RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE THIÈS

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME D'INGÉNIEUR DE CONCEPTION

TITRE : POLITIQUE OPTIMALE D'ACHAT

AUTEUR : moussé n'doye

DIRECTEURS : Pr oumar dioum

DATE : MAI 1987

Aux memoires de mes defunts,

à toute ma famille et à tous mes amis

AVANT - PROPOS

Depuis quinze ans, la méthode scientifique de gestion des stocks a connu un grand essor. On designe généralement par methode scientifique, l'utilisation de modèles mathematiques pour obtenir les règles necessaires à la gestion d'un stock.
Le grand interêt du sujet fait qu'aujourd'hui chaque chercheur operationnel, chaque ingenieur a deja une experience dans l'utilisation de modeles de stocks. Au debut, le principal objectif de ces modèles était leur application pratique. Dans une large mesure, ceci est toujours vrai, mais le sujet devenant plus connu et plus ètudié, un nombre croissant de chercheurs s'interessent aux modèles de stocks pour les prolongements mathématiques théoriques qu'ils presentent. Pour ces chercheurs, les applications pratiques ne constituent pas le but principal, mais il n'est pas impossible que leurs travaux théoriques soient utilisés dans la pratique.
Actuellement, les études concernant les modèles de stocks se font donc à divers niveaux allant des applications pratiques aux propriètés mathématiques des modeles.
Le modèle développé dans ce sujet consiste à chercher une politique optimale d'achat de matieres premières ou d'equipements quelconques pour un systeme composé d'une source et d'un point de stockage uniques. Les raisons de cette restriction sont les suivantes :

1/ Plusieurs problemes d'interêts pratiques entrent dans cette categorie

2/ Malgrés la simplicité de tels systèmes, plusieurs problemes mathematiques se posent déjà.

3/ Il est très difficile de déterminer la politique optimale pour des systèmes plus complexes.

En fait peu d'etudes ont été déjà faites dans cette derniere voie. Souvent lorsque l'on desire etudier un systeme à plusieurs échelons, on s'intéressera davantage et cela pour plusieurs raisons à son aspect dynamique, à sa stabilité plutôt qu'à la determination de la politique qui rend minimaux certains coûts lorsque les données aleatoires sont fixes.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Mr Oumar Dioum professeur de mathematiques à l'ecole polytechnique de Thies non seulement d'avoir accepté de diriger ce projet mais de sa sollicitude constante malgré ses multiples préocupations.
J'eus la chance d'avoir Mr Oumar Dioum comme directeur de projet qui de par sa gentillesse, son devouement inlassable et consciencieux a fait de ce projet une reussite totale.
Mention speciale doit être faite de la contribution de Mr Diagne directeur de l'exploitation et de la production à la société Hamo pour m'avoir facilité l'accès aux données de cette société.
Bien des gens ont contribué à la reussite de ce projet ; ils sont cependant trop nombreux pour qu'il soit possible de les citer tous ici. A tous et à toutes je leur adresse mes remerciements les plus sincères.
Malgré l'aide de tous ceux qui collaborerent à ce projet, ses defauts ne reflètent que mes propres faiblesses ; quant à ses qualités il les doit à tous.

SOMMAIRE

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Une bonne gestion depend essentiellement de la bonne prévision des besoins futurs. C'est à ce titre que le présent sujet suscite pour moi un interêt tout particulier. L'ingenieur est de plus en plus impliqué dans les processus d'acquisition d'intrants de la production.
Cependant dans un souci d'objectivité et de rationnalisme, nous sommes tentés de nous poser sans cesse une question d'importance capitale: quand et comment acheter? La reponse à cette question n'est pas du tout facile à trouver. Plusieurs investiquations sont nécéssaires pour pouvoir y repondre.
Naturellement nous sommes tentés de faire des achats importants quand le cours est bas, de maniere à pouvoir fonctionner à l'aide de prelevements sur le stock disponible lorsque le cours est élevé. Mais une telle politique d'achat si elle est de nature à diminuer les coûts d'achat peut entrainer des accroissements importants de frais de stockage tels que magasinage, frais financiers etc.

