 = fréquence fondamentale du choc
 $h_1, h_2 \dots h_n$ = harmoniques de f_0

Fouettement palier fluide



f_0 = fréquence de rotation de la machine

f_c = vitesse critique du rotor

f_i = fréquence d'instabilité du film d'huile

II-2 DYNAMIQUE DES ROTORS EN TORSION

Entraînées par un groupe moteur, les lignes d'arbres transmettent une puissance vers les éléments récepteurs avec une vitesse de rotation définie. Ce transfert d'énergie doit s'effectuer avec un minimum de perte en ligne, mais aussi avec une sécurité de fonctionnement et une durée de vie acceptables. Les phénomènes dynamiques y jouent en général un rôle essentiel étant entendu que tout système déformable est susceptible de vibrer sous l'influence d'excitations périodiques ou, à cause de phénomène d'inertie lors du passage d'un point de fonctionnement établi à un autre. Ce rôle a tendance à prendre de l'ampleur car, très souvent, dans les conceptions modernes, la nécessité d'augmenter la puissance massique de l'installation, se traduit par une diminution des masses mises en mouvement couplée à une augmentation des vitesses de rotation.

Les régimes transitoires qui correspondent à une variation au cours du temps des vitesses moyennes des rotors (accélération ou freinage de l'installation, prise de couple...) peuvent entraîner des ruptures brutales à cause d'instabilités induites, la plupart du temps, par un phénomène de résonance. Moins spectaculaire, une autre de leurs conséquences peut se traduire par des dépassements locaux des limites de contraintes admissibles, conduisant à une diminution notable de la durée de vie de l'installation.

Pour un régime permanent caractérisé par une vitesse moyenne constante pour chaque rotor composant l'installation (point de fonctionnement nominal), l'état de contrainte des arbres, se décompose suivant une valeur moyenne constante associée à la transmission du couple moyen et, un ensemble de composantes pulsées dont la variation périodique au cours du temps est directement liée à l'existence de vibrations axiales, transversales, ou de torsion.

L'objet de cette étude est l'analyse des causes des vibrations des paliers et des vibrations axiales considérées isolément c'est à dire en supposant qu'elles sont découplées vis-à-vis des vibrations de torsion. L'objet industriel étudié est le turboalternateur principal au ICS Darou 1.

Le régime transitoire ne sera pas pris en compte dans cette étude

Cette étude se basera sur des données recueillis lors du fonctionnement du T.A.P.

En effet, elles proviennent des enregistrements effectués pour le suivi de la marche de l'atelier sulfurique-utilité de Darou1. Elles sont collectées sur des feuilles de marche avec une périodicité de deux heures. Nous les avons saisies avec l'outil informatique par le biais de Microsoft Excel. Egalement, ces données ont été traitées par le même logiciel.

II-2 TRAITEMENT DES DONNEES

Après la saisie des données des différents paramètres qui influencent notre processus, nous sommes passés à l'étape de traitement et d'analyse de celles-ci en vue d'une exploitation judicieuse. Mais auparavant nous nous intéresserons, un temps soit peu, à la description des données, ensuite nous passerons à leur synthèse en vue d'en extraire les caractéristiques essentielles et les informations pertinentes. Cet objectif est nécessaire à la prise de décision basée sur les données. Nous utiliserons deux types de description qui sont très souvent employés : la description numérique et la description graphique.

II-2-1 DESCRIPTION NUMERIQUE

Cette description des données s'effectue à travers des variables mesurant la position, la dispersion et la forme.

Dans cette description, nous utiliserons le contrôle statistique des processus.

II-2-1-1 CONTROLE STATISTIQUE DES PROCESSUS

Les hypothèses dans la théorie de la statistique de contrôle des processus sont que les données soient uniformes du point de vue statistique (c'est à dire distribution normale). Les méthodes de calcul utilisées sont les suivantes :

- **Moyenne**

$Y_j = \sum y_i / n$; $j=1,2, \dots, N$; où j est l'échantillon et i , une donnée de l'échantillon.

Dans ce cas présent, on a : j =jour et i =heure

- **Variance**

La variance est : $S_j = \sum (y_i - Y_j)^2 / (n-1)$

- **Etendue**

L'étendue des mesures est $r_j = y_{\max} - y_{\min}$ est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur dans l'échantillon.

- **Coefficient de variation** C_j

C'est le rapport de la variance sur la moyenne ; $C_j = S_j / Y_j$.

- **La moyenne de toutes les données** qui est la meilleur estimation de la moyenne de la population est : $\hat{y} = \sum Y_j / N$, j varie de 1 à N .

- **La variance de toutes les données** est

$$S^2 = \sum (y_i - \hat{y})^2 / (N \cdot n)$$
, i varie de 1 à $N \cdot n$.

- **La moyenne des étendues** est

$$R = \sum r_j / (N \cdot n)$$
, j varie de 1 à N .

- **L'erreur standard des moyennes** :

$$S_v = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

II-2-2-2 DETERMINATION DES LIMITES

Pour déterminer les limites de contrôle, on utilise la procédure suivante :

1. obtenir les valeurs des variables à contrôler dans un intervalle de temps donné, tous les jours ;
2. calculer toutes les moyennes par jour et aussi la variance ;
3. après avoir déterminé les moyennes et la variance, calculer la moyenne de toutes les données recueillies.
4. Calculer la déviation standard et l'erreur standard des moyennes.
5. Calculer les limites de contrôle en utilisant :
 - $UWL, LWL = \hat{y} \pm 2 S_v$
 - $UCL, LCL = \hat{y} \pm 3 S_v$
6. Tracer sur un même graphe :
 - en pointillé les moyennes par jour en fonction du temps ;
 - la moyenne de toutes les données (droite horizontale) ;
 - les limites de contrôle (droite horizontale).

Date/Heures	TEMPERATURE DE LA VAPEUR A L'EMISSIION: T(°C)												Moy	var	R	Ecart-Type	Coef de Var
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22					
01/01/2002	425	422	422	419	420	416	419	418	419	422.6	424	422	420.47	10.47	7	3.235	0.0248
02/01/2002	424	424.5	424	423	419	418	420	420	416	415.7	419.8	419.2	420.29	9.381	9.1	3.063	0.0223
03/01/2002	416.2	415.2	418.3	418.9	415	413	413	414	415	415	415	409	414.79	8.481	9.8	2.546	0.0156
04/01/2002	413	422	420	420	416	415	416	416	420	418	426	424	418.92	14.99	11	3.872	0.0357
05/01/2002	420	422	420	422.5	422.2	419	419.6	425	426.2	423	420	419	421.55	5.579	7.2	2.362	0.0132
06/01/2002	418	421	413	413.3	415.8	418	411.6	412.4	416.4	417	413	413	415.21	8.481	9.4	2.912	0.0204
07/01/2002	408	411	418	418.3	417.5	412.8	417	416	417	419	417	416	415.64	11.05	8	3.324	0.0265
08/01/2002	arrêt	412	410	413	408	407.1	407	407.2	409	410	414	411	409.85	5.999	7	2.449	0.0148
09/01/2002	412	413	413	412	408	405	405	405	405	403.7	403.2	403.1	407.33	16.2	9.9	4.025	0.0397
10/01/2002	403.1	408.1	406.2	404	404	409	414	407	405	407.7	407	408	407.01	8.232	10	2.869	0.0202
13/01/2002	perturb	396	400	402	400	400.3	400.2	404	405	404	403	405	401.95	5.711	7	2.39	0.0142
14/01/2002	402	403	402	404.6	401.3	402.8	400	403	404	405	404	405	403.06	2.404	5	1.551	0.0059
15/01/2002	404	406	405	404	403	403	403	401	409	400	397	397	402.67	12.24	12	3.499	0.0304
16/01/2002	397	397	397	397	395	400	perturb	397	397	398	398	398	397.45	1.073	4	1.036	0.0026
17/01/2002	H 15	H 15	399.9	399	399	399	398	400	406	401.9	401.4	402.5	400.57	5.593	4.5	2.365	0.0139
18/01/2002	402.8	401.4	403.7	405	407	404.7	404	406.1	405.3	406.1	403.7	404	404.48	2.416	5.6	1.554	0.0059
19/01/2002	405.8	407.5	404.3	405	404	401	405	404	405	404	404	404	404.47	2.27	6.5	1.507	0.0056
20/01/2002	402	404	404	401	perturb	407	406	409	406	406	405	404	404.91	5.091	8	2.258	0.0125
21/01/2002	406	406	409	407.8	408.3	410.4	412.3	406	408	407	412	414	408.95	7.297	8	2.701	0.0178
22/01/2002	409	411	413	411.5	413.3	414	414	413	413	423	404	422	413.44	25.87	14	5.086	0.0625
23/01/2002	417	416	418	417.8	415.3	418	414.8	415.2	415.3	415.5	423	421	417.29	6.277	8.2	2.505	0.0150
24/01/2002	421	423	422	421	420.4	418.2	423	422.4	423.9	422	424	427	422.33	4.773	8.8	2.185	0.0113
25/01/2002	424	425	422	421	424	421	426	424	425	424	424.2	426	423.85	2.888	5	1.699	0.0068
26/01/2002	427	426	426.7	425.6	425.3	428	412	415	414	413	419	418	420.8	38.61	16	6.213	0.0917
27/01/2002	418	418	415	413	417	414	417	416	416	416	417	416	415.08	2.265	5	1.505	0.0054
28/01/2002	412	425	420	420	416	417	418	421	411	418	421	420	418.42	14.81	14	3.648	0.0353
29/01/2002	418	419	419	417.7	417.1	418.3	415.5	414	416	417	416	414	416.8	2.696	9	1.731	0.0077
30/01/2002	413	416	414	412.5	415.1	413.8	414	415	415	414	411	414	413.95	1.77	5	1.33	0.0042
31/01/2002	412	412	413	411.3	412.1	412.3	408.7	403.4	407.7	408	407	406	409.46	9.492	9.6	3.061	0.0231

II-2-1 DESCRIPTION GRAPHIQUE

Comme son nom l'indique, il s'agit de description des données à travers des graphiques. Les graphiques les plus utilisés sont les histogrammes, les diagrammes schématiques, les effectifs cumulés... La liste n'est pas exhaustive. Pour nos besoins, nous représenterons les valeurs moyennes des observations journalières pour visualiser leurs fluctuations.

CHAPITRE III NOTION SUR LES VIBRATIONS

III-1. DEFINITION THEORIQUE D'UNE VIBRATION

La norme ISO 2041 « Vibrations et chocs - Vocabulaire (Août 1990) » définit la notion de vibration :

Variation avec le temps de l'intensité d'une grandeur caractéristique du mouvement ou de la position d'un système mécanique, lorsque l'intensité est alternativement plus grande et plus petite qu'une certaine valeur moyenne ou de référence. En fait, un corps est dit en vibration lorsqu'il est animé d'un mouvement oscillatoire autour d'une position d'équilibre ou de référence.

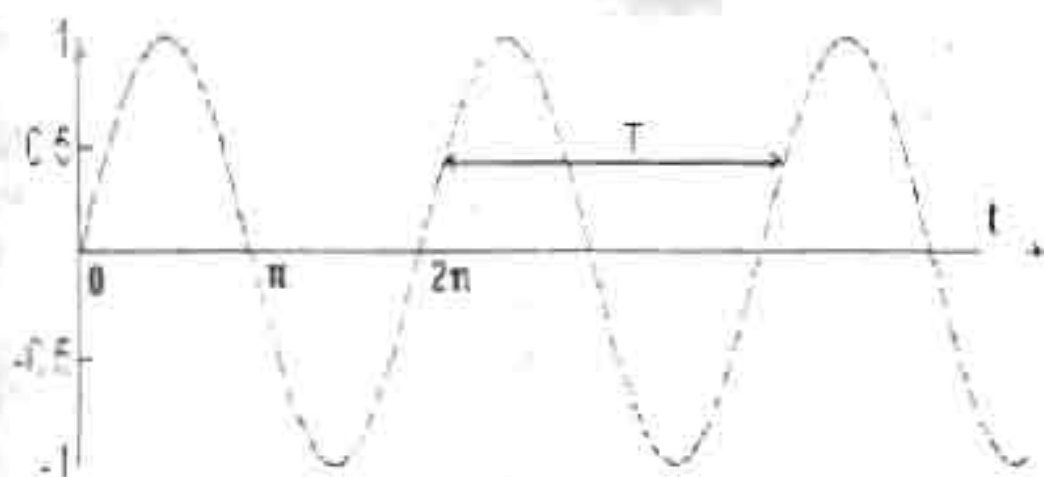
Les textes de normalisation AFNOR relatifs aux vibrations sont :

NF E 90-001, NF E 90 002, NF E 90-003.

III-1.1. Vibration sinusoïdale

La sinusoïde C'est la forme d'onde la plus simple à caractériser. Cette forme d'onde particulière, peut se visualiser comme le mouvement de la projection verticale de l'extrémité d'une aiguille d'une horloge, ou le mouvement de translation d'un système masse – ressort non amorti. La période T correspond à un tour complet de l'aiguille ou au temps que met la masse pour faire un aller retour.

Une sinusoïde est une courbe alternative, de valeur moyenne nulle, représentée par une fonction mathématique simple



III-1.2. Fréquence / Amplitude

Une vibration harmonique est caractérisée par :

sa **période T**, durée correspondant à l'intervalle de temps entre deux positions successives identiques, l'unité s'exprime en secondes, dont le symbole est s.

sa **fréquence f**, qui est le nombre de cycles par seconde, et qui est l'inverse de la période T. L'unité est le Hertz (de symbole Hz, de dimension s^{-1}). $f = \frac{1}{T}$.

Son **amplitude** maximale ou valeur de crête, valeur absolue maximale de la vibration ;

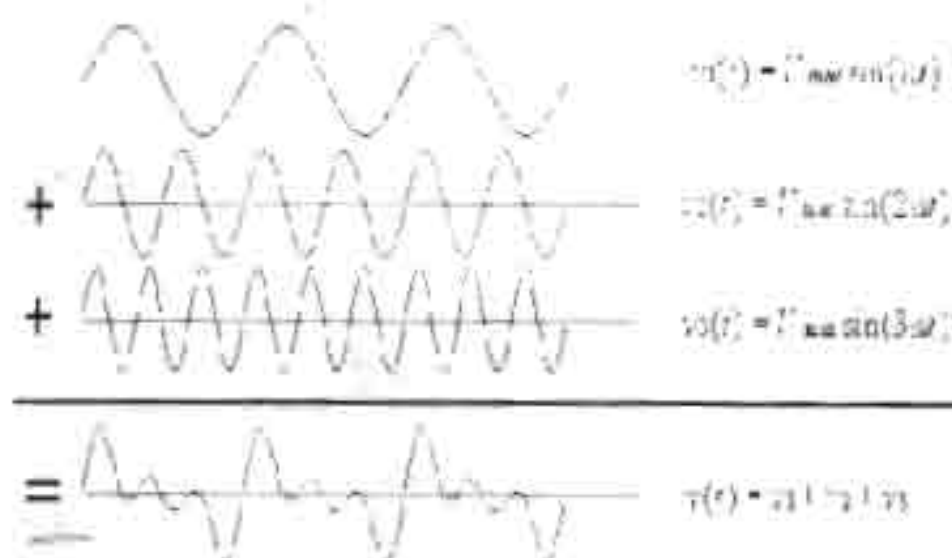
La vibration instantanée $V(t)$ peut s'écrire $V(t) = V_{max} \sin(\omega t + \varphi)$, où :

- V_{max} est la valeur maximale atteinte par la vibration appelée aussi valeur crête,
- ω est une grandeur liée à la fréquence du signal. On l'appelle la pulsation. On a $\omega = 2\pi f$

- φ est appelée la phase à l'origine des temps, elle caractérise l'amplitude du signal à l'instant $t=0$.

III-1.3. Vibrations périodiques

Le motif d'une vibration **périodique** consiste en la superposition, c'est-à-dire l'addition algébrique d'une vibration pure **fondamentale** et de vibrations pures **harmoniques**. Les fréquences des harmoniques sont des multiples entiers de celle du fondamental. Par exemple, le mouvement d'un piston d'un moteur à combustion interne génère des oscillations harmoniques.



III-1.4. Vibrations aléatoires

La forme d'onde des vibrations n'a pas toujours une structure aussi simple que celle des vibrations pures et des vibrations harmoniques. Très souvent, on ne peut plus y distinguer la répétition d'un motif. La

forme du signal vibratoire évolue au contraire constamment de manière anarchique. Ce sont les **vibrations aléatoires**

III-2. DESCRIPTION DES VIBRATIONS

Décrire les vibrations, c'est donner les valeurs d'un certain nombre de paramètres caractéristiques, amplitude, fréquence, etc... L'important domaine de valeurs que peuvent prendre les grandeurs vibratoires justifie l'utilisation d'échelles et de grandeurs logarithmiques. Ces grandeurs logarithmiques correspondent au logarithme du rapport des valeurs de deux grandeurs de même espèce

III-2.1. Logarithme

L'échelle logarithmique permet de compresser une gamme de valeurs souvent trop large pour que ces valeurs soit discernées entre elles ; ainsi elle peut être assimilée à une balance capable de peser avec la même échelle une mouche et un dinosaure ! Parmi les propriétés de la fonction logarithme, on peut noter que :

le logarithme d'une valeur positive peut être négatif, le logarithme de la somme n'est pas égal à la somme des logarithmes. La fonction logarithme transforme l'ECHELLE LINEAIRE en ECHELLE LOGARITHMIQUE, souvent plus pratique. L'opérateur « logarithme » transforme une multiplication en addition et permet de représenter sur un même graphe de très fortes valeurs et de très faibles.

