RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE THIÈS

PROJET DE FIN D'ETUDES

Titre Etude analytique et numérique de l'écoulement radial entre disques coaxiaux

Auteur Mohamadou L DIALLO

Génie Mécanique

Date JUIN 1984

ETUDE ANALYTIQUE ET NUMERIQUE DE L'ECOULEMENT RADIAL ENTRE DISQUES COAXIAUX

par Mohamadou Lamine DIALLO

sous la direction de
Mr Dinh VO NGOC
Professeur à L'E.P.T.

école polytechnique de thiès

Mai - 1984

DEDICACES

Ce travail est dédié :

- à mon père,
- qui a toujours voulu me voir participer à l'effort des hommes
- à la mémoire de Mame Amy Fall, brutalement ravi à notre affection, hélas .... Cette perle de bonté qui a paré ma vie de tant de tendresse maternelle
- à Pierre N'diaye, Bacary Thiaw, N'Deye Coumba Bâ pour leur constante préoccupation quant à ma reussite scolaire
- à Cheikh Sidia Bâ, gratitude et attachement indefectible.
- à ma mère, mes frères et soeurs pour mon attachement à l'euphonie familiale
- à tous mes amis.

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier à exprimer toute ma reconnaissance, à mon directeur de projet, Monsieur le professeur DINH VO NGOC pour son aide et pour avoir bien voulu accepter de diriger mon projet de fin d'études. Qu'il sache combien son expérience de la recherche scientifique, ses precieux remarques et conseils m'ont été utiles dans la présentation finale de cette étude.

Qu'il me soit permis de remercier Monsieur Christian Sina Diatta, professeur à l'Université de Dakar pour ses suggestions utiles, pour les échanges fructueux que nous avons eus pour le problème étudié.

SOMMAIRE

Nous présentons dans le cadre de ce projet, une étude analytique et numérique sur l'écoulement laminaire, radial d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques coaxiaux. L'un d'eux est maintenu fixe tandis que l'autre tourne à une vitesse angulaire constante.

Par une hypothèse du type Von-Kármán sur l'indépendance de la vitesse axiale par rapport à la coordonnée radiale, nous ramenons les équations complexes du problème étudié en un système d'équations différentielles à une seule variable

Les résultats obtenus par la méthode analytique, présentée, montrent une bonne concordance avec ceux obtenus numériquement pour des Reynolds faibles (<10)
La méthode numérique, pas à pas de Runge Kutta présentée avec la méthode des "tirs" nous a permis d'atteindre des Reynolds de l'ordre 80.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES

NOTATIONS

a distance entre les disques

$\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}$ coordonnée cylindrique.

Ω vitesse de rotation du disque tournant

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ composante radiale, tangentielle, axiale de la vitesse dimensionnelle.

u, v, w, composante radiale, tangentielle et axiale de la vitesse adimentionnelle respectivement égale à : $\frac{\bar{u}a}{\nu}, \frac{\bar{v}a}{\nu}, \frac{\bar{w}a}{\nu}$

Rero nombre de Reynolds de rotation

f, g solution du probleme, fonction de z

$\bar{P}$ pression dimensionnelle

P pression adimensionnelle, $P = \frac{a^2}{\rho\nu^2}\bar{P}$

ρ masse volumique du fluide

μ, ν coeffient de viscosité dynamique et cinématique

∂ derivée partielle

MRK Méthode de Runge Kutta avec "Tirs"

MDF Méthode des differences finies

MDS Méthode de developpement en serie

ϕ, ψ, ξ fonction déterminant la repartition de pression

δ_0, δ_1 epaisseur de la couche limite

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ critère d'arrêt

Δz accroissement de z

$\bar{f}, \bar{g}$ fonctions exactes

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier l'écoulement laminaire radial d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques coaxiaux ; l'un des disques tourne à une vitesse angulaire constante, et l'autre fixe.

En plus d'un intérêt pratique dans l'étude des pompes et compresseurs à entraînement visqueux, les paliers à air et butées fluides pour ne citer ceux-là, ce type de problème est d'un grand interêt théorique car il permet d'obtenir des solutions dites "exactes" des équations de Navier. Stokes, d'où les techniques de résolution analytique et numérique d'un système d'équations différentielles non linéaires.

Les problèmes d'écoulements radiaux ont été étudié pour différentes configurations limites. Les résultats fournis par ces auteurs [1] à [3] nous informent sur multiplicité des solutions obtenues.

Nous notons que ces solutions sont fonction de l'algorithme numérique utilisé

Dans le premier chapitre, nous nous interesserons à la formulation du problème. Les équations complexes de Navier Stokes seront transformées en équations réduites moyennant l'hypothèse de Von Kármán

Dans les chapitres qui suivent le premier, l'étude a été conduite analytiquement, puis numériquement dans le cas stationnaire :

- analytiquement par une méthode de developpement en serie

- numériquement, d'une part par la méthode des differences finies, et d'autre part par la méthode de Runge Kutta présentée avec la méthode dite des "tirs" pour obtenir les conditions initiales manquantes. On discutera plus particulièrement cette dernière méthode, des solutions qu'elle fournit en comparant les résultats à ceux du developpement en serie.

CHAPITRE - I

FORMULATION DU PROBLEME

CHAPITRE - I

FORMULATION DU PROBLEME

I-1. GENERALITES

On considère un fluide visqueux isotherme et incompressible entre deux disques parallèles, coaxiaux, de côtes respectives $z = 0$ et $z = a$ (a est la distance entre les deux disques). Le disque inférieur est supposé fixe et le disque supérieur tourne avec une vitesse angulaire contante Ω.

I-2. MODELISATION - EQUATIONS DE BASE REGISSANT LE PROBLEME

L'écoulement global supposé laminaire est régi par les équations de Navier-Stokes en stationnaire.

En tenant compte de la symétrie de révolution du problème, nous utilisons les coordonnées cylindriques $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z})$ comme système de référence, fixe par rapport au fluide, son origine coïncidera avec le centre du dixe fixe (fig 1)

On appelle respectivement $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, les composantes radiale, tangentielle et axiale de la vitesse ; $\bar{p}$ sera la pression statique.

En négligeant les forces extérieures, les equations de Navier-Stokes peuvent s'ecrire, dans le cas stationnaire comme suit :

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \nu\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{\bar{u}}{\bar{r}}\right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}\right] \quad (I\text{-}1\text{-}1)$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{r}} = \nu\left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{\bar{v}}{\bar{r}}\right) + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}\right] \quad (I\text{-}1\text{-}2) \qquad (I\text{-}1)$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \nu\left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2}\right] \quad (I\text{-}1\text{-}3)$$

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad (I\text{-}2)$$

avec les conditions aux limites (conditions de non glissement aux parois):

$$\bar{z} = 0 \qquad \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 \qquad (I\text{-}3\text{-}1)$$

$$\bar{z} = a \qquad \bar{u} = \bar{w} = 0 \text{ et } \bar{v} = \bar{r}\Omega \qquad (I\text{-}3\text{-}2) \qquad (I\text{-}3)$$

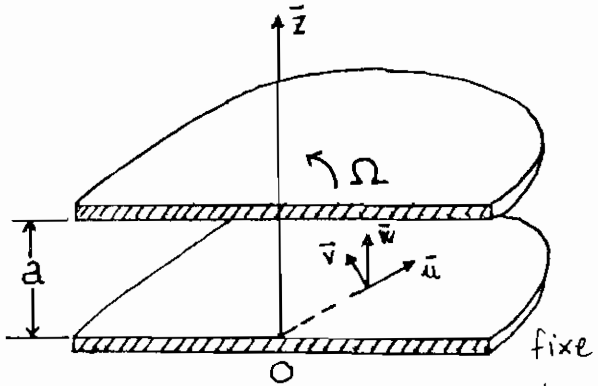


Fig. 1 Configuration du problème

Il serait très fastidieux de travailler directement sur les équations de Navier-Stokes dimentionnelles. Donc il va falloir d'abord rendre les equations ci-dessus adimentionnelles, ensuite les reduire par l'introduction de certaines hypothèses que nous preciserons plus loin.

I-3 OBTENTION DES EQUATIONS ADIMENTIONNELLES

Les équations adimentionnelles s'obtiennent en rapportant les variables du problème à des grandeurs de référence choisies convenablement. Selon le choix de ces grandeurs le nombre de Reynolds intervient soit dans le système d'équations, soit dans les conditions aux limites

I-3-1 Grandeurs de Référence :

Nous avons choisi : d (la distance entre les disques) comme longueur de référence, $\frac{\nu}{d}$ comme vitesse de référence et $\rho\frac{\nu^2}{d^2}$ comme pression de référence.

Nous poserons donc pour les variables sans dimensions :

$$r = \frac{\bar{r}}{d} \quad , \quad z = \frac{\bar{z}}{d}$$

$$u = \bar{u}\frac{d}{\nu} \quad , \quad v = \bar{v}\frac{d}{\nu} \quad , \quad w = \frac{\bar{w}d}{\nu} \qquad (I-4)$$

$$p = \bar{p}\frac{d^2}{\rho\nu^2}$$

I-3-2 Equations adimentionnelles

Avec ces nouvelles variables, le système d'équations (I-1) et l'équation (I-2) s'écrivent :

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (I-5-1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (I-5-2) \qquad (I-5)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (I-5-3)$$

et l'equation de continuité :

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial rw}{\partial z} = 0 \qquad (I-6)$$

Les conditions aux limites (I-3) s'ecrivent alors:

$$z = 0 \qquad u = v = w = 0$$

$$z = 1 \qquad u = w = 0 \quad \text{et} \quad v = r\frac{a^2}{\nu}\Omega = r\,Rero \qquad (I-7)$$

Ce choix de grandeurs adimentionnelles fait intervenir le paramètre Rero appelé: Nombre de Reynolds de Rotation:

$$Rero = \frac{a^2\Omega}{\nu}$$

L'étude théorique de ce problème revient à resoudre un système d'équations aux derivées partielles dépendant des variables spatiales r et z. Ce qui necessite la connaissance des fonctions inconnues sur le contour du domaine.

Or, dans notre cas, on ne connaît rien sur le contour extérieur des disques en ce qui concerne la vitesse.

Par une hypothèse du type Von-Kármán sur l'indépendance de la vitesse axiale par rapport à la coordonnée radiale, le problème se ramène, comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants, à la seule variable z.

I-4 REDUCTION DES EQUATIONS ADIMENTIONNELLES

I-4-1 Hypothese de Vón-Kármán

On introduit l'hypothèse de Vón-Kármán en supposant la composante axiale de la vitesse, w, ne depend que de la variable z, donc independante de la coordonnée radiale r, soit:

$$w = f(z). \qquad (I-8)$$

I-4-2 Equations reduites et conditions aux limites

De l'équation (I-8) soit $w = f(z)$,

– on tire de l'equation de continuité (I-6), l'expression de u soit:

$$u = -\frac{r}{2}\frac{\partial w}{\partial z} \Longrightarrow u = -\frac{r}{2} f'(z) \qquad (I\text{-}9)$$

[ANNEXE A]

La vitesse tangentielle, d'après (I-5-2) est alors de la forme :

$$V = r\, g(z) \qquad (I\text{-}10)$$

En introduisant (I-8), (I-9) et (I-10) dans le système (I-5) et après elimination de la pression p dans (I-5-1) et (I-5-3) on obtient le systéme suivant :

$$\left.\begin{aligned} f f'''_{z^3} + 4 g g'_z - f^{IV}_{z^4} &= 0 \qquad (I\text{-}11\text{-}1) \\ f' g_z - f g'_z - g''_{z^2} &= 0 \qquad (I\text{-}11\text{-}2) \end{aligned}\right\} \quad (I\text{-}11)$$

avec les conditions aux limites:

$$\left.\begin{aligned} z = 0 \quad & f(0) = g(0) = f'(0) = 0 \qquad (I\text{-}12\text{-}1) \\ z = 1 \quad & f(1) = f'(1) = 0 \ \text{et}\ g(1) = Rero \quad (I\text{-}12\text{-}2) \end{aligned}\right\} \quad (I\text{-}12)$$

I-4-3 Calcul de la pression et du frottement

I-4-3-1 Repartition des pressions

La connaissance de f et g permettra de determiner la pression p.

En effet, en introduisant, les valeurs de u, v, w en fonction de $f(z)$, $g(z)$ dans l'équation (I-5-3) que nous rappelons :

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

nous obtenons vu que $\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=0$:

$$ff'=-\frac{\partial P}{\partial z}+f''$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial P}{\partial z}=f''-ff'$$

Finalement $\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial z}=0$ (I- 13)

Soit $P=\phi(r)+\Psi(z)$

- De l'équation (I-5-1), dans laquelle, on remplace les composantes u, v, w par leurs valeurs en fonction de $f(z)$, $g(z)$, on tire

- $u\frac{\partial u}{\partial r}=\left(-\frac{r}{2}f'\right)\left(-\frac{1}{2}f'\right)=\frac{r}{4}(f')^2$
- $w\frac{\partial u}{\partial z}=-ff''$
- $\frac{v^2}{r}=rg^2$
- $\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)=0$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{r}{2}f''$

Finalement $\frac{\partial P}{\partial r}=\phi'=\frac{r}{2}\left[ff''+2g^2-\frac{1}{2}(f')^2-f'''\right]$
Soit le produit de r par une expression indépendante de r.

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \phi' = r\,\xi(z)$$

avec $\xi(z) = \frac{1}{2}\left[ff'' + 2g^2 - \frac{1}{2}(f')^2 - f''\right]$

En intégrant par rapport à r, on arrive à :

$$\phi(r) = \frac{r^2}{2}\xi(z) + cte_1 \qquad (I-14)$$

$\xi(z) = cte$ compte tenu du fait ϕ n'est fonction que de r.

En effet :

$$\frac{\partial \xi}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left[f'f'' + ff''' + 4gg' - ff'' - f^{IV}\right]$$

$$\hookrightarrow \xi' = \frac{1}{2}\left(ff''' + 4gg' - f^{IV}\right)$$

donc ξ' est le produit de $\frac{1}{2}$ et du premier membre de l'équation (I-11-1)

d'où $\xi' = 0$

Ce qui implique $\xi(z)$ est une constante qui ne pourrait dépendre que du nombre de Reynolds.

De la même manière que ci-dessus, de l'équation (I-5-3), on tire :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \psi' = f'' - ff' = f'' - \frac{1}{2}(f^2)' = \frac{\partial}{\partial z}\left(f' - \frac{1}{2}f^2\right)$$

Et par intégration par rapport à z, on obtient :

$$\psi = f' - \frac{1}{2}f^2 + cte_2$$

Ainsi la pression p a pour expression :

$$P(r,z) = \frac{r^2}{2}\xi(\text{zero}) + \psi(z) + cte$$

avec $\xi(\text{zero}) = \frac{1}{2}\left[ff'' + 2g' - \frac{1}{2}(f')^2 - f'''\right]$

Cette pression s'écrit :

$$P(r,z) = \frac{r^2}{2}\xi\,(Re\,r_0) + P(0,z)$$

En appelant $P(0,z)$, la pression en $r=0$ à la côte z.

Cette loi parabolique de la pression reste la même quelle que soit la côte z.

I - 4 - 3 - 2 Frottement pariétal

Les composantes du frottement pariétal sont déterminées à partir des fonctions f et g. En effet, la composante tangentielle $\tau_{\bar{z}\bar{\theta}} = \mu \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}}$ est proportionnelle à g' et la composante radiale $\tau_{\bar{z}\bar{r}} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}$ proportionnelle à f''.

Compte tenu du fait que $z = \frac{\bar{z}}{a}$, $V = \frac{\bar{V} a}{\nu}$, $u = \frac{\bar{u} a}{\nu}$ et $\mu = \nu \rho$

$$\tau_{\bar{z}\theta} = \rho \frac{\nu^2}{a^2} \frac{\partial V}{\partial z} = \rho \frac{\nu^2}{a^2} r\, g'(z) \quad \text{à } z=0 \text{ ou } z=1$$

$$\tau_{\bar{z}\bar{r}} = \rho \frac{\nu^2}{a^2} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2}\rho \frac{\nu^2}{a^2} r\, f''(z) \quad \text{à } z=0 \text{ ou } z=1$$

Donc les moments des forces agissant sur les disques sont respectivement proportionnels à $g'(0)$ et $g'(1)$ [4]

Evaluons ces moments :

La contribution d'un anneau élémentaire de largeur dr et de rayon r est :

$$dM = -2\pi r\, dr (r\, \tau_{\bar{r}\bar{\theta}})$$

d'où $M = -2\pi \int_0^R r^2\, \tau_{\bar{z}\bar{\theta}}\, dr$

— avec $\tau_{\bar{z}\bar{\theta}} = \rho \frac{\nu^2}{a^2} r g'(z)$

Par suite $M = -2\pi \rho \frac{\nu^2}{a^2} g'(z) \int_0^R r^3 dr$

$$M = -\frac{\pi R^4 \rho \nu^2}{2 a^2} g'(z)$$

Soit pour le disque fixe :

$$M = -\frac{\pi R^4 \rho \nu^2}{2 a^2} g'(0)$$

CHAPITRE - II

RESOLUTION ANALYTIQUE DU SYSTEME D'EQUATIONS REDUITES

CHAPITRE - II

RESOLUTION ANALYTIQUE DU SYSTEME D'EQUATIONS REDUITES

METHODE DE DEVELOPPEMENT EN SERIE ENTIERE

Le travail se ramenera à supposer une solution sous forme d'un developpement en serie entière du nombre de Reynolds de rotation pour les fonctions $f(z)$ et $g(z)$, soit :

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} Rero^{i} f_i(z) \qquad (II-1)$$

$$\text{et} \quad g(z) = \sum_{i=1}^{\infty} Rero^{i} g_i(z)$$

Les conditions aux limites (I - 12) s'exprimant alors par :

$$f_i(0) = g_i(0) = f_i'(0) = 0 \qquad \forall i \geq 1$$

$$f_i(1) = f_i'(1) = 0 \qquad \forall i \geq 1$$

$$g_1(1) = 1 \quad \text{et} \quad g_i(1) = 0 \qquad \forall i \geq 2$$

II-1 OBTENTION DES SYSTEMES :

On substitue (II-1) dans (I - 12)

En utilisant le resultat du produit de deux series, c'est à dire pour $A = a_1 + a_2 + \cdots\cdots$ et $B = b_1 + b_2 + \cdots\cdots$, $AB = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots\cdots$

il vient :

$$f^{IV} = Rero\, f_1^{IV} + Rero^2 f_2^{IV} + Rero^3 f_3^{IV} + \cdots\cdots$$

$$ff''' = Rero^2 (f_1 f_1''') + Rero^3 (f_1 f_2''' + f_2 f_1''') + Rero^4 (f_1 f_3''' + f_2 f_2''' + f_3 f_1''') + \cdots\cdots$$

$$gg' = Rero^2 (g_1 g_1') + Rero^3 (g_1 g_2' + g_2 g_1') + Rero^4 (g_1 g_3' + g_2 g_2' + g_3 g_1') + \cdots\cdots$$

$$fg' = Rero^2 (f_1 g_1') + Rero^3 (f_1 g_2' + f_2 g_1') + Rero^4 (f_1 g_3' + f_2 g_2' + f_3' g_1) + \cdots\cdots$$

$$g'' = Rero\, g_1'' + Rero^2 g_2'' + Rero^3 g_3'' + \cdots\cdots$$

Ainsi le système (I-12) devient:

$$Rero\, f_1^{IV} + Rero^2 (f_2^{IV} - f_1 f_1''' - 4 g_1 g_1') + Rero^3 (f_3^{IV} - f_1 f_2''' - f_2 f_1''' - 4 g_1 g_2' - 4 g_2 g_1') + Rero^4 (\qquad) + \cdots = 0 \quad (II\text{-}3\text{-}1)$$

(II-3)

$$-Rero (g_1'') + Rero^2 (f_1 g_1' - f_1' g_1 - g_2'') + Rero^3 (f_1 g_2' + f_2 g_1' - f_1' g_2 - f_2' g_1 - g_3'') + Rero^4 (\qquad) + \cdots = 0 \quad (II\text{-}3\text{-}2)$$

II-2 RECHERCHE DE LA SOLUTION

ORDRE 1 :

$$\begin{cases} Rero\, f_1^{IV} = 0 \\ -Rero\, g_1'' = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales prévues dans II-2, c'est à dire :

$$f_1(0) = f_1'(0) = g_1(0) = f_1(1) = f_1'(1) = 0$$

et $g_1(1) = 1$

d'où
$$\begin{cases} f_1^{IV} = 0 \\ g_1'' = 0 \end{cases}$$

– Ce système fournit comme solution, en tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ g_1 = 0 \end{cases}$$

ORDRE 2 :

Le système est le suivant :

$$\begin{cases} Rero^2 \left(f_2^{IV} - f_1 f_1^{III} - 4 g_1 g_1' \right) = 0 \\ Rero^2 \left(f_1 g_1' - f_1' g_1 - g_2'' \right) = 0 \end{cases}$$

– avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} f_2(0) = f_2(1) = f_2'(0) = f_2'(1) = 0 \\ g_2(0) = g_2(1) = 0 \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} f_2^{IV} - 4z = 0 \\ g_2'' = 0 \end{cases}$$

et par suite, en tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} f_2 = \dfrac{z^5}{30} - \dfrac{3z^3}{30} + \dfrac{2z^2}{30} \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui équivalent à :

$$\begin{cases} f_2 = \dfrac{z^2}{30}(z-1)(z^2+z-2) \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

car $\dfrac{z^2}{30}(z^3-3z+2) = \dfrac{z^2}{30}(z^3-2z-z+2) = \dfrac{z^2}{30}(z-1)(z^2+z-2)$

ORDRE 3 :

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} f_3^{IV} = 0 \\ f_2\, g_1' - f_2' g_1 - g_3'' = 0 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} f_3(0) = f_3'(0) = f_3(1) = f_3'(1) = 0 \\ g_3(0) = g_3(1) = 0 \end{cases}$$

Le système fournit la solution suivante :

$$\begin{cases} f_3 = 0 \\ g_3 = \dfrac{z}{5}\left(-\dfrac{z^6}{63} + \dfrac{z^4}{20} - \dfrac{z^3}{36} - \dfrac{2}{315}\right) = \dfrac{z}{5}(z-1)\left(-\dfrac{z^5}{63} - \dfrac{z^4}{63} + \dfrac{43z^3}{1260} + \dfrac{2}{315}(z^2+z+1)\right) \end{cases}$$

En calculant de proche en proche les fonctions f_i et g_i nous pouvons exprimer les grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Ces grandeurs dépendent du nombre de Reynolds de rotation. Soit :

$$f = \frac{Rero^2}{30} z^2 (z-1)(z^2+z-2) + Rero^4 \left(\qquad \right) + \cdots\cdots$$

$$g = Rero\, z + \frac{Rero^3}{5} z\,(z-1)\left(-\frac{z^5}{63} - \frac{z^4}{63} + \frac{43 z^3}{1260} + \frac{2}{315}(z^2+z+1)\right) + \cdots\cdots\cdots$$

II - 3 RESULTATS(*) ET DISCUSSION

L'étude analytique, présentée, bien que fournissant une solution mathématiquement exacte ne donne des résultats convenables que pour de faibles Reynolds ($Rero < 10$), ceci en raison du nombre limité de termes calculables (on s'est limité au calcul jusqu'à la 3e puissance).

Ainsi pour des Reynolds inférieurs à 10, ces résultats concordent avec les résultats numériques parfaitement (Cf. Figures 2, 3, 4)

Pour ces faibles Reynolds, la fonction g varie linéairement

(*) Le listing du programme et les résultats tabulés se trouvent aux pages suivantes.

```
00010 BEGIN
00020 REM METHODE DE DEVELOPPEMENT EN SERIE
00030 PRECISION 6
00040 LET Z=0
00050 CLOSE (6)
00060 OPEN (6) "LP"
00070 PRINT (6) "METHODE DE DEVELOPPEMENT EN SERIE"
00080 PRINT (6) "======= == ============= == ====="
00090 INPUT (O,ERR=00090) "REYNOLDS",R0
00100 PRINT (6) à(2),"Rero=",à(7),R0
00110 PRINT (6)
00120 PRINT (6)
00130 PRINT (6) à(1),"----------------------------------------"
00140 PRINT (6) "!",à(3),"Z",à(6),"!",à(12),"f",à(17),"!",à(23),"f'",à(28),"!
00140 ",à(33),"g",à(40),"!"
00150 PRINT (6) à(1),"----------------------------------------"
00160 DEF FNF(Z)=R0**2*Z**2*(Z-1)*(Z**2+Z-2)/30
00170 LET F=FNF(Z)
00180 DEF FNP(Z)=R0**2*(5*Z**4-9*Z**2+4*Z)/30
00190 LET F1=FNP(Z)
00200 DEF FNG(Z)=R0*Z+R0**3*Z*(Z-1)*((-(Z**5/63))-Z**4/63+43*Z**3/1260+2*(Z**
00200.2+Z+1)/315)/5
00210 LET G=FNG(Z)
00220 PRINT (6) "!",à(1),Z,à(6),"!",à(7),F,à(17),"!",à(18),F1,à(28),"!",à(29)
00220.,G,à(40),"!"
00230 LET Z=Z+.025
00240 IF Z<=1 THEN GOTO 00160
00250 PRINT (6) à(1),"----------------------------------------"
00260 CLOSE (6)
00270 END
```

METHODE DE DEVELOPPEMENT EN SERIE
======= == ============ == =====

Rero= 10

Z	f	f'	g
0	0	0	0
.025	.00401	.314583	.218249
.05	.015418	.591767	436473
075	.033289	.831783	.654623
.1	.0567	1.035	.87256
.125	.084737	1.201983	1.090203
15	.116503	1.333433	1.307475
.175	.15112	1.430217	1.524197
.2	.187733	1.493333	1.740288
.225	.225516	1.523967	1.955725
.25	.263672	1.523433	2.17045
.275	.301441	1.493233	2.384386
.3	.3381	1.435	2 597724
.325	.372972	1.350533	2.810372
.35	.405424	1.241767	3.022659
.375	.434876	1.110833	3.234797
.4	.4608	.96	3.44704
.425	.482730	.791667	3.659785
.45	.500259	.608433	3.873429
.475	.51305	.413033	4.088508
.5	.520833	.208333	4 30555
.525	.523415	-.0026	4.525216
.55	.520678	-.216567	4.748144
.575	.512589	-.4302	4.975136
.6	.4992	-.64	5.206848
.625	.480652	-.842283	5.444031
.65	.45718	-1.033233	5 687552
.675	.429118	-1.20885	5.938093
.7	.3969	-1.365	6.196456
.725	.361066	-1.497383	6.463226
.75	.322266	-1.601567	6 739087
775	.281261	-1.672917	7.024426
.8	.238933	-1.706667	7.319616
825	.196282	-1.697917	7.62477
85	154434	-1.641567	7 939969
.875	.114644	-1.532383	8.264747
.9	.0783	-1.365	8 598636
.925	.046926	-1.13385	8.940657
.95	022186	-.833233	9.28948
.975	.005892	-.457283	9 643354
1	0	0	10

Tableau II-1

METHODE DE DEVELOPPEMENT EN SERIE

Rero= 1

Z	f	f'	g
0	0	0	0
025	.00004	.003146	024968
.05	.000154	005918	.049936
075	000333	008318	.074905
1	.000567	01035	.099873
.125	.000847	012020	.12484
15	001165	013334	.149807
.175	001511	014302	.174774
.2	.001877	014933	.19974
.225	.002255	015240	.224706
.25	.002637	.015234	.24967
.275	.003014	.014932	.274634
.3	003381	.01435	299598
.325	003730	013505	.32456
35	004054	012418	.349523
375	004349	.011108	.374485
4	.004608	.0096	.399447
425	.004827	.007917	.42441
.45	005003	006084	.449373
475	.005131	.00413	.474339
.5	005208	002083	.499306
525	.005234	- 000026	.524275
55	005207	-.002166	.549248
.575	005126	- 004302	.574225
.6	.004992	-.0064	599207
625	004807	- 008423	624194
.65	004572	-.010332	649188
.675	.004291	- 012089	674188
7	.003969	-.01365	699196
.725	.003611	-.014974	724213
.75	003223	-.016016	.749239
.775	.002813	- 016729	.774274
8	002389	- 017067	.79932
825	001963	-.016979	.824375
.85	.001544	-.016416	.84944
.875	.001146	-.015324	.874515
.9	.000783	-.01365	899599
.925	000469	-.011339	924691
.95	.000222	-.008332	.949789
.975	.000059	-.004573	.974893
1	0	0	1

Tableau II-2

21 bis

METHODE DE DEVELOPPEMENT EN SERIE

Rero= 2

Z	f	f'	g
0	0	0	0
.025	.00016	.012583	049746
05	000617	.023671	.099492
.075	.001332	.033271	.149237
.1	002268	.0414	.19898
125	.003390	048079	.248722
15	00466	.053337	.29846
.175	.006045	.057209	.348194
.2	007509	.059733	.397922
.225	.009021	.060959	.447646
.25	.010547	.060937	.497364
275	012058	059729	.547075
.3	.013524	.0574	.596782
.325	014919	.054021	.646483
.35	016217	.049671	.696181
375	.017395	.044433	.745878
.4	.018432	.0384	.795576
.425	.019309	.031667	.845278
.45	.02001	024337	894987
475	020522	.016521	.944708
.5	020833	.008333	.994444
525	.020937	- 000104	1.044202
.55	020827	-.008663	1 093985
.575	.020504	-.017208	1.143801
.6	019968	- 0256	1.193655
625	019226	- 033691	1.243552
65	018287	-.041329	1.2935
675	.017165	-.048354	1.343505
.7	015876	-.0546	1.393572
.725	014443	-.059895	1.443706
.75	.012891	-.064063	1.493913
775	.01125	-.066917	1 544195
.8	.009557	-.068267	1.594557
.825	.007851	-.067917	1.644998
.85	.006177	-.065663	1.69552
.875	004586	-.061295	1.746118
.9	.003132	-.0546	1.796789
.925	.001877	-.045354	1.847525
.95	.000887	-.033329	1.898316
.975	.000236	-.018291	1.949147
1	0	0	2