Toutefois il n'y a pas que cet aspect qui justifie un achat provisionnel.
Plusieurs circonstances font qu'on est souvent obligé de recourir à ce type d'achat. Elles sont essentiellement les suivantes:

- Pour s'assurer un certaine priorité chez le fournisseur, on est conduit à signer des contrats portant sur les besoins estimés d'une periode donnée avec ou sans clause de revision de prix et prévoyant des livraisons echelonnées à la demande.
- Quand la production ou les transports subissent des influences ou profitent d'occasions saisonnières, on achète souvent d'avance pour eviter d'avoir à le faire lorsque le marché sera mal pourvu ou que les transports seront difficiles.
- On agit de même quand une certaine rareté se fait craindre pour plusieurs raisons.

En somme dès que la securité des approvisionnements destinés à couvrir un programme arrèté n'est plus garantie, le moyen evident et necessaire de se les assurer est l'achat provisionnel.

Cependant repondre à la question posée plus haut revient à chercher une politique d'achat qui minimise le total des depenses d'achat et de stockage

Dans cette étude nous essayerons de repondre à cette question en s'aidant des chaines de Markov.

Definissons le probleme :

Les prix d'achat unitaires des equipements ou matières premieres sont dits "speculatifs". Ce sont des prix sur lesquels se manifestent certaines variations aleatoires. Le cours sur le marché peut de manière aleatoire être favorable ou défavorable.

Il s'agit maintenant, tenant compte de ces variations aleatoires de trouver une ou des politiques d'achat et de stockage qui sur le long terme minimise le coût total moyen d'achat et de stockage sous la contrainte d'une capacité de stockage donnée d'un depot ou magasin.

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES ACHATS PROVISIONNELS

Dans toute fabrication, l'on peut prevoir assez exactement les besoins pour la plupart des matieres. On peut donc planifier une grande partie des achats et y proceder d'avance sans attendre la survenance d'un besoin. Les exceptions portent sur les articles destinés à un cas particulier dont les achats ne seront pas renouvelés.

La plus grande partie des matières premières et des fournitures industrielles d'emploi regulier font l'objet de prévisions de besoins d'achats d'avance: ce qui permet de les avoir sous la main au moment de les employer. Même dans le cas de fabrication destinée à des commandes speciales pour lesquelles on ne peut savoir exactement d'avance ce que les spécifications du client demanderons qu'on achète, les besoins de base peuvent la plupart du temps être prevus approximativement en quantité et en qualité, et l'on peut se couvrir, comme dans le cas de production en série.

I.1 justification des achats provisionnels

On considère souvent les achats anticipés comme destinés à faire du stock ou à le reconstituer. Politiquement parlant, ils sont plus que cela, l'existant est sans doute un des moyens de pourvoir aux besoins futurs, mais les approvisionnements d'avance se font toujours à des moments où l'on a accumulé des reserves en vue des besoins accrus qui resulteront d'une expansion commerciale attendue. Une grande partie de ces achats sont faits sous la forme d'engagements financiers ou de contrats à long terme qui n'ont qu'incidemment pour effet d'augmenter le volume des produits stockés. Cela vient de ce que les stocks sont mesurés en quantités ou en valeurs, alors que les achats provisionnels le sont en terme de temps.

Plusieurs raisons justifient les achats provisionnels :

1°/ Pour disposer des marchandises au moment où l'on en aura besoin, sans avoir à attendre qu'une commande emise à ce moment soit éxécutée, evitant ainsi des achats d'urgence et réduisant les risques de retard de livraison et de manquants dus à des rebuts.

2°/ Pour transformer les besoins epars en un programme complet d'approvisionnement permettant de profiter de prix plus avantageux, en raison des quantités groupés et de l'optimisation des achats de la fabrication et du transport qu'on ne peut realiser que sur le papier lorsqu'on achète par lots separés commandés d'urgence.

3°/ Pour faciliter l'adaptation de la politique d'achat à l'evolution du marché dans ses tendances à court et à long terme et dans ses variations saisonnières quant à l'offre et aux prix.

4°/ Pour rendre les prix stables pendant une periode déterminée. En revanche les achats provisionnels comportent quelques risques dont on peut citer :

a/ Un accroissement des engagements financiers et souvent un stock plus onéreux.

b/ Des pertes dues à une dépréciation technologique

c/ Moins de libertés dans les achats en raison des engagements pris

d/ L'inevitable possibilité que la situation économique et celle du marché n'évolueront pas dans le sens attendu et en raison duquel les achats provisionnels ont été conclus.

Acheter d'avance demande beaucoups de jugements. Il faut principalement essayer de diminuer les risques.