III-2.2. NIVEAU EN DECIBEL- dB

De manière générale, le niveau L en décibels (noté dB, dixième du Bel,) d'une vibration V , est par définition dix fois le logarithme décimal du rapport de V à une valeur de référence V_{ref} :

$$L_v = 10 \log_{10} \left(\frac{V}{V_{ref}} \right)$$

Cette définition s'applique, à toutes les grandeurs physiques proportionnelles à la puissance. La notation L , le plus souvent utilisée pour désigner un niveau, provient de l'anglais "level", traduction du mot "niveau". En France, on utilise aussi quelquefois la notation N .

III-2.3. NIVEAU D'ACCELERATION

Le niveau d'accélération en log se définit par :

$$L_a = 10 \log_{10} \left(\frac{A}{A_{ref}} \right)$$

où A_{ref} est une accélération de référence qui vaut $1 \mu\text{m/s}^2 = 10^{-6} \text{ m/s}^2$.

III-2.4. NIVEAU DE VITESSE

Le niveau de vitesse en log se définit par :

$$L_v = 10 \log_{10} \left(\frac{V}{V_{ref}} \right)$$

où V_{ref} est une vitesse de référence qui vaut $1 \text{ nm/s} = 10^{-9} \text{ m/s}$

III-2.5. NIVEAU DE DEPLACEMENT

Le niveau déplacement en log se définit par :

$$L_d = 10 \log_{10} \left(\frac{D}{D_{ref}} \right)$$

où Dref est un déplacement de référence qui vaut $1\mu\text{m} = 10^{-6}\mu\text{m}$

III-3. ACCELERATION, VITESSE, DEPLACEMENT

- Dans le cas d'une vibration périodique dont la forme d'onde est du type $v(t) = V_{\text{max}} \sin(\omega t)$, et prenant pour variable caractéristique le déplacement x par rapport à la position d'équilibre, la forme d'onde devient $x(t) = X_{\text{max}} \sin(\omega t)$ ou encore

$x(t) = X_{\text{max}} \sin(2\pi f t)$. Le déplacement s'exprime en m, ou plus couramment en mm, ou en μm .

- La vitesse v qui caractérise l'accroissement de position par unité de temps se décrit par la dérivée du déplacement $v = dx/dt$ ce qui donne la fonction de vitesse suivante :

$$v(t) = \omega X_{\text{max}} \cos(\omega t) = V_{\text{max}} \sin(\omega t + \pi/2)$$

Cette équation montre que la vitesse est en avance de phase de 90° sur le déplacement.

La vitesse s'exprime en m/s ou mm/s

- L'accélération qui caractérise l'accroissement de vitesse par unité de temps se décrit par la dérivée de la vitesse ou la double dérivée du déplacement :

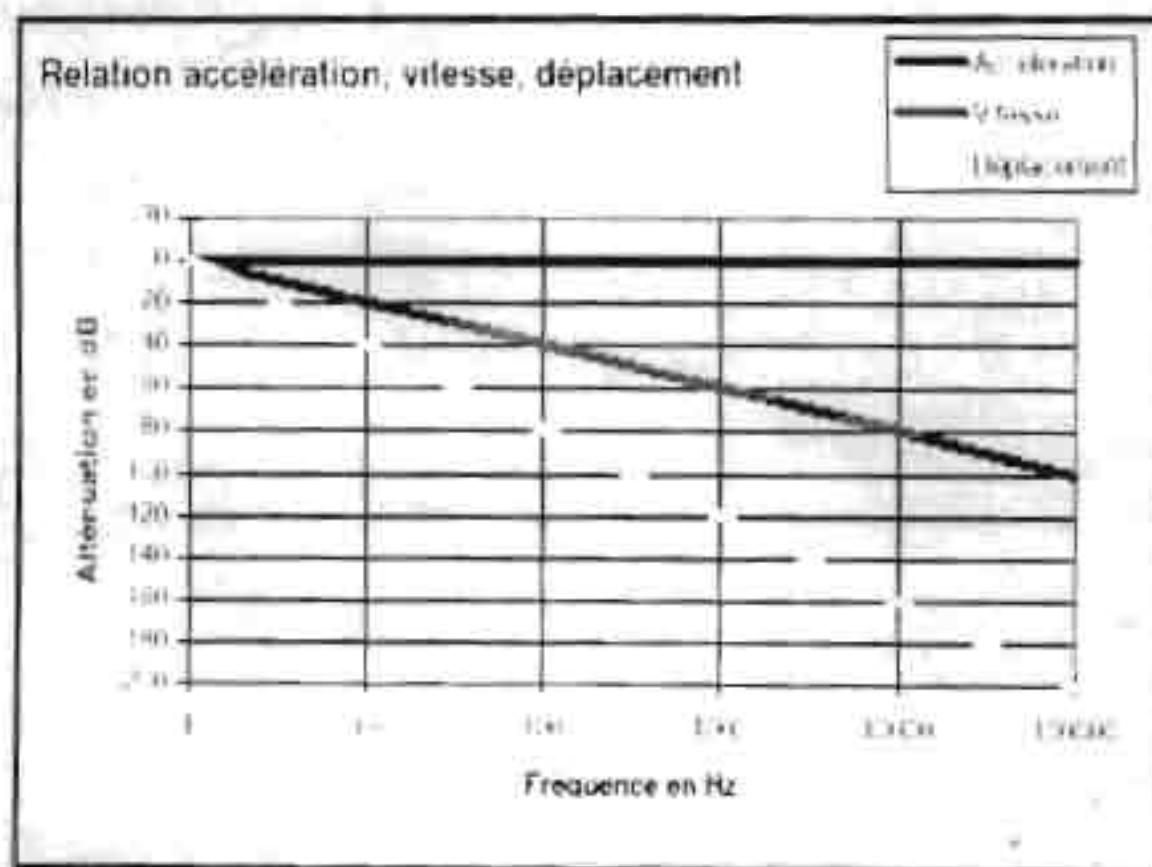
$$a = dv/dt = d^2x/dt^2$$

L'accélération est en avance de phase de 180° sur le déplacement et donc de 90° sur la vitesse. L'accélération s'exprime en m/s^2 ou en g ($1g = 9.81 \text{ m/s}^2$).

Donc pour les signaux sinusoidaux, déplacement, vitesse et accélération sont reliés mathématiquement par une fonction de la fréquence et du temps. Sans tenir compte de la phase du signal, comme c'est le cas pour des intégrations dans le temps (le contraire de la dérivée), la vitesse peut être obtenue en divisant le signal accélération par un facteur proportionnel à la fréquence $v = a/2\pi f$ ($= \int a dt$) et le déplacement par un facteur proportionnel au carré de la fréquence $d = a/4\pi^2 f^2$ ($= \int v dt$).

Le graphe ci-après montre les relations dans le domaine de fréquence pour un signal sinusoidal.

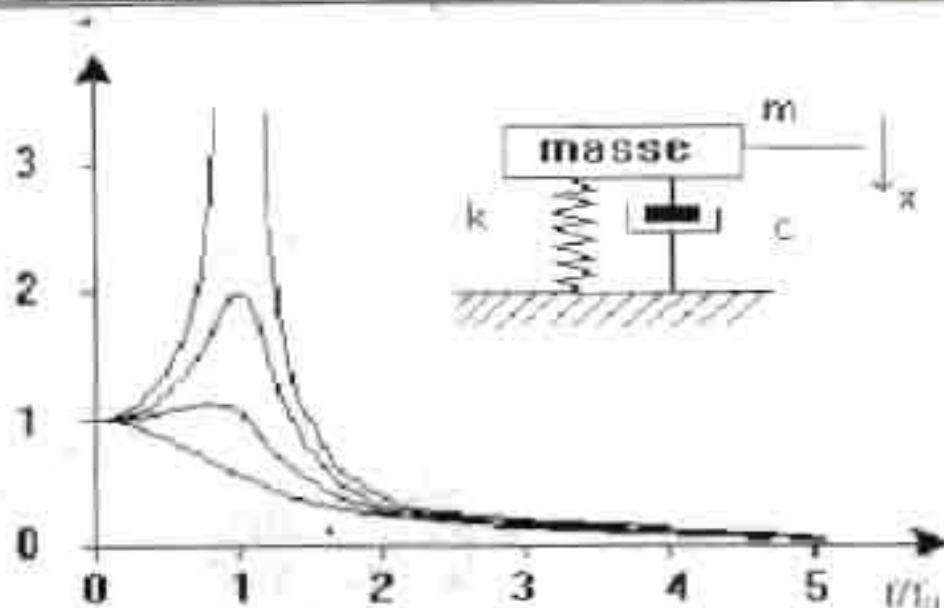
Relation accélération, vitesse, déplacement



On voit l'intérêt d'une échelle log-log pour passer d'un paramètre à un autre. On constate que l'accélération sera prédominante aux fréquences élevées, et que le déplacement sera prépondérant aux très basses fréquences.

III-4. RESONANCES LIEES AUX VIBRATIONS MECANQUES

Les vibrations mécaniques sont à l'origine d'une grande part des problèmes industriels. Ces vibrations sont souvent symbolisées par un ensemble d'oscillateurs constitués de masses, de ressorts et d'amortisseurs. La réponse d'un oscillateur est la somme d'oscillations amorties (réponse transitoire) et d'oscillations forcées (réponse permanente : sans amortissement). Lorsque la fréquence des oscillations amorties est égale à la fréquence des oscillations forcées, on assiste à des phénomènes de résonance. Le schéma représente le cas d'un oscillateur simple, avec une force directement appliquée sur la masse. L'amplitude des oscillations forcées est tracée en fonction du rapport entre la fréquence des oscillations amorties et celle des oscillations forcées. En dessous de la résonance, le terme de raideur est prépondérant dans les forces en présence. Au dessus, c'est la masse qui oppose la plus grande force à la force d'excitation. Les différentes courbes représentent plusieurs cas de rapport de l'amortissement sur la masse.



L'équation de mouvement libre prend la forme suivante :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad \text{avec } m = \text{masse} ; C = \text{coefficient de frottement visqueux}$$

; k = raideur et x le déplacement par rapport à la position d'équilibre.

On définit :

- la fréquence naturelle ou fréquence propre du système conservatif

associé (sans amortissement) : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

- L'amortissement critique : $C_c = 2\sqrt{km}$

- Le facteur d'amortissement : $\zeta = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2\sqrt{km}}$

- Le facteur d'amplification (à la résonance) : pour $\zeta < 0,1$: $Q \approx \frac{1}{2\zeta}$

- Le coefficient d'amortissement : $\delta = -\zeta \sqrt{\frac{k}{m}}$

- La fréquence propre amortie : $f_d = f_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$

Dans le cas d'une force harmonique appliquée sur la masse, l'équation de mouvement devient :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) = F \sin(\omega t)$$

- On définira donc en plus la fréquence de résonance

$$f_r = f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Cela correspond à la fréquence pour laquelle le module X/F (déplacement/force) passe par un maximum.

III-5. APPLICATIONS DES VIBRATIONS

Les vibrations sont mesurées à des fins très diverses. En général, toute vibration non contrôlée est un phénomène indésirable qui augmente le bruit ou cause des défaillances mécaniques prématurées.

Quatre grands domaines de mesure vibratoire peuvent être définis.

III-5.1. ANALYSE STRUCTURELLE

Il s'agit d'une méthode expérimentale performante se basant sur les mesures des vibrations pour déterminer le comportement dynamique d'une structure, allant des petites pales de turbine aux grands ponts. En utilisant un capteur de force et un accéléromètre, le signal d'excitation et la réponse vibratoire de la structure sont mesurés simultanément à l'aide d'un analyseur bicanal ou multivoies.

III-5.2. TEST DE VIBRATION

Pour valider la tenue réelle d'un produit à l'environnement et donc sa conception, le test de vibration est pratiqué en soumettant une structure (une caisse automobile par exemple) à de hauts niveaux vibratoires avec un excitateur vibratoire. Le niveau de vibrations est maintenu constant dans des gammes de fréquence définies. Les informations sur la réponse fréquentielle de la structure sont obtenues.

III-5.3. SURVEILLANCE DE L'ETAT DES MACHINES ET DIAGNOSTIC DES DEFAUTS

Dans sa forme la plus simple, une mesure du niveau global de vibration d'une machine est utilisée afin de signaler tout problème imminent. En effet, les forces internes d'une machine se caractérisent par des niveaux plus ou moins importants suivant son état (déséquilibre par exemple). Cependant, de plus amples informations sont souvent requises pour une détection fiable et précoce d'un grand nombre de défauts : Signatures fréquentielles de base et avancées. Cette technique consiste en la mesure du spectre fréquentiel caractéristique des vibrations d'une machine en bon état, et de la surveillance de tout changement concernant les composantes spectrales. De tels changements sont le reflet d'une modification tant des éléments tournants que de la structure, et permettent le diagnostic de défauts.

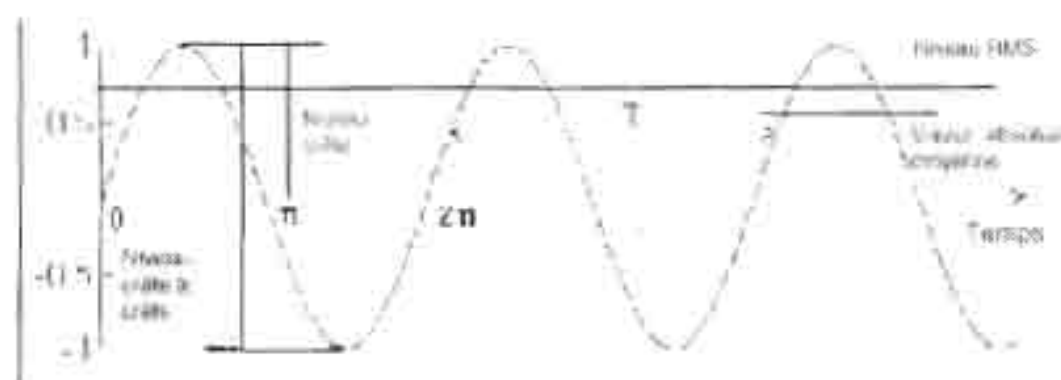
III-5.4. MESURE DES VIBRATIONS APPLIQUEES A L'HOMME

Ce domaine concerne la mesure des vibrations transmises à l'homme. Ces vibrations peuvent provenir, par exemple de véhicules ou d'outils à main portatifs. Les niveaux de vibrations mesurées sont ainsi modifiés pour satisfaire au confort humain et aux critères de santé stipulés dans les normes internationales (ISO 2631, UIC 513).

IV METROLOGIE

IV.1. LA MESURE DU NIVEAU GLOBAL

L'amplitude d'une vibration qui est le paramètre décrivant l'importance de la vibration peut être évaluée de différentes façons. Sur le graphe ci-après, sont indiquées les relations entre la valeur crête à crête, la valeur crête, les valeurs moyenne et efficace pour une vibration pure.



La valeur efficace se détermine par la formule suivante

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt}$$

Elle correspond à une moyenne énergétique.

La valeur absolue moyenne se détermine par

$$V_m = \frac{1}{T} \int_0^T |x| dt$$

La valeur moyenne correspond à la composante continue

Pour un signal sinusoïdal, les relations entre les différents paramètres sont les suivants :

- $V_{rms} = 0.707 V_c$
- $V_{rms} = 1.11 V_m$
- $V_{cc} = 2 V_c$

avec V_c comme vibration crête et V_{cc} comme vibration crête à crête.

Il est évident que pour une vibration aléatoire ou harmonique ces relations ne sont plus aussi évidentes. Le rôle des détecteurs dans un système de mesure est alors important car il doit qualifier tout type de signal. Le facteur de crête est défini par la relation : $F_c = V_c/V_{rms}$

C'est un indicateur sans dimension. Il peut s'exprimer en dB.

IV.2. L'ANALYSE SPECTRALE

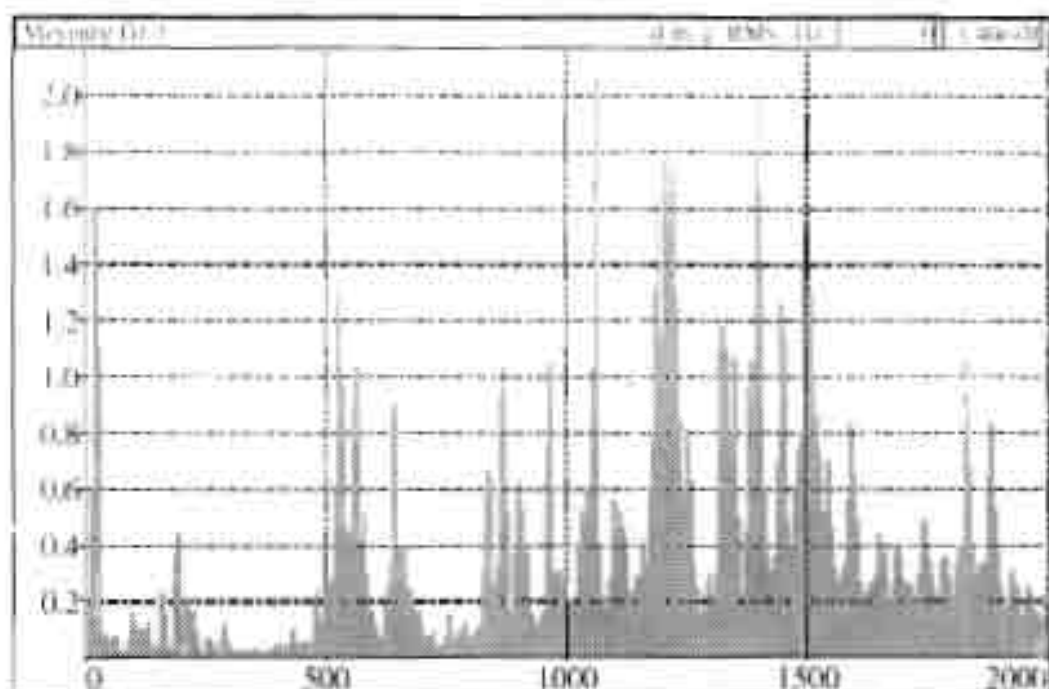
Une vibration harmonique est composée d'une composante fondamentale et d'un cortège d'harmoniques. Pour décrire complètement une telle vibration, il faut spécifier le niveau et la fréquence de chaque composante. L'analyse spectrale est la technique de détermination de ces valeurs, par calculs ou mesures. On doit à Fourier une méthode analytique de décomposition d'une vibration périodique en ses composantes : c'est la série de Fourier. Plus généralement, on peut

démontrer que tout phénomène périodique, par exemple une vibration, est décomposable en vibrations pures. Ainsi une vibration non périodique est considérée comme une vibration périodique dont la période devient infiniment grande. Il peut être alors décrit sous forme d'une somme infinie de composantes fréquentielles infiniment proches. C'est la transformation de Fourier qui permet ce calcul. Les travaux mathématiques de Fourier (1768-1830) ont permis le développement des sciences, en particulier du traitement de signal.