Tableau II-3

METHODE DE DEVELOPPEMENT EN SERIE
======= == ============ == =====

Rero= 3

Z	f	f'	g
0	0	0	0
.025	.000361	.028313	.074143
.05	.001388	.053259	.148285
.075	.002996	.074861	.222425
1	005103	.09315	.296559
125	.007626	.108179	370685
15	010485	.120009	444802
175	013601	.128720	.518903
.2	.016896	.1344	.592988
.225	.020296	.137157	.667055
.25	.02373	.137109	741102
.275	.027130	.134391	.815128
.3	030429	.12915	.889139
325	033567	121548	.96313
.35	.036488	.111759	1.037112
.375	.039139	099975	1.11109
.4	.041472	.0864	1.18507
.425	.043446	.07125	1.259064
.45	045023	.054759	1.333083
.475	046175	.037173	1.40714
.5	046875	.01875	1.48125
.525	047107	-.000234	1.555431
.55	.046861	-.019491	1.6297
.575	046133	-.038718	1.704079
.6	.044928	-.0576	1.778585
.625	.043259	-.075806	1.853239
.65	.041146	-.092991	1.928064
.675	038621	-.108797	2.003079
.7	.035721	-.12285	2.078304
.725	.032496	-.134765	2.153757
.75	.029004	-.144141	2 229455
.775	025314	-.150563	2.305409
.8	.021504	-.1536	2.38163
.825	017665	-.152813	2.458119
85	013899	-.147741	2.534879
875	010318	-.137915	2.611898
9	.007047	-.12285	2 689163
.925	.004223	-.102047	2.766648
.95	.001997	-.074991	2 844316
.975	00053	-.041156	2.922121
1	0	0	3

Tableau II- 4

METHODE DE DEVELOPPEMENT EN SERIE
======= == ============ == =====

Rero= 4

Z	f	f'	g
0	0	0	0
.025	000642	.050333	097968
.05	.002467	.094683	.195934
.075	.005326	.133085	.293896
.1	.009072	.1656	.391844
125	.013558	192317	.489773
.15	.018641	.213349	.587678
.175	.024179	.228835	.685549
.2	030037	.238933	783378
.225	.036083	243835	.881166
.25	.042188	243749	978909
.275	.04823	.238917	1.076601
.3	.054096	2296	1.174254
325	059676	.216085	1.271864
.35	.064868	198683	1.36945
.375	.06958	.177733	1.467027
.4	.073728	.1536	1.564611
.425	077237	.126667	1.662226
.45	.080042	.097349	1.759899
.475	.082088	.066085	1.857665
.5	.083333	.033333	1.955555
525	.083746	-.000416	2.053614
.55	.083309	-.034651	2.151881
.575	082014	-.068832	2.250409
.6	079872	-.1024	2.349238
625	076904	-.134765	2.448418
65	073149	-.165317	2.548003
.675	.068659	-.193416	2.648038
.7	.063504	-.2184	2.748573
.725	.057771	-.239581	2.849646
.75	.051563	-.256251	2.951302
.775	.045002	-.267667	3.053563
.8	.038229	-.273067	3.156455
.825	031405	-.271667	3.259985
.85	.024710	-.262651	3 364158
.875	018343	-.245181	3.468944
9	.012528	-.2184	3.574313
.925	.007508	-.181416	3.680202
.95	003550	-.133317	3.786527
.975	.000943	-.073165	3.893175
1	0	0	4

Tableau II-5

METHODE DE DEVELOPPEMENT EN SERIE
======= == ============ == =====

Rero= 5

Z	f	f '	g
0	0	0	0
025	001003	.078646	121031
05	.003854	147942	242059
075	008322	.207946	.363078
1	014175	.25875	48407
125	021184	.300496	.605025
15	029126	.333358	725934
.175	03778	.357554	.846775
.2	046933	373333	967536
225	.056379	.380992	1.088216
.25	.065918	.380858	1 208806
.275	.07536	.373308	1 329298
3	084525	35875	1.449715
.325	.093243	337633	1.570047
35	.101356	.310442	1.690332
.375	108719	.277708	1.8106
.4	1152	.24	1 93088
.425	.120682	.197917	2.051223
45	125065	152108	2 171679
.475	.128263	.103258	2.292313
.5	.130208	.052083	2 413194
.525	.130854	-.00065	2.534402
.55	.130170	- 054142	2 656018
.575	.128147	-.10755	2 778142
6	1248	-.16	2.900856
.625	120163	-.210571	3.024254
.65	.114295	-.258308	3.148444
675	.107280	-.302213	3 273512
7	.099225	-.34125	3.399557
725	090267	-.374346	3.526653
75	080566	- 400392	3.654886
775	070315	-.418229	3 784303
8	.059733	- 426667	3 914952
.825	049071	-.424479	4.046846
85	.038609	-.410392	4.179996
875	.028661	- 383096	4 314343
9	.019575	-.34125	4.449829
925	011731	-.283463	4.586332
95	.005547	-.208308	4.723685
.975	.001473	-.114321	4 861669
1	0	0	5

Tableau II-6

CHAPITRE - III

ANALYSE DU PROBLEME PAR DEUX METHODES NUMERI- QUES

CHAPITRE : III.

ANALYSE DU PROBLEME PAR DEUX METHODES NUMERIQUES

Il y a à notre connaissance diverses méthodes numériques possibles pour résoudre le système d'équations (I-11) avec les conditions aux limites (I-12). Par exemple, la méthode des éléments finis [1] ou encore, celle du traitement direct des équations de Navier-Stokes dans un domaine borné.

Nous présenterons deux méthodes à savoir celle pas à pas basée sur le principe de Runge-Kutta et celle globale relativement simple basée sur la méthode itérative de Newton.

III-1 METHODE DE RUNGE-KUTTA

Cette méthode s'applique généralement pour la résolution d'un système d'équations du premier ordre à conditions initiales.

La méthode sera appliquée au système d'équations différentielles (I-11) avec les conditions aux limites (I-12) que nous rappelons :

$$\left\{\begin{array}{ll} f^{IV} - ff''' - 4gg' = 0 & (\text{III-1-1}) \\ fg' - f'g - g'' = 0 & (\text{III-1-2}) \end{array}\right. \quad (\text{III-1})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{ll} f(0) = g(0) = f'(0) = 0 & (\text{III-2-1}) \\ f(1) = f'(1) = 0, \quad g(1) = Re_{\omega} & (\text{III-2-2}) \end{array}\right. \quad \text{III-2}$$

Afin de pouvoir appliquer la méthode, il faut ramener le système (III-1) à un système d'équations du premier ordre équivalent.

III-1-1- Transformation du système

Nous poserons les équivalences suivantes :

$$
\left.
\begin{array}{lll}
f \longrightarrow F_0 & & (\text{III-3-1}) \\[4pt]
f' \longrightarrow \dfrac{dF_0}{dz} = F_1 & & (\text{III-3-2}) \\[4pt]
f'' \longrightarrow \dfrac{dF_1}{dz} = F_2 & & (\text{III-3-3}) \\[4pt]
f''' \longrightarrow \dfrac{dF_2}{dz} = F_3 & & (\text{III-3-4}) \\[4pt]
f^{IV} \longrightarrow \dfrac{dF_3}{dz} = F_0F_3 + 4F_4F_5 & & (\text{III-3-5}) \\[4pt]
g \longrightarrow F_4 & & (\text{III-3-6}) \\[4pt]
g' \longrightarrow \dfrac{dF_4}{dz} = F_5 & & (\text{III-3-7}) \\[4pt]
g'' \longrightarrow \dfrac{dF_5}{dz} = F_0F_5 - F_1F_4 & & (\text{III-3-8})
\end{array}
\right\} \quad (\text{III-3})
$$

(III-3-5) et (III-3-8) sont obtenus en reportant (III-3) dans (III-1)

Avec la transformation précédante, les conditions aux limites s'écrivent:

$$
z = 0 \quad \begin{cases} F_0 = F_1 = F_4 = 0 \\ F_2,\ F_3,\ F_5 \quad \text{inconnues} \end{cases} \qquad (\text{III-4})
$$

$$
z = 1 \quad \begin{cases} F_0 = F_1 = 0 \\ F_4 = \text{zero} \end{cases}
$$

avec une certaine erreur ε près que l'on impose à l'avance.

La resolution du système (III-3) par la méthode de Runge-Kutta necessite en outre la connaissance des six conditions initiales $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), g(0), g'(0)$.

Or les conditions aux limites ne nous fournissent que trois de ces conditions à savoir $f(0), f'(0), g(0)$. Il nous faudra donc choisir convenablement les trois conditions manquantes afin d'atteindre les trois conditions finales $(z=1)$ soit

$$f(1) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad g(1) = \text{Zero} \quad \text{à l'erreur } \varepsilon \text{ près.}$$

C'est la raison pour laquelle, nous avons besoin d'une méthode iterative supplémentaire, appelée, méthode des Tirs.

La résolution du système différentiel a été faite en utilisant la formule de Runge Kutta du 4e Ordre [ANNEXE B1]

III-1-2 Formulation de la methode des Tirs:

La méthode des tirs décrite ci-dessous permet des iterations successives, systématiques des conditions initiales manquantes $F_2(0), F_3(0)$ et $F_5(0)$ en approchant ces valeurs inconnues par des relations linéaires en vue de satisfaire les conditions finales $F_0(1), F_1(1)$ et $F_4(1)$.

Pour cela, on pose :

$$\begin{aligned} F_0(1) &= a_0 F_2(0) + b_0 F_3(0) + c_0 F_5(0) \\ F_1(1) &= a_1 F_2(0) + b_1 F_3(0) + c_1 F_5(0) \\ F_4(1) &= a_4 F_2(0) + b_2 F_3(0) + c_4 F_5(0) \end{aligned} \qquad (\text{III-5})$$

On a 9 inconnues : $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_4, b_4, c_4$.

Il nous faut donc 9 équations qui sont données par trois itérations consécutives, soit par exemple pour déterminer a_0, b_0, c_0:

$$F_0^i(1) = a_0 F_2^i(0) + b_0 F_3^i(0) + c_0 F_5^i(0)$$

$$F_0^{i+1}(1) = a_0 F_2^{i+1}(0) + b_0 F_3^{i+1}(0) + c_0 F_5^{i+1}(0)$$

$$F_0^{i+2}(1) = a_0 F_2^{i+2}(0) + b_0 F_3^{i+2}(0) + c_0 F_5^{i+2}(0)$$

Pour demarrer les calculs, il nous faut donner $F_2(0)$, $F_3(0)$ et $F_5(0)$ pour les trois premières itérations. Ces valeurs peuvent être fournies, approximativement par la méthode analytique. Les trois premières valeurs de $F_0(1)$ sont alors obtenues par la méthode de Runge Kutta. Les coefficients a_0, b_0, c_0 sont trouvés en resolvant le système (II-6)

De la même manière avec $F_1^i(1)$, $F_1^{i+1}(1)$, $F^{i+2}(1)$ on détermine a_1, b_1, c_1; avec $F_4^i(1)$, $F_4^{i+1}(1)$, $F_4^{i+2}(1)$ on trouve a_4, b_4, c_4.

A partir de la 4e iteration $F_2(0)$, $F_3(0)$, $F_5(0)$ c'est à dire $f''(0)$, $f'''(0)$, $g'(0)$ seront calculés par la résolution du système ci dessous étant donné la connaissance des a_i, b_i et c_i i variant de 1 à 3

$$F_0(1) = 0 = a_0 F_2^{i+3}(0) + b_0 F_3^{i+3}(0) + c_0 F_5^{i+3}(0)$$

$$F_1(1) = 0 = a_1 F_2^{i+3}(0) + b_1 F_3^{i+3}(0) + c_1 F_5^{i+3}(0)$$

$$F_4(1) = \text{zero} = a_4 F_2^{i+3}(0) + b_4 F_3^{i+3}(0) + c_4 F_5^{i+3}(0)$$

où tous les coefficients $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_4, b_4, c_4$ sont déjà connus.

Ce processus itératif sera poursuivi jusqu'à ce que les valeurs de $F_0(1)$, $F_1(1)$ et $F_4(1)$ soient respectivement

égales à 0, 0 et Rero à une constante ε près fixée à l'avance
L'organigramme sommaire se trouve en [ANNEXE B2]

III-2 METHODE DES DIFFERENCES FINIES :

III-2-1 Principe de la méthode

La méthode des différences finies consiste, à partir du système (I-11) avec les conditions aux limites (I-12), en le calcul des valeurs f_j et g_j de $f(z)$ et $g(z)$ respectivement au point $z = z_j$

L'espace z compris entre 0 et 1 est découpé en n éléments d'égale longueur $\Delta z = \frac{1}{n}$.

III-2-2 Schema en differences finies :

On remplace chaque terme du système (I-11) par son expression en differences finies centrales suivantes [5] :

$$f_j' = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2(\Delta z)}$$

$$f_j''' = \frac{f_{j+2} - 2f_{j+1} + 2f_{j-1} - f_{j-2}}{2(\Delta z)^3}$$

$$f_j^{IV} = \frac{f_{j+2} - 4f_{j+1} + 6f_j - 4f_{j-1} + f_{j-2}}{(\Delta z)^4}$$

$$g_j' = \frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2(\Delta z)}$$

$$g_j'' = \frac{g_{j+1} - 2g_j + g_{j-1}}{(\Delta z)^2}$$

En introduisant les expressions ci-dessus dans le système (I-11), on obtient :

$$F_{1j} = \frac{f_j}{2(\Delta Z)^3}\left[f_{j-2} - f_{j+2} + 2(f_{j+1} - f_{j-1})\right] + \frac{2g_j}{(\Delta Z)}\left[g_{j-1} - g_{j+1}\right] + \frac{1}{(\Delta Z)^4}\left[f_{j-2} + f_{j+2} - 4(f_{j-1} + f_{j+1}) + 6f_j\right] = 0 \quad (\text{III-7-1})$$

$$F_{2j} = \frac{f_j}{2(\Delta Z)}\left[g_{j+1} - g_{j-1}\right] + \frac{g_j}{12(\Delta Z)}\left[f_{j+2} - f_{j-2} + 8(f_{j-1} - f_{j+1})\right] + \frac{1}{(\Delta Z)^2}\left[2g_j - g_{j-1} - g_{j+1}\right] = 0 \quad (\text{III-7-2})$$

pour $3 \leq j \leq n+1$

L'utilisation des formules de differences finies centrales selon Z, dans le schéma explicite ci-dessus assure une précision convenable et nécessite l'introduction des points fictifs $Z_1 = -\frac{1}{n}$ et $Z_{n+3} = 1 + \frac{1}{n}$

Les inconnues f_1 et f_{n+3} sont déduites en ces points des conditions aux limites (I-12)

En effet,

$f'(0) = 0 \Longrightarrow f_1 = f_3$ (f symétrique par rapport au point $Z=0$)

$f'(1) = 0 \Longrightarrow f_{n+1} = f_{n+3}$ (f symétrique par rapport au point $Z = 1$)

Les conditions aux limites (I-12) s'écrivent maintenant :

$$\begin{cases} f_2 = 0 \quad f_1 = f_3 \quad g_3 = 0 & (\text{III}-8-1) \\ f_{n+2} = 0 \quad f_{n+1} = f_{n+3} \quad g_{n+2} = \text{Rero} & (\text{III}-8-2) \end{cases} \quad (\text{III}-8)$$

Il y a donc un ensemble de $(n+3)$ inconnues f_j : $f_1, \ldots$ f_{n+3} ; et $n+1$ inconnues g_j : $g_2, \ldots, g_{n+2}$.

Or le système (III-7) fournit $2(n-1)$ équations et les conditions aux limites donnent 6 équations soit au total $2(n+2)$ équations.

Ainsi, en substituant (III-8) dans (III-7), les $2(n-1)$ fonctions F_{1j} et F_{2j} dépendent des $2(n-1)$ variables $f_3, \ldots$ $\ldots, f_{n+1}$; $g_3, \ldots\ldots g_{n+1}$.

III-2-3 Méthode de Newton:

Le système (III-7) étant non linéaire, on adopte itérative dite de Newton qui consiste à supposer au départ que ces variables sont connues comme première approximation de la solution du système et que cette approximation est située à une distance $(\Delta f_3, \ldots\ldots, \Delta f_{n+1}, \Delta g_3, \ldots\ldots, \Delta g_{n+1})$ de la solution exacte $(\bar{f}_3, \ldots\ldots, \bar{f}_{n+1}, \bar{g}_3, \ldots\ldots, \bar{g}_{n+1})$

En d'autres termes, on a:

$$\begin{cases} \bar{f}_j = f_j + \Delta f_j \\ \bar{g}_j = g_j + \Delta g_j \end{cases} \quad (\text{III}-9)$$

pour $3 \leq j \leq n+1$

Ecrivons les developpements en serie de Taylor des fonctions F_{1j} et F_{2j} en negligeant les termes d'ordre superieur à 1.

$$F_{1j}(\bar f_3, \dots, \bar f_{n+1}, \bar g_3, \dots, \bar g_{n+1}) = F_{1j}(f_3, \dots f_{n+1}, g_3, \dots, g_{n+1}) + \left[\frac{\partial F_{1j}}{\partial \bar f_3}(f_3, \dots, f_{n+1}, g_3, \dots, g_{n+1}\right]\Delta f_3 + \dots\dots\dots \left[\frac{\partial F_{1j}}{\partial \bar f_{n+1}}(f_3, \dots, f_{n+1}, g_3, \dots g_{n+1})\right]\Delta f_{n+1} + \left[\frac{\partial F_{1j}}{\partial \bar g_3}(f_3, \dots, f_{n+1}, g_3, \dots g_{n+1})\right]\Delta g_3 + \dots\dots\dots + \left[\frac{\partial F_{1j}}{\partial \bar g_{n+1}}(f_3, \dots f_{n+1}, g_3, \dots g_{n+1})\right]\Delta g_{n+1}$$

$$F_{2j}(\bar f_3, \dots, \bar f_{n+1}, \bar g_3, \dots, \bar g_{n+1}) = F_{2j}(f_3, \dots f_{n+1}, g_3, \dots, g_{n+1}) + \left[\frac{\partial F_{2j}}{\partial \bar f_3}(f_3, \dots, f_{n+1}, g_3, \dots, g_{n+1})\right]\Delta f_3 + \dots \left[\frac{\partial F_{2j}}{\partial \bar f_{n+1}}(f_3, \dots, f_{n+1}, g_3, \dots, g_{n+1})\right]\Delta f_{n+1} + \left[\frac{\partial F_{2j}}{\partial \bar g_3}(f_3, \dots f_{n+1}, g_3, \dots, g_{n+1})\right]\Delta g_3 + \dots \left[\frac{\partial F_{2j}}{\partial \bar g_{n+1}}(f_3, \dots, f_{n+1}, g_3, \dots, g_{n+1})\right]\Delta g_{n+1}$$

pour $3 \leq j \leq n+1$

Les developpements de serie de Taylor precedants des fonctions F_{1j} et F_{2j}, j variant de 3 à $n+1$, et en negligeant les termes d'ordre superieur à 1, permettent d'obtenir approximativement les distances Δf_j et Δg_j, j variant de 3 à $n+1$, par la solution du système linéaire suivant :

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial F_{13}}{\partial \bar f_3} \cdots \frac{\partial F_{13}}{\partial \bar f_{n+1}} & \frac{\partial F_{13}}{\partial \bar g_3} \cdots \frac{\partial F_{13}}{\partial \bar g_{n+1}} \\
\vdots & \\
\frac{\partial F_{1\,n+1}}{\partial \bar f_3} \cdots & \cdots \frac{\partial F_{1\,n+1}}{\partial \bar g_{n+1}} \\
\frac{\partial F_{23}}{\partial \bar f_3} & \frac{\partial F_{2\,n+1}}{\partial \bar f_{n+1}} \\
\vdots & \\
\frac{\partial F_{2\,n+1}}{\partial \bar f_3} \cdots & \cdots \frac{\partial F_{2\,n+1}}{\partial \bar g_{n+1}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta f_3 \\ \vdots \\ \Delta f_{n+1} \\ \Delta g_3 \\ \vdots \\ \Delta g_{n+1}
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
F_{13} \\ \vdots \\ F_{1\,n+1} \\ F_{23} \\ \vdots \\ F_{2n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0
\end{bmatrix}
$$

Les valeurs ainsi calculées par (III-9) constituent une approximation meilleure que l'approximation originale. On utilise ces nouvelles valeurs comme prochaine approximation, et on poursuit le processus itératif jusqu'à ce que toutes les fonctions F_{1j} et F_{2j} soient individuellement, plus faibles, en valeur absolue, qu'un certain ε positif fixé à l'avance.

L'organigramme se trouve en [ANNEXE C]

<u>Remarque</u> :

Pour ce qui de la méthode des differences finies, l'on s'est limité à l'analyse sommaire de l'algorithme et à un listing sommaire que nous n'avons mis au net.

L'analyse complète et la mise au net pourra faire l'objet d'une autre étude.

CHAPITRE - IV

RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION

CHAPITRE - IV

RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION

IV-1 RESULTATS DE LA METHODE DE RUNGE KUTTA

Dans ce paragraphe, nous présenterons les divers résultats : tableaux et graphiques en fonction des divers paramètres, pour soutenir la discussion dans le paragraphe suivant. Il s'agit des resultats de la MRK. C'est ainsi que, pour les Reynolds inferieurs à 14, nous avons utilisé, pour démarrer les calculs, les valeurs $f''(0)$, $f'''(0)$ et $g'(0)$ suivantes :

1ere iteration :

$f''(0) = 0.02$

$f'''(0) = 0.05$

$g'(0) = 5$

2e itération :

$f''(0) = 0.01$

$f'''(0) = 0.03$

$g'(0) = 6$

3e iteration

$f''(0) = 0.04$

$f'''(0) = 0.08$

$-g'(0) = 8$

Pour les Reynolds supérieurs à 13, nous utilisons les valeurs $f''(0)$, $f'''(0)$ et $g'(0)$ acquises à un Reynolds donné pour le Reynolds suivant (cf Tableau IV-1)

Sauf indication contraire, nous avons fixé :

- pour la precision de la machine : 14 chiffres significatifs
- pour le pas de discrétisation : $\Delta Z = 0.025$
- pour les critéres d'arrêt : $\varepsilon_1 (f \text{ et } f') = 0.1$ et $\varepsilon_2 (g) = 0.02$.

Revo	1ère itération			2e itération			3e itération		
	$f''(0)$	$f'''(0)$	$g'(0)$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$g'(0)$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$g'(0)$
20	10.7935	-47.4448	9.0315	10.944	-48.15	9.0455	11	-48.5	9.05
30	30.0208	-125.4289	15.046	30.5	-125.5	15.5	31.0	-126.0	16.0
50	47.2666	-189.1509	19.3582	47.5	-189.5	19.5	48	-190	20
70	74.378	-286.364	27.2982	74.5	-286.5	27.5	75	-287	28
75	101.1038	-401.95	37.9955	101.5	-402	38	102	-403	39
80	109.153	-442.4895	41.567	109.5	-442.5	42.0	110.0	-443.0	43.0

Tableau IV-1

Revo = 1

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	.13180043134845	- 5956122440817	0	.99880777388048
025	.00003315972383	00313993590299	.11691791849013	- 5945732101759	.0249701922649	.99880761215257
.05	.00014094503191	.00590827435958	10208735236975	- 5910410968418	.0499403633543	9988056063365
.075	.00031408438481	.00830696319289	.08737104887025	- 5850169533495	.07491045201743	.99880035592298
.1	00054337116478	.01033950786128	.07283129917446	-.5765016810811	09988036677079	.99879091845459
125	00081970261046	012010970879	.05853037353284	-.5654960267018	.12484999726278	9987768007512
.15	00113411873819	.013327971338	.04453052520696	-.5520005748612	14981922537849	99875794625171
175	.00147784125224	01429868451803	030893994599	-.5360157405041	.17478793598764	99873471847898
2	00184231244661	.01493284161696	.01768301358022	- 5175417608989	199756027238	.99870788063274
.225	.00221923410105	.01524172958185	.00495981001142	-.4965786875207	22472342030316	.99867857131306
25	.00260060637412	.01523819105772	-.00721338752 16	-.4731263779525	.24969006847104	.99864827637525
275	.00297876669621	014936624456	- 0187743447812	-.4471844879963	27465596550448	.99861879691481
3	00334642866558	.01435298415351	-.0296608167543	- 4187524642152	.29962115314915	.99859221337959
325	00369672095064	01350478080787	-.0398105423494	- 3878295371528	.32458572770863	99857084580447
35	.00402322620171	.01241108182518	-.0491612389341	-.3544147155054	.34954984558415	99855721016257
375	.00432001997568	.01109251195224	-.0576505967396	-.3185067815501	37451372768256	.99855397082571
4	00458170967707	.00957125401504	- 0652162731669	-.2801042881588	39947766259523	.99856388912585
425	.004803473519	00787104979945	-.0717958870360	- 2392055577543	42444200845029	99858976800846
.45	00498109950769	.00601720107561	- 0773270128394	-.1958086835953	4494071933404	.99863439276928
.475	.00511102445404	.00403657076564	-.0817471750461	- 1499115337995	47437371422801	9987004678576
5	.00519037301593	.00195758425231	-.0849938425466	-.1015117585453	49934213422982	.99879054975725
525	.005216996774 6	-.0001897691754	-.0870044233116	- 0506068009167	.52431307818194	99890697590067
.55	.00518951334858	-.0023739347469	- 0877162593653	.0028060881154	54928722638693	.99905178964187
575	.00510734554828	-.0045617905119	- 0870666221808	05872983005512	57426530644376	99922666125891
6	00497076057417	-.0067186455344	-.0849927086199	117167494041	.59924808306148	.99943280498508
625	.00478090926115	- 0088082379907	-.0814316375538	.1781222662283 1	62423634575723	99967089206137
65	00453986537125	-.0107927331922	-.0763204473144	.2415974127911 2	.6492308943391	.99994095980456
675	0042506649364	- 0126327215542	- 0695960941432	30759623591835	.67423252207409	1 000242316686 6
.7	00391734565222	-.0142872165381	-.0611954518190	3761220221436 2	.69924199644152	1.0005734434225
.725	00354498632334	-.0157136525987	-.0510553126635	44717798232616	.72426003737201	1.0009318900638
.75	00313974635957	-.0168678831724	- 0391123901408	52076718256941	.7492872928722	1.0013141690 97
775	.00270890532162	- 0177041787496	- 0253033232859	59689246533622	.77432431193531	1.0017156445469
.8	.00226090251364	-.0181752250788	-.0095646832131	67555635999116	.79937151463763	1.0021304170835
825	00180537661884	-.0182321215580	.00816701802051	.75676098197219	.8244291593211	1 0025512051336
.85	.00135320537276	-.0178243798746	.02795531590543	.84050791976525	.84949730676202	1.0029692219947
875	.00091654526738	-.0168999229631	.04986377900939	.92679810882734	.87457578122594	1 00337404895
.9	.00050887127721	-.0154050843595	07395599121114	1.0156316915758	89966412830876	1 0037535043789
.925	.00014501659665	-.0132846080365	.10029553028044	1.1070078625342	92476156946378	1.004093508856
95	-.00015878762441	-.0104816488162	.12894594242351	1.2009246976992	94986695311433	1.0043779462246
.975	- 0003848725623	-.0069377734646	15997071238944	1 2973789671668	.97497870225113	1.0045885206282
1	- 00051409[illegible]03678	- 0025929625838	[illegible]9433228 70889	1.[illegible]43659[illegible]3347	1 00009475841[illegible]	[illegible]047646094724