Dans quelle mesure faut-il se couvrir d'avance ? La reponse à cette question est d'ordre politique, elle s'exprime generalement par une durée – tant de semaines ou tant de mois – d'un maniement stratégique plus commode que des quantités. Ainsi un poids donné de matière ou un nombre donné d'articles peuvent representer par exemple trente jours de couverture à la cadence normale de consommation. Mais il se pourrait que la même quantité fût dangereusement inadéquate si cette cadence augmentait brusquement du fait des ventes accrues ou d'un changement de mode operatoire, ou, au contraire, si elle devenait partiellement inutile, la consommation venant à diminuer rapidement.

Il est evidant que lorsque l'acheteur devra traduire la politique en action tactique, il le fera en remplaçant les delais par des quantités. Il doit pouvoir à tout moment evaluer ces dernieres en termes de mesures physiques, d'immobilisation financière et de couverture dans le temps, à la cadence actuelle et à la cadence prevue de consommation.

C'est à la direction générale qu'incombe la plupart du temps de decider de ces achats destinés à couvrir des besoins futurs escomptés, car ils entraînent la souscription d'engagements financiers superieurs aux necessités immediates proportionnés à la longueur de la periode pendant laquelle il convient de se couvrir, et dependant soit d'une politique generale soit d'une attitude particulière à l'egard d'un produit-clé. Cette decision est generalement prise à l'instigation du directeur des achats. En tout cas si la politique adoptée est différente de l'habituelle, si les sommes à engager sont importantes ou que l'article ou la matière soit de gestion délicate, le responsable des achats doit en discuter avec la direction générale avant de prendre des engagements exceptionnels. Mais les considerations d'achats ne sont pas les seules auxquelles il faille s'arrêter avant de decider.

Du point de vue de la fonction d'approvisionnement, la politique d'achats provisionnels depend étroitement de l'exactitude des prévisions portant sur trois points principaux:

- La cadence de consommation (besoins totaux pendant une periode future)

- La probabilité de l'offre dans l'avenir
- Les variations de cours en hausse ou en baisse qui se produiront

Voilà 3 facteurs qui influenceront la decision et l'action des achats.
Etant donné que les achats d'avance sont fonction des fluctuations certaines ou probables de ces mesures de l'activité commerciale: offre et prix, les acheteurs professionnels ont l'oeil sur la politique la plus généralement suivie par les uns et les autres en matière d'achats provisionnels, car ils y voient un baromètre serieux de la tendance des affaires. Si les couvertures s'etendent sur une longue periode ou sont accrues, cela signifie d'après l'opinion generale des acheteurs, si l'on juge d'après leur action et leurs engagements, que l'une ou plus des situations suivantes existent: a/ demande et consommation en progression; b/ pénurie imminente, plus grande difficultés d'approvisionnement, delais plus longs; prix en hausse. Si la couverture est de courte durée ou de faible volume, la situation est inverse.
Cependant cette logique est à double tranchant: pour que ces opinions aient une valeur, il faut qu'elles soient confirmées par des renseignements et d'autres preuves.

CHAPITRE II : INTRODUCTION AUX CHAÎNES DE MARKOV

II.1 définition d'une chaine de markov

L'une des plus importantes généralisations de la notion de suite de variables aléatoires indépendantes est la notion de suite de variables liées par une chaîne de Markov.

Soit donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On appelle élément aléatoire dans $(X, \mathcal{B})$ une application mesurable $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (X, \mathcal{B})$ où $(X, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

On appelle chaine de Markov, une suite $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ d'éléments aleatoires dans un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$ telle que

$P\{\xi_n \in \Gamma / \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma / \xi_{n-1}\}$ presque sûrement quels que soient $\Gamma \in \mathcal{B}$ et $n = 1, 2, \ldots$

L'espace $(X, \mathcal{B})$ est dit l'espace des phases de la chaine.

Toute suite d'elements (aleatoires ou non) $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ de l'espace $(X, \mathcal{B})$ peut être considerée comme le mouvement d'un systeme (d'un point, d'une particule) dans l'espace des phases : à l'instant 1 le systeme quitte l'etat ξ_0 pour l'etat ξ_1 à l'instant 2 l'etat ξ_1 pour l'etat ξ_2, etc.

La notion de chaine de markov distingue donc dans l'ensemble des systemes en mouvement les systemes dits sans postaction ou systeme sans memoire.