IV.3. LE SPECTRE

Le spectre d'une vibration est l'ensemble des données de niveaux et de fréquences des vibrations pures le composant. Il est habituellement représenté sous la forme d'un graphique. Un spectre est obtenu par analyse spectrale, par exemple en utilisant les algorithmes de Fourier.

Par définition une vibration pure ne comporte qu'une seule fréquence, donc une seule raie. Une vibration harmonique est une somme de vibrations pures, donc l'allure du spectre associé est un ensemble de raies, celles des vibrations pures sommées.



CHAPITRE IV : MODELISATION

Dans ce qui précède, nous avons vu que le niveau de vibrations dépendait d'un certain nombre de paramètres. En effet, chaque machine possède des sources d'excitations qui lui sont propres. Ces sources d'excitations dépendent des fonctionnalités de la machines.

Dans la pratique, il est difficile de dire avec précision le nombre de paramètres qui influencent le niveau de vibrations d'une structure. De même, il n'est pas aisé de prédire le niveau de vibrations causé par chacun de ces paramètres même pris individuellement c'est à dire , en considérant chaque paramètre indépendamment des autres.

Dans ce chapitre, nous essayerons de dégager à partir d'un modèle mathématique, une relation explicite liant ces différents paramètres aux phénomènes vibratoires.

IV-1 IDENTIFICATION DES VARIABLES PERTINENTES

IV-1-a Définition d'une turbomachine

Une turbomachine est une machine qui est traversée par un fluide qui s'écoule de façon continue. Cette turbomachine peut être soit motrice soit réceptrice, mais elle comporte toujours un rotor animé d'une vitesse de rotation uniforme. Ce rotor porte des aubes qui reçoivent ou fournissent du fluide (au fluide) une poussée F . Le couple moteur qui en résulte est : $C = F.r$, où r désigne le rayon du rotor.

La puissance fournie ou consommée est $\dot{W} = C w$, w est la vitesse de rotation du rotor. On peut aussi écrire $\dot{W} = F r w$

Les deux causes de la poussée sont

- la pression du fluide,
- la vitesse du fluide

IV-1-b Variables pertinentes

Dans le cas présent qui nous concerne, la turbomachine en question est une turbine à vapeur, à action, et à huit (08) étages de détente RATEAU. Ses caractéristiques techniques sont données en ANNEXES. La caractéristique essentielle de la turbine est sa puissance fournie à l'alternateur.

Nous venons de voir dans ce qui précède que cette puissance est fonction de la poussée, et que cette poussée dépend elle aussi de la pression et de la vitesse du fluide.

De même, la vitesse du fluide dépend du débit de vapeur à l'admission.

Nous considérerons comme variables pertinentes de la turbine : la pression et le débit de vapeur à l'admission.

Outre ces variables, nous avons aussi la pression de vapeur à l'entrée de la boîte étanche, la température de la vapeur à l'admission et le vide au condenseur.

En effet, les frottements au niveau du rotor ont une influence sur la puissance développée. En plus, si le vide au condenseur n'est pas suffisant, il y'aura une contre pression à l'échappement de la turbine qui réduirait le couple développé par celle-ci.

Dans la suite de ce chapitre, nous étudierons l'influence de ces cinq (05) paramètres réunis sur le niveau de vibrations de la turbine.

IV-2 INDEPENDANCE DES VARIABLES

Une étape aussi importante dans l'analyse des données est l'étude d'indépendance des variables. En effet, avant de s'investir dans un ajustement d'un modèle de régression multiple, il faut au préalable s'assurer que les variables explicatives mises en jeu sont indépendantes. Ceci doit être fait pour plusieurs raisons :

- La détermination de combinaison entre des variables explicatives permet d'en éliminer certains et réduire ainsi le volume de données à traiter
- Les procédures à suivre sont simplifiées et les moyens à mobiliser sont réduits
- La résolution est relativement plus rapide et on réalise un gain de temps.

De grandes théories mathématiques permettent de déceler ce phénomène de multicolinéarité entre les variables. Notamment la propriété sur les fonctions de densité de probabilité :

$P(x, y, t) = p(x) p(y) p(t)$ ou x, y et t sont des variables indépendantes.

Toutefois on peut partir de connaissances des lois de la physique, de la chimie et autres, pour se prononcer sur la dépendance ou l'indépendance entre deux ou plusieurs variables. On peut aussi se servir du coefficient de corrélation qui donne une idée de relation linéaire qui peut exister entre les variables.

Tableau 2 : coefficient de corrélation linéaire

r_{x1x2}	0,0113322
r_{x1x3}	0,0681055
r_{x1x4}	0,0839001
r_{x1x5}	0,0135134
r_{x2x3}	0,381072
r_{x2x4}	-0,433373
r_{x2x5}	0,137775
r_{x3x4}	0,8107066
r_{x3x5}	0,6211071
r_{x4x5}	0,6761829

Nous considérerons que ces variables sont deux à deux linéairement indépendants.

IV-3 ANALYSE DE REGRESSION

L'analyse de régression est très utile dans les techniques statistiques pour développer une relation quantitative entre une variable dépendante et une ou plusieurs variables indépendantes. Cette analyse utilise des données expérimentales des variables pertinentes pour développer une

relation numérique montrant l'influence des variables indépendantes sur la variable dépendante du système.

Si aucune relation théorique liant les variables pertinentes n'est connue, une fonction qui lie les données expérimentales du système peut être établie.

Fréquemment, une fonction linéaire est établie. Dans le cas où une fonction linéaire ne peut s'établir, nous essayerons de trouver une relation (fonction) polynomiale ou exponentielle qui lie les différentes données.

Régression linéaire

L'algèbre matricielle est mieux adaptée à cette étude.

Soient y la variable dépendante et X_p la p ième variable indépendante ; nous avons : $y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_p X_p + \epsilon$,

Où ϵ est l'erreur. Cette écriture peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante : $[Y] = [B] * [X] + [\epsilon]$

$[Y]$: Variable dépendante

$[B]$: Coefficients constants

$[X]$: Variables indépendantes

$[\epsilon]$: Erreur

Nous considérons le modèle suivant $[Y] = [\beta] * [X]$

Pour avoir le plus carré de l'estimation des β_p , nous devons minimiser l'erreur de la somme des carrés.

Pour n observations des valeurs de y de la variable dépendante et X_p des variables indépendantes, la somme des carrés des erreurs est :

$$SS_E = \sum e_i^2 = \sum (y_i - Y_i)^2, \text{ où } y_i \text{ est la valeur observée et } Y_i \text{ la valeur}$$

calculée

$$SS_{TC} = SS_E + SS_R$$

$$SS_{TC} = \sum (y_i - \bar{Y})^2$$

Cette erreur est minimisée en calculant $\frac{\partial}{\partial \beta} (SS_E) = 0$

$$SS_E = \sum e_i^2 = \sum (y_i - Y_i)^2 = \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot X_{1i} - \beta_2 \cdot X_{2i} - \dots - \beta_p \cdot X_{pi})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (SS_E) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot X_{1i} - \beta_2 \cdot X_{2i} - \dots - \beta_p \cdot X_{pi})^2 \right], \text{ d' où le}$$

système d'équation suivant

$$n_0 \cdot \beta_0 + \beta_1 \sum X_{1i} + \beta_2 \sum X_{2i} + \dots + \beta_p \sum X_{pi} = \sum Y_i$$

$$\beta_0 \sum X_{1i} + \beta_1 \sum X_{1i}^2 + \beta_2 \sum X_{1i} \cdot X_{2i} + \dots + \beta_p \sum X_{1i} \cdot X_{pi} = \sum X_{1i} \cdot Y_i$$

$$\beta_0 \sum X_{2i} + \beta_1 \sum X_{1i} \cdot X_{2i} + \beta_2 \sum X_{2i}^2 + \dots + \beta_p \sum X_{2i} \cdot X_{pi} = \sum X_{2i} \cdot Y_i$$

jusqu'à la p ème équation; on obtient:

$$\beta_0 \sum X_{pi} + \beta_1 \sum X_{1i} \cdot X_{pi} + \beta_2 \sum X_{2i} \cdot X_{pi} + \dots + \beta_p \sum X_{pi}^2 = \sum X_{pi} \cdot Y_i$$

Dans le cas de cinq (05) variables ($P=5$), nous avons le système suivant sous forme matricielle $Y=S \cdot B$, où S est la matrice carrée symétrique ci-dessous :

Tableau 3 : Matrice de la régression S

n	ΣX_{1i}	ΣX_{2i}	ΣX_{3i}	ΣX_{4i}	ΣX_{5i}
ΣX_{1i}	ΣX_{1i}^2	$\Sigma X_{1i} \cdot X_{2i}$	$\Sigma X_{1i} \cdot X_{3i}$	$\Sigma X_{1i} \cdot X_{4i}$	$\Sigma X_{1i} \cdot X_{5i}$
ΣX_{2i}	$\Sigma X_{1i} \cdot X_{2i}$	ΣX_{2i}^2	$\Sigma X_{2i} \cdot X_{3i}$	$\Sigma X_{2i} \cdot X_{4i}$	$\Sigma X_{2i} \cdot X_{5i}$
ΣX_{3i}	$\Sigma X_{1i} \cdot X_{3i}$	$\Sigma X_{2i} \cdot X_{3i}$	ΣX_{3i}^2	$\Sigma X_{3i} \cdot X_{4i}$	$\Sigma X_{3i} \cdot X_{5i}$
ΣX_{4i}	$\Sigma X_{1i} \cdot X_{4i}$	$\Sigma X_{2i} \cdot X_{4i}$	$\Sigma X_{3i} \cdot X_{4i}$	ΣX_{4i}^2	$\Sigma X_{4i} \cdot X_{5i}$
ΣX_{5i}	$\Sigma X_{1i} \cdot X_{5i}$	$\Sigma X_{2i} \cdot X_{5i}$	$\Sigma X_{3i} \cdot X_{5i}$	$\Sigma X_{4i} \cdot X_{5i}$	ΣX_{5i}^2

Et B est la matrice colonne des inconnues β_p et sa transposée B'

$B' = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5]$ De même, Y est une matrice colonne et sa transposée est $Y' = [\Sigma y_i \ \Sigma X_{1i} \cdot y_i \ \Sigma X_{2i} \cdot y_i \ \Sigma X_{3i} \cdot y_i \ \Sigma X_{4i} \cdot y_i \ \Sigma X_{5i} \cdot y_i]$

Toutes les sommes varient de $i=1$ à $i=n$.

La résolution de ce système d'équations nous permet d'obtenir les β_p .

Après la détermination des β_p , nous tenterons de vérifier deux hypothèses H_0 et H_1

- **Hypothèse H_0** : $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ (tous les coefficients sont nuls) i.e. il n'existe aucune relation linéaire liant les variables indépendantes à la variable dépendante.

Pour vérifier cette hypothèse, nous utiliserons les relations du tableau ci-dessous.

Tableau 4 Analyse de la variance pour une régression linéaire multiple

Source	d.f	SS	M.S
Régression	P	SS_R	$MS_R = SS_R / p$
Erreur	$n-p-1$	SS_E	$MS_E = SS_E / (n-p-1)$
Total	$n-1$	SS_{TC}	

Où

d.f : degré de liberté ;

SS : Somme des carrés ;

MS : Moyenne des carrés

L'hypothèse est testée en calculant $F = MS_R / MS_E$ puis en le comparant avec $F_{p, (n-p-1), 1-\alpha}$. La région critique est $F > F_{p, (n-p-1), 1-\alpha}$.

Hypothèse H_1 : $\beta_k \neq 0, k=1, 2, \dots, 5$.

Pour tester cette hypothèse, nous devons connaître la distribution de la statistique $(\hat{\beta}_k - b_k) / S_{\hat{\beta}_k}$, où $S_{\hat{\beta}_k}$ est une estimation de la variance des $\hat{\beta}_k$.

$S_{\hat{\beta}_k}^2 = C_{kk} \sigma^2$, où C_{kk} est le kk ième élément de la matrice $C = S^{-1}$.

S^{-1} désigne l'inverse de la matrice de S.

Finalement, la variable aléatoire $(\hat{\beta}_{k-1} - b_{k-1})/S_{\beta k}$ a une distribution-t avec $(n-p-1)$ degrés de liberté. Ainsi, pour tester $H_1 : \beta_{k-1} = 0$, nous utiliserons la statistique $T = \hat{\beta}_{k-1} / S_{\beta k}$ et la règle est de rejeter H_1 .

Tableau 5 Données extrait des feuilles de marche de Janvier 2002 et résultats de la régression (Reg)

X1	X2	X3	X4	X5	y	Y	VPAV	DAX
PA	TA	DA	PBE	VC	VPAR	Reg	VPAV	DAX
40	426	51	0.23	-0.36	41	39.9533854	8	-0.01
40	422	53	0.22	-0.34	40	41.1655437	8	-0.01
40	422	50	0.2	-0.44	40	40.8658572	8	0.01
40	419	51	0.24	-0.44	39	41.3959521	8	0.03
40	420	52	0.26	-0.42	39	41.0745252	8	0.01
40	416	52	0.24	-0.4	39	42.3808296	8	0.02
40	415	51	0.22	-0.43	40	42.6548514	8	0.01
40	418	49	0.19	-0.48	40	41.9301764	8	0.01
40.5	419	51	0.28	-0.36	40	40.8083897	7	0
40	422.6	52	0.21	-0.48	40	40.4202537	8	-0.01
40	424	50	0.21	-0.48	40	40.0704897	8	-0.02
40	422	50	0.21	-0.48	38	40.6099462	8	-0.02
40	424	50	0.21	-0.58	38	39.5954387	8	-0.03
40	424.8	52	0.21	-0.56	38	39.4476107	8	-0.03
40	424	50	0.21	-0.56	38	39.6912489	8	-0.05
40	423	47	0.16	-0.6	39	40.1445928	8	-0.04
40	419	50	0.2	-0.59	39	40.9639656	8	0.05
40	418	50	0.21	-0.6	40	41.1199983	8	0.04
40	420	38	0.13	-0.69	40	40.8513535	7	0.03
40	420	36	0.08	-0.7	40	41.1832566	8	0.03
40	416	46	0.16	-0.68	40	41.6673779	8	0.02
40	415.7	46	0.21	-0.68	40	41.4168437	8	0.04
40	419.8	49	0.21	-0.64	40	40.4587948	8	0.04
40	419.2	49	0.21	-0.58	40	40.9050623	8	-0.04
40	418.2	51	0.22	-0.58	38	41.6201011	8	-0.03
40	415.2	52	0.22	-0.56	38	41.9707118	8	-0.02
40	418.3	52	0.21	-0.56	38	41.2008446	8	-0.04
40	418.8	51	0.22	-0.58	38	40.9188075	8	-0.04
40	415	53	0.21	-0.5	37	42.3614508	8	0.05
40	413	53	0.18	-0.65	39	42.3887025	8	0.06
40	413	46	0.23	-0.62	41	42.2969596	8	0.04
40	414	53	0.25	-0.5	40	42.3660169	8	0.03
40	415	52	-0.24	-0.52	40	45.2636424	8	0.01