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 8

Tableau IV-2

Rero= 2

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	.51908654413516	-2.343766239373	0	1.9905668843071
.025	.0001306011191	01236693679484	46052333416029	-2.339641116166	.04976415576461	1 990565614829
.05	00055513610111	.02327164065578	.40216630351287	-2 325625026839	09952814530749	1.9905498695212
.075	.0012371221279	03272184052469	34426255425566	-2 301734235118	.14929148778548	1.9905086509141
1	.00214033392338	.04073143883644	28705880557483	-2 267982714789	19905346489502	1.9904345526561
125	00322895799556	0473205025514	23080145211685	-2.224382044370	.24881320995977	1 9903236896665
15	.00446774666994	05251525567439	.17573662503509	-2 170941294531	29856979495361	1 9901755977457
175	00582217195191	05634807332962	.12211025591839	-2.107666909207	.34832231469779	1 9899931028524
2	00725857925794	05885747746521	07016814374446	-2 034562581875	39806996747534	1.9897821601956
225	00874434105706	.06008813426407	02015602495901	-1.951629128966	.44781213130922	1 9895516632246
25	0102480104661	06009085333976	- 0276803532724	-1.858864362855	.4975484351519	1 9893132225385
275	01173947484417	05892258879663	- 0730951566599	-1.756262967397	54727882423398	1 989080914679
.3	.01319010943375	.05664644223205	-.1158423843305	-1 643816379427	59700361881818	1.9888710007141
325	0145729310978	05333166775532	-.1556757865046	-1 521512680164	64672356560191	1 9887016144724
35	.01586275220393	.04905367909192	-.1923487796011	-1.389336500889	.69643988100794	1 9885924202412
.375	01703633470852	04389405883326	-.2256143591766	-1 247268947783	74615428559734	1.9885642397055
4	01807254449489	.03794056988077	-.2552250112342	-1.095287551237	.79586902883322	1 988638647872
425	0189525060207	.03128716911819	-.2809326225731	- 9333662454118	84558690341687	1.9888375377
.45	.0196597573306	02403402332775	- 3024883909975	-.7614753842862	.89531124841107	1.9891826531422
.475	.0201804054901	.01628752734369	-.3196427363700	-.5795818008688	94504594035753	1 9896950902928
.5	.02050328249629	.00816032441026	-.3321452136580	-.3876489166835	99479537158799	1.9903947663372
525	.02062010171997	- 0002286713193	-.3397444293108	-.1856369090946	1.0445644149209	1.9912998560043
55	.02052561493161	- 0087542502419	- 3421879624957	02649705553158	1.0943583739284	1.9924261952377
.575	02021776996096	-.0172848808608	-.3392222929254	.24879851438555	1.1441829179509	1 99378665182
6	.01969786903585	-.0256826816238	-.330592737227	.481315317605	1.1940440010311	1 9953904627133
625	.01897072784081	- 0338033912799	-.3160433960278	72409714515168	1.2439477639327	1.9972425379072
.65	01804483532965	-.0414963380460	-.2953171141731	97719492136881	1.2939004184048	1.9993427306009
.675	.01693251431797	-.0486044079409	-.2681554567387	1.2406601169396	1.343908112849	2 001685073581
7	.01565008287224	-.0549640127102	- 2342987037674	1.5145439274838	1.3939767785427	2 0042569816928
725	01421801650041	- 0604050578437	- 1934858669278	1.7988963175324	1.4441119555704	2.0070384203348
.75	01266111113589	-.0647509112702	-.1454547315836	2.0937649181137	1 4943185976131	2.0100010399343
.775	01100864689097	- 0678183734026	- 0899419280611	2.3991937656661	1 5446008547447	2 0131072763812
.8	.00929455253805	- 0694176493066	-.0266830362141	2 7152218694668	1.5949618333848	2.0163094174069
.825	00755757065656	- 0693523238702	.04458727228893	3.0418815942396	1 645403332556	2 0195486348863
.85	.00584142336037	-.0674193409676	.12413504919051	3.3791968440804	1.6959255555931	2.0227539830184
875	00419497849435	- 0634089877313	.21222683726619	3 7271810333293	1 7465267964508	2.0258413622898
.9	00267241615963	-.0571048851795	30912938486356	4 0858348295331	1 7972030997524	2.0287124490507
.925	.00133339539429	- 0482839865869	.41510930150061	4.4551436531971	1 8479478937172	2.0312535904215
.95	.00024322080016	-.0367165851359	.53043264828064	4.8350749186385	1.8987515950953	2.0333346641001
.975	-.00052699113381	-.0221663325478	.65536445648497	5.2255749999492	1.9496011852267	2.034807902446
1	-.00090014630534	- 0043902705616	79016816730264	5.6265659058803	2 0004797563221	2 0355066799705

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES I= 8

Tableau IV-3

RevO = 3

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	1.1460534256348	-5.1661355336110	0	2.9682666578958
.025	.00028836130446	.02730627464927	1.0169688219789	-5.156969164652	.07420661263952	2.9682624780584
.05	.00122578875399	05138953804944	.8883421628205	-5.125848919030	14841267795002	2.9682106311657
.075	.00273186917517	07226694957364	.7607214573894	-5.072853966866	.22261661237193	2.9680748814567
.1	.00472676093858	.08996934906711	.63465285084694	-4.998052357246	.29681604958579	2.9678307918956
.125	.00713153550702	1045412131804	.51068090753414	-4.901500512951	.37100813316917	2.9674654904932
.15	.00986851796689	.11604061891811	.38934890721787	-4.783242690236	.44518980236539	2.9669773363979
175	.01286162672642	12453921473709	.27119915518707	-4.643310406089	.51935806847487	2 9663754872893
.2	.0160367125733	.13012219954847	.15677330695947	-4.481721838344	.59351027941333	2.9656793691403
.225	.01932189729308	13288830999522	.04661270819507	-4.298481206907	.66764437000293	2.9649180489572
.25	02264791205925	.13294981638959	-.0587412498236	-4.093578147181	.74175909557306	2.9641295106608
275	0259484358155	13043252770054	-.1587467590917	-3.866987089682	81585424644707	2.9633598338487
3	02916043388061	12547580597877	- 2528612084881	-3.618666662541	88993084088069	2.9626622747834
.325	.03222449701564	11823259059433	-.3405407828585	-3.348559136369	.96399129399744	2.9620962485904
.35	.03508518120262	.10886943263715	-.4212400488630	-3.056589933573	1.0380395602379	2.9617262113276
.375	.03769134839198	09756653979271	-.4944115294517	-2.742667226838	1.1120812468031	2.9616204403104
.4	03999650848347	.08451783195183	-.5595052694795	-2.406681653964	1 1861236955291	2.9618497108479
.425	.04195916281092	.06993100774362	-.6159683956737	-2.048506178749	1.2601760305827	2.9624858673674
.45	.0435431494052	05402762209213	-.6632446749380	-1.667996129956	1.3342491693153	2.9636002867795
.475	0447179903109	.03704317478944	-.7007740757997	-1.264989452802	1.4083557935581	2.965262231869
.5	.04545924123105	.01922720994828	-.7279923386925	-.8393072096773	1.4825102785861	2.9675370924814
.525	.04574884376894	.00084342604553	-.7443305617110	-.3907543691403	1.5567285769226	2.9704845123174
.55	04557548052728	-.0178302039085	-.7492148094698	.08087907547523	1.6310280541026	2.9741563992392
.575	.04493493331117	- 0365013027422	-.7420657537608	57581661418326	1.7054272734627	2.9785948171344
.6	.04383044466228	-.0548629509307	-.7222983558164	1.0942933091427	1.7799457269769	2.9838297575669
625	.0422730829267	-.0725935409948	-.6893216011641	1.6365534156359	1 8546035091175	2.9898767896602
.65	.04028211102706	-.0893566259297	-.6425382992966	2.2028474841866	1.9294209306819	2.9967345869034
.675	.03788535907025	-.1048007634238	-.5813449616849	2.7934288901203	2.0044180694979	3.0043823298235
.7	.03511960087449	-.1185593579797	-.5051317730330	3.4085497340858	2.0796142548953	3.0127769837211
.725	.03203093444259	-.1302505034367	-.4132826721155	4.0484560541431	2.1550274828135	3.0218504509015
.75	02867516634157	-.1394768288189	- 3051755600555	4.7133822869776	2 2306737584044	3.0315065970284
.775	.02511819987071	- 1458253508939	-.1801826554942	5.403544912647	2.3065663629803	3.0416181513614
.8	.02143642681049	- 1488673373353	-.0376710177760	6.119135214033	2.3827150421522	3.0520234806881
825	.01771712244175	-.1481581849218	.12299673896971	6.8603110789167	2.4591251119982	3.0625232366953
.85	.01405884340759	-.1432373178043	.30246151613811	7.6271877693936	2.5357964800938	3.0728768763124
.875	.01057182785809	-.1336281115025	.50136655871799	8.4198275803036	2.6127225782194	3.0827990541716
.9	00737839716937	-.1188378489857	.72035601250691	9.2382283056073	2.6898892035343	3.0919558857217
.925	.00461335836198	- 0983577159244	.96007317980391	10.082310429366	2.7672732649597	3.0999610786702
.95	.00242440615827	-.0716628429891	1.2211584406125	10.9519029564	2.8448414314449	3.1063719292579
.975	00097252341288	-.0382124039166	1.5042468058546	11.846727797059	2.9225486786866	3.1106851783711
1	.000432378[illegible]	0025502210457B	1.80996506213623	12.76638262[illegible]	3.000336730728	3.11203[illegible]

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 8

Tableau IV - 4

Rero = 4

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	1 9661469718266	-8.861295556619	0	3.9267205630768
025	0004947102227	04684654716941	1.7447349031129	-8 845267347863	09816789195695	3 9267110766488
.05	.0021029685493	08816496625197	1 5241231444238	-8.790905063042	.19633454170189	3 9265934050009
.075	00468685498281	12398522901307	1 3052675826031	-8.698441677671	29449635509186	3.9262852965618
.1	.00810944730465	15436114624451	1.0891186189762	-8 568077450278	.39264796093795	3.9257312551276
125	.01223541568617	1793702392598	.876622002507	-8.399978449145	.49078287447362	3.9249019928085
.15	.01693161430743	19911363261001	.6687197008466	-8.194274976792	.58889414475282	3.9237936539497
.175	.02206767052378	.21371596899422	46635081185408	-7.951059891214	.68697498031629	3 9224268159802
2	.02751657214594	.22332534740287	27045251808376	-7.670386833341	78501934759475	3.9208452713348
.225	.03315525342569	.22811328559112	08196108638851	-7 352268380680	88302253660251	3 9191145928101
.25	.03886518036733	.22827470802728	- 0981870858176	-6.996674157346	.98098168851603	3.9173204829918
.275	04453293601404	.22402796049111	- 2690543769561	-6.603528940863	1.0788962797307	3.9155669067484
3	.05005080638764	2156148525027	- 4297008007694	-6 172710815913	1.1767685569479	3 9139740042555
325	.0553173677897	.2033007287379	- 5791828206802	-5 704049434811	1.2746039177662	3 9126757806141
.35	06023807620011	.18737457052554	- 7165521224008	-5.197324453670	1.372411231139	3.9118175668757
.375	.06472585953573	16814912841851	- 8408543499842	-4 65226422217	1.4702030919194	3.9115532462048
.4	.06870171355492	14596108667996	-.9511278125477	-4.068544813359	1.5679960035474	3.9120422380095
425	07209530221275	12117126032208	-1.046402171147	-3 445789488248	1 6658104827473	3.9134462321651
.45	.07484556328509	.09416482507259	-1 125697117732	-2.783568697900	1.7636710799006	3.9159256649569
.475	07690132008563	.06535158031843	-1 188021060757	-2.081400733531	1.8616063085476	3 9196359280777
5	.07822190009728	.03516624468244	-1 232369834882	-1.338753142776	1.9596484772525	3.9247233019402
525	07877776132601	00406878342168	-1.257725455195	- 5550450378202	2.0578334168509	3.9313206046983
55	0785511271592	-.0274552337084	-1 263054939659	.27034957127108	2.1562000958848	3.9395425487085
575	.0775366304704	- 0588942461072	-1 247309226852	1.1380972769593	2.2547901168297	3 9494807966865
.6	07574196765538	-.0897102901973	-1.209422219710	2.0488994592918	2.3536470855325	3 961198710505
625	.07318856320873	-.119338565012	-1 148309989786	3.0034849981273	2.4528158461094	3.9747257864049
.65	.06991224535319	-.1471869799128	-1.062870180562	4.0026013461515	2.5523415734083	3.9900517713124
.675	06596393311347	-.172635689852	-.9519816526212	5 0470037868108	2.6522687150162	4 0071204559223
.7	0614103350993	-.1950366247144	-.8145044179775	6.1374426911275	2.7526397746951	4.0258231411618
.725	05633465992642	-.2137130205045	- 6492799156326	7.2746485765029	2.8534939290527	4.0459917755124
.75	05083733855626	- 2279589614958	- 4551316854610	8.4593147590828	2.9548654692005	4 0673917613668
975	04503675747165	- 2370389439471	- 2308665028722	9.6920773791744	3.0567820591097	4.0897144290254
8	03907000272422	- 2401874736049	.02472395766909	10.973492566753	3.1592628023417	4.1125691769937
825	03309361344548	-.2366087109780	31286085622276	12 304010501613	3.262316108794	4 1354752768027
.85	.02728434360409	-.2254761802859	.63477523775256	13.68394611064	3.3659373530456	4.1578533395075
875	02183993021289	-.2059325600560	.99170431244801	15.113446133649	3.4701063157978	4.1790164391721
.9	.01697986573682	-.1770895755902	1 3848868723192	16.592452280016	3.5747843997617	4.1981608858671
.925	01294617192225	-.1380280159323	1.8155577433815	18.120660191957	3.6799116111161	4.2143566367969
.95	.01000417167585	-.0877979005625	2.2849411656127	19.697473928029	3.7854032973234	4 2265373289439
975	.00844325496169	- 0254188238122	2.7942429857325	21.321955683796	3.8911466316071	4.2334899098284
1	.00857763395504	05011949205871	[illegible] 3446415408822	22.992770[illegible]7498	3 996996833[illegible]212	[illegible]339438343686

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 7

Tableau IV-5

Revo = 5

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	3.1337836969989	-14.11786723817	0	4.8914337457739
.025	.00078851554498	.07466884334355	2.781023578844	-14.09302898121	.1222856011779	4.8914149104423
.05	.00335195545225	.14052979480108	2.4295025789862	-14.00891825436	.24456873590121	4.8911812679244
.075	.00747056067473	.19762922007575	2.0806962480714	-13.86612682570	.3668422675662	4.8905694761981
.1	.01292611443658	.24605022592339	1.7360661998243	-13.66516372314	.48909553014923	4.8894692871527
.125	.01950285729278	.28591233354386	1.3970622155039	-13.40645175886	.61131564488863	4.8878224707706
.15	.02698839457847	.3173712055071	1.0651244377499	-13.09032380804	.73348880552922	4.8856213058106
.175	.03517459761004	.34061842851617	.7416856603918	-12.71701880432	.8556015214956	4.8829066558632
.2	.04385850005954	.35588135448121	.42817372140563	-12.28667744591	.97764180877269	4.8797656439658
.225	.05284319098761	.363423002557	.12601400602063	-11.79933763813	1.0996003185435	4.8763289333798
.25	.06193870608813	.36354202496261	-.1633679339882	-11.25492972904	1.2214713937675	4.8727676167317
.275	.07096291876987	.35657273953549	-.4385436405183	-10.65327162515	1.3432540438844	4.8692897105806
.3	.07974243277501	.34288523205501	-.6980788870436	-9.994063903243	1.4649528277033	4.8661362476664
.325	.08811347811062	.32288553138349	-.9405306955740	-9.276885062294	1.5865786342985	4.8635769546673
.35	.0959228121447	.29701586039913	-1.164444237923	-8.501187086642	1.7081493513855	4.8619054993151
.375	.103028627791	.2657549655171	-1.368349631083	-7.666291516677	1.8296904102102	4.8614342872202
.4	.10930147077392	.22961852729737	-1.550758641653	-6.771386248120	1.9512351954625	4.8624887858005
.425	.11462516802278	.18915965420421	-1.710161320076	-5.815523304038	2.0728253081333	4.8654013503208
.45	.11889776929054	.14496946099889	-1.845022591725	-4.797617846128	2.1945106685911	4.8705045252712
.475	.1220325041216	.09767773249915	-1.953778838818	-3.716448713245	2.3163494464719	4.8781237931771
.5	.12395875630205	.04795367251365	-2.034834514506	-2.570660796050	2.4384078032724	4.8885697424488
.525	.12462305790978	-.003493263356 8	-2.086558838480	-1.358769577257	2.5607594328278	4.9021296260635
.55	.12399010503545	-.0559124536800	-2.107282631823	-.0791681876052	2.683484884159	4.9190582837139
.575	.12204379716411	-.1085111200794	-2.095295357864	1.2698626511632	2.8066706505032	4.9395684015307
.6	.11878830208473	-.1604532649805	-2.048842445269	2.6901414029455	2.9304080077169	4.9638200855384
.625	.11424914802628	-.2108585461585	-1.966122979694	4.1835687966192	3.0547915846684	4.9919097275655
.65	.10847434449687	-.2588010982973	-1.845287861011	5.7521067656388	3.1799176477372	5.0238581452838
.675	.10153553302127	-.3033083143157	-1.684438534455	7.3977527775045	3.3058820811111	5.0595979812632
.7	.09352916862396	-.3433596020444	-1.481626416142	9.1225090519473	3.4327780442299	5.098960349211
.725	.08457773248295	-.3778851349892	-1.234853146258	10.928346132852	3.5606932874604	5.1416607187062
.75	.07483097567555	-.4057646193830	-.9420718169848	12.817160242042	3.6897071068993	5.1872840324655
.775	.06446719334259	-.4258261035636	-.6011893369430	14.790723803353	3.8198869190752	5.2352690521981
.8	.05369452790348	-.4368448599181	-.2100701096535	16.850628483607	3.9512844362313	5.2848919300613
.825	.04275229915096	-.4375423742469	.23345877972126	18.998220054293	4.0839314227946	5.3352490022353
.85	.03191235813094	-.4265854824405	.73160065721938	21.234524335643	4.2178350135274	5.3852387987567
.875	.02148046065904	-.4025856998634	1.2865804015179	23.560163445706	4.3529725736631	5.4335432590035
.9	.01179765512874	-.3640987948152	1.9006333831879	25.97526154401	4.4892860809896	5.4786081345856
.925	.00324167791491	-.3096246639268	2.5759919304695	28.479339236352	4.6266760092733	5.5186225502667
.95	-.00377165184222	-.2376075743455	3.3148690293306	31.071195798958	4.7649946915313	5.5514976782632
.975	-.0087870479866	-.1464368450887	4.1194389446278	33.748778392696	4.9040391403371	5.5748444610681
[illegible]	-.01130839543615	-.034446[illegible]	4.991814426[illegible]	3[illegible].509037478553	5.0435[illegible]	5.5859502[illegible]

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 7

Tableau IV - 6

Rer0 = 10

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	10.793493440352	-47.44485462738	0	9.0314678144147
.025	.00271813985173	.25748456030542	9.60800515262	-47.36087044919	.22578515232632	9.03134785.88018
.05	.01156490216519	.48536936438552	8.4266836685225	-47.07926064962	.45155458268269	9.0298580048308
.075	.02580176176527	.6838094922588	7.2543968677817	-46.60690607651	.67726269393521	9.0259472915565
.1	.04469532501184	.85308000060207	6.0958501914295	-45.94976381872	.90284104178469	9.0188930012292
.125	.06752028872787	.99357210453329	4.9556100273069	-45.11283919754	1.1282064653528	9.0082931038251
.15	.09356230981689	1.1057899514077	3.838127811244	-44.10015590673	1.3532690033408	8.9940563041056
.175	.12212080056123	1.1903480052377	2.747764920536	-42.91472148219	1.5779395402324	8.9763901005725
.2	.15251166508284	1.2479690629323	1.6888184984673	-41.55848608035	1.8021371360267	8.9557871490656
.225	.18406999301816	1.2794829274885	.6655483911333	-40.03229331078	2.025795999128	8.9330101109783
.25	.21615272713638	1.2858257680656	-.31779459842161	-38.33582259276	2.2488720653872	8.9090750583523
.275	.24814132243271	1.2680402020842	-1.256938927605	-36.46752318556	2.4713491470284	8.8852334060312
.3	.27944441516148	1.2272761396804	-2.147560802505	-34.42454067998	2.6932446134375	8.8629522448156
.325	.30950052133256	1.1647924356107	-2.985250762215	-32.20263734036	2.9146145616908	8.8438928591673
.35	.33778078536467	1.0819593976648	-3.765478225262	-29.79610825903	3.1355584284013	8.8298871284619
.375	.36379180084637	.9802622034381	-4.483553918930	-27.19769583442	3.3562229861107	8.8229114321705
.4	.38707852666741	.86130527860192	-5.134590180615	-24.3985056183	3.5768056572016	8.8250576069734
.425	.40722732310835	.72681768924476	-5.713459201953	-21.38792709924	3.7975570663122	8.8385004382286
.45	.42386913376496	.57865959812179	-6.214749380989	-18.15356350469	4.0187827386841	8.8654611102848
.475	.43668284037882	.41882982941445	-6.632720055042	-14.68117521443	4.2408438369616	8.9081659909638
.5	.44539881868037	.24947457854943	-6.961255007067	-10.95464188907	4.4641568129225	8.9688000864695
.525	.44980272415205	.07289729243785	-7.193815271246	-6.955948932137	4.689191833726	9.0494544754517
.55	.44973953710495	-.1084302691527	-7.323391909491	-2.665204432241	4.9164698248124	9.1520670163877
.575	.44511789654337	-.2918557988150	-7.342459589915	1.9393067159621	5.1465579539196	9.2783556220372
.6	.43591475186868	-.4745330635973	-7.242931971916	6.8810242211399	5.3800633631588	9.4297434092473
.625	.42218036044085	-.6534074413279	-7.016120091502	12.184961388668	5.6176249390867	9.6072750619038
.65	.40404365725538	-.8252004604907	-6.652695146800	17.877493008186	5.8599028945933	9.8115237884503
.675	.38171802037868	-.9863934702954	-6.142657309729	23.986072583116	6.1075659215267	10.042488310979
.7	.35550745217649	-1.133210610801	-5.475312438969	30.538868339201	6.3612756595573	10.299479386781
.725	.32581319161398	-1.261601302670	-4.639258845554	37.564306263908	6.6216682150017	10.580995430026
.75	.29314076683332	-1.367222533077	-3.622386570214	45.090507052837	6.8893324531775	10.884586863605
.775	.25810748963483	-1.445421279302	-2.411891975763	53.144602273523	7.1647847791389	11.206708879751
.8	.22145038419012	-1.491217485598	-.9943108429479	61.751913325933	7.448440113889	11.542562311462
.825	.18403453106338	-1.499288093031	.6444264122629	70.934974938505	7.74057876561	11.885922301426
.85	.14686179414558	-1.463952717345	2.5189133060349	80.712383082969	8.0413088869702	12.228954385553
.875	.11107988212418	-1.379161677649	4.6441550235936	91.097445458105	8.3505241986126	12.562017466388
.9	.07799167729625	-1.238487199876	7.0354201490563	102.09661126841	8.6678566434934	12.87345291715
.925	.04906474253971	-1.035118754563	9.7080506197798	113.70765614903	8.9926236142507	13.149358705602
.95	.02594089171989	-.7618636389687	12.67722353173	125.91759806897	9.3237693630202	13.373346928857
.975	.0104455[illegible]35062	-.4111540[illegible]	[illegible]	[illegible]	9.6598001560277	[illegible]
1	.0045976315805	.02493769235973	19.563258368175	152.01388832858	9.9987126687363	13.58599954614

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 11

Tableau IV-7

Précision : 4 chiffres SIGNIFICATIFS Revo = 10

z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	10 7417	-47.2892	0	9.0188
.025	.0027	.2562	9 5601	-47.2055	.2255	9.0187
.05	.0115	.4829	8.3826	-46.9246	.451	9.0172
.075	.0257	.6803	7.2142	-46.4533	.6764	9.0133
1	.0445	.8486	6.0595	-45.7977	.9017	9.0063
125	.0672	.9882	4.923	-44.9627	1.1268	8.9958
.15	.0931	1.0997	3 8092	-43 9522	1.3516	8 9817
.175	.1215	1.1836	2.7225	-42 7691	1.576	8.9642
.2	1517	1.2406	1 6672	-41.4155	1.7999	8 9437
.225	.1831	1.2716	.6475	-39.8922	2.0233	8 9211
.25	.215	1.2775	-.3324	-38.1988	2.2461	8.8974
.275	.2468	1.2594	-1.2682	-36.3338	2.4683	8 8738
.3	.2779	1.2184	-2 1555	-34 2944	2.6899	8.8518
.325	.3077	1.1557	-2 99	-32 0763	2 911	8.833
35	.3358	1.0728	-3.7671	-29.6738	3.1317	8.8193
.375	.3616	.9711	-4.4822	-27.0797	3.3521	8.8126
.4	.3847	.8522	-5.1303	-24.2852	3.5724	8.815
.425	.4046	7178	-5.7064	-21.2797	3.7929	8.8287
45	.421	.5698	-6.205	-18 0508	4.0139	8.8559
.475	.4336	.4102	-6.6205	-14.5844	4.2357	8.8988
.5	4421	.2412	-6.9467	-10.8645	4.4588	8.9596
.525	.4463	.065	-7.1771	-6.8731	4.6836	9.0403
.55	.446	-.1159	-7 3047	-2.5905	4.9107	9.1429
.575	4412	-.2988	-7.322	2 0049	5.1406	9 2691
.6	.4318	-.481	-7.2209	6.9363	5.3739	9.4203
.625	4179	-.6593	-6.7928	12.2287	5.6112	9.5975
.65	.3996	-.8305	-6.6284	17.9081	5.8532	9.8013
.675	.3771	- 9911	-6.1177	24.0016	6.1006	10 0317
.7	3508	-1.1373	-5.4501	30.5373	6.354	10.2879
.725	.321	-1.2651	-4.6143	37.5432	6.6141	10.5685
.75	.2882	-1.3701	-3.5982	45.0473	6.8814	10.871
.775	.2531	-1.4477	-2.389	53.0763	7.1565	11.1918
.8	.2164	-1 493	-.9734	61.6551	7 4398	11.5262
.825	.1789	-1.5006	.6626	70.8061	7.7315	11.868
.85	.1417	-1 4648	2.5335	80.5475	8.0318	12.2093
.875	1059	-1.3797	4.6542	90.8923	8.3405	12.5405
.9	.0728	-1.2388	7.0399	101.8467	8.6573	12.85
.925	.0439	-1.0354	9.7058	113.408	8 9815	13.1239
.95	.0208	-.7623	12.6669	125.5633	9.312	13 346
975	0053	- 4119	15 9379	138.2862	9 6473	13.4972
1	-.0006	.0236	19 5325	151 5346	9.9855	13 5553

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES := 14

Tableau IV - 8

E1 = E2 = 1 Rero = 10

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	12.053453304854	-53.80128558303	0	9 4568279699927
.025	00303383949557	.28732849235218	10.709114572181	-53 70937070910	23641889572048	9.4566878281809
05	.01290105406148	.54108947536215	9.369330589602	-53 40183877663	47281943373843	9.4549485902035
.075	.02876406023716	76145226637443	8 0393998287339	-52 88738377323	7091484465709	9.4503898531783
1	.04979087070573	94871647210953	6.7244156788727	-52 17351761463	.94532632579733	9.4421809903253
125	0751583004406	1.1033071718985	5 4292963262294	-51 26653871785	1 1812566783095	9 4298723419112
15	.1040550602755	1.2257708561728	4 1588154374012	-50.17149825646	1.4168357339922	9.4133837568862
175	13568475699469	1.3167721412618	2.9176337493805	-48 89215996908	1 6519614443918	9.3929910226667
2	16926881960096	1.377091285099	1.7103317600245	-47.43095050216	1.8865422237452	9.3693105654592
225	20404937208992	1 4076225339852	5414437772818	-45 78889832679	2.1205052917374	9.3432826540492
25	.23929207388356	1.4093733374478	-.5845063759334	-43.96556026235	2 353804581685	9.3161531974361
.275	.2742889500811	1 3834644758362	-1 662967689884	-41.95893556726	2.5864281786858	9.2894540915393
3	.30836123488178	1.331131153016	-2 689322025949	-39 76536842558	2 8184052498154	9.2649819423756
.325	3408622529206	1 253725113828	-3.658841630415	-37 37944047729	3.0498124228708	9.2447748723137
.35	.37118036481732	1.1527178523321	-4.566643879598	-34 79385582403	3.2807795616288	9.2310870019753
.375	39874200494321	1 0297049817792	-5.407643100453	-31.99932170025	3.5114948742771	9.2263600930201
.4	42301484121758	.8864118402599	-6 176499398368	-28.98442874434	3 7422092777507	9.2331917367326
.425	.44351108860472	.72470040660447	-6 867564529836	-25 73553554032	3 9732399243575	9 2542993808211
.45	.45979100982718	54657759889269	-7 474824982162	-22 23666283514	4.204972778504	9.2924794034479
.475	47146663856711	.35420502241294	-7.991842565086	-18.46940357105	4 4378641107902	9.3505603710733
.5	.47820576200681	14991022463231	-8.411692980405	-14.41285561134	4.6724407545197	9.4313495574991
.525	.47973620086365	- 06380049876 30	-8 726903015391	-10 04358478455	4.9092989461353	9 5375717581464
.55	47585042599265	- 2842277208866	-8.929387204369	-5.335626636505	5.1491015466562	9.6717994088375
575	.46641055104028	- 5084629212161	-9 010385020783	- 2605360747113	5 3925734163593	9 8363730147462
6	45135374040095	- 7333709702016	-8.960399900465	5.2125050598082	5.6404946902633	10.033310914827
.625	43069807070671	- 9555711226233	-8.769141657338	11.116511522594	5.8936916780356	10.264207451122
65	.40454888210961	-1 171416623367	-8.425474137933	17.486437263029	6.153025089357	10.530118680723
675	37310565251978	-1.376973078676	-7.917370274652	24 358823815252	6.4193752651448	10.83143485888
7	33666942354702	-1 567995803501	-7.231877044491	31.771339743769	6.6936240768584	11.167739030571
725	29565080094598	-1 739906422204	-6.355093226187	39.762194666839	6 9766331407881	11.537651187974
75	25057854464742	-1.887769076647	-5.272163281549	48 369409337615	7.2692179819309	11.938657572895
775	.20210875370441	-2.006266683833	-3.967291173941	57 629920907554	7.572117772708	12.366924813533
8	15103463939346	-2.089677786235	-2.423778485901	67 578499859415	7.8859602649163	12.817098668093
.825	09829686494945	-2.131854653335	- 6240918151162	78.246452258049	8 2112215280754	13.282087184944
.85	.04499441260109	-2 126203424472	1.4500348829951	89.660078064867	8 5481801023507	13.752828058814
875	- 00760408271289	-2 065667232633	3 8174565773958	101.83885349928	8.8968651675772	14.218039840931
9	- 05804861879518	-1.942713418080	6 4974248139868	114.79330307627	9.2569983190156	14 663956421463
925	- 10469564633643	-1 749326131146	9.509338607208	129 52252533647	9 6279285220899	15.074043814945
95	- 14569697395589	-1.477005836269	12 872429533232	143.01133581295	10.008559788409	15.428697708124
975	- 17898574856126	-1 116777464679	16 605371085677	158 22699192216	10 397221068844	15 704919430207
1	-.20226674779506	-.65920922063631	20.725801503912	174 11546781945	10.79182778997	15.875966917656