Dans le cas deterministe ce sont ces systemes dont l'etat à un instant n est determiné de façon unique par l'etat à l'instant n-1 independamment du mouvement du systeme avant cet instant. Contrairement aux systèmes déterministes, les systemes stochastiques sans mémoire sont tels que l'etat à l'instant n-1 est défini de façon unique non pas par l'état à l'instant n, mais par la probabilité avec laquelle il se trouve à cet instant dans tel ou tel ensemble d'états.

Ω : ensemble probabilisé non vide , $\mathcal{F}$: est un tribu sur Ω

$$P\{\xi_n \in \Gamma\} = \sum_{y \in \Gamma} P\{\xi_n = y\}$$

II.2 notion de matrice de transition

Soient $X_0, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires pouvant prendre differentes valeurs. Les valeurs $(0, 1, \ldots, m)$ sont appellées etats de X_r.

La probabilité conditionnelle $P(X_r = j / X_{r-1} = i) = p_r(j/i) = p_{ij}$ est appellées probabilité de transition de pas 1 de l'etat i au temps $r-1$ à l'etat j au temps r. Dans beaucoup d'application, cette probabilité de transition ne depend pas du parametre temps r, il s'agit alors d'une chaine de Markov homogène.

Les valeurs q_{ij} considerées comme les éléments (i,j) d'une matrice, forment une matrice appellée matrice de transition de probabilité ou simplement matrice de transition ou de passage (M).

Si m est une valeur finie et l'etat le plus bas 0, la matrice M a $m+1$ lignes et $m+1$ colonnes.

Et pour chaque i fixé on a $\sum_{j=0}^{m+1} p_{ij} = 1$

II.3 distribution d'une chaine de markov

Soit $\{X_t\}$ une chaine de markov definie par les etats $(0, 1, \ldots, c)$ avec des probabilités de transition de pas 1 p_{ij} et une matrice de transition M

On montre que la probabilité de transition de pas s $P\{X_{t+s} = j / X_t = i\} = p_{ij}^{(s)}$ avec $p_{ij}^{(s)}$ etant les valeurs (i,j) de la matrice M^s.

La distribution complète conditionnelle de X_{t+s} pour un $X_t = i$ donné est constituée de valeurs de la i-eme ligne de M^s.

Pour obtenir la distribution complète inconditionnelle de X_{t+s} il faut utiliser le theoreme des probabilités totales. On obtient :

$$P(X_{t+s} = j) = \sum_i P(X_{t+s} = j / X_t = i)\, P(X_t = i)$$

En posant $P(X_t = i) = e_t(i) \quad i = 0, 1, 2, \ldots, c$

On a $\quad e_{t+s}(j) = \sum_i p_{ij}^{(s)}\, e_t(i)$

Soit E_t le vecteur constitué des valeurs de $e_t(i)$, $i = 0, 1, \ldots, c$

Ce vecteur est appellé vecteur distribution de probabilité de X_t.

On a $E_{t+s} = M^s E_t \quad t=0,1,\ldots \quad s=1,2,\ldots$

En particulier $E_{t+1} = M E_t \quad t=0,1,\ldots$

Dans le cas général $E_t = M^t E_0$

où E_0 est le vecteur distribution de probabilité initiale.

II.4 cas particulier de la distribution stationnaire : notion d'ergodicité

Pour beaucoup de chaine de Markov, quand t croit, le vecteur distribution de probabilité E_t converge vers un vecteur fixe de distribution E quelles que soient les conditions initiales. Cette proprieté possedée par plusieurs chaines de Markov est appellée ergodicité.

Si $\{X_t\}$ est une chaine de Markov ergodique, avec une matrice de transition M et un vecteur distribution de probabilité E_t,

On a : $E_t = M^t E_0 \quad t=1,2,\ldots$

Les sequences $E_0, E_1, E_2, \ldots$ convergent vers un vecteur limite E qui est unique et qui satisfait l'equation $E = ME$ ou $(M-I)E = 0$

$E = \{e(0), e(1), \ldots e(c)\}$ est definie par des equations lineaires homogenes avec la condition $e(0)+e(1)+\ldots+e(c) = 1$

En general, quand une chaine de Markov ergodique commence avec un vecteur de distribution E_0, la distribution de X_1 est $E_1 = ME_0$, celle de X_2 est $E_2 = ME_1 = M^2E_0$ ainsi de suite. Les vecteurs E_t sont différents mais convergent vers un vecteur fixe E. Si le vecteur initiale E_0 est identique à E, on a $E_1 = ME_0 = ME = E$

$$E_2 = ME_1 = ME = E$$

et $E_t = E$

C'est pour cette raison que le vecteur limite E est appellée vecteur stationnaire de distribution de probabilité. Nous dirons que la chaine opère sous les conditions stationnaires. Souvent un temps important s'ecoule avant que l'etat stationnaire soit atteinte.