40	415	52	0.21	-0.5	41	42.3753785	8	0.02
40	415	50	0.23	-0.54	40	42.0810326	8	0.04
40	409	47	0.19	-0.61	41	43.6745122	8	0.04
40	413	51	0.22	-0.56	38	42.5780418	8	0.06
40	422	50	0.2	-0.56	39	40.296996	8	0.04
40	420	36	0.14	-0.7	39	40.7655134	8	0.04
40	420	36	0.12	-0.72	39	40.8032843	8	0.05
40	416	38	0.08	-0.75	40	41.9772887	8	0.08
40	415	26	0.05	-0.7	40	42.8500474	8	0.06
40	416	47	0.18	-0.68	37	41.520869	8	-0.05
40	416	29	0.11	-0.7	37	42.1407926	8	0.03
40	420	31	0.08	-0.72	37	41.1380853	8	0.03
39.5	419	35	0.08	-0.72	41	42.0537435	8	0.04
39	426	31	0.08	-0.74	41	40.8281874	8	0.06
38.5	424	23	0.06	-0.7	39	42.5029086	8	0.06
39	420	23	0.05	-0.71	39	42.8990662	8	0.07
40	422	23	0.07	-0.68	40	40.9659619	8	0.07
40	420	24	0.09	-0.69	40	41.3115045	8	0.07
40	422.6	22	0.08	-0.69	36	40.704357	10	-0.06
40	422.2	20	0	-0.69	36	41.3704282	8	-0.06
40	419	18	0.05	-0.69	36	41.9299616	8	-0.05
40	419.6	22	0.02	-0.64	38	42.1483106	8	-0.08
40	425	46	0.21	-0.36	38	40.3674781	8	-0.05
40	426.2	50	0.21	-0.46	38	39.5716976	8	-0.02
40	423	36	0.14	-0.5	38	40.9044304	8	0.02
40.5	420	28	0.09	-0.7	38	40.5067473	8	0.04
40	419	33	0.09	-0.69	38	41.4558828	8	0.06
40	418	32	0.1	-0.68	37	41.7206534	8	0.06
40	421	32	0.1	-0.68	37	40.9114686	8	0.07
40	413	32	0.11	-0.7	38	42.9081941	8	0.07
40	413.3	32	0.1	-0.72	38	42.798756	8	-0.05
40	415.8	32	0.1	-0.72	38	42.1244353	8	-0.04
40	418	28	0.1	-0.72	38	41.5867442	8	-0.02
40	411.6	20	0	-0.72	36	44.0873328	8	-0.03
40	412.4	32	0	-0.7	38	43.799227	8	-0.02
40	416.4	30	0.08	-0.72	40	42.1230349	8	-0.04
40	417	28	0.09	-0.66	37	42.2071935	8	0.05
40	413	45	0.18	-0.48	39	43.3060114	8	0.05

40	413	40	0.17	-0.65	38	42.6380542	8	0.00
40	406	32	0.11	-0.65	37	44.4938611	8	0.06
40	411	28	0.1	-0.67	36	43.7118677	9	-0.01
40	418	28	0.09	-0.68	37	41.8426551	9	0.06
40	418.3	34	0.1	-0.68	38	41.7066896	10	-0.05
40	417	36	0.12	-0.66	38	41.8968997	10	-0.04
40	412.8	18	0.08	-0.7	38	43.3560003	10	-0.05
40	417	36	0.15	-0.65	38	41.7454332	10	-0.05
40	416	51	0.21	-0.62	38	41.5507169	10	-0.02
40	417	52	0.21	-0.62	38	41.2670608	10	-0.03
40	419	51	0.22	-0.6	37	40.7700517	8	-0.01
40	417	53	0.21	-0.6	37	41.3479432	8	0.04
40	415	49	0.18	-0.6	37	41.8722542	8	0.05
40	412	62	0.7	-0.62	40	39.2281883	8	0.04
40	410	66	0.52	-0.4	40	41.9480754	8	0.03
40	413	65	0.5	-0.38	40	41.3802096	8	-3.04
40	408	63	0.42	-0.38	40	43.2870309	8	-0.03
40	407.1	66	0.54	-0.3	42	43.0717573	8	-0.02
40	407	68	0.6	-0.3	43	42.6731314	8	-0.03
40	407.2	67	0.47	-0.34	42	43.3052701	8	-0.02
40	409	74	0.51	-0.36	42	42.3622924	8	-0.03
40	410	66	0.51	-0.34	41	42.2987965	8	-0.01
40	414	67	0.51	-0.36	41	41.1111454	8	-0.01
40	411	63	0.46	-0.34	41	42.4023043	8	0.01
40	412	63	0.48	-0.35	41	41.9525898	8	0.03
40	413	67	0.53	-0.38	42	41.2482926	8	0.02
40	413	65	0.49	-0.38	42	41.5413103	8	0.01
39	412	62	0.5	-0.35	42	43.1898134	8	0.03
39.5	408	59	0.47	-0.3	42	44.4236237	8	0.04
38.5	405	57	0.44	-0.42	43	45.9625039	8	0.05
39.5	405	59	0.25	-0.36	44	46.0090266	8	0.04
39.5	405	56	0.3	-0.38	42	45.6908378	8	0.05
40	405	50	0.22	-0.52	41	44.9394163	7	0.06
40	403.7	58	0.41	-0.36	40	44.6776021	8	-0.03
40	403.2	58	0.38	-0.46	40	44.537287	8	-0.03
40	403.1	50	0.25	-0.4	40	45.8218895	8	-0.04
40	403.1	58	0.41	-0.22	40	45.5031104	8	-0.04
40.2	408.1	56	0.31	-0.38	40	43.806092	8	-0.05
40	406.1	52	0.28	-0.44	40	44.5963571	8	-0.04

40	404	51	0.23	0.48	39	45.3185400	7	0.06
40	404	49	0.2	-0.56	40	45.166033	8	0.06
39.5	409	49	0.22	-0.55	41	44.4338566	7	0.05
40	414	53	0.24	-0.46	40	42.6219278	8	0.05
40	407	55	0.3	-0.4	39	44.3688576	8	0.04
40	406	50	0.27	-0.53	39	44.2908302	8	0.05
40	407.7	52	0.21	-0.52	39	44.2495849	8	-0.04
40	407	52	0.2	-0.52	40	44.5046852	8	-0.03
40	408	51	0.31	-0.54	40	43.4246786	8	-0.02
39.5	398	54	0.28	-0.43	45	47.5023468	8	0.04
40	400	61	0.45	-0.3	43	45.6530819	9	0.03
40	402	62	0.52	-0.36	45	44.3512332	9	0.04
40	400	65	0.51	-0.32	45	45.1048174	8	0.03
40	400.3	57	0.35	-0.32	45	46.1959697	8	0.03
40	400.2	67	0.53	-0.32	44	44.8904351	8	0.04
40	404	58	0.38	-0.35	44	44.8429604	8	-0.04
40	405	59	0.36	-0.31	44	44.8815057	8	-0.04
40	404	62	0.47	-0.31	44	44.3802548	8	-0.05
40	403	62	0.48	-0.3	45	44.6310977	10	-0.03
40	405	62	0.44	-0.3	45	44.3568032	10	-0.01
40	402	64	0.5	-0.28	45	44.8351995	10	-0.02
40	403	61	0.47	-0.31	44	44.6639109	10	-0.01
40	402	62	0.45	-0.32	45	45.0048874	10	-0.01
40	404.6	69	0.52	-0.34	38	43.6472554	10	-0.03
40	401.3	66	0.51	-0.34	38	44.6454326	10	-0.04
40	402.6	66	0.5	-0.32	39	44.4019409	10	-0.04
39	400	68	0.52	-0.2	40	46.9688866	10	-0.04
40	403	65	0.52	-0.28	44	44.4189524	10	-0.04
40	404	66	0.51	-0.27	44	44.2490019	10	-0.04
40	405	67	0.52	-0.28	44	43.8516502	10	-0.04
40	404	67	0.52	-0.3	45	44.0265883	10	-0.02
39	406	67	0.54	-0.3	45	45.0275409	10	0
40	404	67	0.48	-0.3	45	44.2917305	10	-0.02
40	406	64	0.5	-0.34	45	43.4718558	10	0.01
40	405	65	0.5	-0.32	45	43.6224665	10	0
40	404	66	0.49	-0.31	45	44.1919626	10	-0.01
40	403	66	0.47	-0.3	46	44.6416771	10	0.01
40	403	67	0.52	-0.24	46	44.5807272	10	0.01
40	403	53	0.24	-0.36	43	46.0629899	8	0.01

40	401	52	0.24	-0.36	43	46.5163743	8	0.01
40	409	53	0.24	-0.36	43	44.4446202	8	0.01
40	400	59	0.51	-0.21	47	45.7098401	10	0.01
40	397	50	0.49	-0.47	48	45.5444236	8	0.04
40	397	50	0.24	-0.56	47	45.7750411	8	0.04
40	397	50	0.21	-0.52	48	47.1635331	8	0.05
40	397	49	0.21	-0.56	48	46.9878405	8	0.06
40	397	52	0.24	-0.52	48	46.9368059	8	0.06
40	397	54	0.24	-0.48	48	47.0985708	8	0.06
40	398	55	0.23	-0.42	48	47.7050924	8	0.03
40	400	55	0.23	-0.42	48	46.6261792	8	0.03
40	397	71.5	0.23	-0.3	48	47.7744169	8	0.03
40	397	51	0.24	-0.3	48	47.9936458	8	0.03
40	398	59	0.51	-0.27	47	45.9548861	10	-0.01
40	398	67	0.5	-0.25	47	46.0145446	8	-0.01
40	398	58	0.43	-0.28	47	46.4477853	8	0.01
40	398	59	0.44	-0.27	47	46.4288999	8	0.03
40	398	58	0.4	0.32	47	46.4709643	8	0.03
40	399.9	59	0.51	-0.28	47	45.4049773	8	0.02
40	399	57	0.38	-0.38	48	46.1778093	8	0.02
40	399	5	0.38	-0.44	48	46.5031282	8	0.05
40	399	63	0.43	-0.29	48	46.0749408	8	0.05
40	398	86	0.53	-0.27	48	45.7347906	8	0.05
40	400	66	0.53	-0.25	48	45.2901442	8	0.03
40	406	67	0.53	-0.24	48	43.7052518	8	0.03
40	401.9	54	0.17	-0.45	50	46.3831512	8	-0.01
40	401.4	55	0.22	-0.48	50	46.0304196	8	-0.03
40	402.5	54	0.32	-0.42	50	45.3691715	8	-0.02
40	402.8	57	0.33	0.38	49	46.1023437	8	-0.04
40	401.4	46	0.21	-0.56	48	45.8428194	8	-0.05
40	403.7	45	0.21	-0.64	48	44.8571313	8	-0.03
40	405	46	0.2	-0.62	48	44.6536575	8	0.03
39.5	407	48	0.2	-0.6	48	44.8827965	8	-0.04
40	404.7	42	0.13	-0.55	50	45.1121058	8	0.03
40	404	38	0.14	-0.55	47	45.7822424	10	0.02
40	406	49	0.32	-0.58	47	43.7362798	8	0.02
40	405.3	45	0.1	-0.64	48	45.154762	8	0.02
40	406.1	44	0.18	-0.66	49	44.3277726	8	-0.04
40	403.7	32	0.11	-0.7	49	45.4166672	8	-0.03

40	404	50	0,22	-0,5	49	45,3039547	8	0,04
40	405,8	48	0,18	-0,52	49	45,0166513	8	-0,03
40	407,5	47	0,21	-0,6	50	43,9939287	8	-0,05
40	404,3	43	0,16	-0,68	50	44,8649822	8	-0,06
39	405	48	0,2	-0,53	48	45,9816788	8	0,05
40	404	47	0,16	-0,63	48	45,1272151	8	0,06
40	401	45	0,17	-0,66	51	45,7557497	8	0,05
40	405	43	0,11	-0,68	48	45,0076251	8	0,02
40	404	47	0,18	-0,63	51	44,994634	8	0,04
40	405	48	0,18	-0,62	51	44,758383	8	0,04
40	404	44	0,18	-0,7	48	44,7045817	8	0,05
40	404	44	0,16	-0,7	47	44,8371627	8	0,06
39	404	46	0,18	-0,64	48	46,3365831	8	0,05
39,5	402	47	0,17	-0,66	49	46,1598068	8	0,06
40	404	26	0,06	-0,74	47	45,5611477	7	0,04
40	404	37	0,12	-0,76	48	44,9153886	8	0,06
39	401	40	0,14	-0,66	48	47,4275421	8	0,05
40	407	47	0,17	-0,66	49	44,1095244	8	0,04
40	406	47	0,18	-0,6	49	44,5973927	8	0,03
39,5	409	46	0,17	-0,68	49	44,1908264	8	0,04
40	406	47	0,18	-0,65	49	44,3803672	8	0,01
40	406	47	0,2	-0,62	48	44,3700014	8	0,04
40	405	31	0,2	-0,66	48	44,6729538	8	0,04
39	404	52	0,26	-0,5	45	46,414219	8	0,04
39,5	406	51	0,19	-0,54	48	45,4614626	7	0,04
38,5	406	50	0,19	-0,56	49	46,7838622	8	0,05
39	409	48	0,2	-0,6	49	45,0449809	8	0,06
39	407,8	49	0,19	-0,62	49	45,3262075	8	-0,05
39	408,9	48	0,18	-0,66	49	44,9201043	8	-0,04
39	401,4	34	0,06	-0,66	49	47,8009607	8	0,05
39	412,3	45	0,13	-0,74	44	43,9970234	8	0,04
40	406	41	0,17	-0,72	48	44,1783888	8	0,03
40	408	46	0,26	-0,69	44	43,1148936	8	0,02
40	407	53	0,26	-0,52	49	44,0930142	8	0,04
40	412	50	0,2	-0,58	44	42,8994687	8	0,01
40	414	50	0,2	-0,64	46	42,0755816	7	0,03
40	409	50	0,19	-0,63	49	43,5379187	8	0,02
40	411	47	0,17	-0,7	48	42,8409908	8	0,03
40	413	41	0,15	-0,73	45	42,3754667	8	0,05

39	411.5	48	0,15	-0,68	45	44,3228721	8	-0,04
40	413.8	41	0,17	-0,74	44	41,9796979	8	-0,05
40	414	42	0,1	-0,74	44	42,3758582	8	-0,03
40	414	30	0,1	-0,76	45	42,4481814	8	-0,04
40	413	41	0,16	-0,74	47	42,2617711	8	0,04
40	413	54	0,26	-0,66	48	41,7970454	8	0,01
40	423	48	0,5	-0,42	47	38,7300786	8	-0,04
40	404	59	0,43	-0,26	48	44,9242257	8	-0,03
40	422	58	0,41	-0,26	48	40,2156254	8	-0,05
40	417	53	0,28	-0,24	47	42,5904929	8	0,02
39,5	416	50	0,22	-0,26	48	43,9065785	8	0,02
40	418	49	0,3	-0,26	47	42,1490844	7	0,03
40	417,8	50	0,22	-0,26	48	42,7194266	7	-0,04
40	415,5	47	0,25	0,28	43	45,7425885	8	-0,04
40	418	42	0,15	-0,22	43	43,4305573	8	-0,04
40	414,8	44	0,18	-0,26	43	43,8773403	8	-0,03
40	415,2	39	0,21	-0,24	44	43,7350264	8	-0,03
40	415,3	57	0,21	-0,44	47	42,5092517	8	-0,01
40	415,9	32	0,1	-0,72	48	42,0974625	8	0,05
40	423	28	0,06	-0,7	48	40,598075	8	0,05
40	421	34	0,04	-0,33	48	42,9405345	8	0,06
40	421	27	0,11	-0,3	47	42,7162105	8	0,05
40	423	36	0,12	-0,3	45	41,9851134	8	0,05
40	422	32	0,12	-0,29	45	42,3579579	8	0,05
40	421	32	0,11	-0,32	44	42,5517614	8	-0,05
40	420,4	32	0,1	-0,34	44	42,6850787	8	-0,04
40	419,2	30	0,11	-0,34	45	42,9703177	8	-0,03
40	423	33	0,1	-0,34	45	41,9698574	8	-0,02
40	422,4	46	0,18	-0,32	48	41,5151192	8	-0,01
40	423,9	46	0,18	-0,32	48	41,1105267	8	-0,02
39,5	422	43	0,18	-0,27	47	42,6034603	8	-0,01
40	424	58	0,26	-0,28	44	40,5757166	8	-0,03
40	427	48	0,18	-0,72	43	38,3503097	8	0,02
40	424	35	0,08	-0,7	45	40,0982712	8	0,04
40	425	31	0,07	-0,69	44	39,9979497	8	0,03
40	422	26	0,05	-0,7	45	40,9619494	8	0,05
40	421	26	0,08	-0,69	43	41,0802112	7	0,05
40	424	26	0,11	-0,5	43	40,9728515	7	0,06
40	421	52	0,26	-0,3	43	41,373658	7	-0,02

40	418	39	0.09	-0.7	44	41.5946393	7	0.03
40	421	35	0.1	-0.72	47	40.6800648	7	0.04
39.5	420	32	0.08	-0.7	46	41.9206087	8	0.03
39.5	418	32	0.09	-0.7	45	42.3937748	7	0.04
39.5	419	24	0.04	-0.66	44	42.7565417	8	0.05
39.5	419	30	0.08	-0.7	43	42.2181926	8	0.06
39	417.7	24	0.05	-0.7	44	43.6526188	8	-0.04
39.3	417.1	30	0.06	-0.71	44	43.0965087	8	-0.04
39	418.3	24	0	-0.7	40	43.7225343	8	-0.05
39	415.5	47	0.19	-0.28	40	44.8889284	8	-0.03
40	414	59	0.33	-0.28	38	42.795038	8	-0.08
39.5	416	59	0.33	-0.28	39	42.9572224	8	-0.07
40	417	58	0.32	-0.28	41	42.0660715	8	-0.04
40	416	59	0.32	-0.28	41	42.321872	8	-0.02
40	414	58	0.29	-0.36	41	42.8948872	8	0.02
40	413	57	0.28	-0.36	41	43.0448338	9	0.02
40	416	58	0.29	-0.36	40	42.1554306	9	0.02
40	414	57	0.28	-0.38	41	42.6802963	8	0.03
40	412.5	57	0.27	-0.4	40	43.0563681	8	-0.01
40	415.1	50	0.21	-0.8	40	40.9541084	8	-0.03
40	413.8	45	0.15	-0.84	40	41.5825159	8	-0.02
40	414	47	0.1	-0.88	38	41.642548	8	-0.01
40	415	35	0.09	-0.72	41	42.3647251	8	0.04
40	415	41	0.13	-0.73	41	41.9685912	10	0.04
40	414	42	0.13	-0.86	41	41.8081255	10	0.04
40	411	46	0.17	-0.86	41	42.0964371	10	0.06
40	414	45	0.15	-0.86	42	41.4337611	10	0.06
40	412	43	0.18	-0.86	43	41.8022016	10	0.05
40	412	47	0.16	-0.86	42	41.8790716	10	0.06
40	413	49	0.17	-0.87	42	41.4677921	10	0.05
40	411.3	48	0.2	-0.86	42	41.7887918	10	-0.05
40	412.1	48	0.17	-0.85	42	41.8192856	10	-0.04
40	412.3	45	0.15	-0.86	42	41.8922992	10	-0.03
40	408.7	33	0.1	-0.88	42	43.2670869	10	-0.02
40	403.4	54	0.21	-0.5	42	45.4763711	10	-0.03
40	407.7	56	0.21	-0.54	42	43.6389404	10	-0.01
40	408	63	0.38	-0.36	43	43.6470032	8	0.03
40	407	41	0.14	-0.84	45	43.538671	8	0.05
40	406	49	0.18	-0.81	45	43.5740302	8	0.06