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES I= 8

Tableau IV - 9

$\Delta Z = .1$ $Re_{ro} = 10$

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	10.158640958579	-45.60564922325	0	9.1325405693494
.1	.03662696450784	.82653558490482	5.63881249443	-44.2691921813	.91291063727502	9.1265396228294
.2	.1373079789822	1.2105432823899	1.3805286749627	-39.89155778342	1.823076881799	9.0652713083051
.3	.25925437638773	1.1905509482003	-2.320670001467	-32 64936645934	2.7253944009987	8.9671459443593
4	.3647448661156	.8342304349692	-5.175664205901	-22.44025808903	3.6193391301327	8.9142157600452
.5	.42404942089081	.23900500687523	-6.870864963624	-8.810018783627	4.51448016855	9.0307065221688
.6	.41855202333746	-.4639386285445	-7.029846496204	9.119577703508	5.4334176225255	9.4505924032844
.7	.34444294120953	-1.10154687592	-5 169696514129	32 666848723166	6.4107614213016	10.266884920331
8	.21740313686679	-1.446508441717	-.6611838137733	63 461634273919	7 4859295847026	11.453124072114
9	.07867328500458	-1 201706019613	7.2876620686012	103.0424657471	8.6865995863733	12.748069575033
1	.00268795028258	.014788608857	19.589448131513	151.98496354033	9.9988222457713	13.496424275264

NOMBRE O'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 11

Tableau IV-10

$\varepsilon 1 = \varepsilon 2 = 0.005$ $\qquad$ Rero = 10

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	10.806287026549	-47.49575000099	0	9.0279875151771
025	00272137210978	25779114391082	9 619525854027	-47 41183351438	22569814360678	9.0278674628737
05	.01157869960527	.4859506787776	8.4369280270169	-47.13046280320	.45138055250976	9.0263763999074
.075	02583265975021	68463355226603	7.2633569742273	-46.65853444326	.67700159220001	9.0224624738834
1	.04474905684528	.85411457347421	6.1035133117939	-46.00201940123	.90249276113391	9.0154023080654
.125	.06760177818177	99478458584699	4 9619582745885	-45 16593506981	1.12777082718	9.0047934510588
.15	.0936756604748	1.10714723323 7	3.8431378620611	-44.15431545503	1.3527457498099	8.9905444331914
175	12226928179543	1 1918163376939	2.7514077752766	-42 97017668427	1.5773283326169	8.9728628398188
2	.15269769451085	1 249513910154	1 6910592842331	-41.6154758034	1.8014375597834	8.952241694983
225	.18429511531103	1.2810688191484	.666346207296 2	-40.09106159945	2.0250075762699	8.929444335919
.25	.21641758907776	1.2874161474651	-.3184867914318	-38.39661691091	2.2479942748822	8.9054878510268
.275	24844564415481	1 2695972719314	-1 2591743746 80	-36.53059256836	2.4703814541154	8.8816250516935
3	27978695751181	1.2287607066998	-2.1513989726 64	-34.49013374781	2.6921865089233	8.859324851948
.325	30987904935497	1.1661637552138	-2.9907573158 34	-32 27100012137	2.9134656124604	8.8402508393774
.35	.33819202791	1.0831750200249	-3.7727249243 57	-29.86748176348	3.1343183405393	8.8262377360032
375	.36423140636317	9812778224632	-4.4926184736 73	-27.27231332183	3.3548916821864	8.8192653690083
4	38754101526241	.86207458548324	-5.1455560237 71	-24.47658949679	3.5753833694119	8.821429698614
.425	.40770603501057	.72729223248446	-5 7264151814 17	-21.46968539651	3.7960444472979	8.8349103845996
45	.42435617437761	.57878865220309	-6.2297893590 87	-18.23918585111	4.0171809919291	8.8619343147758
.475	43716902216031	.41856027457671	-6 6499424018 06	-14 77082828138	4.2391548687488	8.9047344693013
.5	.4458736001608	.24875079446504	-6.9807619733 04	-11.04846422930	4.4623834078442	8.9655034554012
.525	4502541464651	.07166106895562	-7.2157122259 42	-7 05404517435 4	4.6873378557258	9.0463410192653
.55	.45015415849857	- 1102398006345	-7.3477864249 68	-2.767638788559	4.9145404456644	9.1491948271087
.575	4454807254259	-.2943022093582	-7.3694603572 09	1.8325176635238	5.1445599109215	9.2757938067858
.6	.43620917905154	- 4776826416809	-7.2726475280 60	6.7699194801458	5.3780052476279	9.4275733557541
625	.42238809135452	- 6573291738562	-7 0486573399 09	12.069644277374	5.6155175169948	9.605591750684
.65	.40414464504277	-.8299659744787	-6.6881576516 24	17.758140643633	5.8577594603665	9.8104371377365
675	38169040090935	- 9920769293835	-6 1811433450 74	23 862946130521	6.1054026856632	10.042124538373
.7	.35532748217625	-1.13988856027 2	-5.5169127740 93	30.41232400484	6.3591121702987	10.299982369884
.725	.32545519126758	-1.26935245617 7	-4.6840542477 75	37.434806999979	6.6195278138374	10.58252804725
.75	.29257706839227	-1.37612749384 2	-3.6704450082 04	44.958634926542	6.8872427634881	10.887332296194
.775	.25730839374793	-1.45556218813 0	-2 4632655073 03	53.011071432534	7.1627782268198	11.210871857003
.8	22038412586969	-1.50267758766 6	-1.0490321731 69	61.617583466649	7.4465544783667	11.548370283483
.825	.18266725740445	-1.51215121508 8	.5863477134373	70.800865149848	7.7388577593129	11.893626527785
85	14515755612718	-1 47830264673 5	2 4574949349161	80.579685894128	8.0398027610831	12.238830934193
875	.10900064303847	-1.39508143438 3	4.5794464249943	90 967540860422	8.3492903728877	12.574368125462
.9	07549734057023	-1.25605819303	6 9675073460765	101.97108040563	8.6669603580682	12.888606033421
.925	04611320193155	-1.05441981439 8	9 637061378737	113.58829427175	8.992138601906	13.167669977226
.95	.022488107082	-.78296991665 65	12.603332838471	125.80642622191	9.3237785411914	13.39520019835
975	00644578134815	- 4341358066933	15.881093638158	138.59959601928	9.6603963392556	13.552090583241
1	00000303892751	00001658833459	19.484307565415	151.[illegible]10859455	9.99999930425 26	13.616205391291

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: := 13

Tableau IV-11

Rero = 20

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	30.020779145795	-125.4289132560	0	15 046027553954
025	0075729328896B	71786306838758	26 88679428765	-125.2003242347	37614352882818	15 045470110382
.05	.03227692356649	1 3574776729176	23.763999736219	-124 4521922481	75221386700203	15 038529360826
.075	.07215967184489	1 919254759347	20 664844709252	-123 2355827891	1.12799775856	15 020221734461
1	.1252822954614B	2 4039036933385	17.600566859795	-121.5953098096	1 5031723077811	14 986994297152
.125	18972648727052	2 8124035983252	14 581348348682	-119.5699622717	1 8773402888302	14.936679645441
15	.26360099646323	3 1459785856375	11 616470995586	-117.1919477561	2 2500642356383	14 868442631734
175	.34504753086561	3 4060768543461	8 714470720921	-114 4874933605	2 6208991627014	14 782724033599
2	43224617697322	3.5943536581061	5 8832928484627	-111.4765570566	2 9894238815559	14 681184972374
.225	52342043481	3.7126581868238	3.1304508908429	-108.1726138377	3.3552709602148	14.566654689337
25	61684196664305	3 763024485048	4631922331632	-104.5822902448	3.7181554266246	14 443083202539
275	71083516257108	3 7476666206334	-2.111325289728	-100.7048283687	4 0779023448736	14 315499377334
.3	80378163241814	3.6689784215308	-4.585841519513	-96 53136657441	4 4344733965383	14 189974020834
325	89412474248039	3 5295382115296	-6 952782138010	-92.04402945520	4 7879925805343	14 07358672128
.35	.98037432767248	3.3321190939983	-9.204022065717	-87.21482443157	5.138771103611	13 974394262191
375	1 061117246001	3 0797054530172	-11 33061928038	-82 00434747744	5.4873314697867	13.901397514044
.4	1 13499528906B1	2.775516460593	-13.32251436109	-76 36030617136	5.8344306893466	13 864502713062
425	1 2007665824538	2.4230374933709	-15.16819133737	-70.21587505599	6 1810824146088	13.874471953664
.45	1.2572574350821	2 0260604682603	-16 85429588076	-63 48790650271	6.5285776680887	13.942856533011
475	1.303398120956	1 5887341986743	-18.36520755723	-56.07503019574	6.8785036562651	14 081905488221
.5	1 3382269065265	1 1156259456183	-19 68256380733	-47.85568617593	7 2327599562025	14.304440267332
525	1.360901266056	6117953834445	-20.78473458628	-38.68615026579	7.593571120478	14 623684996501
.55	1 3707110867839	.08288221026025	-21.64624823104	-28.39862675783	7 9634944666087	15.053040286201
.575	1 3670942175538	- 464791402093	-22 23717118235	-16.79950165098	8 3454214999722	15 605787011614
6	1 349654743559	-1 024102415144	-22.52244673677	-3.667870746646	8.7425710650484	16 294705073313
625	1 3181843958721	-1 586991645608	-22 46120110944	11 245518923493	9 1584719314141	17.131590868278
65	1 2726875255448	-2 144310904707	-22.00602883677	28.21874772708	9.5969321029021	18.12665615306
.675	1.2134100860284	-2.685652204437	-21.10227405456	47.558422120137	10 06199169707	19.287790223054
.7	1 1408730717197	-3 199159148634	-19.68732959684	69.598353041575	10.557855785274	20 619666899216
.725	1 0559108512916	-3.671321241637	-17 68998237201	94.696924250565	11 088803119275	22 122677693431
75	9597148081535	-4.086752638672	-15.02984133355	123.23280018673	11.659066205501	23.79167263475
775	.85388265211883	-4 427957866768	-11 61689387430	155 59854916524	12.272677726918	25 614490409191
.8	74047369034763	-4 675088307823	-7.351247975448	192.19166994946	12.933277853673	27 570259414397
825	.62207023487983	-4.805694809620	-2.123131276161	233.40240881515	13.643876517606	29 627450650854
.85	50184517016571	-4 794483737899	4.1867653031127	279.59764347351	14.406564231164	31.741661519914
.875	38363549690054	-4.613086170748	11.706492471758	331.09999610815	15 222164471914	33.853105880014
9	.27202139642 [illegible]	-4 229852836155	20.571467025001	388.16123022122	16 089819974047	35 883779249016
925	17241000945955	-3.609690871792	30.922362281827	450.92889854678	17 006504388072	37.734257701166
95	.09112267594568	-2.713962598849	42 [illegible]07084554704	519.405[illegible]	17 [illegible]6644957[illegible]	39 [illegible]90073248427
975	0354838[illegible]	-1.500471282729	56.651628689675	593.39667399112	18.960477152787	40 36758504511
1	.01390916347213	076435700452	72.304579993995	672 45475929504	19.975220499664	40 809231020959

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 12

Tableau IV-12

Rerv= 30

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	47.266633128693	-189.1509054454	0	19.358176140582
.025	01193958368173	1 1324199784588	42 540715382677	-188.7777236518	.483939882796O8	19 357044281276
05	05095997454314	2.1468562374092	37.83288727942	-187 5781701033	.9677309433312B	19 342923054685
075	11411786280355	3.043966408386	33 162519268012	-185.6743856621	1.4509379293485	19.305528694546
.1	19849118984058	3 8248616614364	28 546072459638	-183.1747060571	1.9328971971629	19.237321237454
.125	30118975583731	4 4910375293004	23.997438370952	-180 1742085717	2.4127841333992	19.133389071963
.15	.41936418536325	5.0443130673406	19.528263266677	-176.7553982702	2 8896775137826	18.991318583398
175	55021345507418	5 4867779450804	15 148255839096	-172.9888257029	3.3626205941219	18 811064533792
2	.69099117767413	5.8207470840745	10.865481673998	-168 9334740250	3.8306790797147	18.594833045065
225	83901082785227	6 0487225822449	6.68665161411	-164.6367897216	4.2929963816749	18.346985810508
25	99165009149891	6 1733628731458	2.6174139959963	-160.1342568559	4.7488467553811	18.073971438607
.275	1.1463545210029	6.1974593426613	-1 337336938317	-155.4484307095	5.1976870396363	17.784287551605
3	1.3006406883604	6.1239209543336	-5 173122140131	-150.5873544931	5.6392077848746	17.488475288151
325	1 4520990454786	5.9557678120322	-8 885492164633	-145.5422846004	6.0733845809309	17 199146035162
.35	1.5983967286434	5 6961350131533	-12.46957681402	-140.2846479550	6.5005303713999	16.931038362071
375	1.7372805828039	5.3482886176774	-15.91954998890	-134 7621517837	6.9213494698217	16.701101064113
.4	1.866580732335	4.9156560799804	-19 22798770707	-128.8939641016	7.3369938654779	16.528595747218
.425	1 9842150895088	4.401874062565	-22.38509521671	-122.5648848725	7.7491222112268	16.435209309041
45	2 0881952713087	3.8108571730795	-25 37777720351	-115 6184358675	8 1599616054158	16.445162793272
475	2.1766344906633	3 1468918336105	-28.18852345760	-107.8488144808	8.5723718925228	16.585298229974
.5	2.2477581006947	2 4147601943387	-30.79408128493	-98 99168609169	8 9899116863348	16 885119054829
525	2 2999176008963	1 6198997250065	-33 16388575420	-88.71383406249	9.4169046348353	17.376752391619
.55	2.3316090624627	.7686048308974	-35 25821997658	-76 60174937315	9.8585035644321	18.094792808118
.575	2 3414970957179	- 1317224924035	-37.02608051827	-62.14932678968	10.320749028505	19.075977120286
.6	2 328445664072	-1.072265380262	-38.40272833863	-44.7449455601	10 810617408442	20.358628533743
.625	2.2915572430862	-2.042420203706	-39 30691403733	-23.65835536035	11.336052045408	21.981796111188
65	2 2302220250882	-3.029351907522	-39.63777855055	1.972029855897	11.905968896322	23.984002607087
675	2 1441790719865	-4.017468634081	-39.27144784619	33.15059545817	12.530225896627	26.401500594504
.7	2.0335915110801	-4 987808388104	-38.05736403625	71.033615140502	13.21954257668	29.26592405317
.725	1.8991380364064	-5.917331880811	-35.81442749576	116.93444985789	13.985353532012	32 60121066416
75	1 7421231021839	-6 778117987485	-32.32706746029	172.32284644463	14 83957611414	36.419659209074
.775	1 5646082493494	-7.536461759261	-27 34141524058	238 81569200429	15.794269213403	40.716976491694
8	1.3695669569218	-8.151880030733	-20 56182837323	318.15578361923	16.861156261478	45.466158157241
.825	1.1610652122063	-8.576036841335	-11 64810993847	412.17420170512	18.050981568469	50 610035741801
85	944469589796	-8.751610728687	- 213889201141	522 73074065953	19.372664745762	56.052305023508
.875	7266839452496	-8 611139146488	14 173218662998	651 62559679803	20 83221307304	61.646823494732
9	51641477343437	-8.075892575145	31.988872566471	800 47422481237	22.431345928903	67 184920838729
925	3244637424672	-7.054853125783	53 745669167946	970.53607351939	24.165778308722	72.380396322408
.95	16404376107742	-5.443900338986	79.981951653694	1162 4869612436	26 02310121359	76.85176726805
975	05111202170776	-3 125341057266	111 24424349039	1376.12436861	27.980184100655	80 101161233537
1	00470962286081	.0320389622251	148.06152142776	1609 9952724992	30.000006721179	81.488972820577

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 1:

Tableau IV - 13

Rero = 50

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	74.378046419793	-286.3640290940	0	27.298231875868
.025	.0188099781775	1.7849014521845	67.224594183066	-285.6287204648	.6824235430077	27.295715181076
.05	.08038161325515	3.3912889631452	60.10654767083	-283.2941676153	1.3645157632644	27.264260779475
.075	.18026430090515	4.8204406703822	53.060801162209	-279.6531676352	2.0453043705909	27.180666779639
.1	.31404843645068	6.0744832421958	46.117249442559	-274.9679779063	2.7232970815066	27.027459075874
.125	.47738486426177	7.1562246486022	39.299523593588	-269.4731111778	3.3966210444315	26.792520843801
.15	.66600033221907	8.0690045240473	32.625647992803	-263.3788975758	4.0631524746197	26.468678037556
.175	.87570936927057	8.8165600087363	26.108606567301	-256.8751439888	4.7206359384334	26.053291099526
.2	1.1024229494046	9.4029048153874	19.756821078013	-250.1344089797	5.3667938476932	25.547890511632
.225	1.3421542506443	9.8322194512445	13.574554747418	-243.3145502462	5.9994275590099	24.95788390724
.25	1.5910217700167	10.108750939597	7.5622621602 3	-236.5602876204	6.6165120876605	24.29235524122
.275	1.8452500199891	10.236720971507	1.7169123626088	-230.0035603141	7.2162869050639	23.563971681759
.3	2.1011680125757	10.220242149099	-3.967682338152	-223.7624480471	7.7973456481506	22.7890109696
.325	2.3552057377739	10.06324285735	-9.500493156373	-217.9383776719	8.3587278700831	21.987520431552
.35	2.6038888670644	9.769402347515	-14.89281070178	-212.6112549494	8.9000162325779	21.183618027962
.375	2.8438319651276	9.3420988796229	-20.15763331334	-207.8320491791	9.4214427925065	20.405945096597
.4	3.0717305798307	8.7843753205987	-25.30883800043	-203.6122196375	9.9240082641022	19.6882790800 2
.425	3.2843527098831	8.0989285122386	-30.36004719885	-199.9092105080	10.409618317527	19.07031160418
.45	3.4785303315873	7.2881311083399	-35.32308334517	-196.6070595682	10.881241055135	18.598591725376
.475	3.6511519136421	6.3540975438106	-40.20587739368	-193.4909721874	11.343089708967	18.327624623706
.5	3.7991571776988	5.2988094599451	-45.00966664423	-190.2145170021	11.800834209993	18.321100801762
.525	3.9195357910329	4.1243203903756	-49.72528174388	-186.2579196267	12.261844428201	18.65320787303
.55	4.0093322279556	2.8330649245436	-54.32828309436	-180.8757906342	12.735466353738	19.409943822699
.575	4.0656597327329	1.4283040000985	-58.77266449409	-173.0325595998	13.233329998072	20.690304363747
.6	4.0857271849234	-.0852545216107	-62.98279907071	-161.3239496715	13.769683982313	22.607154622962
.625	4.0668837347223	-1.700612300936	-66.84326333163	-143.8830910731	14.361746211743	25.287513782522
.65	4.0066873657337	-3.407356857932	-70.18614558377	-118.2704456515	15.030052200867	28.871877679381
.675	3.903005074697	-5.190190685188	-72.77543438454	-81.34775874915	15.798771938457	33.512076626497
.7	3.7541541400503	-7.027036085075	-74.28810521136	-29.13800776548	16.695952051709	39.367012835053
.725	3.5590959723134	-8.886629842241	-74.29160036293	43.323873501287	17.753621814605	46.595444000997
.75	3.3176962554193	-10.72551576514	-72.21755953112	142.14036267454	19.007678635697	55.344778037908
.775	3.0310674047772	-12.48434240374	-67.33195153574	274.68514548089	20.497440471908	65.734619576245
.8	2.7020116127562	-14.08338176392	-58.70224352815	449.69622523777	22.264718566784	77.833560200075
.825	2.3355846382775	-15.41720823152	-45.16300330587	677.2901286783	24.352223326288	91.627423780775
.85	1.9398015737612	-16.34852302303	-25.28245990471	968.8417656696	26.801068043472	106.97684692328
.875	1.5265054174773	-16.70118863222	2.665849478314	1336.6532273414	29.647077946838	123.56165676206
.9	1.1124164351884	-16.25266277619	40.720049208601	1793.3103944745	32.915542923924	140.80894449133
.925	.7203737117206	-14.72620710375	91.226418955654	2350.6004651827	36.613966669508	157.80092822742
.95	.3807682875504[illegible]	-11.78350824671	156.80288774291	3017.838787119[illegible]	40.722255371004	173.15749672448
.975	.13314777107327	-7.018703076162	240.2529[illegible]25466	3799.4323805843	[illegible].1796412683932	[illegible]286
1	.02794287176205	.0447404418913	344.40930285934	4691.4943824838	49.867442013371	190.19121641886

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 11

Tableau IV - 14

Reyo = 70

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	101.10379639656	-401.9500586486	0	37.995499948782
025	02554405493664	2.4229674095503	91.0659927902	-400.5243107979	.9498265218845	37.990746086911
.05	.10905215978927	4.5956150359181	81.096888466777	-395.9917587227	1.899027770955	37.931406292953
.075	.24429008904222	6 5204248098204	71.268289473285	-388.9084870443	2.8457726178164	37.774025226129
.1	42510329884592	8.2015337417154	61.638725566049	-379.7710440682	3 7872585899187	37 486094274032
.125	.64545496110415	9.6444170367547	52.254869949299	-369.0233816745	4.7199757566785	37.045089641937
.15	89945643069572	10.855604704493	43.152762642257	-357.0657784790	5.639945149011	36.437390716209
.175	1.1813909287779	11.8424263706	34.358804748542	-344.2641991327	6 5429300267565	35.657199588441
2	1 4857310870973	12.612778535655	25.890523514144	-330.9591089544	7.4246209490567	34.70554706278
.225	1.8071508560891	13.17490874332	17.757128083765	-317.4731766596	8.280797445192	33.589443594578
.25	2.1405321472947	13.537211742671	9.959887190453	-304.1175550732	9.10747034401 9	32.321215292145
.275	2.4809664664271	13.708033579457	2.4923663940413	-291.1965466647	9.9010097029083	30.918054335215
.3	2.8237517019451	13.695480539758	-4.659432799216	-279.0104589035	10.658263956463	29.401808569081
.325	3 1643841685069	13.507230984775	-11.51698377401	-267.8563516583	11.376676521423	27.799035240552
.35	3.4985459688177	13 150349410416	-18.10913809155	-258.0261855630	12.054406753544	26.141347561422
.375	3.8220877367425	12.631103651158	-24.47194861633	-249.801598344	12.690462930024	24.466088805354
.4	4.1310068680688	11.954788191527	-30.64831675831	-243.4441595558	13.284855872047	22.81737572253
425	4.4214214467025	11.125559276539	-36.68733447673	-239.1794706615	13 838782937913	21.247559740075
45	4.6895402534207	10.146291216303	-42.64314471001	-237.1728701723	14.354853379166	19.819158800331
.475	4.9316295297038	9.01846832734	-48.57308027275	-237.4937540427	14.837367376116	18.607312113874
.5	5.1439775988345	7 7421337984398	-54.53475725276	-240 0646122981	15 292662293577	17.702800789619
.525	5.3228590709584	6.3159259644806	-60.58169041633	-244.5898018770	15.729540550788	17.215653923231
.55	5.4645012436258	4.7372446755343	-66.75686076322	-250.4578218643	16.15979355614	17.279314933025
.575	5.5650565375315	3.0026064259701	-73.08349500288	-256.6094496952	16.59883478321	18.055266892948
.6	5 6205864819653	1.1082675209519	-79.55211000835	-261.3625900280	17.066451349668	19.737895589812
.625	5.6270650113825	-.9487792672958	-86.10263087823	-262.1832002702	17.587676144004	22.559189165236
.65	5.5804118022976	-3.169296441266	-92.60011182376	-255.3904241320	18.19376993707	26.792614595127
.675	5.4765702390099	-5.549603882418	-98.80228539774	-235.7835388477	18.92328282699	32.75515251699
7	5.3116495338188	-8.078465727582	-104.3168633287	-196.1793406234	19.82313405561	40.805990154179
.725	5.0821567293848	-10.73278177967	-108.5462645033	-126.8526493563	20.949605384337	51.339744162268
.75	4.7853519342788	-13.47174380081	-110.6173530449	-14.88222794757	22.369081934405	64.7712884277
.775	4.4197692543641	-16.22905845799	-109.2940100985	156.57645739783	24.158291214819	81.508272592877
.8	3.9859563546068	-18.90279216665	-102.8712315591	409.03591039375	26.40368086696	101.90620536404
.825	3.4874969215634	-21.34237878754	-89.05139223634	769.32645916798	29.199432409373	126.19949399252
85	2.9323913633062	-23.33238243319	-64.80697644414	1269.9531402829	32.643424345225	154.39999103786
.875	2.334879736109	-24.57277540242	-26.24023302442	1948.8416323413	36.83022296765	186.15225114922
.9	1.7177934968939	-24.65584680802	31.540289366379	2848.003052362	41.839877932756	220.53160125202
.925	1.1155136217334	-23.04049209280	114.49281942385	4010.4728712594	47.720909636652	255.76690226908
95	5775838321469	-19.02565324135	229.61355452962	5474.6989571632	54.465362452721	288.86391637553
.975	.17296834668502	-11.72619513492	384.73207755226	7265.384191048	61.973107000216	315.09628473702
1	-.00515979542423	- 056621227483	588.03073760789	9379 644180523	70 001605457006	327 31639195963

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES: I= 20

Tableau IV-15

Rero = 75

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	109.15297219607	-442.489512465	0	41.566982213938
.025	.02756101584703	2.6136489049763	98.10383987277	-440.7824532587	1.0391025715051	41.561373186973
.05	.11759051715676	4.9518183243893	87.136988786772	-435.3522512686	2 0774678295448	41.491416946433
.075	.2632299913465	7.0174819573848	76.338546601219	-426.8578955737	3.1129396074828	41.306147634951
.1	.45771643455742	8.815600829326	65.778924418502	-415.8862608208	4.14222543162	40.967707587059
.125	.69442808054074	10.352748558137	55.514534227257	-402.9607408406	5.1612117139717	40.450117230946
.15	.96692119046332	11.636777071589	45.589262292217	-388.5523216923	6.1652463888689	39.737892604192
.175	1 2689588473333	12.676516206626	36.035658693167	-373.0911547269	7.1493868305361	38.824662522848
.2	1 5945325276767	13.481500069287	26.875843604407	-356.9774459400	8.1086141856197	37.711890398371
.225	1.9378770473193	14.061713309994	18.1221545405	-340.5910256818	9.0380174982173	36.407770450807
.25	2 2934793144105	14.427351209844	9.77757092053	-324.2993026320	9.9329524878339	34.926344285113
.275	2.6560811801868	14.588588443916	1.8359578603647	-308.4634642727	10.789180835207	33.286869990559
.3	3.0206765607861	14.555352467887	-5.717825707732	-293.4427949109	11.602996566914	31.513470221431
.325	3.3825029140974	14.337098642019	-12.90790521130	-279.5968676697	12.371346790561	29.635086295859
.35	3 7370270968755	13 942585519759	-19.76739725141	-267.2851436762	13.091954758066	27.685770588617
.375	4.0799256040513	13.379650314736	-26.33837243820	-256.8631826718	13.763454126494	25.70535796003
.4	4.4070592131039	12.654986614716	-32.67167727763	-248.6742258465	14.385544410513	23.740567271194
.425	4.7144421359165	11.773929200152	-38.82648134655	-243.034335879	14.959179007937	21.846594620883
.45	4 9982059405741	10.740254695516	-44.86936319993	-240.2085457759	15.486798816588	20.089268754615
.475	5.2545587775965	9.556012177014	-50.87267541194	-240.3745474799	15.972626273616	18.547843229609
.5	5.4797408729097	8.2214053379878	-56.91183085564	-243 5693121574	16.42303647834	17.318495124271
.525	5.6699778925092	6.7347580638816	-63.06102300314	-249.6126477782	16.847023622253	16.518580212894
.55	5.821434719154	5.0926091340937	-69.38672626090	-258.0000449439	17.25678178145	16.291650893599
.575	5.9301735102042	3.2900002551587	-75.93811135105	-267.7552341041	17.668418513539	16.813163820259
.6	5.992121755463	1.3210459143934	-82.73324889723	-277.2307033949	18.102816590532	18.296673280965
.625	6.0030585832684	-.8200950445448	-89.73965633882	-283.8420966238	18.586652096105	21.000103563127
.65	5.9586309651277	-3.137686251019	-96.84736720309	-283.7201424992	19.153563967871	25.231393856964
.675	5.8544159728833	-5.632109231556	-103.8322735656	-271.2620284322	19.84544814943	31.352383301791
.7	5.686051109011	-8.296516613326	-110.3070345536	-238.5638782401	20.713815336644	39.779218683519
.725	5.449462241486	-11.11209997988	-115.6564106214	-174.7190490929	21.821100513355	50.976787849525
.75	5.1412280984498	-14.04154733725	-118.9535896007	-64.97660607349	23.241739831632	65.44367129334
.775	4.7591318042348	-17 02017920503	-118 8541342736	110.22400268483	25.062729706942	83.682822404088
.8	4.3029635489973	-19.94417502365	-113.4649844959	376.28419272391	27.38324697476	106.15158296249
.825	3.7756537285785	-22 65525741009	-100.1881042285	765.41271371376	30 312728781288	133.18263769615
.85	3.1848315231932	-24.92123364190	-75.54277237885	1317.2811602013	33.966575307459	164.86498051023
.875	2.5449173298995	-26.41196978149	-34.97834046613	2078.9555235716	38.458332088533	200.87068877702
.9	1.8798641287161	-26.67079203993	27.298184088895	3103.4727639546	43.886809550127	240.2089407555
.925	1.2266553423456	-25.08210265030	118.43696830061	4446.1756567583	50.316073181344	280.88275586954
.95	.6396341134705	-20.83731828969	246.93488317901	6157.65069282	57.745540681878	319.41558179694
.975	.19566624715705	-12.90325287212	422.40047449109	8271.8576647617	66.066477393983	350.20251502219
1	.00000733854375	.000066739735	654.95749487054	10787.8138391 14	74.999852770493	364 62072846675