C'est pourquoi on confond ergodicité à long terme.

CHAPITRE III : DESCRIPTION DU MODELE

Nous supposons qu'une certaine industrie consomme une matière première qui se presente sous forme d'unités indivisibles, et que l'on traite exactement une unité par jour. Nous supposerons en outre que le stock ne peut se composer que de 0, 1 ou 2 unités par exemple; les frais de stockage quotidiens correspondants sont supposés être alors respectivement egaux à h_0, h_1 et h_2. Pour fixer les idées, on peut supposer que l'activité de l'atelier se déroule dans la journée, et que chaque soir on peut passer commande, avec livraison dans la nuit même de n'importe combien d'unités. Mais il est clair que le nombre d'unités ainsi commandées ne pourra jamais depasser 3, dont 2 au maximum pour le stock si celui-ci est au niveau 0 et la troisieme livrable directement à l'atelier.
Au moment de passer commande, on tiendra compte d'une part du niveau $s = (0, 1, 2)$ du stock disponible, d'autre part du cours de l'unité sur le marché. Faisons l'hypothèse que le cours prenne les valeurs c et d (
et cela avec les probabilités respectives p et q $(p+q=1)$.
Il y a donc 6 situations possibles, resumées par 6 cases du tableau ci-après, et dans chacune de ces 6 situations la decision à prendre concernera le nombre d'unités dont on passe la commande. Toute manière de remplir ce tableau à l'aide de 6 entiers non negatifs convenables $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \delta_0, \delta_1, \delta_2$ constituera ainsi une politique d'achat, et le but ultime est de determiner une politique d'achat optimale

		stock		
		0	1	2
cours	c	γ_0	γ_1	γ_2
	d	δ_0	δ_1	δ_2

Pour qu'une telle politique soit compatible avec la capacité de stockage il faut evidemment que :

$\gamma_0 \leq 3 \quad , \quad \gamma_1 \leq 2 \quad , \quad \gamma_2 \leq 1$

$\delta_0 \leq 3 \quad , \quad \delta_1 \leq 2 \quad , \quad \delta_2 \leq 1$

Mais d'autre part, avant tout calcul, le simple bon sens indique que ici, si le cours est elevé d, on ne perd certainement rien à attendre plutôt qu'à acheter, à moins d'être obligé d'acheter parce que le stock se trouve être nul, mais en n'achetant alors que juste l'unité nécéssaire. En d'autres termes, pour qu'une politique d'achat soit optimale, il faudra que :

$$\delta_0 = 1 , \quad \delta_1 = 0 \quad \text{et} \quad \delta_2 = 0 .$$

En outre, quand le cours a sa valeur basse c, il ne sera certainement pas raisonnable d'acheter plus quand le stock est déjà elevé que quand le stock est faible ; on aura donc, pour toute politique optimale,

$$\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2$$

Enfin de compte il y aura lieu d'admettre, comme politiques candidates à l'optimalité, toutes celles pour lesquelles le triplet $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ constitue une suite non croissante telle que :

$$1 \leq \gamma_0 \leq 3 \quad , \quad 0 \leq \gamma_1 \leq 2 \quad , \quad 0 \leq \gamma_2 \leq 1$$

La première de ces six inégalités resultant de ce qu'il faut bien acheter au moins une unité pour tourner quand le stock est nul. Chacune de ces politiques peut être representée, sur une figure telle que la figure 1, par un chemin joignant B à A, pour lequel $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ seront les altitudes des trois paliers successifs, chemin compris, au sens large, entre les deux chemins extrêmes $(3,2,1)$ et $(1,0,0)$ representés en traits pleins.

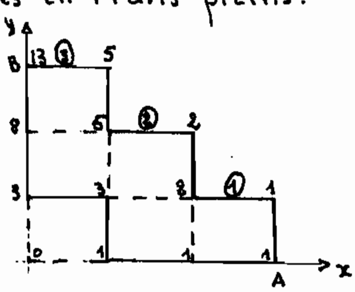


Figure 1

L'algorithme de dénombrement des chemins admissibles entre A et B existe.