Détermination des coefficients β_p **Matrice de la régression S**

344	13721,3	141796,7	16366,7	80,92	-175,99
13721,3	547347,07	5655926,25	652915,25	3228,734	-7019,508
141796,7	5655926,25	58470223,91	6734123,4	33187,173	-72613,292
16366,7	652915,25	6734123,4	830735,99	4337,171	-7879,206
80,92	3228,734	33187,173	4337,171	25,9736	-35,1892
-175,99	-7019,508	-72613,292	-7879,206	-35,1892	102,1893

Matrice inverse de S

50,1052194	-1,0059106	-0,023217299	0,002442017	-0,557058050	0,31600189
-1,0059106	0,02607313	-7,02744E-05	-3,65481E-05	-0,006332860	0,00368605
-0,0232173	-7,0274E-05	6,06135E-05	4,0448E-06	0,00189095	-0,00077841
0,00244202	-3,6548E-05	4,0448E-06	5,80133E-05	-0,00346645	-0,00056265
-0,55705805	-0,006332860	0,00189095	-0,0034664530	0,54949227	-0,12876857
0,31600189	0,00368605	-0,000778411	-0,000562652	-0,128768570	1,6635659

Matrice Y

14836
591707,1
6110487,6
707422,1
3510,43
-7561,97

Matrice B

214,9304981
-1,403281973
-0,28972829
-0,013927778
-6,629053514
4,740509401

Vérification des hypothèses

Analyse de la variance

Source	d.f	SS	M.S
Régression	5	1388,729	277,745799
Erreur	338	3577,6431	10,5847429
Total	343	4966,37209	

Hypothèse H_0

$F = 26,2402027$, F est très significatif, donc H_0 est rejetée.

Hypothèse H_1

T0	7,499515
T1	-2,14647071
T2	-8,55693678
T3	-2,45164219
T4	-2,20875399
T5	2,87065913

On veut un degré de confiance de 95% donc $\alpha = 5\%$.

$T_{338, \alpha/2} = -1.96$ et $T_{338, 1-\alpha/2} = 1.96$ (cf. annexe 4). Donc H_1 est rejetée.

Ce modèle peut être utilisé pour faire la description.

VI-4 INTERPRÉTATION DES RESULTATS

En analysant les courbes données en annexe 3 :

- On constate que le niveau de vibrations, varie (dépasse UWL) entre le 15 et 18 janvier ;
- la température quant à elle varie du 13 au 18 et du 22 au 24 ,

- quant au vide au condenseur, il varie du 2 au 7, 18 au 23 et du 28 au 31. Sa plage de variation est (-0.2 à -0.6).
- On observe aussi une légère variation de la pression le 1,4,9,14 et du 19 au 22.
- Nous avons considéré les valeurs de UCL et LCL parcequ'elles donnent les plus grandes plages de variation tout en restant dans les limites raisonnables de variation de ces différents paramètres.
 - D'autre part, la feuille de marche montre qu'il y a eu un dépassement de la valeur de consigne d'alerte aux vibrations les 17,18 et 19 janvier.

En conséquence, nous pouvons dire que la détérioration des paramètres de marche du TAP influence directement le niveau des vibrations.

VI-5 PROPOSITIONS

Le bon fonctionnement du TAP requiert une alimentation dans les limites de fonctionnement. Par conséquent, l'exploitation doit prendre de certaines précautions :

La vitesse est fixée à 6700 rpm ;

1-En fonctionnement normal :

- ❖ La pression de vapeur à l'admission, de 41 bars abs ;
- ❖ La température de la vapeur à l'admission, 420°C ;
- ❖ La pression de vapeur à l'échappement, 0.15 bars abs.

2-En maximum de puissance(13550 KW) :

- ❖ La pression de vapeur à l'admission, de 42.5 bars abs ;
- ❖ La température de la vapeur à l'admission, 425°C ;

3-En minimum de puissance :

- ❖ La pression de vapeur à l'admission, de 40 bars abs ;
- ❖ La température de la vapeur à l'admission, 404°C.

En outre, dans la prévention des défauts , une vérification périodique des points cités ci-dessous s'avère nécessaire :

- Vérification de l'alignement avec la machine entraînée ;
- Déséquilibre

Enlever les dépôts sur les ailettes

- Frottements

Corriger la position axiale du rotor. Régler la butée à la demande.

S'assurer que la machine entraînée n'exerce pas de poussée sur l'arbre de la turbine.

- Déformation de l'arbre

Une déformation peut-être provoquée par une mise en charge trop rapide ou par un frottement anormal des labyrinthes. Dans ce dernier cas il faut vérifier à nouveau l'alignement interne.

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Nous avons trouvé, à partir des données des feuilles de marches de la centrale, une relation qui lie les vibrations aux paramètres de marche du TAP. Cette relation expliquerait l'origine de ces perturbations non permanentes qui influencent de façon notable les performances de la machine ; ce qui peut aller jusqu'à l'arrêt de la production d'énergie électrique qui va générer un coût supplémentaire provenant de l'achat d'énergie électrique à la SENELEC.

Elle nous a permis de déterminer la plage de variation des paramètres essentiels tels que pression et température de la vapeur à l'admission correspondant à un fonctionnement optimum du TAP.

En plus, une vérification périodique de l'état de la machine doit être effectuée.

Tous ces facteurs interviennent pour minimiser les arrêts indésirables du TAP.

Par conséquent, nos recommandations devront être mises en pratique afin de résoudre ce problème.

Nous recommandons aussi d'étudier les régimes transitoires (démarrages).

Rappelons que la cause de dysfonctionnement considérée jusqu'ici est *le niveau de vibrations élevé* ; cependant nous avons eu à constater d'autres causes de dysfonctionnement qui n'ont pas été prises en compte

dans cette étude. Nous donnerons comme exemple *le déclenchement de la chaudière*.

Une analyse des réseaux électrique et vapeur pourra être effectuée afin d'apporter des réponses aux problèmes qui leurs sont liés.

BIBLIOGRAPHIE

[1]-BOUDET, René. Fonctions et composants mécaniques (Techniques de l'ingénieur BM5).

[2]-BETHEA, Robert. Statical Methods, USA, 3^e éd, D.B Owen, Founding Editor, 1991, 652p.

[3]-www.aesse-misure.it/docs/fr_vib.pdf

[4]-Notes de cours, Moteurs, Turbines, Compresseurs

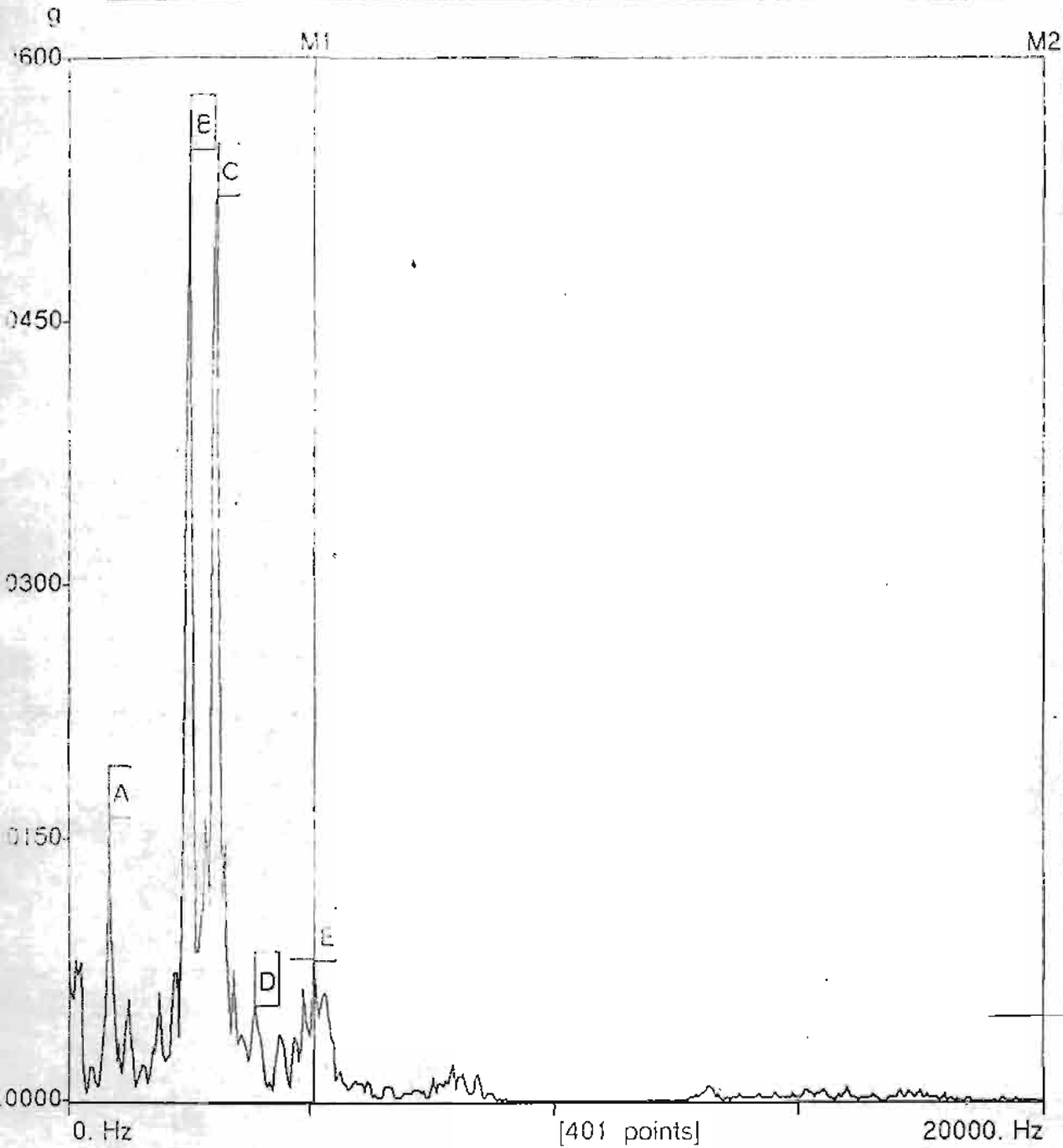
ANNEXES

ANALYSE DES ETATS D'ANALYSES MIDDATAIDEC

VITESSE DE ROTATION MACHINE								1500 tr/mn	
	NG déplacement $\mu\text{m CC}$		NG vitesse mm/s RMS		roulement en g RMS		balourd à 25 Hz mg RMS		
	arrêt								
très mauvais	100	300	10	18			100	300	
mauvais	60	100	6	10	6	10	60	100	
acceptable	30	60	3	6	3	6	30	60	
bon	<	30	<	3	<	3	<	30	

ATEL UTILITES - H 1516 - TURBO ALTERNATEUR PRINCI

Accelerometre - #11 - Palier 1 Ax - 02/03/2001 20:33:32 - 0-20000Hz



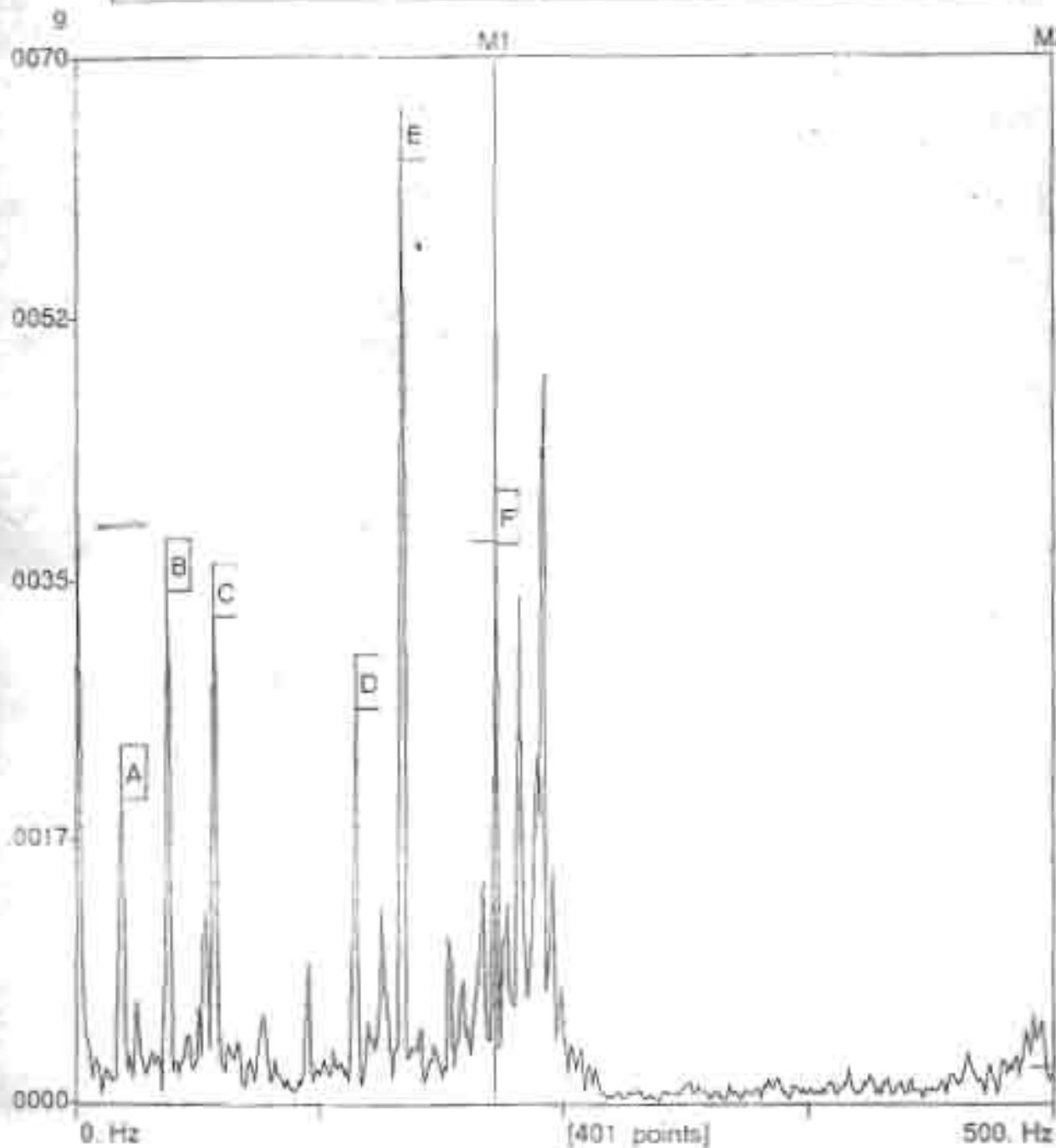
A	850. Hz	0.0165g
B	2500. Hz	0.0550g
C	3100. Hz	0.0523g
D	3900. Hz	0.0057g
E	5100. Hz	0.0081g

X1 =	5100 Hz	Y1 =	0.0081g	Vit.	6703 tr/mn
X2 =	20000. Hz	Y2 =	0.0000g	Vit.	6703 tr/mn
Loupe	0	Commentaire ?			