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES:I= 16

Tableau IV-16

Revo = 80

Z	f	f'	f''	f'''	g	g'
0	0	0	118.25516757841	-490.9874350080	0	45.662583433524
025	.02983665672288	2.8285857516823	105.99629881636	-488.9269339380	1.1414789683807	45.655916487
05	.12720114565741	5.3516037559443	93.83676880508	-482.3697354943	2.2820822162293	45.57285294449
075	28448865582595	7.5726450890538	81.880666714506	-472 1051619433	3.4192534672389	45.353277122083
.1	.49420974793538	9.4977045781063	70.213281849479	-458.8337838588	4.5491006760084	44.952956300644
.125	.74904572284556	11.134733162878	58.903215029919	-443.1782759849	5.666776948573	44.341952990263
.15	1.0418933263132	12.493239921513	48.004183774419	-425.6972668983	6.7668194750419	43.502843568883
.175	1.365899946984	13.583935540572	37.556473518542	-406.8997123022	7.8434437334343	42.42893673209
.2	1 7144902511335	14.418408373974	27.588037875537	-387.2583448469	8.8907943829903	41.122622068296
.225	2.0813849796047	15.008824624437	18.115279136741	-367.2214870697	9.9031570155175	39.593932229991
.25	2.4606124300618	15.3676451064	9.143553027471	-347.2229660612	10.875136676742	37.859370885805
.275	2.8465129710291	15.507352197071	.6674457943868	-327.6900818375	11.801810172696	35.941040669349
.3	3.2337367869346	15.440181791541	-7.329127545886	-309.0496049128	12.678859944201	33.866098036293
.325	3.6172349365598	15.177856312274	-14.87295319374	-291.7316509324	13.502697965849	31.666562819686
.35	3.9922437220993	14.731316145559	-22.00161986714	-276.1710237141	14.270588886845	29.379517239135
.375	4.3542623160749	14.11044843412	-28.76362047816	-262.8052375534	14.980782613392	27.04774043261
.4	4.6990235867425	13.323814171355	-35.21835833999	-252.0679142959	15.632667828376	24.720838674715
.425	5.0224581139695	12.378377327655	-41.43592265015	-244 3755763964	16.226959606412	22.456946642966
.45	5.320651520164	11.279243699417	-47.49643976354	-240.1049894524	16.765936316789	20.325089222998
.475	5.5897954893724	10.029422830784	-53.48872444470	-239.5571044033	17.253743355782	18.40830326913
.5	5.8261332613631	8.629634384158	-59.50784249775	-242.9022639480	17.696783761701	16.807619771956
.525	6.0259010340449	7.0781915670737	-65.65104535175	-250 0996216662	18.104218149849	15.64699207808
.55	6.1852676776342	5.371009700568	-72.01133958571	-260.7816306814	18.488598163884	15.079215093988
.575	6.3002765766579	3.5018090079993	-78.66770022785	-274.0919560344	18.866657986071	15.292799652825
.6	6.3667954246135	1.4626087360055	-85.67061550082	-288.4622389354	19.260286187533	16.519626232088
.625	6.3804825951415	-.755353425059	-93.02125223976	-301 3098329828	19.697693595932	19.042977819773
.65	6.3367825443233	-3.160094952849	-100.6420473891	-308.6351064312	20.214779479586	23.205211196535
.675	6.2309678548882	-5.756512757239	-108.3359603535	-304.4935973166	20.856674897951	29.413830812639
.7	6.0582523619203	-8.542839945122	-115.7309784264	-280.3162260217	21.679404226678	38.144035230359
.725	5.8140086934478	-11.50552475695	-122.2058036931	-224 0520225521	22.751548139251	49.934863027421
75	5.494134926231	-14.61201336859	-126.7920871223	-119.1164738112	24.155706930656	65.374818541645
.775	5.0956292495374	-17.80079941174	-128.0483685172	56.84822029476	25.989443779518	85.071245918687
.8	4.6174486951945	-20.96798683284	-123.9015051337	333.34565660693	28.365223433605	109.59566384451
.825	4.0617477940817	-23.94952774555	-111.4536326635	748.38454230285	31.408640607438	139.3946565616
.85	3.4356141624616	-26.49829640232	-86.75782970741	1349.5283967814	35.253938206429	174.65254969319
.875	2.7534375262012	-28.25533287613	-44.57531329454	2194.1138353571	40.035426509497	215.08767369213
.9	2.0400609031704	-28.71506880816	21.85689565818	3347.8122624941	45.872899425174	259.6580611654
.925	1.3348580958689	-27.18531337706	120.9945382481	4880.3457655944	52.848457685562	306.1442535651
.95	.6968458651474	-22.74444984127	263.00386243825	6856.7796631146	60.971225672006	350 56547036722
.975	.21085202195862	-14.20090944638	459.49816410537	9322.4394764166	70.12518811795	386.36871749843
1	- [illegible]40397[illegible]471	- 063783754578	[illegible] 81045188812	12279.16[illegible]594	79 993596997856	[illegible] 30339474311

NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES:I= 39

Tableau IV-17

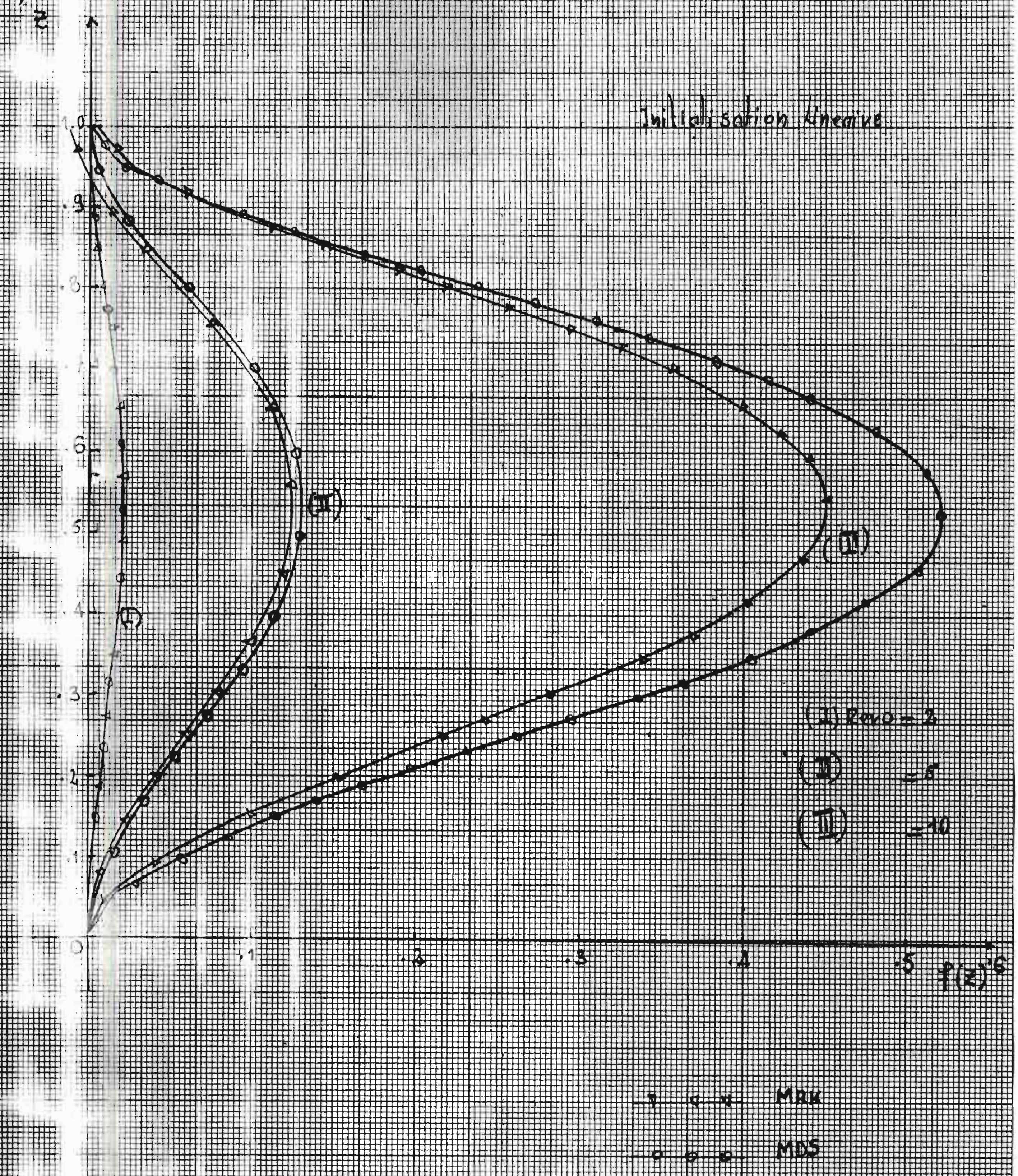


Figure 2 : Comparaison des résultats numériques avec ceux de la méthode de développement en série

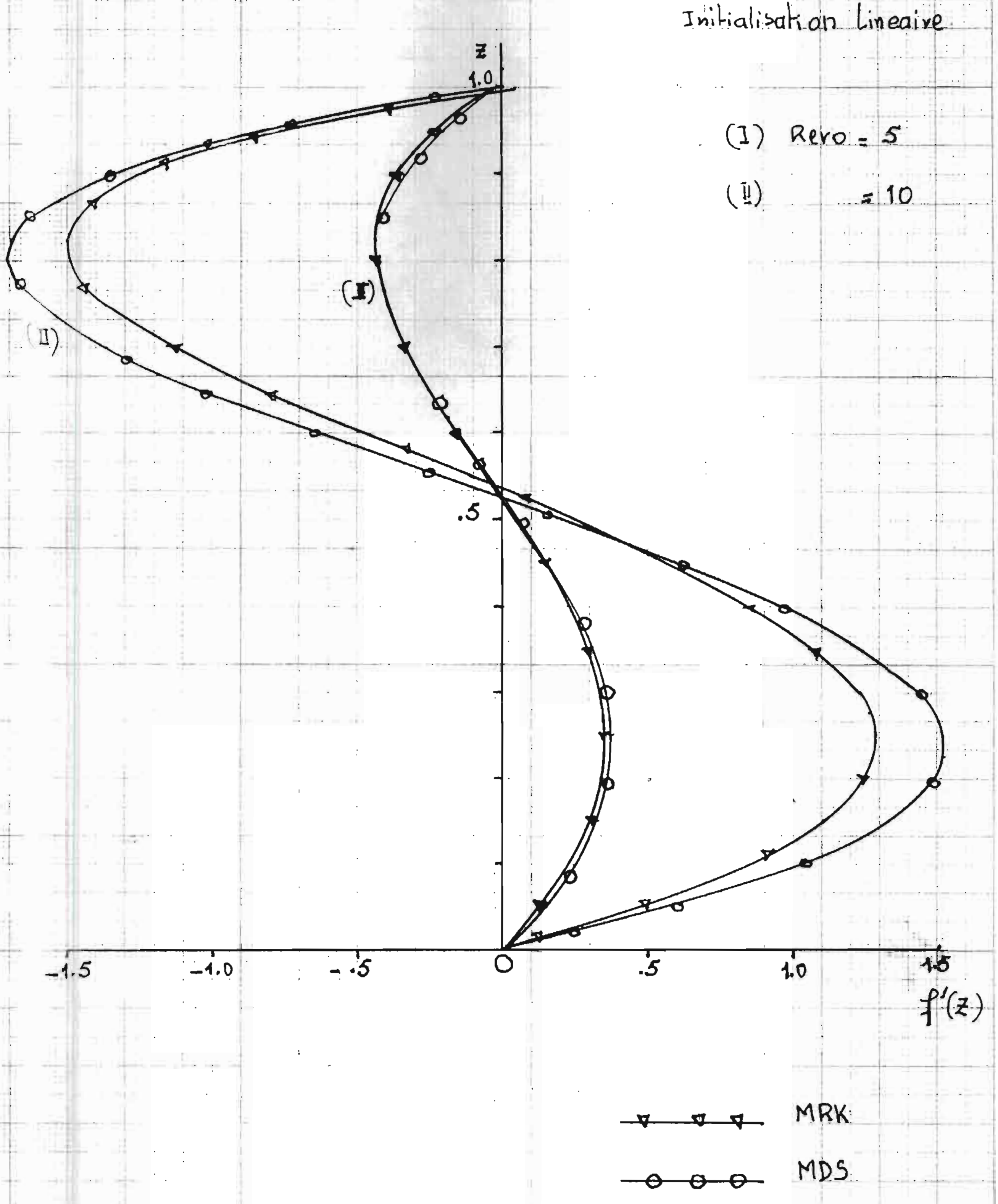


Figure 3 : Comparaison des resultats numeriques avec ceux de la methode de developpement en serie

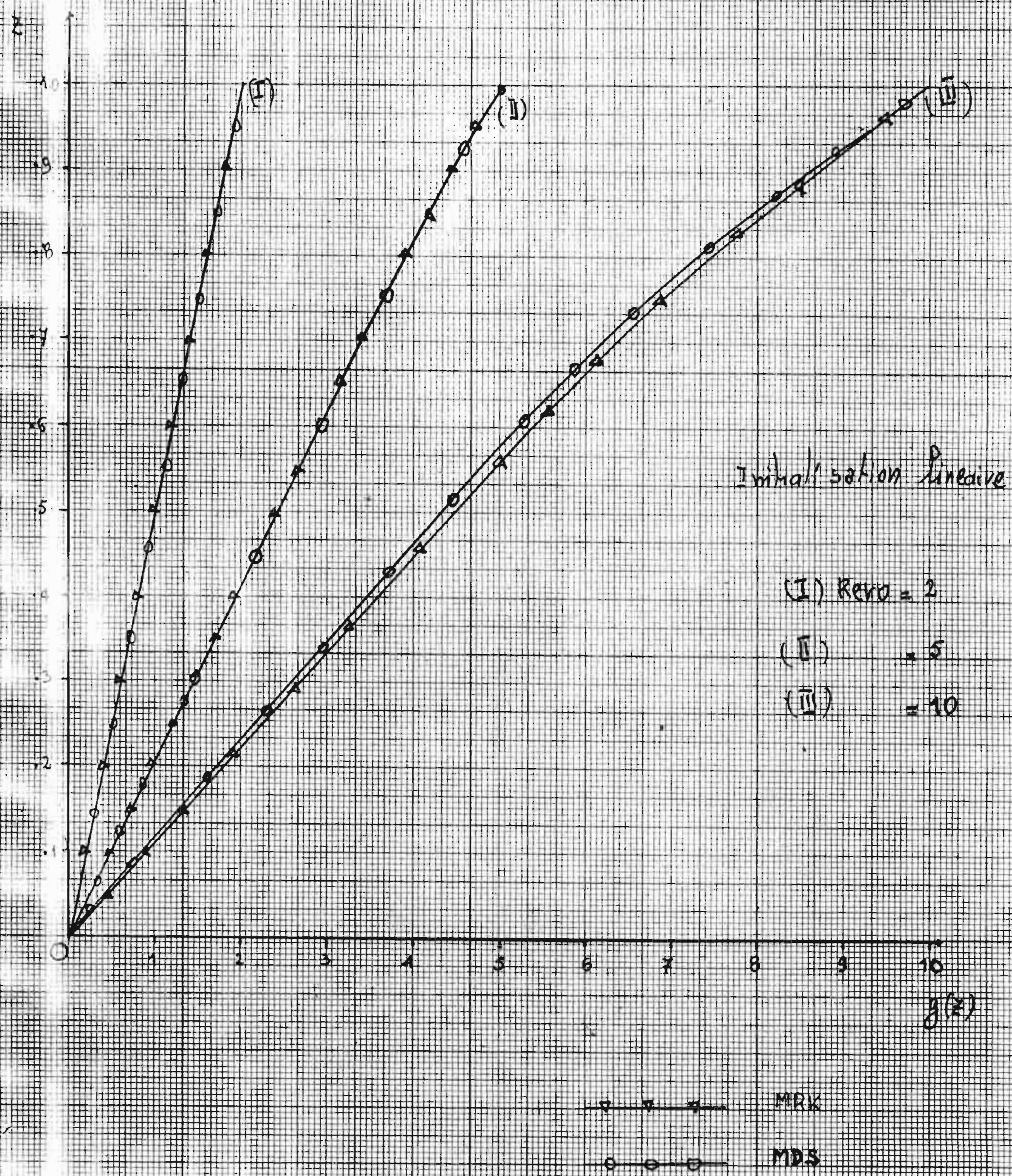


Figure 4 : Comparaison des résultats numériques avec ceux de la méthode de développement en série

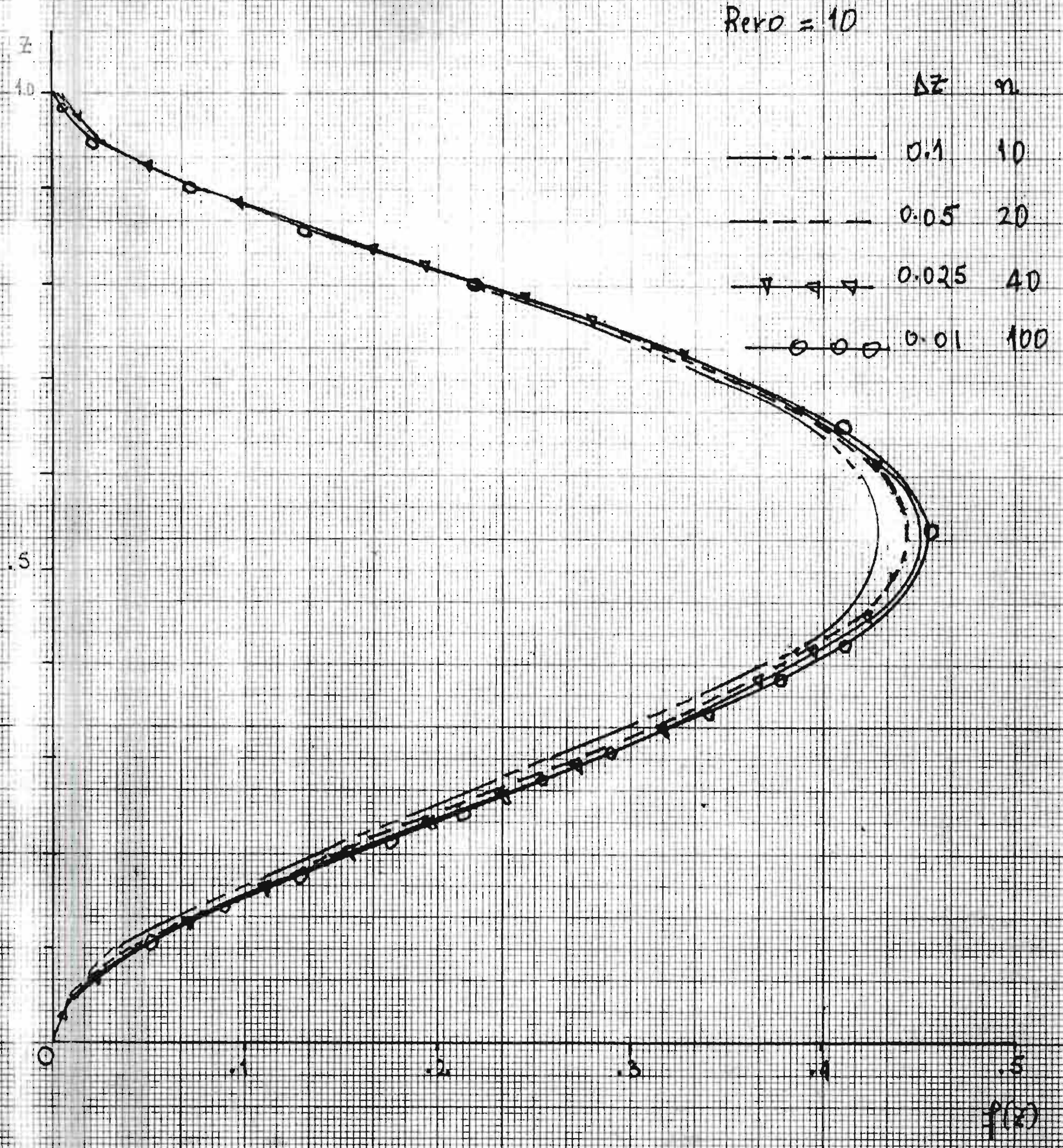


Figure 5 : Influence du pas Δz sur la fonction f(z) (MRK)

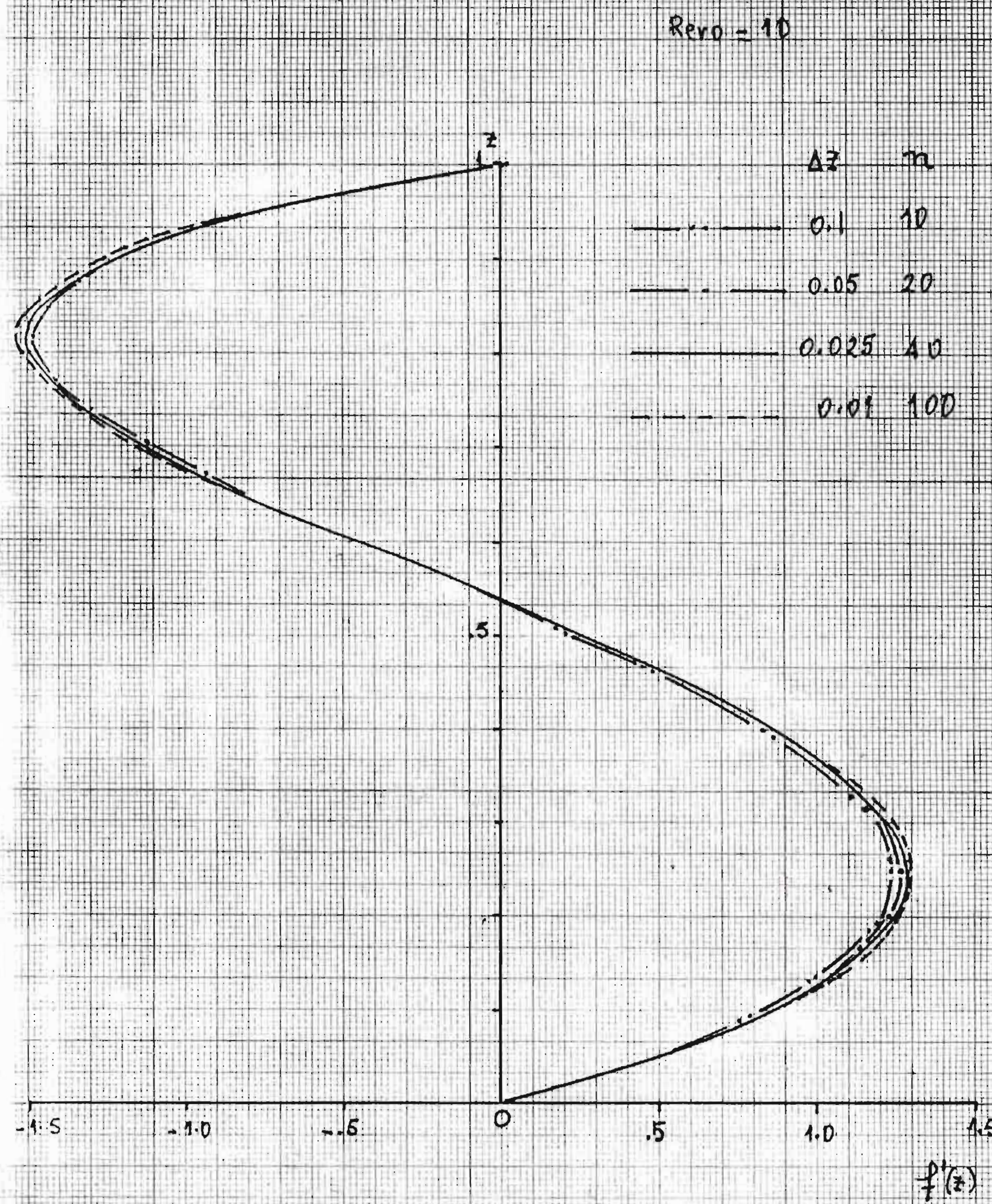


Figure 6 : Influence du pas ΔZ sur la fonction f'(z) (MRK)

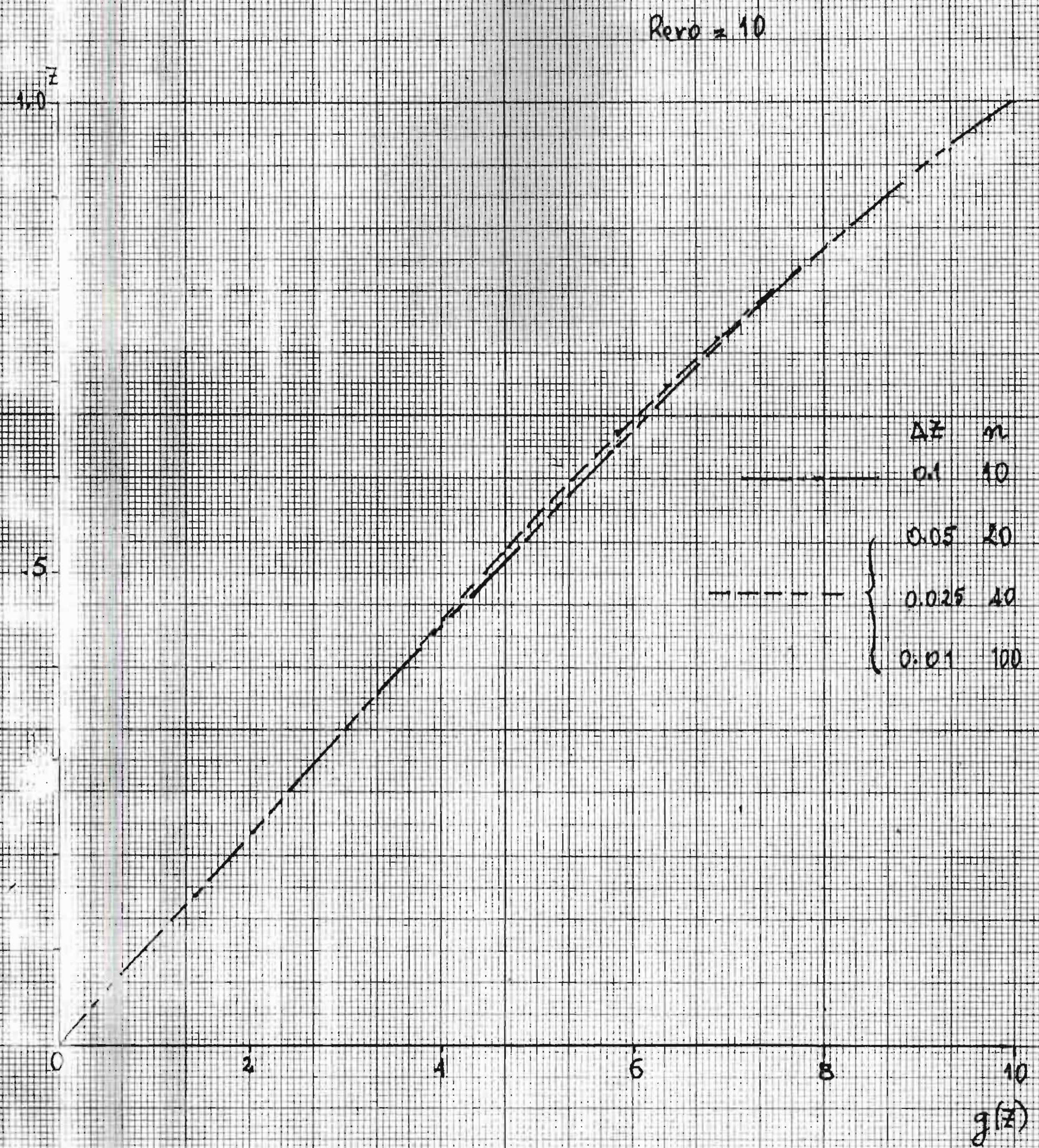


Figure 7 : Influence du pas Δz sur la fonction g(z) (MRK)