Nous decrivons ci dessous l'algorithme de dénombrement

III.1 algorithme de denombrement

Soient C_1 et C_2 deux domaines qui délimitent la region des chemins possibles joignant les points O et K comme illustré à la figure 2.

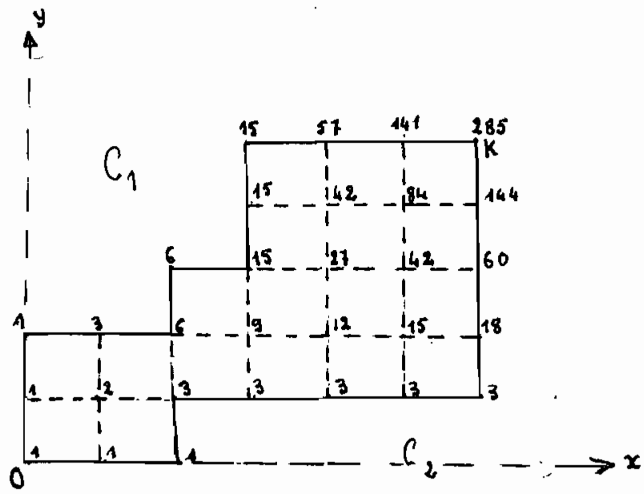


figure 2

L'algorithme consiste à inscrire en regard de chacun de ces sommets (il est commode de le faire légèrement au dessus et à droite) le nombre de joignant O à ce sommet sans sortir de la region indiquée. Si un sommet n'a pas de voisin de gauche (c'est le cas des extrêmétés des arcs verticaux de C_1), il suffit d'y affecter le même entier qu'à son voisin inferieur; si un sommet n'a pas de voisin inferieur (c'est le cas des extremités des arcs horizontaux de C_2), il suffit d'y affecter le même entier qu'à son voisin de gauche; enfin à tout autre sommet s il suffit d'affecter la somme des entiers affectés à son voisin de gauche s' et à son voisin inferieur s'' (puisque les chemins joignant O à s passent alors tous soit par s' soit par s''.

Il suffit de commencer par affecter 1 au sommet O (puisque seul le "chemin vide" joint O à lui même), puis de progresser à l'aide de cet algorithme par "couches" successives correspondant à $x+y=h$ (avec $h=1,2,3,\dots,a+b$) avec $K(a,b)$ dans le repere xOy, pour arriver au point final K.

Pour le cas de la figure 2, on arrive à 285 chemins possibles surmontant C_2

et surmontés par C_1

Nous constatons que pour le cas de la figure 1 il y a au total 13 chemins qui sont

γ_0	γ_1	γ_2
3	2	1
3	2	0
3	1	1
3	1	0
3	0	0
2	2	1
2	2	0
2	1	1
2	1	0
2	0	0
1	1	1
1	1	0
1	0	0

L'un d'eux choisi arbitrairement à titre d'exemple pour la suite des calculs sera $\gamma_0 = 2$, $\gamma_1 = 2$ et $\gamma_2 = 1$ et definira donc la politique d'achat suivante

		stock s			
		0	1	2	
cours	c	2	2	1	probabilité p
	d	1	0	0	probabilité q

Tableau I

Il est alors facile de décrire l'evolution du stock comme une chaine de Markov à trois etats 0, 1, 2 ; en effet, si l'on appelle s le stock d'un certain jour et s' le stock du lendemain, on aura toujours

$$s' = s + (\text{quantité achetée}) - 1$$

et la quantité achetée peut prendre, avec les probabilités connues p et q, les deux valeurs indiquées par la colonne s du tableau ci dessus.

On construit maintenant la matrice M des probabilités de transition ou de passage.