Test n° Niveaux global Accélération palier 1 Axial
15000 tr/mn

ATEL UTILITES H 1516 TURBO ALTERNATEUR PRINCI

Accelerometre #11 Palier 1 Ax - 02/03/2001 20:33:32 - 0-500Hz



A
23.75 Hz

0.0020g

B
47.5 Hz
0.0034g

C
71.25 Hz
0.0032g

D
143.75 Hz
0.0026g

E
167.5 Hz
0.0063g

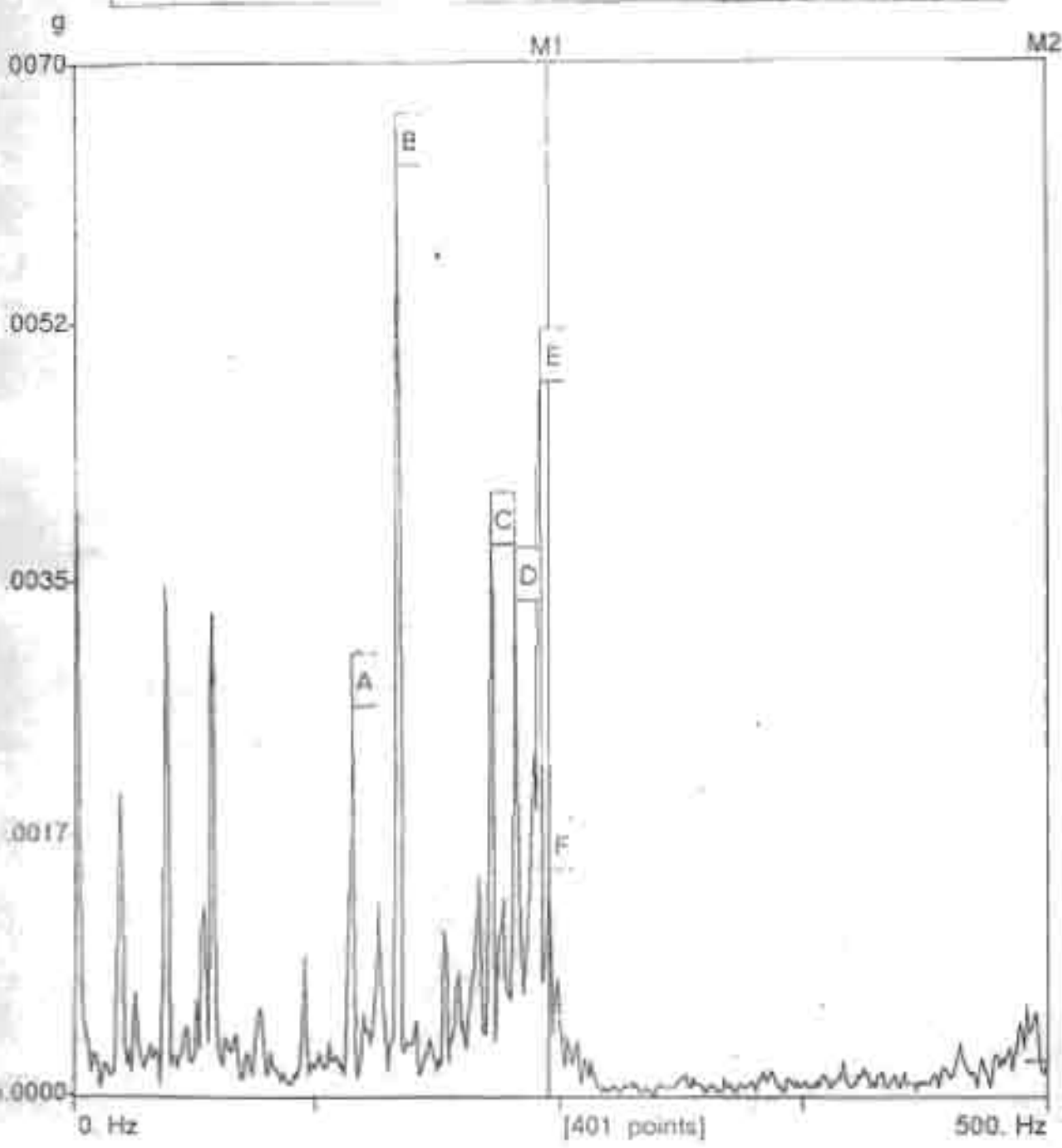
F
215. Hz
0.0037g

X1 =	215. Hz	Y1 =	0.0037g	Vit.	6703 tr/mn
X2 =	500 Hz	Y2 =	0.0002g	Vit.	6703 tr/mn
Loupe	0	Commentaire ?			

Vue globale balourd Palier 1 Axial

ATEL UTILITES H 1516 - TURBO ALTERNATEUR PRINCI

Accelerometre #11 P.ulier 1 Ax - 02/03/2001 20:33:32 - 0-500Hz



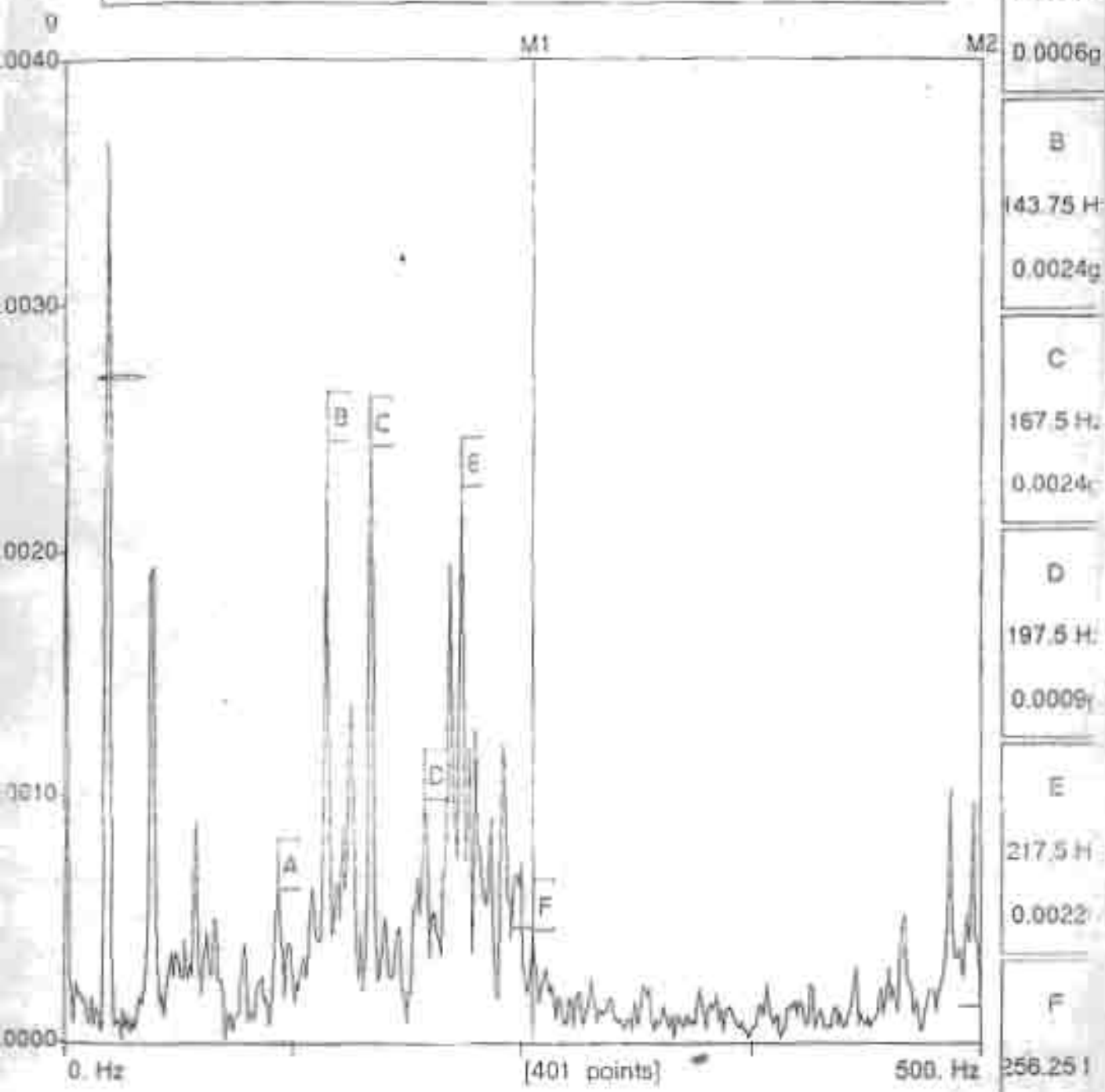
A	243.75 Hz	0.0026g
B	167.5 Hz	0.0063g
C	215. Hz	0.0037g
D	227.5 Hz	0.0033g
E	240. Hz	0.0048g
F	243.75 Hz	0.0015g

X1 =	243.75 Hz	Y1 =	0.0015g	Vit.	6703 tr/mn
X2 =	500. Hz	Y2 =	0.0002g	Vit.	6703 tr/mn
Loupe	0	Commentaire ?			

Niveau global balancé pour 1 Test à 1500t/mn

ATEL UTILITES H 1516 TURBO ALTERNATEUR PRINCI

Accelerometre - #13 - Palier | Ro - 02/03/2001 20:32:14 - 0-500Hz



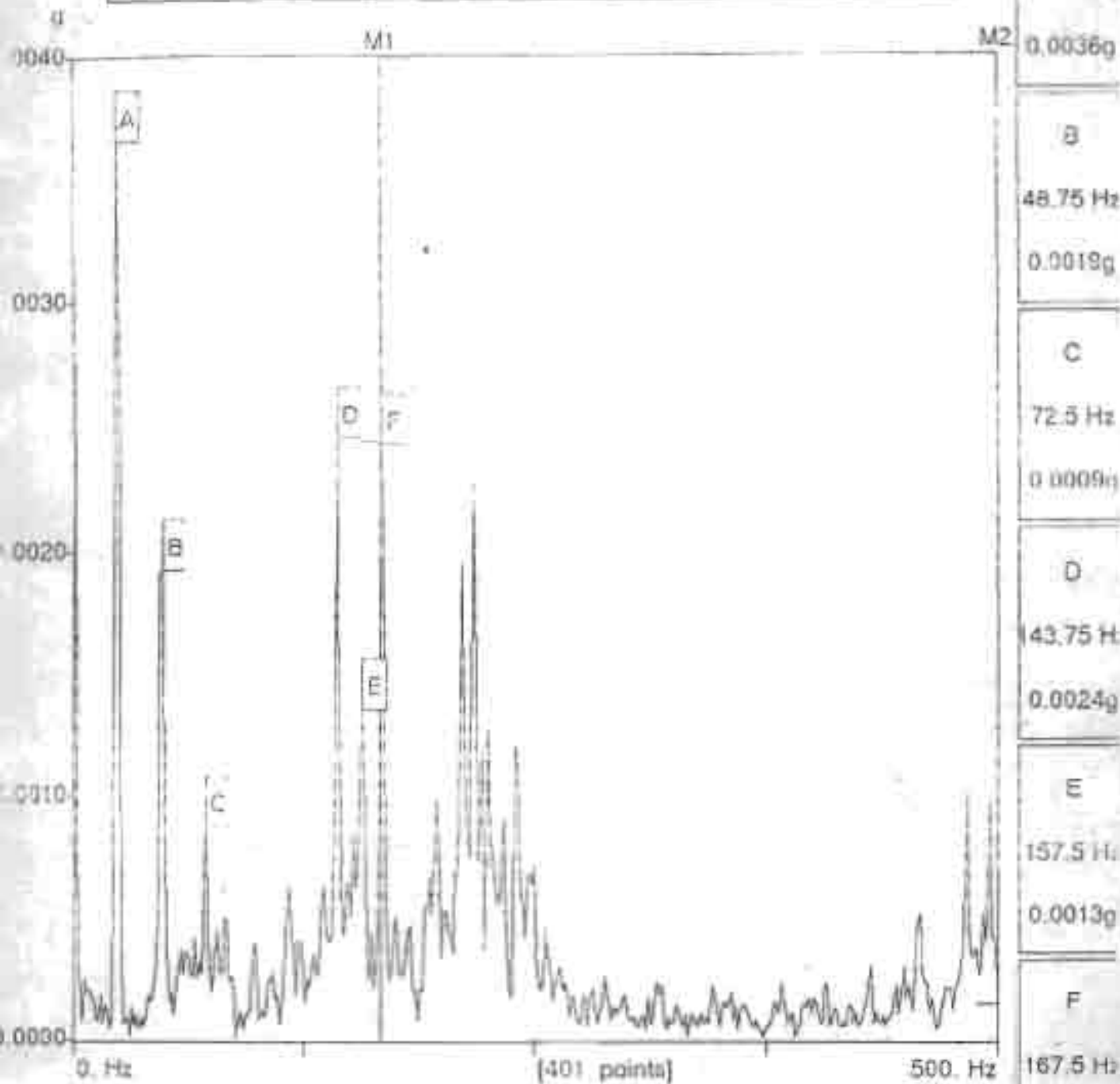
A	117.5 Hz	0.0006g
B	143.75 Hz	0.0024g
C	167.5 Hz	0.0024g
D	197.5 Hz	0.0009g
E	217.5 Hz	0.0022g
F	256.25 Hz	0.0004g

X1 =	256.25 Hz	Y1 =	0.0004g	Vit.	6703 tr/mn
X2 =	500. Hz	Y2 =	0.0001g	Vit.	6703 tr/mn
Loupe	0	Commentaire ?			

Niveau global balourd palier à test à 1500tr/mn

ATEL UTILITES - H 1516 - TURBO ALTERNATEUR PRINCI

Accelerometre - #13 - Palier 1 Ro - 02/03/2001 20:32:14 - 0-500Hz



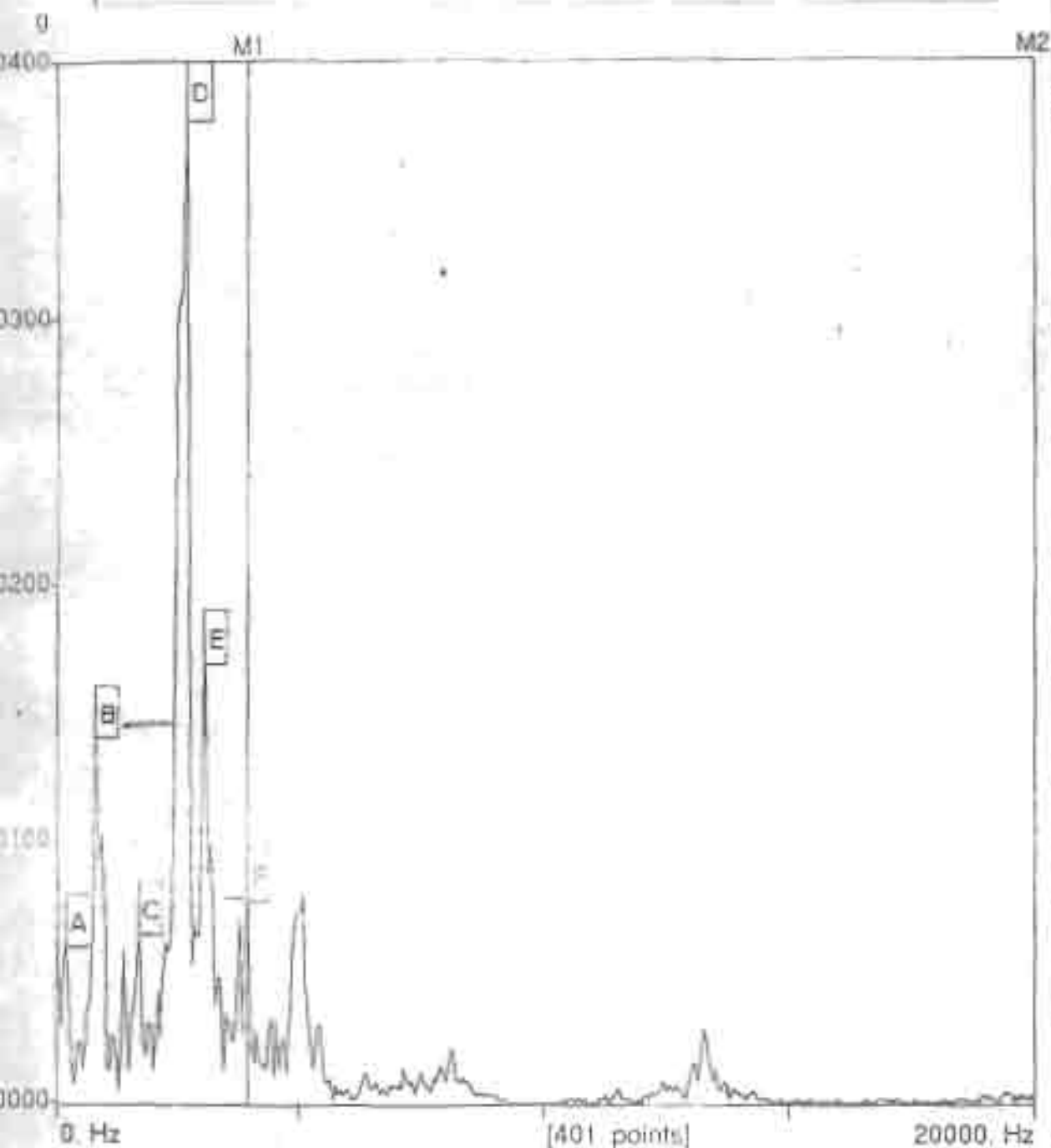
A	23.75 Hz	0.0036g
B	48.75 Hz	0.0019g
C	72.5 Hz	0.0009g
D	143.75 Hz	0.0024g
E	167.5 Hz	0.0013g
F	167.5 Hz	0.0024g

X1 =	167.5 Hz	Y1 =	0.0024g	Vit	6703 tr/min
X2 =	500 Hz	Y2 =	0.0001g	Vit	6703 tr/min
Loupe	0	Commentaire ?			

Niveau global balourd palier / Radial Oblique
 Test à 1500tr/min

ATELUTILITES - H 1516 - TURBO ALTERNATEUR PRINCI

Accelerometre - #13 - Polier 1 Ro - 02/03/2001 20:32:14 - 0.20000Hz



A	200. Hz	0.0061g
B	800. Hz	0.0143g
C	1700. Hz	0.0066g
D	2700. Hz	0.0391g
E	3050. Hz	0.0170g
F	3950. Hz	0.0079g

X1 =	3950. Hz	Y1 =	0.0079g	Vit	6703 tr/mn
X2 =	20000 Hz	Y2 =	0.0002g	Vit	6703 tr/mn
Loupe	0	Commentaire ?			

Niveau global Accelération polier / Radial Oblique
Test à 15000 / mn

ANNEXE CARACTERISTIQUES DE FONCTIONNEMENT DU TAP

2. CARACTERISTIQUES DE FONCTIONNEMENT :2.1. TURBO-ALTERNATEUR :

	Cas 1	Cas 2	Point Maxi
	-----	-----	-----
- Puissance aux bornes alternateur kW	10850	8450	13000
- Vitesse turbine T/MN	6700	6700	6700
- Débit admission T/HR	65	65	100
- Débit soutirage T/HR	30	50	80
- Vitesse de déclenchement de la survitesse :	7500 tr/mn		
- Première vitesse critique 3100 tr/mn ~			
- Deuxième vitesse critique 8200 tr/mn			
- Pression d'étude : . Admission :	46 bars abs.		
	. Echappement 2 bars abs.		