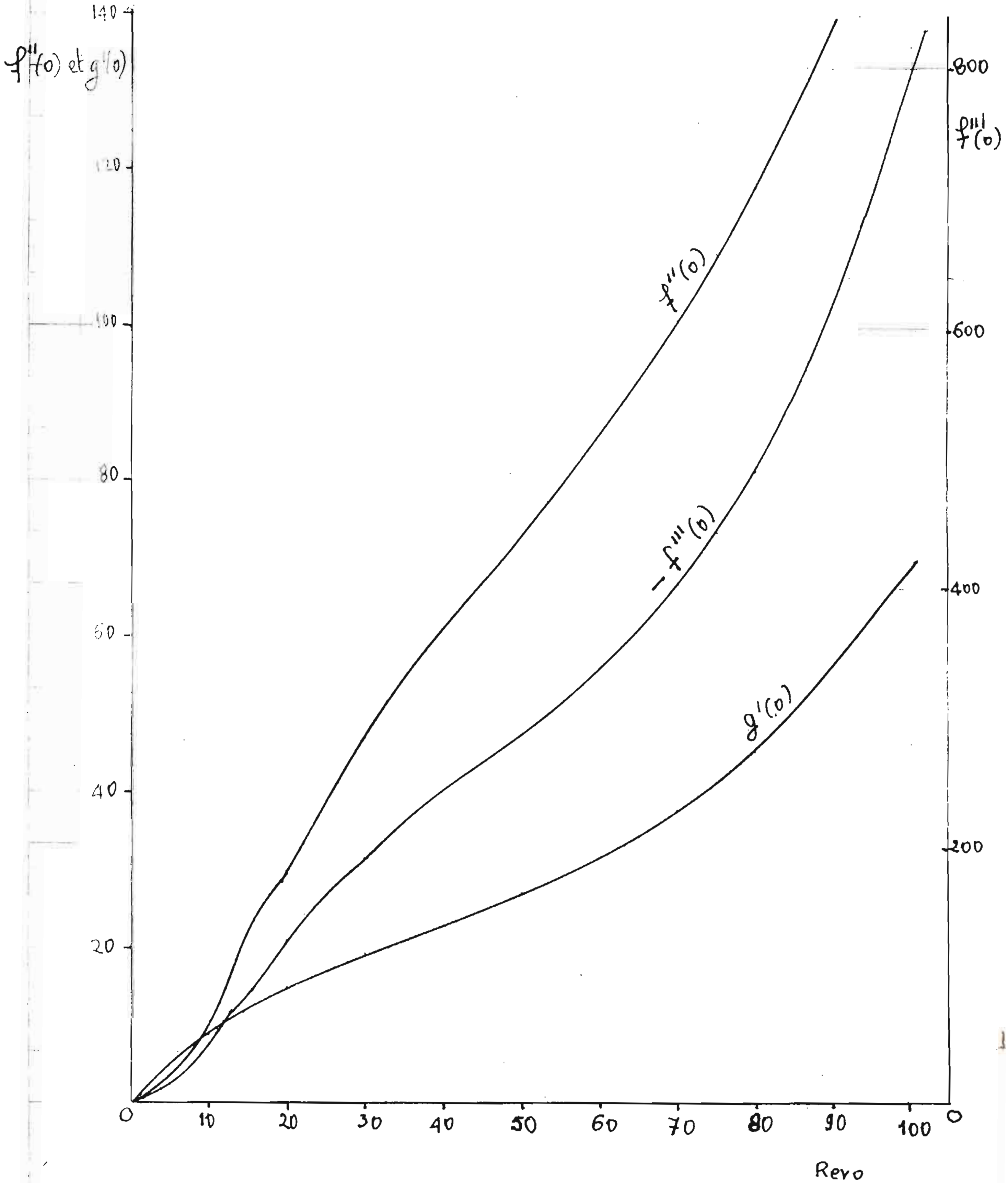


Figure 8 : Evolution de $f''(0)$, $g'(0)$ et $f'''(0)$ en fonction de Reynolds (MRK)

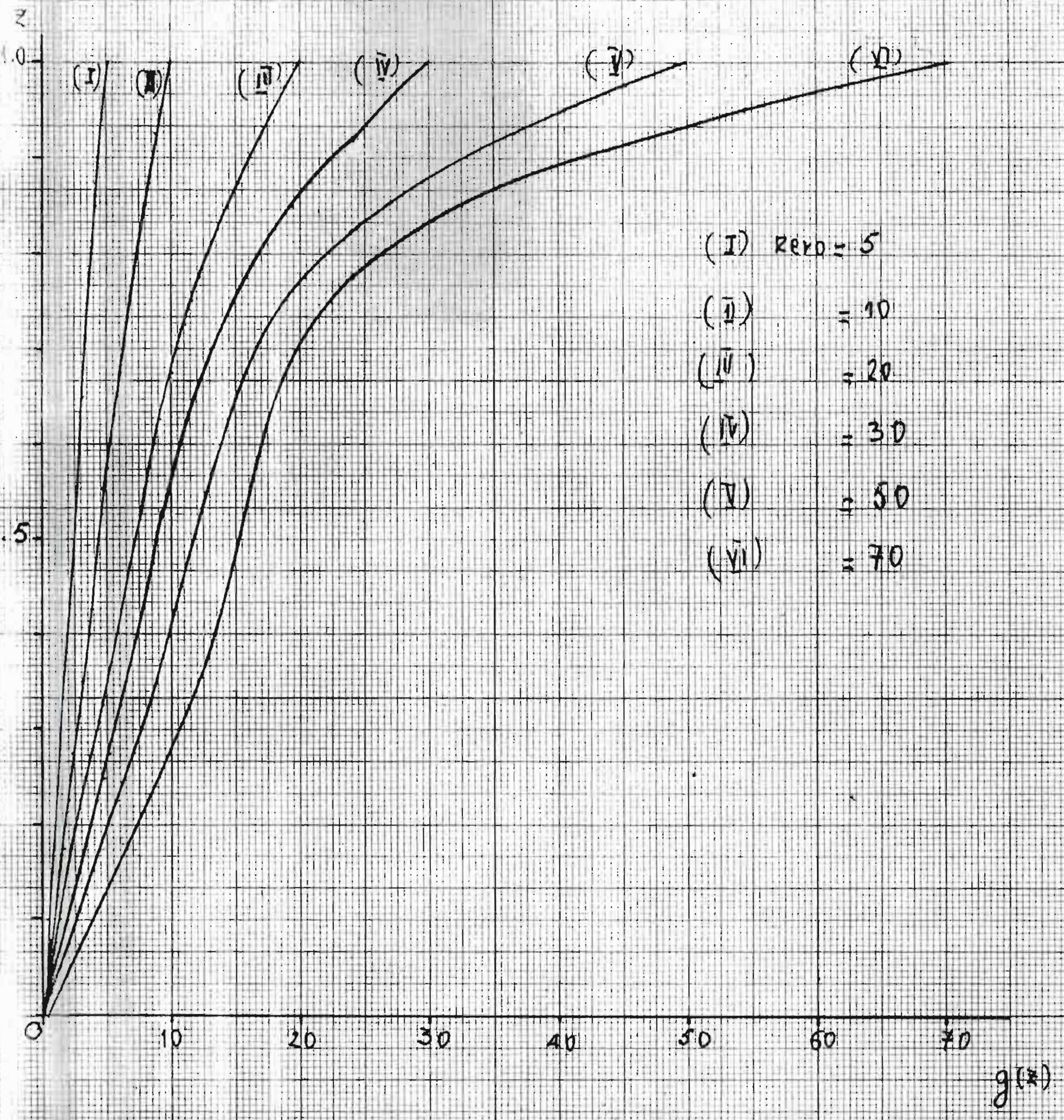


Figure 9 : Repartition de g(z) en fonction des Reynolds.

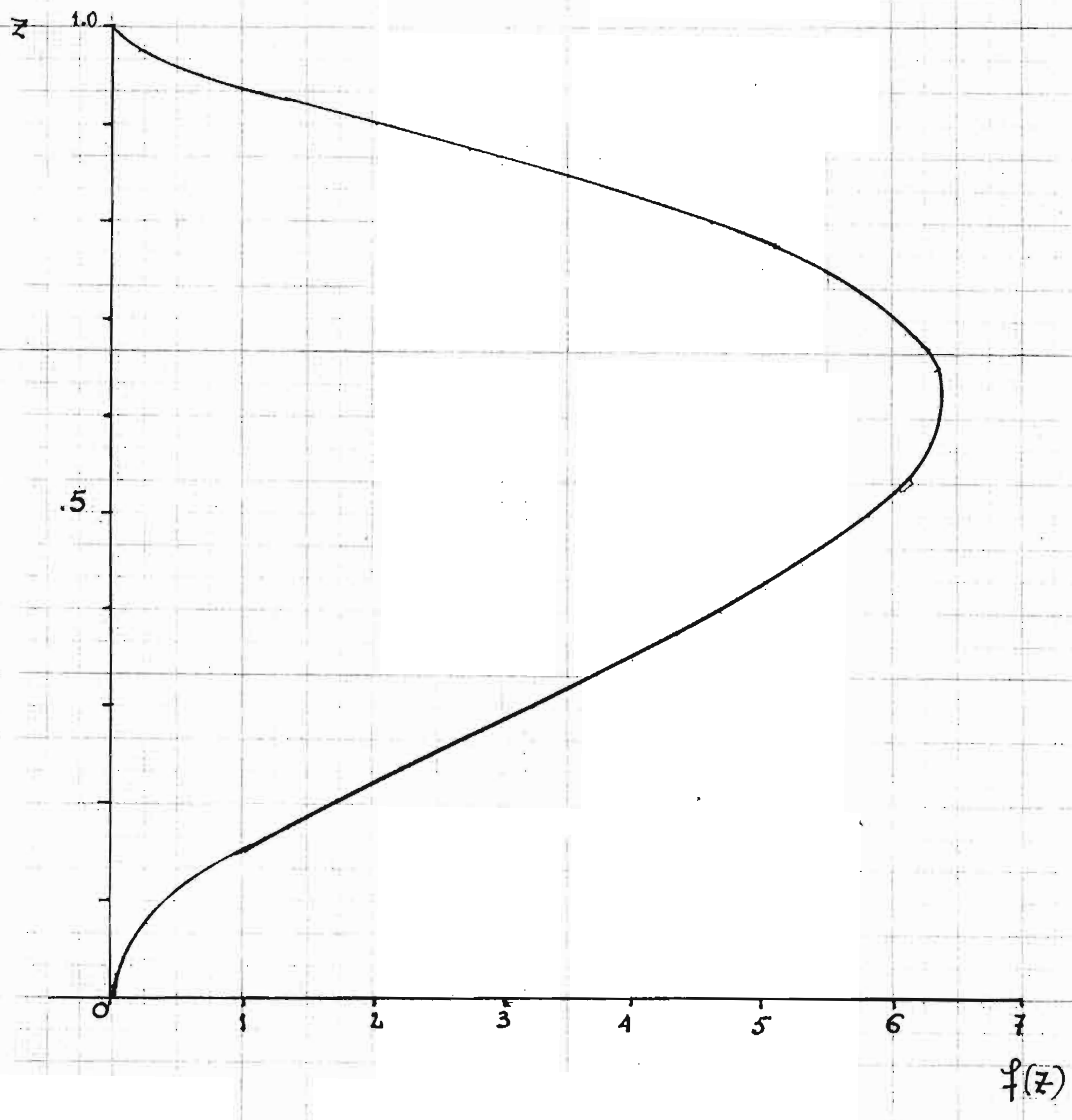


Figure 10 : Repartition de f(z) pour le Reynolds 80(MRK)

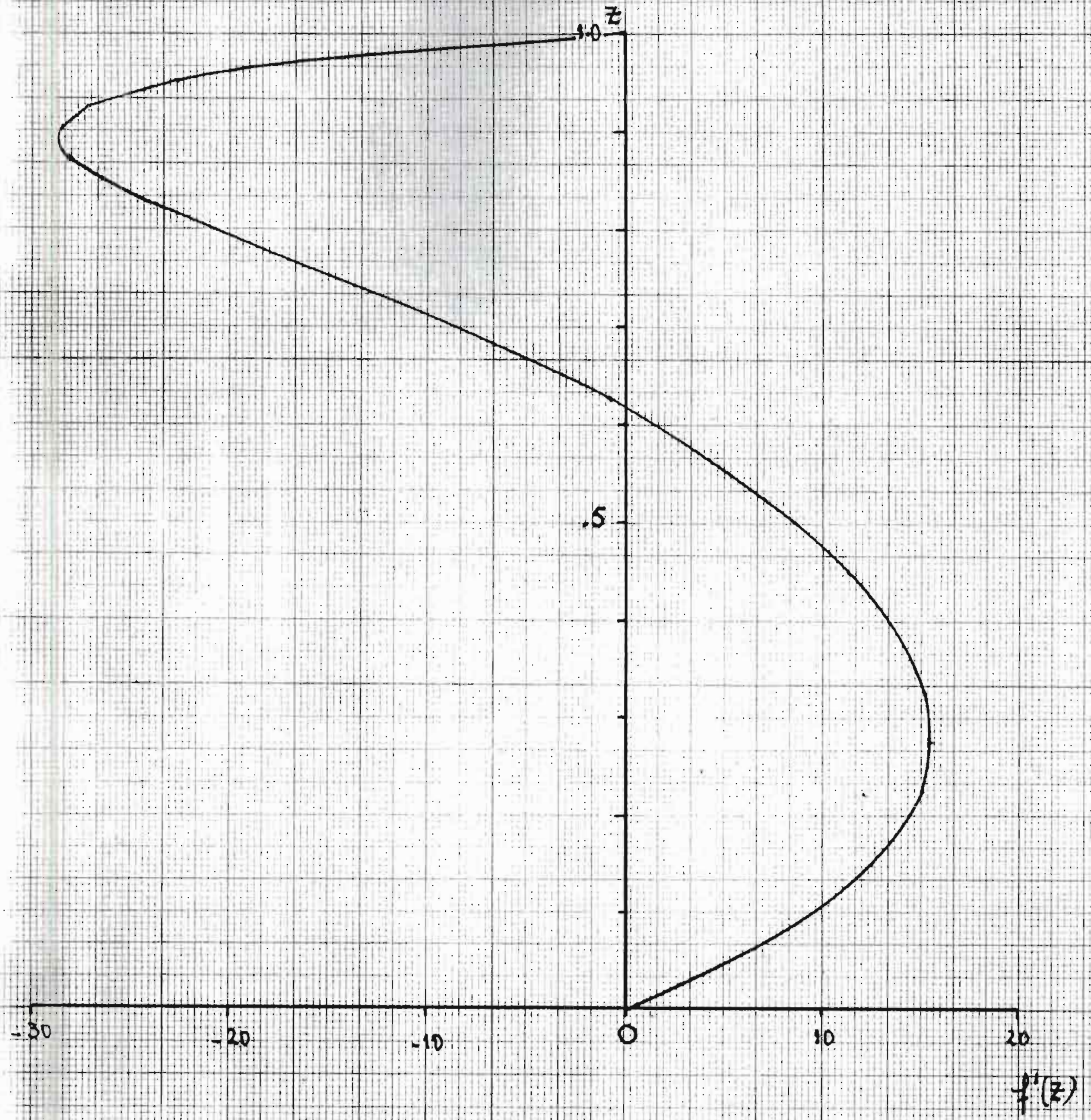


Figure 11 : Repartition de f'(z) pour le Reynolds 80 (MRK)

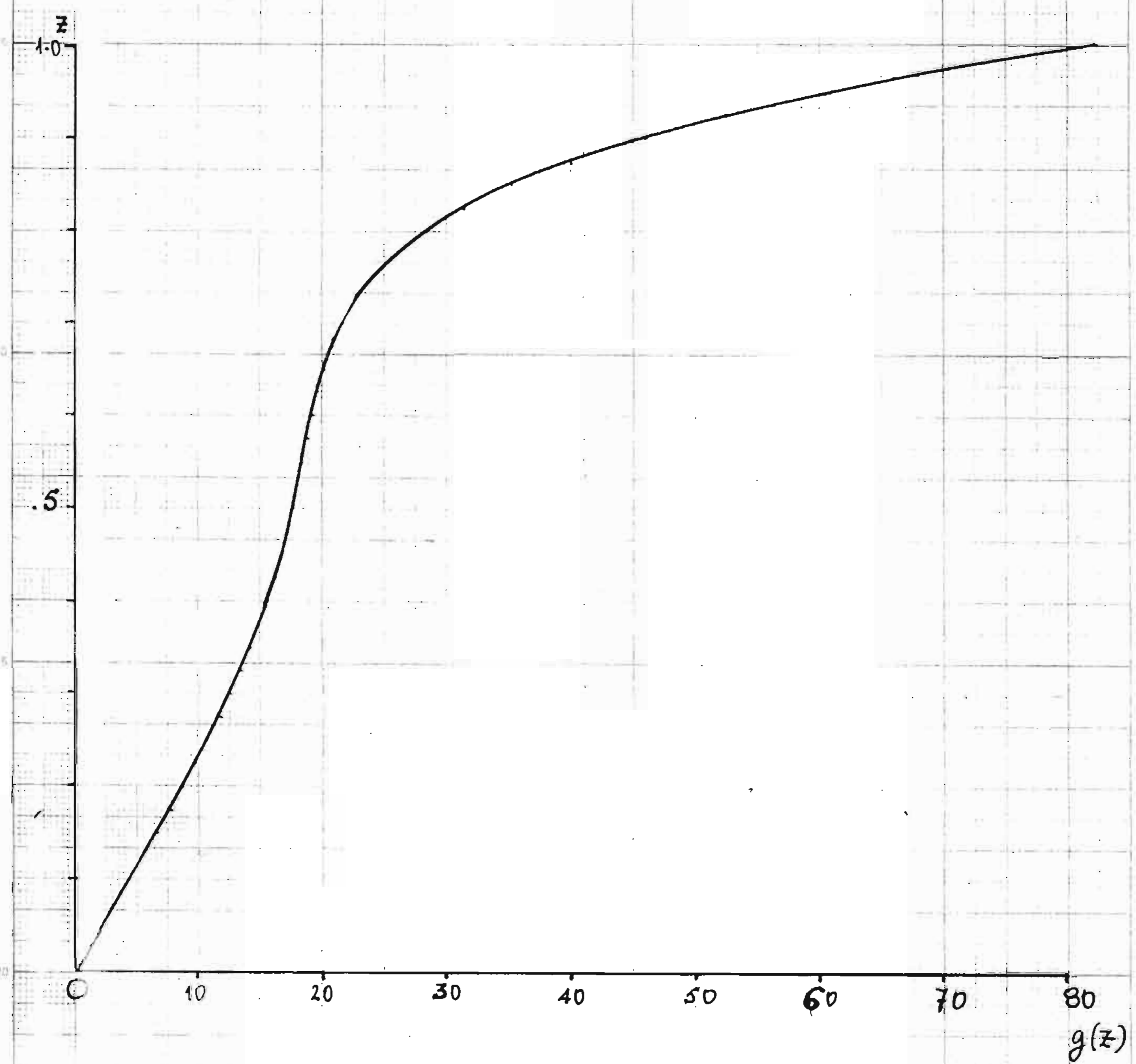


Figure 12 : Repartition de g(z) pour le Reynolds 80 (MRK)

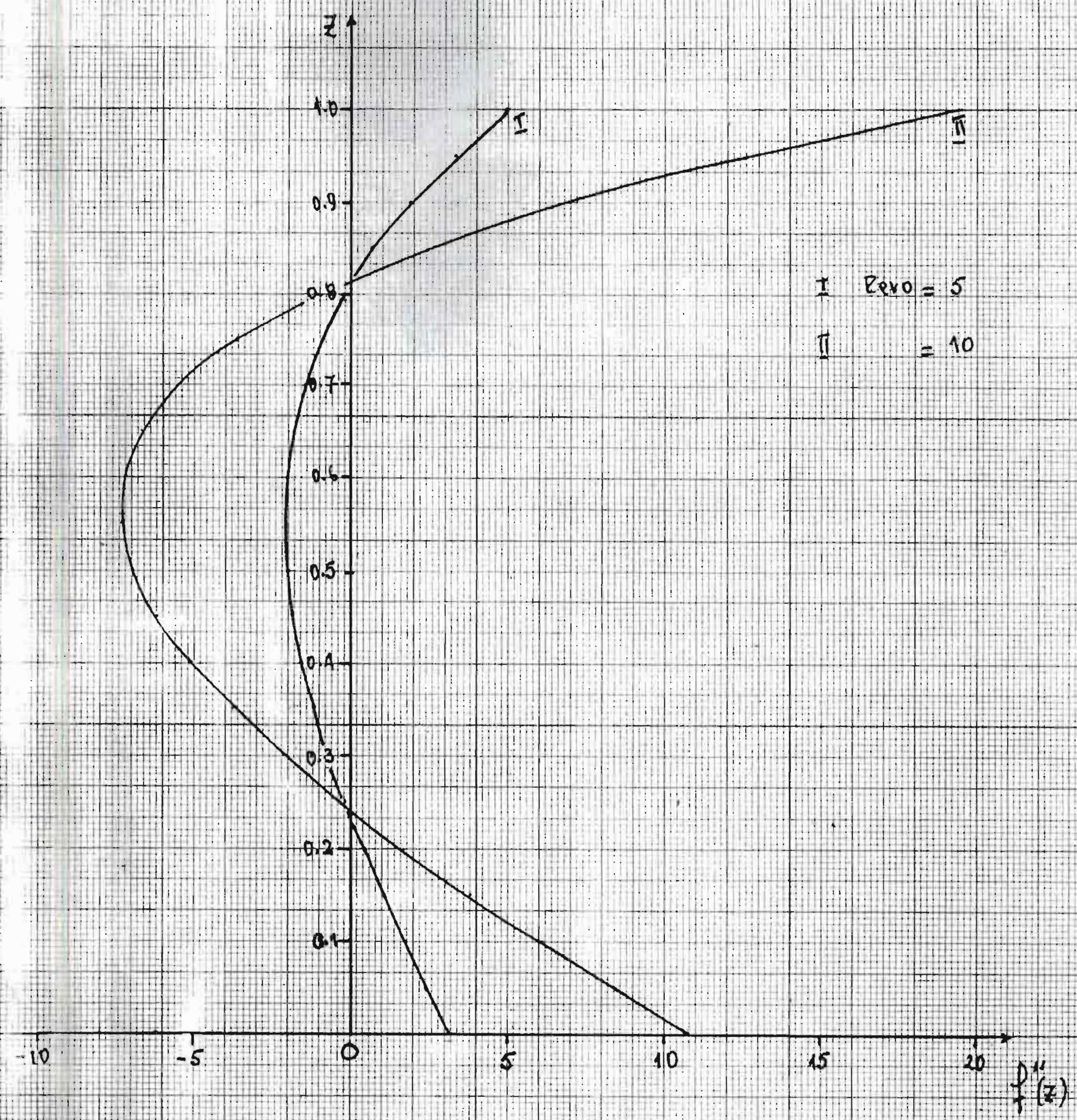


Figure 13 : Repartition de f''(Z) en fonction des Reynolds

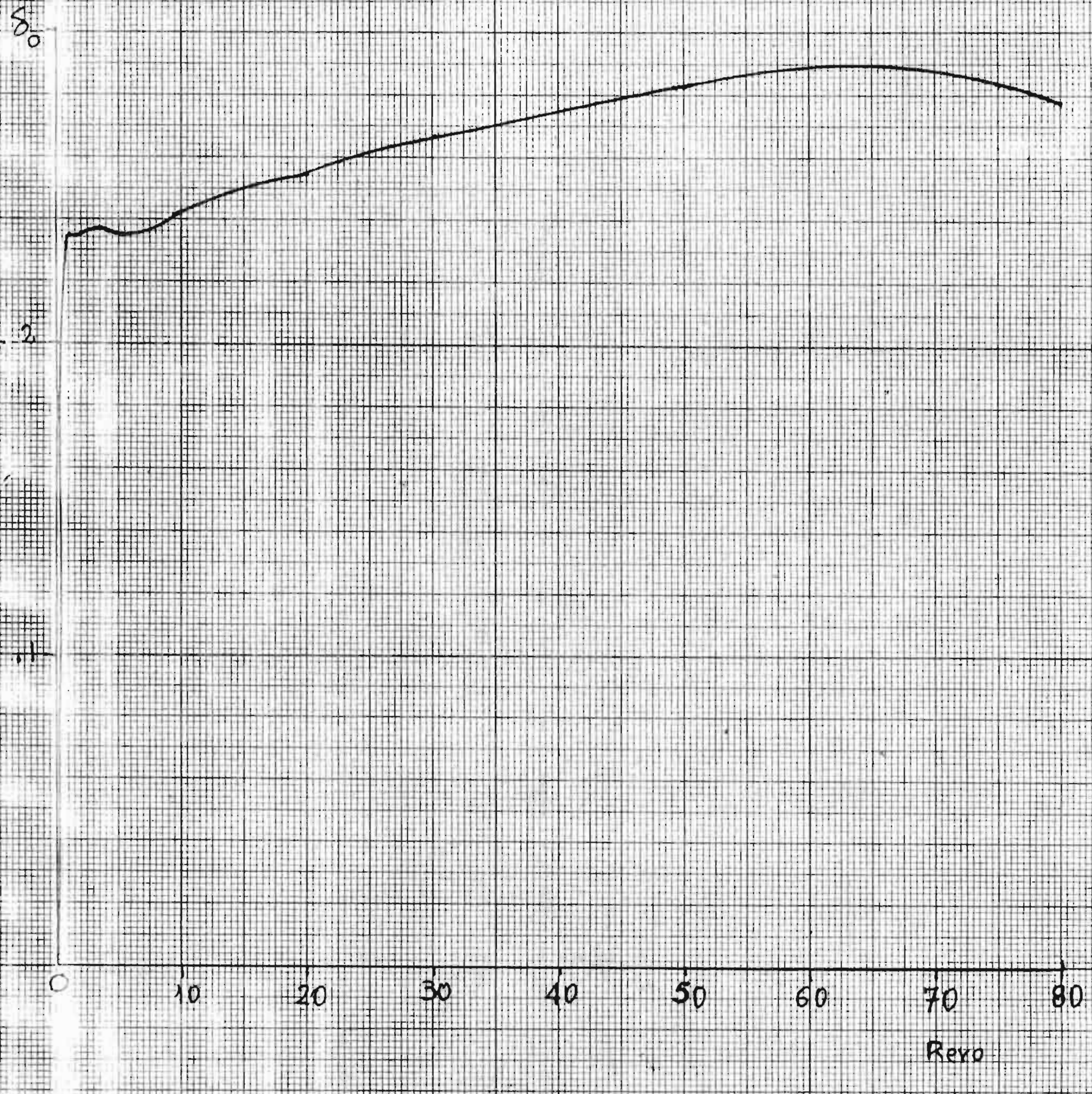


Figure 14 : Evolution de l'epaisseur de la couche limite au voisinage du disque fixe en fonction des Reynolds

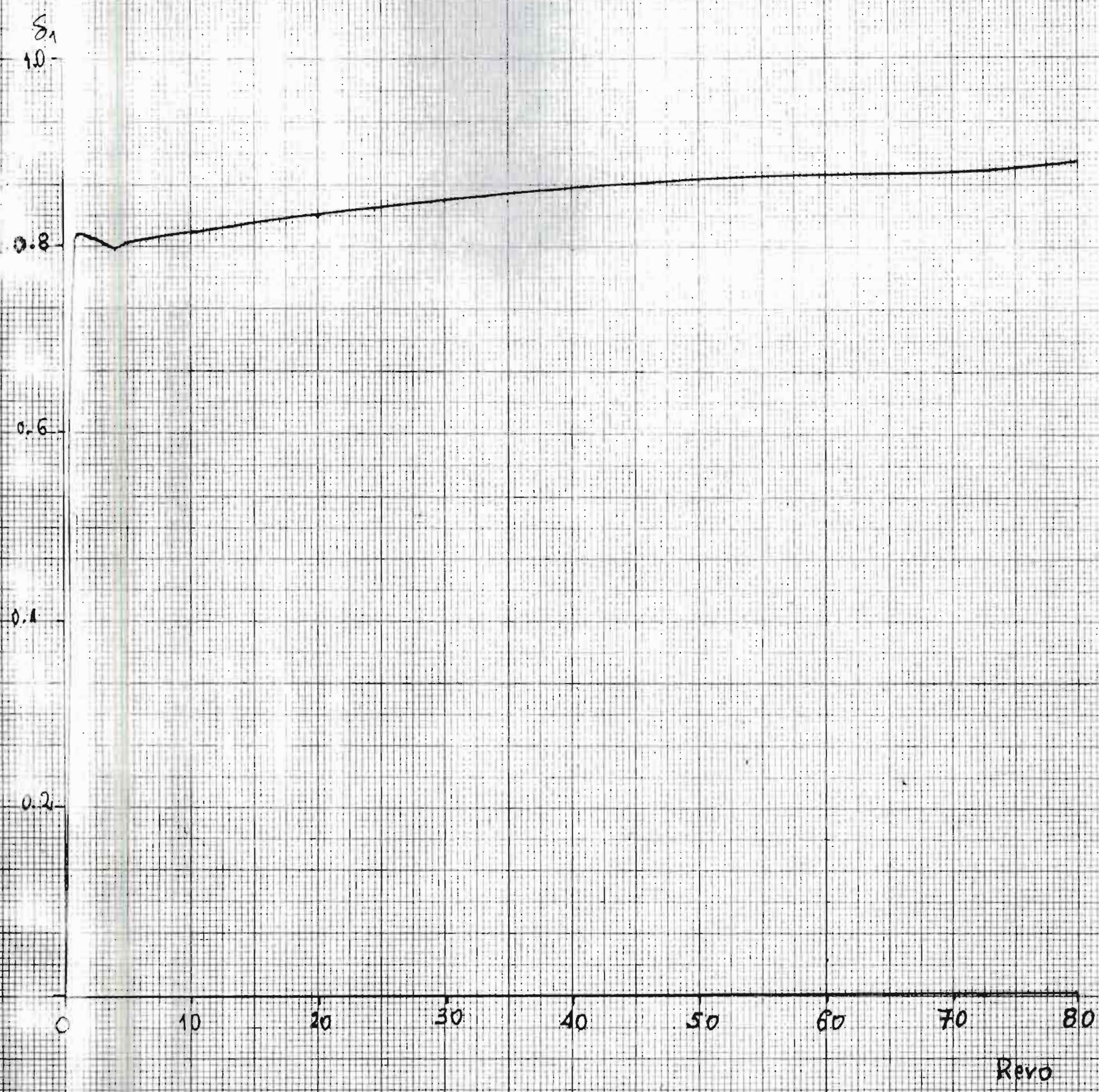


Figure 15 : Evolution de l'épaisseur de la couche limite au voisinage du disque tournant en fonction des Reynolds

IV - 2 DISCUSSION

Elle portera essentiellement sur :

- la valadité des solutions
- les composantes de la vitesse
- l'influence du pas ΔZ sur les fonctions
- l'influence du critère d'arrêt ε
- l'influence de la précision de la machine
- l'évolution de l'épaisseur de la couche limite

1°/ La méthode de Runge-Kutta présente avec la méthode des "tirs" afin d'améliorer la recherche des conditions manquantes à $Z=0$, a permis d'atteindre des Reynolds de l'ordre de 80.