On considère les etats du stock comme une chaine de Markov $\{S_n\}$ prenant les valeurs 0, 1, 2

On a $p_{ij} = P\{S_n = j / S_{n-1} = i\}$ avec $S_{n+1} = s'$ et $S_n = s$

On a $p_{oo} = P\{S_n = 0 / S_{n-1} = 0\}$ donc $s' = 0$ et $s = 0$ d'où la quantité achetée est egale à 1. Le tableau 1 montre que la probabilité pour que $s = 0$ et que la quantité achetée soit 1 est q

donc $p_{oo} = q$

De la même manière on construit entièrement la matrice des probabilité de passage M

M =

s \ s'	0	1	2
0	q	p	0
1	q	0	p
2	0	q	p

En supposant que la chaine est à l'etat stationnaire, le vecteur distribution des probabilités E est constant il s'agit du vecteur des probabilités ergodique. $E = (e_0, e_1, e_2)$

donc $EM = E$ et $(M - I)E = 0$

$$(M - I)E = 0 \iff \begin{pmatrix} q-1 & p & 0 \\ q & -1 & p \\ 0 & q & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit
$$\begin{cases}(q-1)e_0 + pe_1 = 0\\ qe_0 - e_1 + pe_2 = 0\\ qe_1 + (p-1)e_2 = 0\end{cases}$$

la solution donne :

$$e_0 = \frac{q^2}{1-pq}, \quad e_1 = \frac{pq}{1-pq}, \quad e_2 = \frac{p^2}{1-pq}$$

qui represente sur le long terme les pourcentages des nombres de jours ou le stock sera 0, 1, 2

On construit le tableau suivant

	Depense de stockage	Depense moyenne de matière première
jour de stock 0	h_0	$2pc + qd$
jour de stock 1	h_1	$2pc$
jour de stock 2	h_2	pc

Tableau II

La depense moyenne quotidienne sur le long terme, qui correspond à la politique d'achat envisagée est donc

$$D = e_0(h_0 + 2pc + qd) + e_1(h_1 + 2pc) + e_2(h_2 + pc)$$

On doit faire la même chose pour les 13 politiques candidates à l'optimalité et de retenir en fin de compte celle qui donne la plus petite depense quotidienne moyenne sur le total D des deux postes "stockage" et "matieres".

CHAPITRE IV : APPLICATION DU MODELE

Le modèle décrit au chapitre III a été appliqué pour un cas concret. Il s'agit d'une societé de la place en l'occurence la societé "Hamo" specialisée dans la fabrication de beton préfabriqué pour la construction de logements.

La centrale à béton de cette societé est munie d'un silo où le ciment est stocké. Ce stockage s'effectue à l'aide d'un compresseur consommant de l'energie électrique et le ciment est livré de la "SO.CO.CIM" à la société "Hamo" par un camion citerne de la société.

Les données relatives au stock sont les suivantes :

- Capacité maximale du silo . . . . . . 100 tonnes
- Consommation journalière moyenne . . . . . 30 t/j
- Puissance du compresseur . . . . 25 kw
- Debit du compresseur . . . . . 59 l/s
- Consommation de gas-oil du camion citerne . . . . 46 l/100 km
- Distance Hamo - SO.CO.CIM . . . . 10 km
- Prix d'un kwh d'energie electrique . . . . 65 F
- Prix d'un litre de gas-oil . . . . 210 F

Evolution du prix de la tonne de ciment depuis 1977

Periodes	Prix TTC (FCFA)
Janvier 77 à Juin 77	10141
Juillet 77 à Août 77	13622
Août 77 à Avril 78	15176
Mai 78 à Fevrier 79	15176
Mars 79 à Juillet 79	16188
Juillet 79 à Juin 80	19077
Juillet 80 à Août 81	21860
Août 81 à Septembre 81	22124

Septembre 81 à Fevrier 82	29722
Fevrier 82 à Août 82	30382
Août 82 à Juin 83	33304
Juin 83 à Septembre 83	34271
Septembre 83 à Mai 84	36640
Mai 84 à Decembre 84	42346
Janvier 85 à Avril 86	43614
Avril 86 à Août 86	45717
Août 86 à Mars 87	44845

IV.1 traitement des donnees

IV-1-1 calcul des coûts de stockage

Le coût de stockage comprend: le cout du transport, le coût de l'energie electrique consommée par le compresseur en stockant le ciment dans le silo

– coût du transport

Pour aller et revenir à Hamo le camion-citerne parcourt $2 \times 10 = 20$ kms
Avec une consommation de 46 ℓ/100km à 210F le litre ce coût est: $\frac{210 \times 46 \times 20}{100} =$
$= 1932F$