./..

3.2. REDUCTEUR DE VITESSE

Marque : ALCATEL

Type : 63/67

Type horizontal à axes parallèles et à simple train d'engrenage et répondant aux caractéristiques suivantes :

- . Grande vitesse 6700 tours minute
- . Petite vitesse 1500 tours minute
- . Rapport de réduction 4,46
- . Puissance 13 600 kW
- . Service 24/24 heures
- . Rendement mécanique 98,4
- . Facteur de service Supérieur à 1.1
- . Normes de construction AGMA 421

CONSTRUCTION :

- . Carter Fonte
- . Pignon Acier allié monobloc avec l'arbre
- . Roue Acier allié
- . Paliers Coussinets lisses antifrictionnés
- . Arbre Acier fin au carbone
- . Graissage Sous-pression

EQUIPEMENT :

- . 4 Thermomètres à lecture directe pour température paliers
- . Dispositif de virage de la ligne d'arbre - entraînement par moteur électrique.
- . Accouplement CV à dentures - Marque TACKE ou équivalent.

./..

3.4. CONDENSEUR ET VANNE D'ISOLEMENT3.4.1. Caractéristiques de la détente désurchauffe de 75 t/h de vapeur du réseau 4 bars absolus.

Unités

VAPEUR AMONT VANNE DETENTE

. Débit maximum	t/h	75
. Pression de service	Bar abs.	4
. Température	°C	150
. Enthalpie	Kcal/kg	657,5

VAPEUR DANS CHAMBRE INTERMEDIAIRE DESURCHAUFFEUR

. Débit	t/h	76,63
. Pression	Bar abs.	2
. Température	°C	120
. Enthalpie	Kcal/kg	646

EAU DE DESURCHAUFFE

. Nature	condensats	
. Origine	Pompes extraction	
. Pression	Bar abs.	4
. Température maximale	°C	88,8
. Débit maximum	t/h	1,63

VAPEUR ENTREE CONDENSEUR

. Débit	t/h	76,63
. Pression au condenseur	Bar abs.	0,67
. Température	°C	120

/./.

TABEAU DE REGLAGE
DES PROTECTIONS

T.A.P

PAGE N°	DATE	INDICES DE REVISION/MARKS OF ISSUE													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															
28															
29															
30															
31															
32															
33															
34															
35															
36															
37															
38															
39															
40															
41															
42															
43															
44															
45															
46															
47															
48															
49															
50															



INDUSTRIES CHIMIQUES
DU SENEGAL

N° Classement 420 601
N° du Plan 2015-4



krabs

N° DE PLAN / DWG NO 306/307-E90.004

Tableau de réglage des protections

Cellule	Protection	Type et Marque	Calibre Relais	Organe protégé	TC Principaux A	Réglage protection			Observations
						sur Relais	Réel	Tempor.	
SUIVE PROTECTION	SUFVABRE	RT21A	5 A / A	AUTOMATISME	1500 / 5 A	6 A	1800 A	5 sec	Ir = 120 %
			T ₂ 0,5 A / sec		5 sec				
- T.H.P.									
- R.E. 53 -									
	SEULE PROTECTION	RT21A	Facteur = 2,5 Max 2,5 x 5,6 A	ALT X ₂ 14 %	1500 / 5 A	min 5	2,5 x 5,6 = 14 A		$Z_f = \frac{100}{I_f} = 7,14 \Omega$ $X_f \Omega = \frac{Z_f \times 90}{100} = 6,43 \Omega$
			Tem. 20 sec 50 A / 2	Y ₂ = 25 %	$\frac{6000}{\sqrt{3}} / \frac{100}{\sqrt{3}}$	min 50	2,5 x 5,6 = 14 A		$I_f \Omega = \frac{2,5 \times 15}{100} = 24,22 \Omega$
	DESEMBRE	RT21A	Seuil : 1520 Va / 40 A de 70	ALT T ₁ = 12 % I _n T ₂ = T ₀ 6 sec T ₀ = 1569 A	1500 / 5 A	25 % (125 A)	235 A		$K_f = 1 / \left(\frac{I_f}{I_n} \right)^2 = 6$ $I_n \text{ sec} = 5,88$ Constante $a = \frac{K_f}{\sqrt{3} \times \left(\frac{I_f}{I_n} \right)^2}$ $= \frac{6}{\sqrt{3} \times 1,18} = 4,64$
		RT21A	0,2 à 1,5 sec			1 sec	1 sec		
	RETOUR	RT21A	C ₁ 12,7 W	ALT	1500 / 5 A	2,15	0,437 sec		P ₁ = 16,25 W - P ₂ = 3 % de P ₁ P.B.T. = 0,222 W I _{max}
	EMISSANCE		Regl. à 5 C		$\frac{6000}{\sqrt{3}} / \frac{100}{\sqrt{3}}$	2,15	0,437 sec		

Cellule	Protection	Type et Marque	Calibre Relais	Organe protégé	TC Principal A	Réglage protection			Observations
						sur Relais	Réel	Tempor.	
	TERRE	RHA200	4A Cyl. 2 à 2T	ALT.	5/5A	4A 15T	6A	0,9 sec	(voir note de calcul Résistance de terre 300 E. 30 a 36)
		RT210	T ₀ 2 à 15m					0,9 sec	
	DIFFÉRENCE DE TERRE	RHA210	T ₀ 200A Cyl. 125 à 100	ALT. CABLE	2 TORES 200/5A	10 à 25% I _L 200/5 15 - 250 mA 50 25mA < I ₀ < 67,5mA 125 < I < 312,5			
	DIFFÉRENCE DE PHASE	DAS8 3 PPA220	POURCENTAGE 5%	ALT. CABLE	1500/5A	Tan δ A 210Vn Fourn. T. R. 5% P.Tan			
	CRISTAL FREQUENCE	RFS 2110	45 50,9 Hz Cyl. AN2 + 1Ne + 2,1 cm, 9 Hz		6.000 / $\frac{100}{\sqrt{3}}$	47 Hz	47 Hz	1,5 sec	
		PT 210	T ₀ 2 A, 5 sec					1,5 sec	

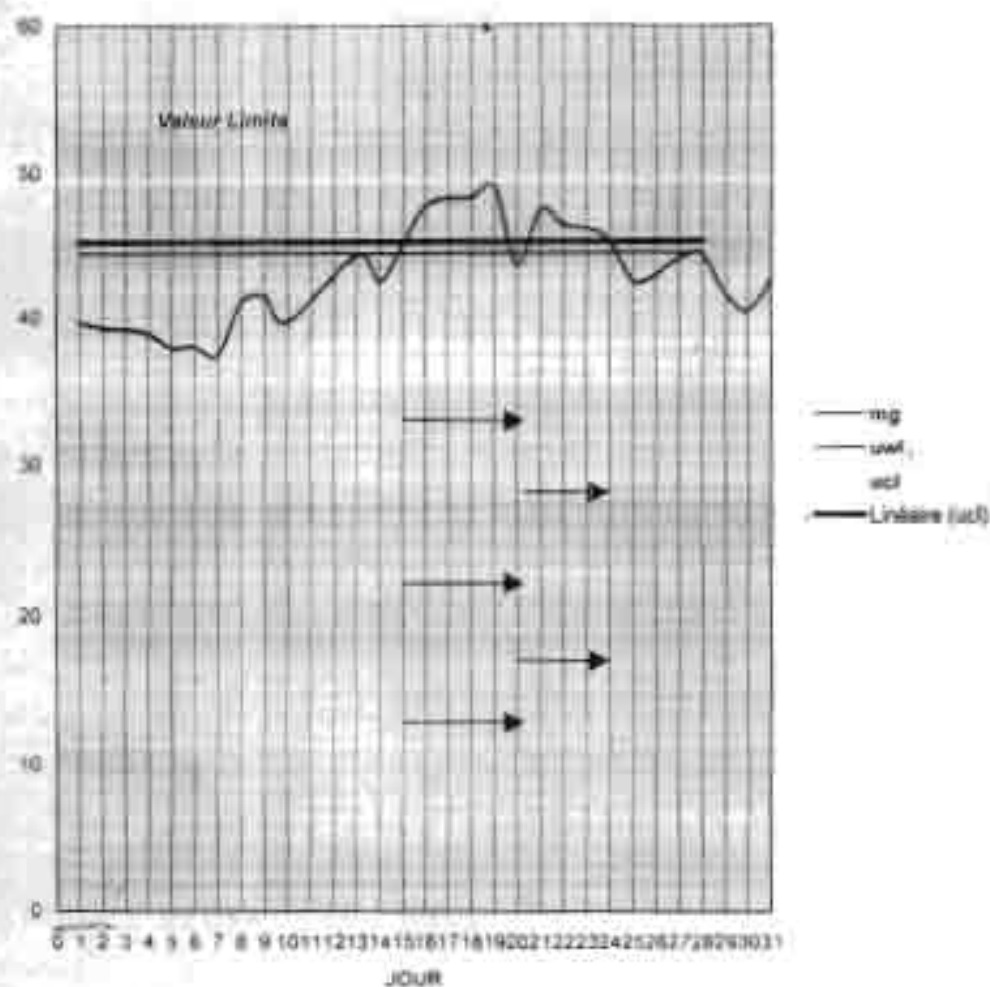
Tableau de réglage des Protections

4/4

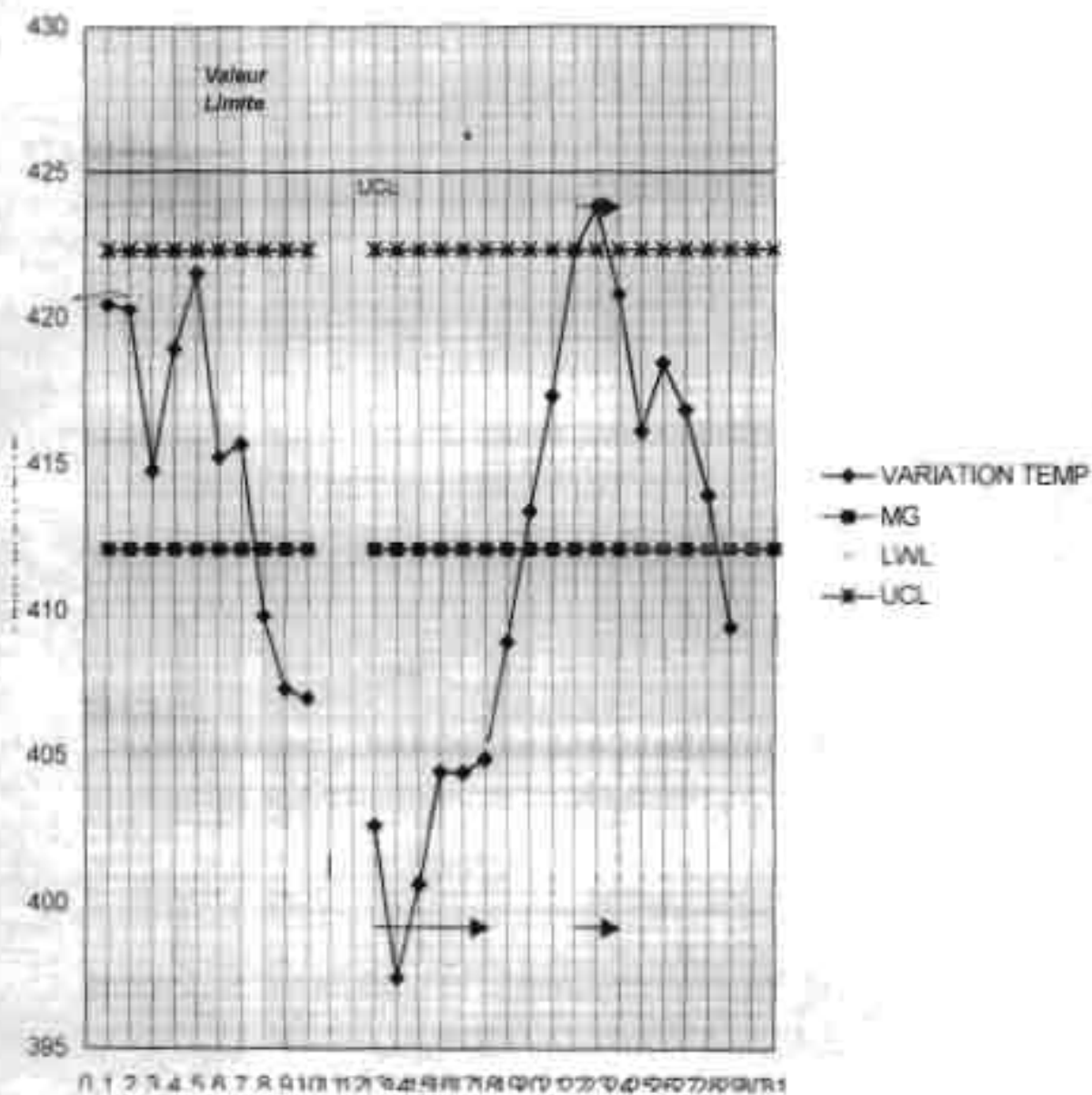
Cellule	Protection	Type et Marque	Calibre Relais	Organe protégé	IC Principaux A	Réglage protection			Observations
						sur Relais	Réel	Temps	
	MAXI TENSION	RNV 420	70-110V	ALT	$\frac{6000}{\sqrt{3}} / \frac{100}{\sqrt{3}}$	120"	7200V	1Nc	
		RT 210	1.0, 2.5, 5 sec					1Nc	
	MINI TENSION	RNV 430	60-120V		$\frac{6000}{\sqrt{3}} / \frac{100}{\sqrt{3}}$	80V	1800V	1Nc	
		RT 210	1.0, 2.5, 5 sec					1Nc	