On note également ~~pour~~ les Reynolds inférieurs à 80, la sensibilité de la méthode aux conditions manquantes. Ces conditions, soient $f''(0)$, $f'''(0)$, $g'(0)$ doivent être prises de plus en plus proche de la solution plus le Reynolds augmente (Cf Tableaux IV-18, IV-19)

Pour de faibles variations des conditions manquantes le calcul peut soit diverger, soit conduire à des solutions qui diffèrent sur la 4e décimale.

La vitesse de convergence est grande, pour les faibles Reynolds, lorsque les conditions manquantes sont proches de la solution.

Nous avons utilisé aux pages précédentes, la même initialisation (cf. Tableaux IV-2 à IV-17) pour les Reynolds 0.1 à 13 et les calculs n'ont diverger qu'au delà du Reynolds 13.

Pour les Reynolds dépassant 80, les calculs divergent rapidement (au bout de quelques itérations) quelque soit l'initialisation (cf Tableaux IV-18,19)

Etude à Rero =	f''(0), f'''(0) et g'(0) sont données en se basant sur les résultats à Rero =	Caractéristiques du calcul par la MRK avec Tirs **
20	10	Converge
30	10	Diverge
30	20	converge
50	10, 20	Diverge
50	30	Converge
70	10, 20, 30	Diverge
70	50	Converge
75	70	Converge
80	10, 20, 30, 50, 70	Diverge
80	75	Converge
85, 90, 95	80	Diverge
100	10, 20, 30, 50, 70, 75, 80	Diverge
100	Valeur fournie par le lissage des courbes de la fig.	diverge

Tableau IV-18

** Lorsque les calculs divergent, l'ordinateur affiche un message comme "ERREUR" puisque les résultats des produits (multiplication ou division) dépassent $10^{\pm 28}$ (over ou underflow)

En effet, pour les Reynolds 85 à 100, nous avons extrapolé pour trouver les valeurs respectives de $f''(0)$, $f'''(0)$ et $g'(0)$ à ces Reynolds par le lissage des courbes de la figure 8) par la méthode des moindres carrés *** (cf Tableau IV-19)

Rero	$f''(0)$	$f'''(0)$	$g'(0)$
50	74.37	-286	27.29
70	101.1	-402	37.99
75	109.1	-442.4	41.56
80	118.2	-490.9	45.66
85	128.6	-549.3	50.37
90	140.6	-619.1	55.80
95	154.5	-702.2	62.02
100	170.5	-800.2	69.13

Tableau IV - 19

*** Nous avons remplacé les courbes $f''(0)$, $f'''(0)$, $g'(0)$ en fonction de Rero de la figure 8 (et ce, pour Rero ≥ 50) par des fonctions polynomiales de degré 3 (qui est le meilleur ajustement) dont les équations sont respectivement :

$$y = -45.62338 + 4.375012\,x - 5.686306\times10^{-2}x^2 + 3.472678\times10^{-4}x^3 \quad (\Sigma \text{ erreurs au carré} = 4.184\times10^{-8})$$

$$y = 2.827333\times10^{2} - 2.342716\times10^{1}x + 3.558344\times10^{-1}x^2 - 2.298615\times10^{-3}x^3 \quad (\Sigma \text{ erreurs au carré} = 4.220\times10^{-8})$$

$$y = -5.339040 + 1.147492\,x - 1.57621\times10^{-2}x^2 + 1.173431\times10^{-4}x^3 \quad (\Sigma \text{ erreurs au carré} = 1.019\times10^{-8})$$

2°/

a/ On peut distinguer deux gammes de Reynolds :

- de 0 à 20 : caractérisée par une vitesse tangentielle quasiment linéaire.

- de 20 à 80 : caractérisée par un champ d'écoulement où la vitesse tangentielle qui présente une partie se rapprochant d'un palier positif au centre des deux disques. Le fluide a tendance à tourner en bloc dans cette zone comprise entre les couches limites**** qui se développent au voisinage des disques.

b/ . Au voisinage du disque fixe, $f'(z)$ est positive. Ainsi, la composante radiale u de la vitesse $\left(u = -\frac{r}{2} f'(z)\right)$ est négative, ce qui veut dire que l'écoulement est dirigé vers l'intérieur. Elle s'annule (la composante radiale u) au voisinage du centre des disques : pas d'entrainement du fluide dans la direction radiale.

Au voisinage du disque tournant, $f'(z)$ étant négative, l'écoulement est vers l'extérieur.

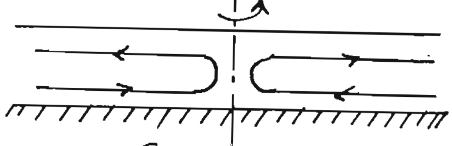


Fig 16

Direction de l'écoulement radial dans un plan

*** On définit l'épaisseur de la couche au voisinage du disque fixe et du disque tournant par la distance à la paroi où $f''(z)=0$

. f (en relation avec la composante axiale w de la vitesse) est positive : le fluide est aspiré vers le haut

. Au voisinage du disque tournant, $g(z)$ tend vers zero : la composante tangentielle tend vers $r\Omega$. Ce qui est à priori physiquement acceptable.

3°/

Nous avons pris pour nos calculs, $\Delta z = 0.025$.

Les résultats finaux diffèrent très peu pour différents pas Δz, autant qu'ils soient inférieurs à 0.025 et ce, surtout pour les petits Reynolds.

Pour les grands Reynolds, si l'on prend $\Delta z = 0.1$, le temps de calcul se réduit considérablement mais les erreurs de troncature deviennent importantes et les résultats diffèrent considérablement si l'on passe de $\Delta z = 0.025$ à $\Delta z = 0.1$.

4°/ Dans nos calculs, nous avons fixé les critères d'arrêt pour f et f' d'une part, et g d'autre part respectivement $\varepsilon_1 = 0.1$ et $\varepsilon_2 = 0.02$.

Le choix de ε_2 n'entre pas en ligne de compte sur les résultats finaux car l'erreur commise sur $g(1)$ est toujours inférieure à celle commise sur $f(1)$ et $f'(1)$ quel que soit le Reynolds considéré.

Le passage de $\varepsilon_1 = 0.1$ à $\varepsilon_1 = 0.01$ se produit sur une seule itération et les resultats ne different qu'à partir de la 4e décimale.

5°/ Lorsque la précision passe de 14 chiffres significatifs à 4 chiffres significatifs, le nombre d'itérations varie peu et les résultats diffèrent à partir de la 3e décimale. Ces différences résultent des erreurs de troncature importantes pour la précision 4.

D'ailleurs, les calculs divergent pour une précision de 2 chiffres significatifs.

6°/

L'évolution de la couche limite au voisinage du disque tournant est peu influencée par le Reynolds. Elle augmente faiblement lorsque Rero augmente (cf. fig 15)

Au voisinage du disque fixe, elle diminue quand Rero augmente et pour ceux tendant vers 80.

7°/

Lorsque Rero augmente, les moments des forces qui s'excercent sur les disques, lesquels sont proportionels à $g'(0)$ et $g'(1)$, augmente aussi.

CONCLUSION

CONCLUSION

La méthode analytique, présentée, bien que fournissant une solution mathématiquement exacte ne donne des résultats convenables que pour des Reynolds faibles.

Il faut donc noter les limites d'application de la solution sous forme d'un développement en serie, en raison du nombre limité de termes calculables.

Par contre, la méthode numérique de Runge Kutta, avec "Tirs", permet de trouver une solution numérique au problème pour des Reynolds de l'ordre de 80 au moyen d'un seul algorithme en changeant soit l'initialisation, soit le pas de calcul.

On pourrait aussi envisager un soufflage ou une aspiration uniforme à travers le disque fixe et poreux; et une vitesse angulaire $\Omega(t)$ quelconque, dependante du temps, pour le disque tournant.

Une étude par la méthode des éléments finis et une étude expérimentale pourraient être interessante et serviraient à mieux valider les résultats.

Cette étude nous aura permis de nous familiariser avec les techniques de traitements de systemes d'équations differentielles non linéaires, que l'on rencontre toujours dans les études de l'écoulement d'un fluide régi par les équations de Navier-Stokes.

ANNEXE

ANNEXE

A .Réduction des équations de base

B1- Formulation de Runge Kutta

B2 - ORGANIGRAMME SOMMAIRE DU PROGRAMME RUNGE

B3- ORGANIGRAMME DU SOUSPROGRAMME KUTTA

B4 - ORGANIGRAMME DU SOUS PROGRAMME GAUSS

B5 - ORGANIGRAMME DU SOUS PROGRAMME RUNGE KUTTA 4e ORDRE

C - ORGANIGRAMME DU PROGRAMME : METHODE ITERATIVE DE NEWTON

D - LISTING DU PROGRAMME : METHODE DE RUNGE KUTTA AVEC "TIRS"

E : LISTING DU PROGRAMME : METHODE DES DIFFERENCES FINIES :

ANNEXE_A

Réduction des équations de base

Nous rappelons l'hypothèse de Von Kármán sur la composante axiale de la vitesse : w, soit $w = f(z)$.

De l'équation de continuité (I-6), nous tirons :

$$r\frac{\partial u}{\partial r} + u = -r\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial r}{\partial z} \quad (A-1)$$

Or $\frac{\partial r}{\partial z} = 0$ (le rayon r est indépendant de la distance axiale z)

Par suite, (A-1) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (A-2)$$

soit $$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = -f'(z) \quad (A-3)$$

(A-3) est une équation différentielle par rapport à r, linéaire, du 1er ordre et du 1er degré, de la forme :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q$$

où P est une fonction de la variable x et Q une fonction quelconque (dans notre indépendante de la variable x)

On a :

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int P(x)dx}\right) = \frac{dy}{dx} e^{\int P(x)dx} + y P(x) e^{\int P(x)dx}$$

Soit :

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int P(x)dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx} + yP(x)\right) e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int P(x)dx}\right) = Q e^{\int P(x)dx}$$

d'où : $$y e^{\int P(x)dx} = \int \left(Q e^{\int P(x)dx}\right) dx + \text{Constante}$$

De la même manière (A-3) est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + P(r)\,u = Q$$

avec $P(r) = \frac{1}{r}$ et $Q = -f'(z)$ (Q est indépendante de r).

Par conséquent :

$$u e^{\int \frac{dr}{r}} = \int \left(-f'(z) e^{\int \frac{dr}{r}}\right) dr$$ à une constante près.

$$u e^{\log r} = -f'(z) \int e^{\log r}\, dr$$

$$ur = -\frac{r^2}{2} f'(z)$$

et finalement : $u = -\frac{r}{2} f'(z)$ (A-4)

Supposons que v est de la forme $v = r g(z)$

en tenant compte du fait que :

à $z = 1$ $\quad v = r a^2 \frac{\Omega}{\nu}$

$z = 0$ $\quad v = 0$

v est nécessairement de la forme $r g(z)$

Portons $u = -\frac{r}{2} f'(z)$, $v = r g(z)$ et $w = f(z)$ dans le système (I-5) après élimination de la pression p entre les équations (I-5-1) et (I-5-3)

- élimination de p entre (I-5-1) et (I-5-3)

Dérivons l'équation (I-5-1) par rapport à z et l'équation (I-5-3) par rapport à r. Il vient:

$$\cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{r}\right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)\right] + \frac{\partial^3 u}{\partial z^2} \qquad (A-6)$$

et

$$\cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(u\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial z^2} \qquad (A-7)$$

Soustrayons (A-6) de (A-7), nous obtenons:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(u\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)\right] + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{\partial^3 w^3}{\partial r \partial z^2} \qquad (A-8)$$

- Substitution de u, v, w dans (A-8)

$$\cdot \; u\frac{\partial u}{\partial r} = \left(-\frac{r}{2} f'_z\right)\left(-\frac{1}{2} f'_z\right) = \frac{r}{4}\left(f'_z\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{4}\left(f'_z\right)^2\right) = \frac{r}{2} f'_z f''_{z^2} \qquad (A-9-1)$$

$$\cdot \; w\frac{\partial u}{\partial z} = f\left(-\frac{r}{2} f''_{z^2}\right) = -\frac{r}{2} f f''_{z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{r}{2}\left(f'_z f''_{z^2} + f f'''_{z^2}\right) \qquad (A-9-2)$$

- $\dfrac{v^2}{r} = rg^2$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{r}\right) = 2rgg'_z \qquad (A-9-3)$$

- $u\dfrac{\partial w}{\partial r} = 0 \qquad (A-9-4)$

- $w\dfrac{\partial w}{\partial z} = ff'_z \qquad (A-9)$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \qquad (A-9-5)$$

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left(-\dfrac{r}{2}f'_z\right) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(f'_z\right) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}f'_z\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)\right] = 0 \qquad (A-9-6)$$

- $\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \dfrac{\partial^3}{\partial z^3}\left(-\dfrac{r}{2}f'_z\right) = -\dfrac{r}{2}f^{IV}_{z^4} \qquad (A-9-7)$

- $\dfrac{\partial^3 w}{\partial r^3} = 0 \qquad (A-9-8)$

- $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\right) = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\times 0\right) \qquad (A-9-9)$

- $\dfrac{\partial^3 w}{\partial r\partial z^2} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0 \qquad (A-9-10)$

Avec les équations (A-8) et (A-9), il vient :

$$\frac{r}{2}f'_z f''_{z^2} - \frac{r}{2}\left[f'_z f''_{z^2} + ff'''_{z^2}\right] - 2rgg'_z = -\frac{r}{2}f^{IV}_{z^4},$$

$$-\frac{r}{2}ff'''_{z^3} - 2rgg'_z + \frac{r}{2}f^{IV}_{z^4} = 0$$

Finalement. $f^{IV}_{z^4} - ff'''_{z^3} - 4gg'_z = 0 \qquad (A-10)$

Substituons $u = -\frac{r}{2} f'_z$, $v = rg$ et $w = f$ dans (I-5-2)

$$\cdot \; \frac{u \partial v}{\partial r} = -\frac{r}{2} f'_z g \qquad (A-11-1)$$

$$\cdot \; w \frac{\partial v}{\partial z} = r f g'_z \qquad (A-11-2)$$

$$\cdot \; \frac{uv}{r} = \frac{\left(-\frac{r}{2} f'_z\right)(rg)}{r} = -\frac{r}{2} f'_z g \qquad (A-11-3)$$

$$\cdot \; \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rg) = \frac{\partial g}{\partial r} = 0 \qquad (A-11-4)$$

$$\cdot \; \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{\partial g}{\partial r} = 0 \qquad (A-11-5)$$

$$\cdot \; \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = r g''_{z^2} \qquad (A-11-6)$$

(A-11)

Les équations (A-11) et (I-5-2) donnent :

$$-\frac{r}{2} f'_z g + r f g'_z - \frac{r}{2} f'_z g = r g''_{z^2} \; ,$$

$$-r f'_z g + r f g'_z = r g''_{z^2}$$

Finalement $f g'_z - f'_z g - g''_{z^2} = 0 \qquad (A-12)$

Nous aboutissons ainsi au système d'équations réduites suivantes

$$\begin{cases} f f''' + 4 g g' - f^{IV} = 0 & (A-13-1) \\ f g' - f' g - g'' = 0 & (A-13-2) \end{cases} \qquad (A-13)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} z = 0 \quad f = f' = g = 0 & (A-14-1) \\ z = 1 \quad f = f' = 0 \text{ et } g = Rero & (A-14-2) \end{cases} \qquad (A-14)$$

ANNEXE- B

METHODE DE RUNGE KUTTA AVEC TIRS

ANNEXE-B1

Formulation Runge Kutta:

Dans le cadre de cette étude, nous utiliserons la formulation, 4^{e} ordre, compte tenu du fait qu'elle offre une approximation suffisante pour cette analyse numérique.

La formulation centrale, Runge-Kutta, 4^{e} ordre est la suivante:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h,\ y_i + hk_3\right)$$

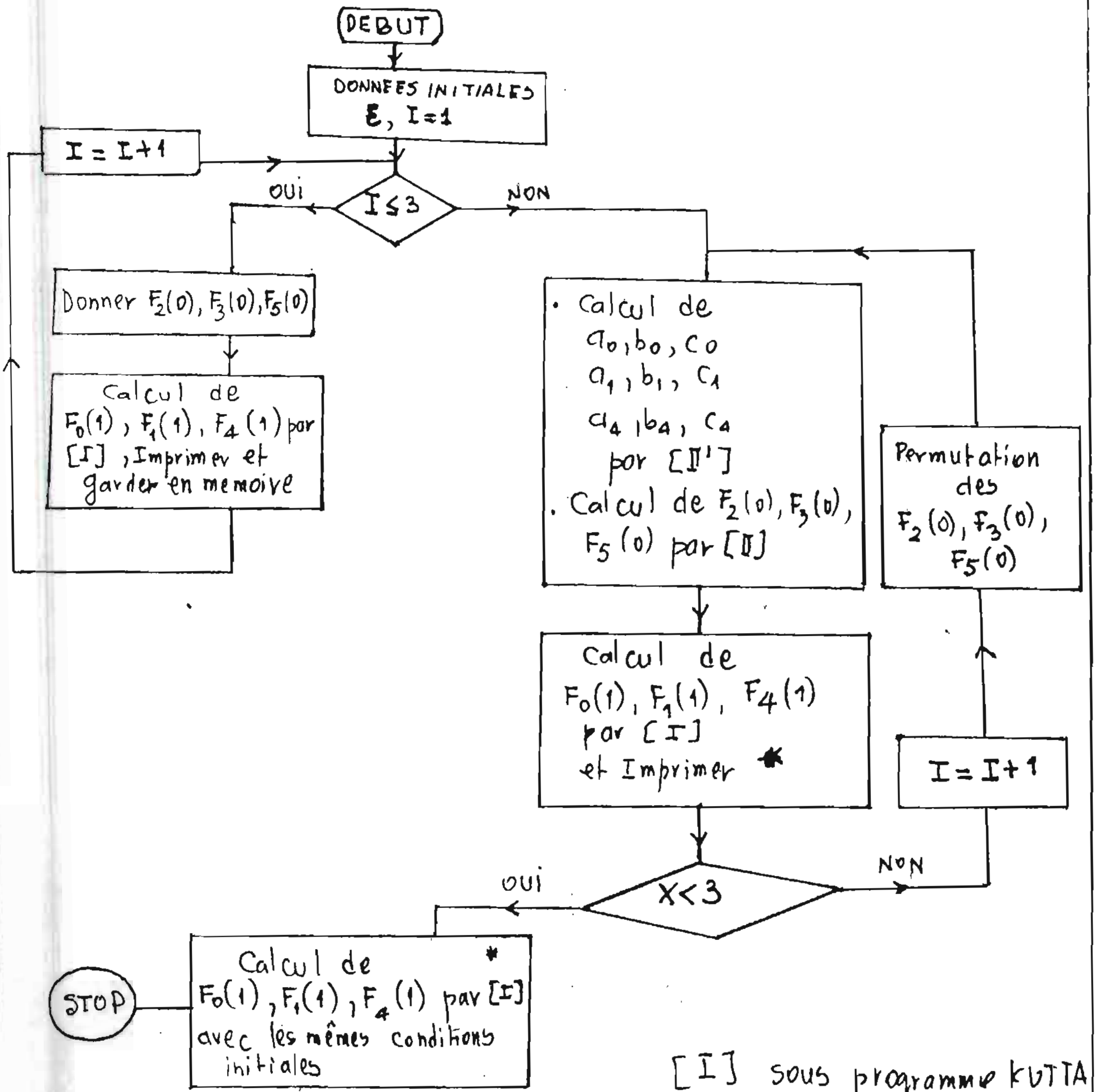
– avec $h = x_{i+1} - x_i$

et $f(x,y) = \frac{dy}{dx} = y'$

ANNEXE B2

Méthode de Runge Kutta avec tirs :

Organigramme sommaire du programme Principal (Runge)



[I] sous programme KUTTA
[II] sous programme TIRS
[II'] sous programme GAUSS

X : erreur imposée sur f, f' et g en $z = 1$

* Mettre flag (I1) pour imprimer ou non les résultats intermédiaires (voir organigramme page suivante)

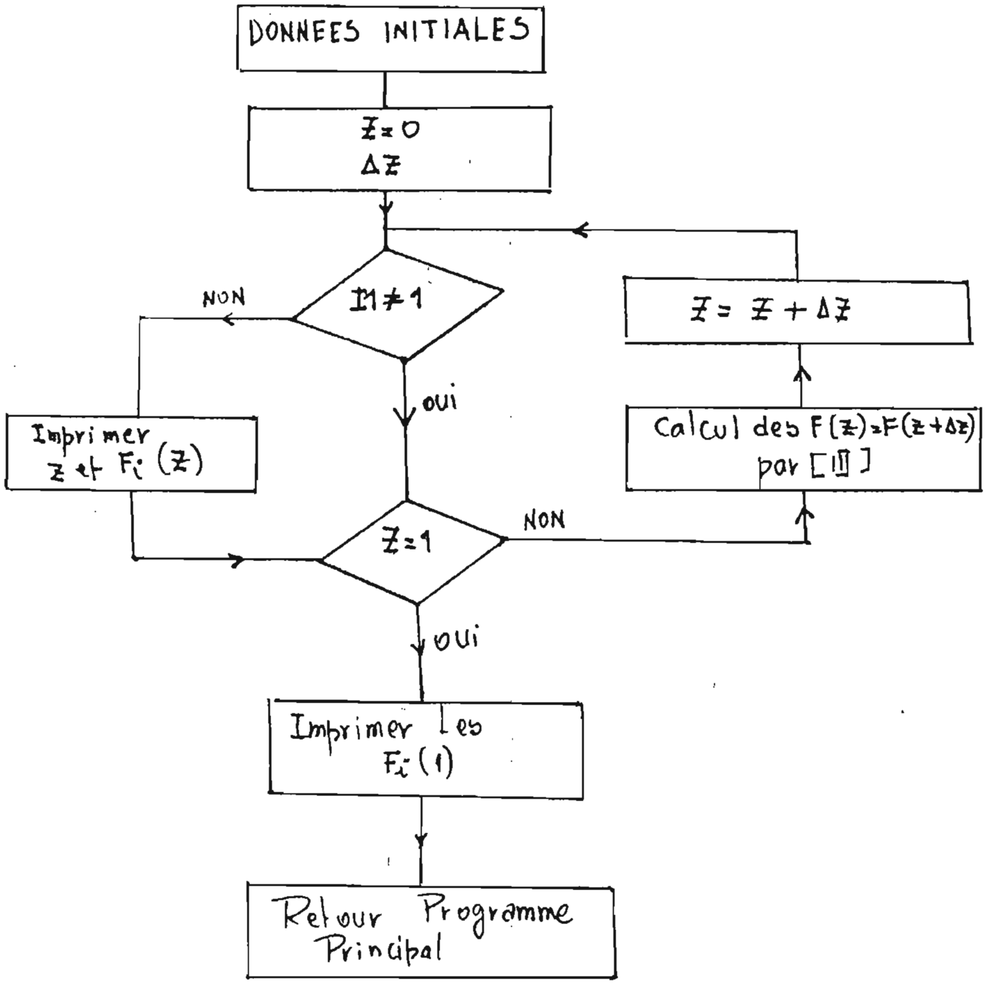
I1 = 1 Imprimer

I1 ≠ 1 Ne pas imprimer

ANNEXE_B3

Methode de Runge Kutta avec tirs

Organigramme du sous programme Kutta [I]

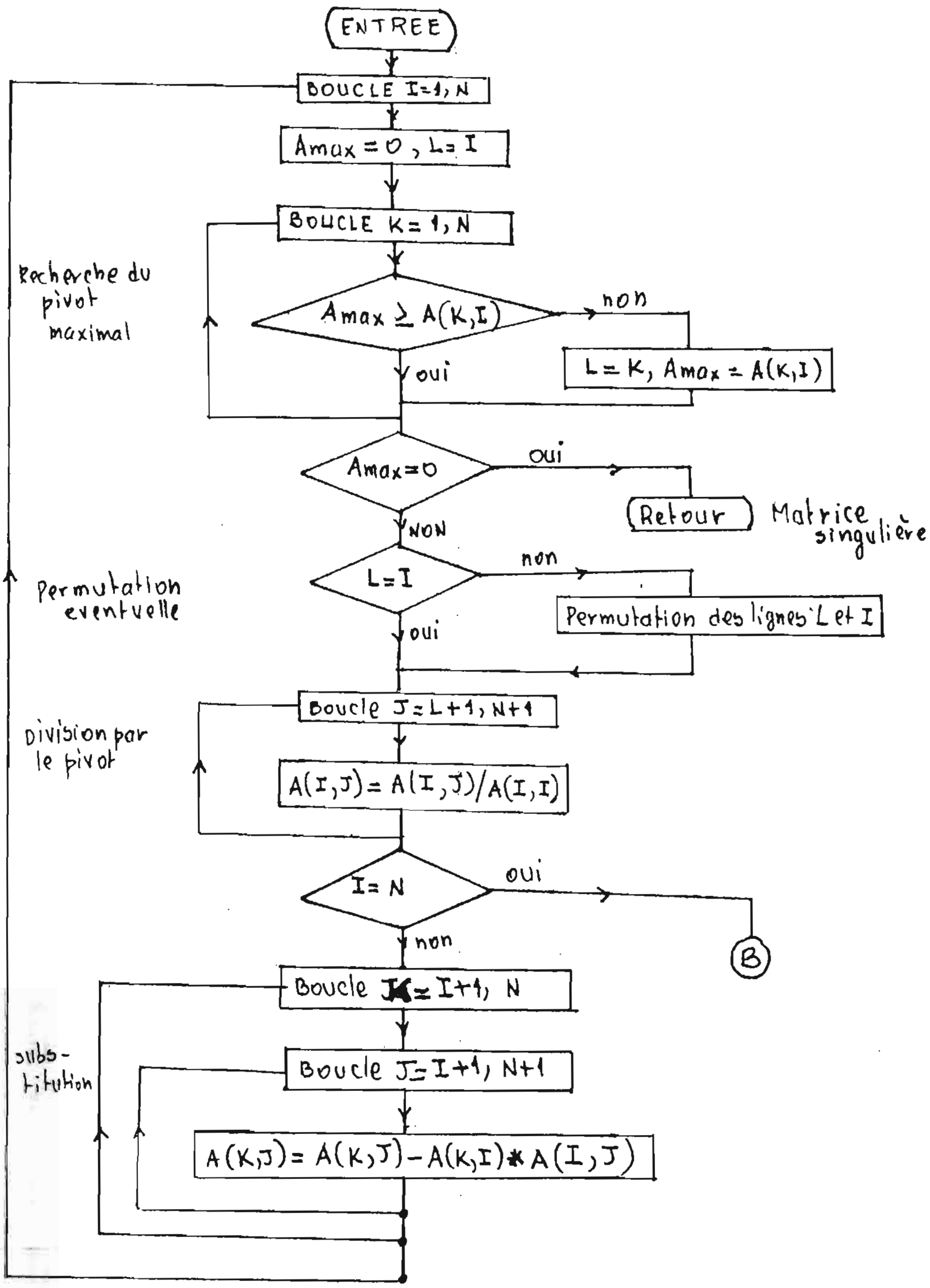


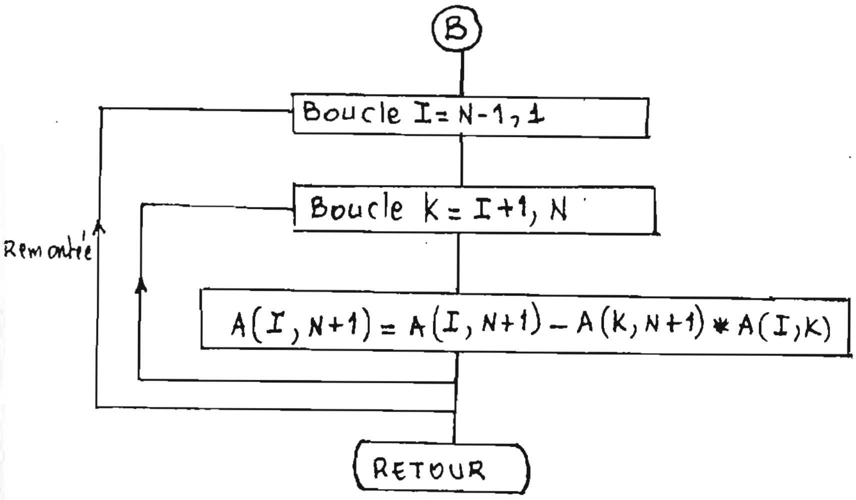
[II] : Par la méthode de Runge Kutta (4e ordre)