ANNEXES RESULTATS DE LA STATISTIQUE DE CONTROLE DES PROCESSUS

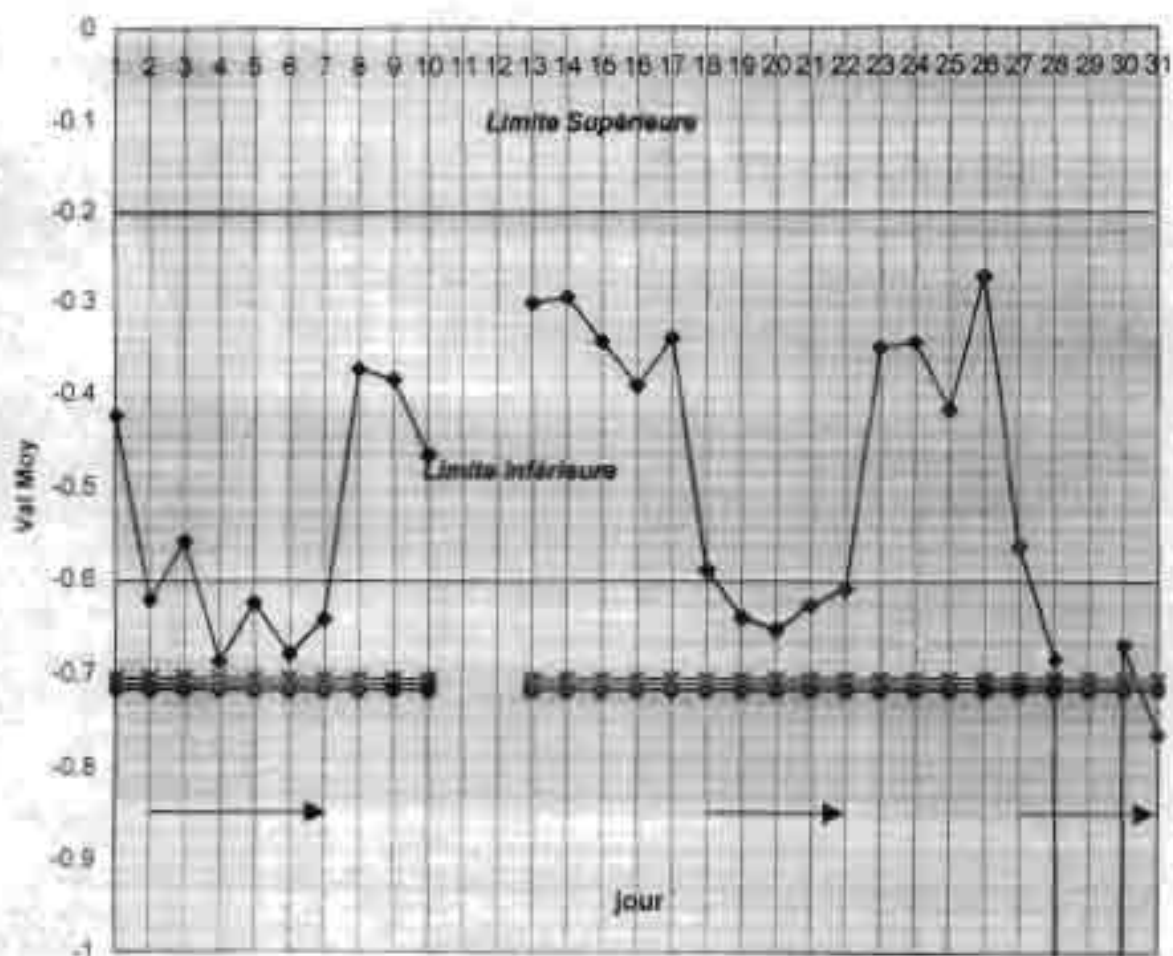
LIMITE DE CONTRÔLE DES VIBRATIONS



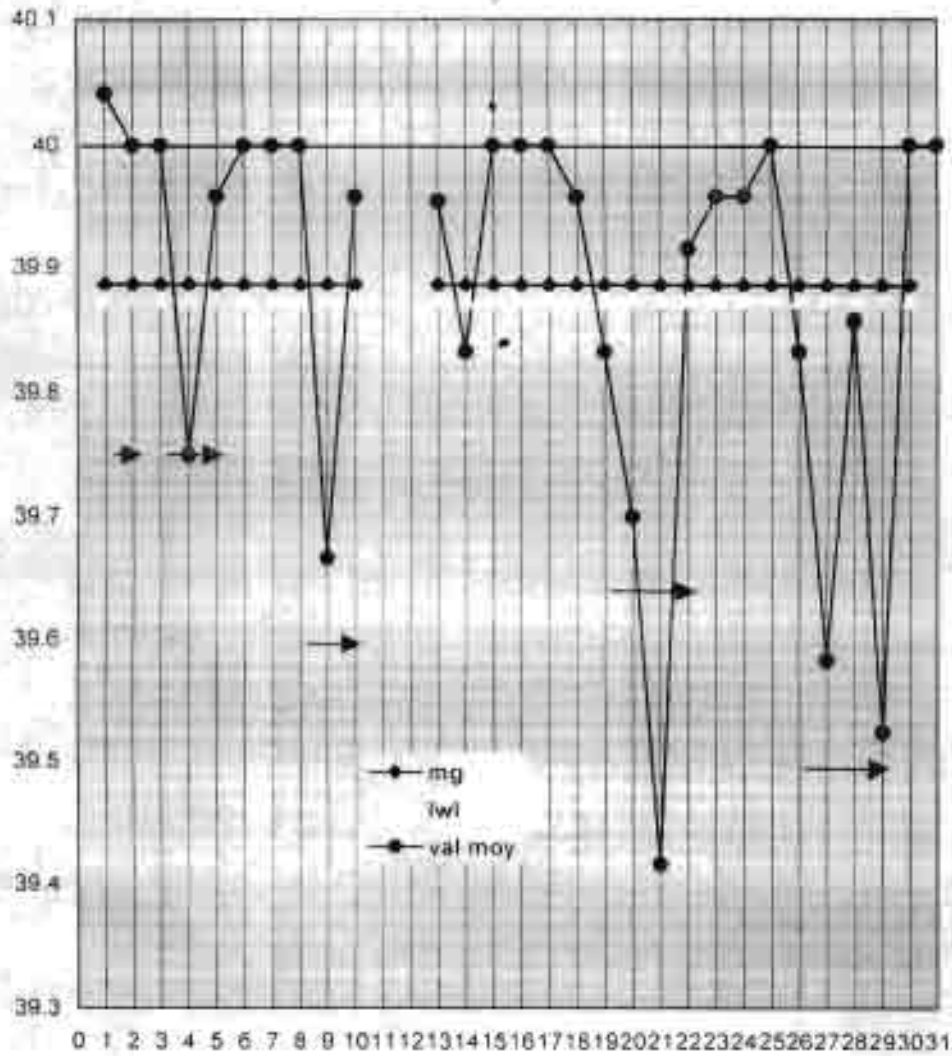
VARIATION MOYENNE DE LA TEMPERATURE



Niveau moyen du vide au condenseur par jour



valeurs moyennes de la pression



CONTROLE DU VIDE AU CONDENSEUR

MG	-0,71176071
VTD	0,03543155
ME	0,28827586
ES	0,00191312
UWL	-0,70793446
LWL	-0,71558696
UCL	-0,70602134
LCL	-0,71750008

CONTROLE DE LA TEMPERATURE

MG	412,140815
VTD	63,16440225
ME	8,262068966
ES	3,410557144
UWL	418,9619293
LWL	405,3197008
UCL	422,3724865
LCL	401,9091436

TABLEAU RECAPITULATIF

paramètres	MG	VTD	ME	ES	UWL	LWL	UCL	LCL
pression adm	39.9511	0.11287	0.6034	0.0060	39.963	39.938	39.969	39.932
Temp adm	412.1408	63.1644	8.2620	3.4105	418.95	405.319	422.372	401.909
		0.03543						
vide au cond	-0.7117	135	0.2882	0.0019	-0.707	-0.7155	-0.7060	-0.717

INVENTAIRE DES STATISTIQUES PÉRIODIQUES

TABLE IV: CUMULATIVE t -DISTRIBUTION

This table gives selected critical values of Student's t -distribution. Entries in the table are values of t_p where

$$p = P(T \leq t_p)$$

where T has Student's t -distribution with r degrees of freedom. The table covers values of $p = 0.9, 0.95, 0.97, 0.99$, and 0.995 and $r = (1)30(10)100, 120, 200, \infty$. For $r = \infty$ the critical values are actually those of the standard normal distribution.

Cumulative t -Distribution

CUMULATIVE t -DISTRIBUTION					
df, r	p				
	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	4.047	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.707	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.443	3.707
7	1.415	1.895	2.365	3.249	3.499
8	1.397	1.860	2.306	3.090	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.957	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.845	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.750	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.675	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.614	3.012
14	1.345	1.761	2.143	2.563	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.520	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.483	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.450	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.422	2.876
19	1.328	1.729	2.093	2.398	2.856
20	1.325	1.725	2.086	2.378	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.361	2.834
22	1.321	1.717	2.074	2.346	2.824
23	1.319	1.714	2.069	2.332	2.814
24	1.318	1.711	2.064	2.319	2.804
25	1.316	1.708	2.060	2.307	2.794
26	1.315	1.706	2.056	2.296	2.784
27	1.314	1.703	2.053	2.285	2.774
28	1.313	1.701	2.048	2.275	2.764
29	1.311	1.699	2.045	2.265	2.755
30	1.310	1.697	2.042	2.256	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.211	2.704
50	1.299	1.676	2.008	2.183	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.162	2.660
70	1.294	1.667	1.994	2.145	2.648
80	1.293	1.665	1.990	2.131	2.638
90	1.291	1.662	1.987	2.119	2.632
100	1.290	1.661	1.984	2.108	2.628
120	1.289	1.658	1.980	2.095	2.617
200	1.286	1.654	1.972	2.075	2.604
∞	1.282	1.645	1.960	2.000	2.576

TABLE VI. CUMULATIVE F-DISTRIBUTION

This table gives critical values of the F distribution. Entries in the table are values of F_p where

$$p = P(F \leq F_p)$$

and F has an F -distribution with v_1 (numerator) and v_2 (denominator) degrees of freedom. The table covers values v_1 (and v_2) = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 24, 30, 40, 50, 60, 100, 120, ∞ and $p = 0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.10, 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995$.

Cumulative F -Distribution

		CUMULATIVE F-DISTRIBUTION						
		v_1						
v_2	p	1	2	3	∞	15	30	
60	.005	.000040	.0050	.024	.051	.081	.110	
	.010	.00016	.010	.038	.073	.109	.142	
	.025	.00099	.025	.071	.120	.163	.202	
	.050	.0040	.051	.117	.176	.226	.267	
	.100	.016	.104	.194	.269	.318	.362	
	.400	2.19	2.19	2.18	2.04	1.95	1.87	
	.950	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	
	.975	5.24	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	
	.990	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.17	
	.995	8.44	5.79	4.73	4.14	3.78	3.49	
100	.005	.000034	.0050	.024	.051	.081	.111	
	.010	.00016	.010	.038	.074	.110	.143	
	.025	.00099	.025	.072	.120	.164	.203	
	.050	.0040	.051	.117	.177	.227	.269	
	.100	.016	.105	.194	.265	.320	.364	
	.400	2.15	2.16	2.14	2.00	1.91	1.83	
	.950	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	
	.975	5.18	3.87	3.28	2.92	2.70	2.54	
	.990	7.01	4.97	4.12	3.64	3.33	3.16	
	.995	8.37	5.78	4.72	4.13	3.77	3.48	
120	.005	.000034	.0050	.024	.051	.081	.111	
	.010	.00016	.010	.038	.074	.110	.143	
	.025	.00099	.025	.072	.120	.165	.204	
	.050	.0040	.051	.117	.177	.227	.270	
	.100	.016	.105	.194	.265	.320	.365	
	.400	2.15	2.15	2.13	1.99	1.90	1.82	
	.950	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	
	.975	5.15	3.86	3.27	2.89	2.67	2.52	
	.990	6.98	4.95	4.10	3.62	3.31	3.14	
	.995	8.34	5.74	4.68	4.09	3.73	3.44	
140	.005	.000034	.0050	.024	.051	.081	.111	
	.010	.00016	.010	.038	.074	.111	.145	
	.025	.00099	.025	.072	.121	.166	.206	
	.050	.0040	.051	.117	.178	.229	.273	
	.100	.016	.105	.195	.266	.322	.367	
	.400	2.15	2.15	2.14	1.94	1.85	1.77	
	.950	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	
	.975	5.07	3.75	3.17	2.80	2.57	2.41	
	.990	6.90	4.87	4.02	3.54	3.23	3.06	
	.995	8.26	5.66	4.60	4.01	3.65	3.36	

Cumulative F-Distribution

		CUMULATIVE F-DISTRIBUTION						
		v_2						
v_1	p	1	2	3	10	11	12	
60	.005	1.17	1.62	1.85	2.06	2.25	2.24	
	.010	1.17	1.99	2.22	2.45	2.65	2.83	
	.025	1.23	2.26	2.50	2.73	2.93	3.11	
	.050	1.30	2.53	2.77	3.00	3.20	3.39	
	.100	1.38	2.78	3.03	3.26	3.46	3.65	
	.200	1.48	3.07	3.32	3.55	3.75	3.94	
	.300	1.57	3.10	3.36	3.59	3.79	3.98	
	.400	1.61	3.11	3.37	3.60	3.80	4.00	
	.500	1.63	3.12	3.38	3.61	3.81	4.01	
	.975	2.51	2.41	2.33	2.21	2.22	2.17	
.990	2.55	2.42	2.34	2.22	2.23	2.20		
.995	2.58	2.43	2.35	2.23	2.24	2.21		
100	.005	1.39	1.66	1.88	2.10	2.29	2.29	
	.010	1.39	2.01	2.23	2.46	2.70	2.88	
	.025	1.46	2.27	2.50	2.73	2.93	3.11	
	.050	1.53	2.54	2.78	3.01	3.21	3.40	
	.100	1.61	2.79	3.04	3.27	3.47	3.66	
	.200	1.71	3.08	3.33	3.56	3.76	3.95	
	.300	1.79	3.11	3.36	3.59	3.79	3.98	
	.400	1.83	3.12	3.37	3.60	3.80	4.00	
	.500	1.85	3.13	3.38	3.61	3.81	4.01	
	.975	2.42	2.32	2.24	2.12	2.13	2.08	
.990	2.47	2.33	2.25	2.13	2.14	2.11		
.995	2.51	2.34	2.26	2.14	2.15	2.12		
120	.005	1.39	1.65	1.87	2.10	2.29	2.29	
	.010	1.39	2.00	2.22	2.45	2.70	2.88	
	.025	1.46	2.26	2.50	2.73	2.93	3.11	
	.050	1.53	2.53	2.77	3.00	3.20	3.39	
	.100	1.61	2.78	3.03	3.26	3.46	3.65	
	.200	1.71	3.07	3.32	3.55	3.75	3.94	
	.300	1.79	3.11	3.36	3.59	3.79	3.98	
	.400	1.83	3.12	3.37	3.60	3.80	4.00	
	.500	1.85	3.13	3.38	3.61	3.81	4.01	
	.975	2.42	2.32	2.24	2.12	2.13	2.08	
.990	2.47	2.33	2.25	2.13	2.14	2.11		
.995	2.51	2.34	2.26	2.14	2.15	2.12		
∞	.005	1.64	1.68	1.91	2.16	2.37	2.26	
	.010	1.67	2.03	2.17	2.50	2.78	2.98	
	.025	1.74	2.30	2.50	2.73	2.93	3.11	
	.050	1.81	2.57	2.77	3.00	3.20	3.39	
	.100	1.89	2.82	3.03	3.26	3.46	3.65	
	.200	1.99	3.11	3.32	3.55	3.75	3.94	
	.300	2.07	3.14	3.36	3.59	3.79	3.98	
	.400	2.11	3.15	3.37	3.60	3.80	4.00	
	.500	2.13	3.16	3.38	3.61	3.81	4.01	
	.975	2.29	2.29	2.21	2.09	2.10	2.05	
.990	2.34	2.30	2.22	2.10	2.11	2.06		
.995	2.38	2.31	2.23	2.11	2.12	2.07		

Cumulative F-Distribution

		CUMULATIVE F-DISTRIBUTION					
		v_1					
v_2	p	13	14	15	20	24	30
60	.005	.259	.274	.287	.343	.376	0.41
	.010	.299	.314	.328	.383	.416	.453
	.025	.368	.383	.396	.450	.481	.515
	.050	.435	.450	.463	.514	.543	.575
	.100	.525	.530	.550	.596	.622	.650
	.900	1.64	1.62	1.60	1.54	1.51	1.48
	.950	1.89	1.86	1.84	1.75	1.70	1.65
	.975	2.13	2.09	2.06	1.94	1.88	1.82
	.990	2.44	2.39	2.35	2.20	2.12	2.03
	.995	2.68	2.62	2.57	2.39	2.29	2.19
100	.005	.265	.280	.295	.354	.389	0.43
	.010	.306	.321	.336	.394	.429	.469
	.025	.374	.390	.404	.461	.494	.531
	.050	.442	.457	.471	.525	.555	.590
	.100	.531	.545	.558	.606	.633	.664
	.900	1.59	1.57	1.56	1.49	1.46	1.42
	.950	1.82	1.79	1.77	1.68	1.63	1.57
	.975	2.04	2.00	1.97	1.85	1.78	1.71
	.990	2.31	2.27	2.22	2.07	1.98	1.89
	.995	2.52	2.46	2.41	2.23	2.13	2.02
120	.005	.266	.282	.297	.356	.393	0.43
	.010	.307	.323	.338	.397	.433	.474
	.025	.376	.392	.406	.464	.498	.536
	.050	.444	.459	.473	.527	.559	.594
	.100	.533	.547	.560	.609	.636	.667
	.900	1.58	1.56	1.54	1.48	1.45	1.41
	.950	1.80	1.77	1.75	1.66	1.61	1.55
	.975	2.01	1.98	1.94	1.82	1.76	1.69
	.990	2.28	2.23	2.19	2.03	1.95	1.86
	.995	2.48	2.42	2.37	2.19	2.09	1.98
∞	.005	.274	.291	.307	.372	.412	0.46
	.010	.316	.333	.349	.413	.452	.498
	.025	.385	.402	.417	.480	.517	.560
	.050	.453	.469	.484	.543	.577	.616
	.100	.542	.556	.570	.622	.652	.687
	.900	1.52	1.50	1.49	1.42	1.38	1.34
	.950	1.72	1.69	1.67	1.57	1.52	1.46
	.975	1.90	1.86	1.83	1.71	1.64	1.57
	.990	2.13	2.08	2.04	1.88	1.79	1.70
	.995	2.29	2.24	2.19	2.00	1.90	1.79

Cumulative F-Distribution

CUMULATIVE F-DISTRIBUTION							
v_2	p	v_1					
		40	50	60	100	120	∞
60	.005	.458	.488	.510	.559	.572	0.65
	.010	.495	.524	.545	.591	.604	.679
	.025	.555	.581	.600	.642	.654	.720
	.050	.611	.635	.652	.689	.700	.759
	.100	.682	.702	.717	.749	.757	.806
	.900	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.29
	.950	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.39
	.975	1.74	1.70	1.67	1.60	1.58	1.48
	.990	1.94	1.88	1.84	1.75	1.73	1.60
	.995	2.08	2.01	1.96	1.86	1.81	1.69
100	.005	.479	.512	.537	.595	.611	0.71
	.010	.516	.548	.572	.626	.641	.736
	.025	.575	.606	.625	.674	.688	.772
	.050	.629	.656	.675	.719	.731	.804
	.100	.698	.720	.737	.773	.783	.844
	.900	1.38	1.35	1.34	1.29	1.28	1.21
	.950	1.52	1.48	1.45	1.39	1.38	1.28
	.975	1.64	1.59	1.56	1.48	1.46	1.35
	.990	1.80	1.74	1.69	1.60	1.57	1.43
	.995	1.91	1.84	1.79	1.68	1.65	1.49
120	.005	.485	.519	.545	.605	.623	0.73
	.010	.522	.555	.579	.636	.652	.755
	.025	.580	.610	.632	.683	.698	.788
	.050	.634	.662	.682	.727	.740	.819
	.100	.702	.725	.742	.780	.791	.856
	.900	1.37	1.34	1.32	1.28	1.26	1.19
	.950	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.25
	.975	1.61	1.56	1.53	1.45	1.43	1.31
	.990	1.76	1.70	1.66	1.56	1.53	1.38
	.995	1.87	1.80	1.75	1.64	1.61	1.43
∞	.005	.518	.560	.592	.673	.699	1.00
	.010	.554	.594	.625	.701	.724	1.00
	.025	.611	.647	.675	.742	.763	1.00
	.050	.663	.695	.720	.779	.798	1.00
	.100	.726	.754	.774	.824	.838	1.00
	.900	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.00
	.950	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.00
	.975	1.48	1.43	1.39	1.30	1.27	1.00
	.990	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.00
	.995	1.67	1.59	1.53	1.40	1.36	1.00