ANNEXE_B4

Sous programme Gauss [II']

Resolution des systemes d'equations par la méthode de Gauss




B
Boucle I = N-1, 1
Boucle K = I+1, N
Remontée
A(I, N+1) = A(I, N+1) - A(K, N+1) * A(I, K)
RETOUR

ANNEXE_B5

Methode de Runge Kutta avec tirs

Organigramme sommaire du sous-programme [II]:

Runge Kutta 4e ORDRE

DONNEES INITIALES
$F_i(z)$, $1 \leq I \leq 6$

↓

Calcul de
$K(I,1)$, $K(I,2)$, $K(I,3)$, $K(I,4)$
$1 \leq I \leq 6$

↓

Calcul de
$F_i(z) = F_i(z) + (K(I,1) + 2*K(I,2) + 2*K(I,3) + K(I,4))/6$

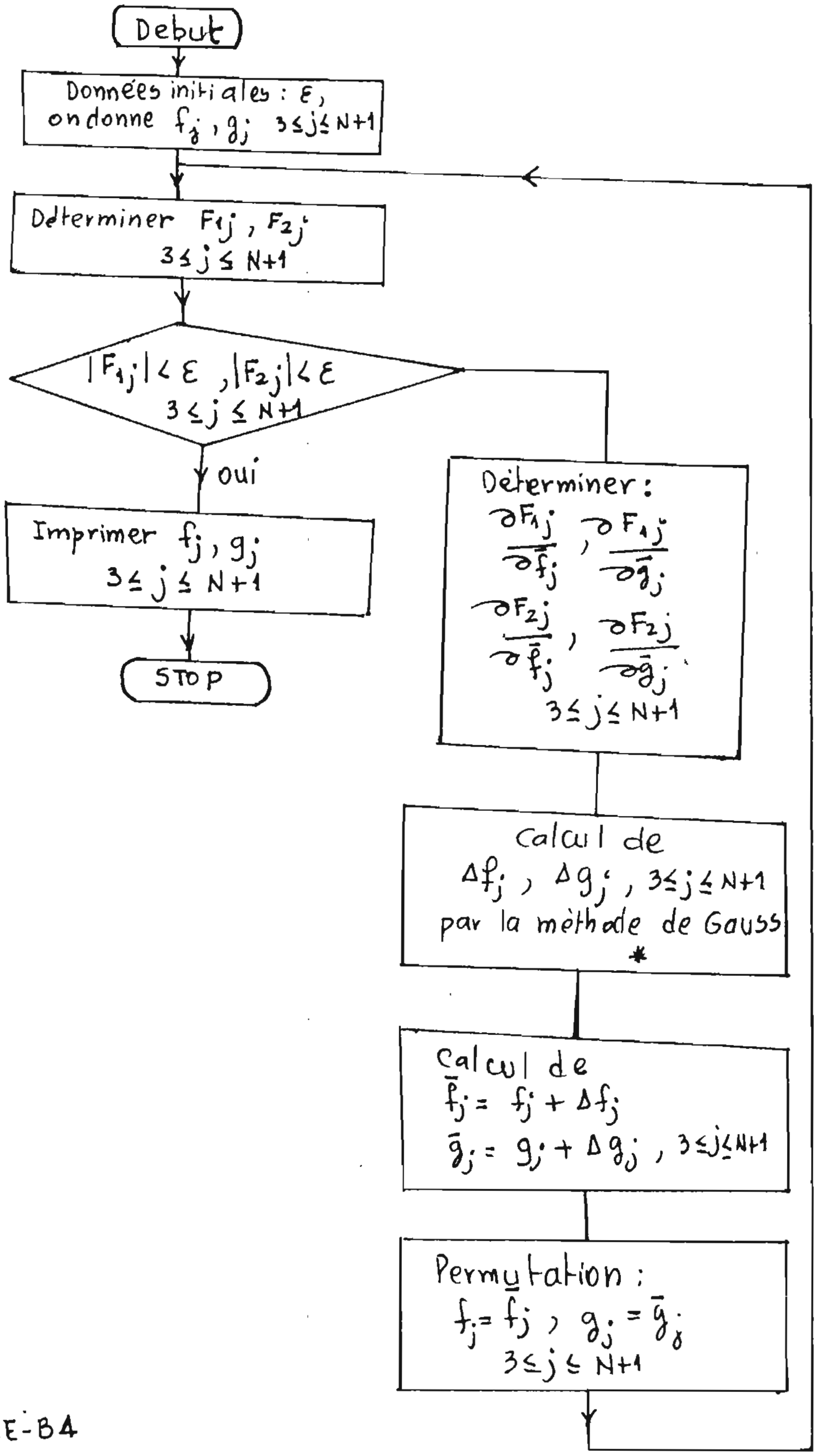
↓

Retour Sous programme Kutta

ANNEXE_C

Methode des differences finies:

Organigramme sommaire de la methode iterative de Newton



* Voir ANNEXE-B4

ANNEXE - D

LISTING DU PROGRAMME : METHODE DE RUNGE KUTTA AVEC "TIRS"

```
00010 BEGIN
00020 REM METHODE RUNGE KUTTA EN STATIONNAIRE
00030 REM DESCRIPTION DES VARIABLES
00040 REM A...MATRICE DES COEFFICIENTS DANS LA RESOLUTION
00050 REM DES SYSTEMES D'EQUATIONS PAR LA METHODE GAUSS
00060 REM A9...PIVOT MAXIMAL DANS GAUSS
00070 REM B...MATRICES DES CONSTANTES DANS GAUSS
00080 REM C...MATRICE DES RESULTATS DANS GAUSS
00090 REM D...MATRICE DES FONCTIONS DU SYSTEMES AUX CONDITIONS
00100 REM INITIALES
00110 REM E...MATRICE DES FONCTIONS DU SYSTEMES AUX CONDI-
00120 REM TIONS FINALES
00130 REM E1...ERREUR QUE L'ON S'IMPOSE SUR f,f' EN Z=1
00140 REM (CRITERE D'ARRET)
00150 REM E2...ERREUR QUE L'ON S'IMPOSE SUR g EN Z=1 (CRITERE D'ARRET)
00160 REM F...MATRICE DES SIX FONCTIONS DE TRANSFORMATION DU
00170 REM SYSTEME:F(1),F(2),F(3),F(4),F(5),F(6) REPRESENTANT
00180 REM RESPECTIVEMENT f,f',f'',f''',g,g'
00190 REM H...PAS DE DISCRETISATION
00200 REM I...COMPTEUR GENERAL
00210 REM I1...VARIABLE DE TEST POUR IMPRESSION
00220 REM I2...COMPTEUR
00230 REM I3...COMPTEUR DANS GAUSS
00240 REM J...COMPTEUR GENERAL
00250 REM J2...COMPTEUR DANS GAUSS
00260 REM K...MATRICE DES COEFFICIENTS DE LA FORMULE DE
00270 REM RECURRENCE DE RUNGE KUTTA
00280 REM K1...VARIABLE D'INDEXATION DES ELEMENTS DE LA
00290 REM MATRICE K
00300 REM K2...COMPTEUR DANS GAUSS
00310 REM L...COMPTEUR
00320 REM L1...COMPTEUR DANS GAUSS
00330 REM M...COMPTEUR
00340 REM N...ORDRE DU SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES DANS
00350 REM GAUSS
00360 REM N1...VARIABLE D'INDEXATION DANS GAUSS
00370 REM P...PRECISION DE LA MACHINE
00380 REM P1...COMPTEUR DANS GAUSS
00390 REM R...MATRICE POUR STOCKER LES ELEMENTS DE D
00400 REM R0...NOMBRE DE REYNOLDS
00410 REM T...VARIABLE TEMPORAIRE DE PERMUTATION DANS GAUSS
00420 REM S...MATRICE POUR STOCKER F(1),F(2),F(3)
00430 REM W...MATRICE DE FONCTIONS POUR LE CALCUL DES ELE-
00440 REM MENTS DE K
00450 REM X...MATRICE DES FONCTIONS POUR LA RESOLUTION
00460 REM DU SYSTEME DANS LA METHODE DES TIRS
00470 REM Y...MATRICE DES CONSTANTES POUR LA RESOLUTION DU
00480 REM SYSTEME D'EQUATIONS DANS LA METHODE DES TIRS
00490 REM Z...VARIABLE
00500 REM DEFINITION DES MATRICES
00510 DIM A(3,4),C(3,3),D(3,3),E(3,3),K(4,6),X(3,3),Y(3,3)
00520 DIM B(3),F(6),R(3),S(3),W(6)
00530 DIM A$(109,"-")
```

```
00540 REM PROGRAMME RUNGE
00550 PRINT "INTRODUIRE EN PREMIER LIEU UNE PRECISION DE LA ",
00560 PRINT "MACHINE DE 14"
00570 INPUT (0,ERR=00570) "PRECISION DE LA MACHINE",P
00580 PRECISION P
00590 PRINT "INTRODUIRE LES CRITERES D'ARRET"
00600 INPUT (0,ERR=00600) "CRITERE D'ARRET POUR f,f'",E1
00610 INPUT (0,ERR=00610) "CRITERE D'ARRET POUR g",E2
00620 INPUT (0,ERR=00620) "PAS DE DISCRETISATION",H
00630 PRINT "INTRODUIRE LES DONNEES INITIALES"
00640 CLOSE (6)
00650 OPEN (6) "LP"
00660 PRINT (6) "PRECISION P EST",P
00670 PRINT (6) "LES CRITERES D'ARRET SONT:","E1=",E1,"  ",
00680 PRINT (6) "E2=",E2
00690 PRINT (6) "LE PAS DE DISCRETISATION EST:","H=",H
00700 INPUT (0,ERR=00700) "NOMBRE DE REYNOLDS",R0
00710 PRINT (6) "R0=",R0
00720 PRINT (6) "LES DONNEES INITIALES(1eres APPROXIMATIONS) ",
00730 PRINT (6) "SONT"
00740 LET I=1
00750 INPUT (0,ERR=00750) "f''(0)=?",D(I,1)
00760 INPUT (0,ERR=00760) "f'''(0)=?",D(I,2)
00770 INPUT (0,ERR=00770) "g'(0)=?",D(I,3)
00780 ON I-1 GOTO 00790,00810,00830
00790 PRINT (6) "----------1ere ITERATION----------"
00800 GOTO 00840
00810 PRINT (6) "----------2eme ITERATION----------"
00820 GOTO 00840
00830 PRINT (6) "----------3eme ITERATION----------"
00840 PRINT (6) "f''(0)=",D(I,1)
00850 PRINT (6) "f'''(0)=",D(I,2)
00860 PRINT (6) "g'(0)=",D(I,3)
00870 LET R(1)=D(I,1)
00880 LET R(2)=D(I,2)
00890 LET R(3)=D(I,3)
00900 LET I1=0; REM FLAG D'IMPRESSION
00910 GOSUB 01220
00920 LET E(I,1)=F(1)
00930 LET E(I,2)=F(2)
00940 LET E(I,3)=F(5)
00950 LET I=I+1
00960 IF I<=3 THEN GOTO 00750
00970 GOSUB 01760
00980 GOSUB 01220
00990 LET S(1)=F(1)
01000 LET S(2)=F(2)
01010 LET S(3)=F(5)
01020 PRINT "AFFICHAGE DE L'ERREUR SUR f ET f':",ABS(S(1)),
01030 PRINT "  ",ABS(S(2))
01040 PRINT "AFFICHAGE DE L'ERREUR SUR g:",ABS((S(3)-R0)/R0)
01050 IF ABS((S(3)-R0)/R0)>E2 THEN GOTO 01070
01060 IF ABS(S(1))<=E1 AND ABS(S(2))<=E1 THEN GOTO 01170
01070 LET I=I+1
01080 PRINT I
```

```
01090 REM PERMUTATION
01100 LET D(1,1)=D(2,1),D(1,2)=D(2,2),D(1,3)=D(2,3)
01110 LET D(2,1)=D(3,1),D(2,2)=D(3,2),D(2,3)=D(3,3)
01120 LET D(3,1)=R(1),D(3,2)=R(2),D(3,3)=R(3)
01130 LET E(1,1)=E(2,1),E(1,2)=E(2,2),E(1,3)=E(2,3)
01140 LET E(2,1)=E(3,1),E(2,2)=E(3,2),E(2,3)=E(3,3)
01150 LET E(3,1)=S(1),E(3,2)=S(2),E(3,3)=S(3)
01160 GOTO 00970
01170 LET I1=1
01180 GOSUB 01220
01190 PRINT (6) à(1),A$
01200 PRINT (6) "NOMBRE D'ITERATIONS NECESSAIRES:","I=",I
01210 END
```

```
01220 REM SOUS PROGRAMME KUTTA
01230 LET Z=0
01240 FOR J=1 TO 6
01250 LET F(J)=0
01260 NEXT J
01270 LET F(3)=R(1),F(4)=R(2),F(6)=R(3)
01280 IF I1<>1 THEN GOTO 01430
01290 PRINT Z,F(1),F(2),F(3),F(4),F(5),F(6)
01300 IF Z<>0 THEN GOTO 01390
01310 PRINT (6)
01320 PRINT (6)
01330 PRINT (6) à(1),A$
01340 PRINT (6) "!",à(3),"Z",à(6),"!",à(13),"f",à(24),"!",
01350 PRINT (6) à(31),"f'",à(41),"!",à(48),"f''",à(58),"!",
01360 PRINT (6) à(65),"f'''",à(75),"!",à(82),"g",à(92),"!",
01370 PRINT (6) à(99),"g'",à(110),"!"
01380 PRINT (6) à(1),A$
01390 PRINT (6) "!",à(1),Z,à(6),"!",à(7),F(1),à(24),"!",à(25),
01400 PRINT (6) F(2),à(41),"!",à(42),F(3),à(58),"!",à(59),F(4),
01410 PRINT (6) à(75),"!",à(76),F(5),à(92),"!",à(93),F(6),
01420 PRINT (6) à(110),"!"
01430 IF Z=1 THEN GOTO 01470
01440 GOSUB 01480
01450 LET Z=Z+H
01460 GOTO 01280
01470 RETURN
```

```
01480 REM SOUS PROGRAMME RUNGE KUTTA 4e ORDRE
01490 LET H2=H/2
01500 LET K1=1
01510 FOR J=1 TO 6
01520 LET W(J)=F(J)
01530 NEXT J
01540 LET J=1
01550 LET I2=1
01560 LET K(K1,1)=W(2)*I2
01570 LET K(K1,2)=W(3)
01580 LET K(K1,3)=W(4)
01590 LET K(K1,4)=W(1)*W(4)+4*W(5)*W(6)
01600 LET K(K1,5)=W(6)
01610 LET K(K1,6)=W(1)*W(6)-W(2)*W(5)
01620 LET W(I2)=F(I2)+H2*K(K1,I2)*J
01630 LET I2=I2+1
01640 IF I2<=6 THEN GOTO 01620
01650 LET K1=K1+1
01660 IF K1<=3 THEN GOTO 01550
01670 LET J=J+1
01680 IF J<=2 THEN GOTO 01550
01690 LET F(1)=F(1)+H*(K(1,1)+K(4,1)+2*(K(2,1)+K(3,1)))/6
01700 LET F(2)=F(2)+H*(K(1,2)+K(4,2)+2*(K(2,2)+K(3,2)))/6
01710 LET F(3)=F(3)+H*(K(1,3)+K(4,3)+2*(K(2,3)+K(3,3)))/6
01720 LET F(4)=F(4)+H*(K(1,4)+K(4,4)+2*(K(2,4)+K(3,4)))/6
01730 LET F(5)=F(5)+H*(K(1,5)+K(4,5)+2*(K(2,5)+K(3,5)))/6
01740 LET F(6)=F(6)+H*(K(1,6)+K(4,6)+2*(K(2,6)+K(3,6)))/6
01750 RETURN
```

```
01760 REM SOUS PROGRAMME TIRS
01770 FOR L=1 TO 3
01780 FOR J=1 TO 3
01790 LET X(L,J)=D(L,J)
01800 LET Y(L,J)=E(L,J)
01810 NEXT J
01820 NEXT L
01830 LET L=1
01840 FOR J=1 TO 3
01850 LET B(J)=Y(J,L)
01860 FOR M=1 TO 3
01870 LET A(J,M)=X(J,M)
01880 NEXT M
01890 NEXT J
01900 LET A(1,4)=B(1),A(2,4)=B(2),A(3,4)=B(3)
01910 LET N=3
01920 GOSUB 02060
01930 LET C(L,1)=A(1,4),C(L,2)=A(2,4),C(L,3)=A(3,4)
01940 LET L=L+1
01950 IF L<=3 THEN GOTO 01840
01960 LET B(1)=0,B(2)=0,B(3)=R0
01970 FOR J=1 TO 3
01980 FOR M=1 TO 3
01990 LET A(J,M)=C(J,M)
02000 NEXT M
02010 NEXT J
02020 LET A(1,4)=B(1),A(2,4)=B(2),A(3,4)=B(3)
02030 GOSUB 02060
02040 LET R(1)=A(1,4),R(2)=A(2,4),R(3)=A(3,4)
02050 RETURN
```

```
02060 REM RESOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES
02070 REM PAR LA METHODE DE GAUSS
02080 LET N1=N+1
02090 FOR I3=1 TO N
02100 REM RECHERCHE PIVOT MAXIMAL
02110 LET A9=0,L1=I3
02120 FOR K2=I3 TO N
02130 IF A9>=ABS(A(K2,I3)) THEN GOTO 02150
02140 LET L1=K2,A9=ABS(A(K2,I3))
02150 NEXT K2
02160 IF A9=0 THEN GOTO 02460
02170 REM PERMUTATION EVENTUELLE
02180 IF L1=I3 THEN GOTO 02250
02190 FOR J2=I3 TO N1
02200 LET T=A(I3,J2)
02210 LET A(I3,J2)=A(L1,J2)
02220 LET A(L1,J2)=T
02230 NEXT J2
02240 REM DIVISION PAR LE PIVOT
02250 LET P1=I3+1
02260 FOR J2=P1 TO N1
02270 LET A(I3,J2)=A(I3,J2)/A(I3,I3)
02280 NEXT J2
02290 IF I3=N THEN EXITTO 02370
02300 REM SUBSTITUTION
02310 FOR K2=P1 TO N
02320 FOR J2=P1 TO N1
02330 LET A(K2,J2)=A(K2,J2)-A(K2,I3)*A(I3,J2)
02340 NEXT J2
02350 NEXT K2
02360 NEXT I3
02370 REM REMONTEE
02380 FOR L1=2 TO N
02390 LET I3=N-L1+1
02400 LET P1=I3+1
02410 FOR K2=P1 TO N
02420 LET A(I3,N1)=A(I3,N1)-A(K2,N1)*A(I3,K2)
02430 NEXT K2
02440 NEXT L1
02450 GOTO 02480
02460 PRINT "MATRICE SINGULIERE"
02470 STOP
02480 RETURN
02490 CLOSE (6)
```

ANNEXE - E

LISTING DU PROGRAMME : METHODE DES DIFFERENCES FINIES

```
00010 BEGIN
00020 REM ...METHODE DES DIFFERENCES FINIES EN STATIONNAIRE
00030 REM ...DESCRIPTION DES VARIABLES
00040 REM A...MATRICE DES COEFFICIENTS DANS LA METHODE DE NEWTON
00050 REM A0...PIVOT MAXIMALDANS GAUSS
00060 REM B...MATRICE DES FONCTIONS F1J ET F2J DANS LA METHODE DE NEWTON
00070 REM E...PRECISION
00080 REM F,G...MTRICES RESPECTIVES DES INCONNUES fj,gj
00090 REM H...LONGUEUR D'UN SEGMENT
00100 REM I...COMPTEUR
00110 REM J...COMPTEUR GENERAL
00120 REM J1...COMPTEUR DANS GAUSS
00130 REM K...COMPTEUR DANS GAUSS
00140 REM L...COMPTEUR DANS GAUSS
00150 REM M...ORDRE DU SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES
00160 REM 1...VARIABLE D'INDEXATION DANS GAUSS
00170 REM N...NOMBERE DE SEGMENTS SUR LE SCHEMA EN DIFFERENCES FINIES
00180 REM P1...COMPTEUR DANS GAUSS
00190 REM R...MATRICE DES RESULTATS DANS GAUSS
00200 REM T...VARIABLE TEMPORAIRE DE PERMUTATION DANS GAUSS
00210 REM Z...VARIABLE
```

```
00220 REM PROGRAMME PRINCIPAL
00230 PRECISION 14
00240 REM DONNEES INITIALES
00250 INPUT "NOMBRE DE DIVISIONS",N,"CRITERE D'ARRET",E
00260 LET M=2*(N-1)
00270 REM DEFINITION DES MATRICES
00280 DIM A(2*(N+1),2*(N+1))
00290 DIM B(2*(N+1)),F(N+3),G(N+2),R(M)
00300 LET H=1/N
00310 OPEN (6) "LP"
00320 INPUT "NOMBRE DE REYNOLDS",R0
00330 PRINT (6) "R0=",R0
00340 PRINT (6) "LES 1eres APPROXIMATIONS fj,gj,3<=j<=N+1,SONT"
00350 PRINT "------fj------","------gj------"
00360 FOR J=3 TO N+1
00370 INPUT "fj,3<=j<=N+1",F(J),"gj3<=j<=N+1",G(J)
00380 PRINT (6) F(J),"    ",G(J)
00390 NEXT J
00400 CLOSE (6)
00410 LET F(1)=F(3)
00420 LET F(2)=0
00430 LET F(N+2)=0
00440 LET G(2)=0
00450 LET G(N+2)=R0
00460 LET F(N+3)=F(N+1)
00470 PRINT "AFFICHAGE DES VALEURS DE B(J-2) ET B(N+J-3)"
00480 FOR J=3 TO N+1
00490 LET B(J-2)=F(J)*(F(J-2)-F(J+2)+2*(F(J+1)-F(J-1)))/(2*H**3)+2*G(J)*(G(J-
00490:1)-G(J+1))/H+(F(J-2)+F(J+2)-4*(F(J-1)+F(J+1))+6*F(J))/H**4
00500 LET B(N+J-3)=F(J)*(G(J+1)-G(J-1))/(2*H)+G(J)*(F(J+2)-F(J-2)+8*(F(J-1)-F
00500:(J+1)))/(12*H)+(2*G(J)-G(J-1)-G(J+1))/H**2
00510 PRINT B(J-2),B(N+J-3)
00520 NEXT J
00530 FOR J=3 TO N+1
00540 IF ABS(B(J-2))<=E AND ABS(B(N+J-3))<=E THEN GOTO 00560
00550 EXITTO 00580
00560 NEXT J
00570 GOTO 00980
```

```
00580 REM DETERMINER DF1j/Df.j,DF1j/Dgj
00590 FOR J=3 TO N+1
00600 IF J=3 THEN GOTO 00660
00610 IF J=4 THEN GOTO 00640
00620 LET A(J-2,J-4)=F(J)/(2*H**3)+1/H**4
00630 LET A(N+J-3,J-4)=(-G(J))/(12*H)
00640 LET A(J-2,J-3)=(-F(J))/H**3-4/H**4
00650 LET A(N+J-3,J-3)=2*G(J)/(3*H)
00660 LET A(J-2,N+J-4)=2*G(J)/H
00670 LET A(N+J-3,N+J-4)=(-F(J))/(2*H)-1/H**2
00680 LET A(J-2,J-2)=(F(J-2)-F(J+2)+2*(F(J+1)-F(J-1)))/(2*H**3)+6/H**4
00690 LET A(J-2,N+J-3)=2*(G(J-1)-G(J+1))/H
00700 LET A(N+J-3,J-2)=(G(J+1)-G(J-1))/(2*H)
00710 LET A(N+J-3,N+J-3)=(F(J+2)-F(J-2)+8*(F(J-1)-F(J+1)))/(12*H)+2/H**2
00720 IF J=N+1 THEN GOTO 00830
00730 LET A(J-2,J-1)=F(J)/H**3-4/H**4
00740 LET A(J-2,N+J-2)=(-2)*G(J)/H
00750 LET A(N+J-3,J-1)=(-2)*G(J)/(3*H)
00760 LET A(N+J-3,N+J-2)=F(J)/(2*H)-1/H**2
00770 IF J=N THEN GOTO 00830
00780 LET A(J-2,J)=(-F(J))/(2*H**3)+1/H**4
00790 LET A(N+J-3,J)=G(J)/(12*H)
00800 LET A(1,N-1)=0
00810 IF J=N-1 THEN GOTO 00830
00820 LET A(N+J-3,N-1)=0
00830 NEXT J
```

```
00840 REM CALCUL Dfj,Dgj PAR LA METHODE DE GAUSS
00850 FOR J=1 TO 2*(N-1)
00860 LET A(J,2*N-1)=-B(J)
00870 NEXT J
00880 GOSUB 01120
00890 REM :fj*=fj+Dfj,  gj*=gj+Dgj,   fj*,gj*:solutions exactes
00900 REM CALCUL DE fj*,gj* ET PERMUTATION
00910 PRINT "AFFICHAGE DE fj*,gj* APRES LA PERMUTATION"
00920 FOR J=3 TO N+1
00930 LET F(J)=F(J)+R(J-2)
00940 LET G(J)=G(J)+R(N+J-3)
00950 PRINT F(J),G(J)
00960 NEXT J
00970 GOTO 00410
00980 REM IMPRESSION
00990 LET Z=0
01000 PRINT "Z","   ","f","   ","g"
01010 OPEN (6) "LP"
01020 PRINT (6) "Z","   ","f","   ","g"
01030 CLOSE (6)
01040 FOR J=2 TO N+2
01050 PRINT Z,"   ",F(J),"   ",G(J)
01060 OPEN (6) "LP"
01070 PRINT (6) Z,"   ",F(J),"   ",G(J)
01080 CLOSE (6)
01090 LET Z=Z+H
01100 END
```

```
01120 REM RESOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES PAR LA METHODE DE GAUS
01120:S
01130 LET M1=M+1
01140 FOR I=1 TO M
01150 REM RECHERCHE PIVOT MAXIMAL
01160 LET A0=0,L=I
01170 FOR K=I TO M
01180 IF A0>=ABS(A(K,I)) THEN GOTO 01200
01190 LET L=K,A0=ABS(A(K,I))
01200 NEXT K
01210 IF A0=0 THEN GOTO 01570
01220 REM PERMUTATION EVENTUELLE
01230 IF L=I THEN GOTO 01300
01240 FOR J1=I TO M1
01250 LET T=A(I,J1)
01260 LET A(I,J1)=A(L,J1)
01270 LET A(L,J1)=T
01280 NEXT J1
01290 REM DIVISION PAR LE PIVOT
01300 LET P1=I+1
01310 FOR J1=P1 TO M1
01320 LET A(I,J1)=A(I,J1)/A(I,I)
01330 NEXT J1
01340 IF I=M THEN EXITTO 01420
```

```
01350 REM SUBSTITUTION
01360 FOR K=P1 TO M
01370 FOR J1=P1 TO M1
01380 LET A(K,J1)=A(K,J1)-A(K,I)*A(I,J1)
01390 NEXT J1
01400 NEXT K
01410 NEXT I
01420 LET R(M)=A(M,M1)
01430 REM REMONTEE
01440 FOR L=2 TO M
01450 LET I=M-L+1
01460 LET P1=I+1
01470 FOR K=P1 TO M
01480 LET A(I,M1)=A(I,M1)-A(K,M1)*A(I,K)
01490 NEXT K
01500 LET R(I)=A(I,M1)
01510 NEXT L
01520 PRINT "LES RESULTATS DE LA RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS SONT"
01530 FOR I=1 TO M
01540 PRINT R(I)
01550 NEXT I
01560 GOTO 01590
01570 PRINT "MATRICE SINGULIERE"
01580 EXITTO 01600
01590 RETURN
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. VAILLANT

'APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AUX ECOULEMENTS RADIAUX'

(Thèse de Troisieme Cycle) Université de VALANCIENNES et du HAINAUT CAMBRESIS.

[2] P. FLORENT, N. D. NGUYEN, D. VO NGOC

'Journal de Mécanique', Vol. 12, N°4, Décembre 73

[3] DINH VO NGOC

'Notes personnelles'

[4] HERMANN SCHLICHTING

'Boundary Layer Theory' - 6e édition

Mc Graw-Hill, 1968

[5] M.L. James, G.M. Smith, J.C. Wolford

'Applied Numerical Methodes for Digital Computation with Fortran'

International Textbook Company, 1967

[6] E. STIETEL

'INTRODUCTION A LA MATHEMATIQUE NUMERIQUE'

DUNOD, 1967

[7] James W. DAILY, DONALD R.F. HERLEMAN

'Fluid Dynamics'

ADDISON-WESLEY PUBLICHING COMPANY, INC.