Comme la capacité du camion-citerne est de 30t, tant que la commande en ciment reste inférieure ou égale à 30t le coût du transport est 1932F
Pour une commande superieure (30 à 60t) le coût du transport devient $2 \times 1932F = 3864F$ car il faut 2 voyages. Pour une commande comprise entre 60 et 90t il faut 3 voyages le coût de transport devient $3 \times 1932 = 5796$ et enfin pour une commande comprise entre 90 et 100t ce coût est 4×1932 soit 7728F. Ce dernier coût est le maximum car on est limité par la capacité de stockage maximale du silo qui est de 100t
Pour recapituler on a des situations suivantes selon la valeur de la commande que nous designons par G :

commande G (en tonnes)	coût de transport
$0 < G \leq 30t$	1932F
$30t < G \leq 60t$	3864F
$60t < G \leq 90t$	5796F
$90t < G \leq 100t$	7728F

– cout de l'energie

Convertissons tout d'abord le debit de $59\,l/s$ en t/s

La densité du ciment etant de 3,15, le debit est : $3{,}15 \times \frac{kg}{l} \times 59\frac{l}{s}$
$= 185{,}85\,kg/s$

Soit $0{,}18585\,t/s$

Le coût de stockage d'une tonne est : $\frac{1t}{0{,}18585\,t/s} \times \frac{1h}{3600s} \times 25kw \times \frac{65F}{kwh}$

$= 2{,}4\,F/t$

Le coût total de stockage sera egale à la somme du coût du transport qui est fixe et de l'esperance mathematique du coût de l'energie.

Designons par $U(1,I)$ la quantité achetée quand le stock se trouve à l'etat I, le prix etant c pour une tonne avec une probabilité p et $U(2,I)$ la quantité achetée quand le stock est à l'etat I, le prix etant D pour une tonne avec une probabilité q ; $(p+q=1)$

Le coût total de stockage est alors selon cas :

Commande C (en tonnes)	coût total de stockage
$0 < G \leq 30t$	$1932 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q$
$30 < G \leq 60t$	$3864 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q$
$60 < G \leq 90t$	$5796 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q$
$90 < G \leq 100t$	$7728 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q$

IV–1–2 : coût d'achat moyen probable

Ce coût est : $U(1,I)pC + U(2,I)qD$

IV-1-3 : dépense moyenne totale probable pour un état I

$$Q = 1932 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q + U(1,I)pC + U(2,I)qD \quad \text{si } 0 < G \leq 30t$$

$$Q = 3864 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q + U(1,I)pC + U(2,I)qD \quad \text{si } 30t < G \leq 60t$$

$$Q = 5796 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q + U(1,I)pC + U(2,I)qD \quad \text{si } 60t < G \leq 90t$$

$$Q = 7728 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q + U(1,I)pC + U(2,I)qD \quad \text{si } 90t < G \leq 120t$$

IV-1-4 : dépense moyenne probable totale d'une politique sur le long terme

Si N désigne le nombres d'états du stock et $E(I)$ la probabilité ergodique de l'état I ; cette dépense D est :

$$D = \sum_{I=1}^{N} Q\,E(I)$$

$$D = \sum_{I=1}^{N}\left[1932 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q + U(1,I)pC + U(2,I)qD\right]E(I) \quad \text{si } 0 < G \leq 30t$$

$$D = \sum_{I=1}^{N}\left[3864 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q + U(1,I)pC + U(2,I)qD\right]E(I) \quad \text{si } 30t < G \leq 60t$$

$$D = \sum_{I=1}^{N}\left[5796 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q + U(1,I)pC + U(2,I)qD\right]E(I) \quad \text{si } 60t < G \leq 90t$$

$$D = \sum_{I=1}^{N}\left[7728 + 2{,}4\,U(1,I)p + 2{,}4\,U(2,I)q + U(1,I)pC + U(2,I)qD\right]E(I) \quad \text{si } 90t < G \leq 120t$$

IV-1-5 : <u>détermination des prix C et D ainsi que leur probabilité p et q associée respectivement</u>

Pour que les résultats de l'étude puissent refléter les réalités du moment, il faut que le cours actuel s'identifie à l'une des valeurs C ou D.

Ainsi, il faut maintenant prévoir le cours prochain. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode des courbes de tendance.

Comme $C < D$, si la valeur prévue est supérieure à la valeur actuelle, cette valeur prévue sera D et le cours actuel C. Dans le cas contraire on inverse les identifications.

Ces deux valeurs etant connues, il faut maintenant déterminer les probabilités associées.

Si la valeur prevue est superieure au cours actuel, il y a donc une phase croissante du cours actuel au prochain cours. L'analyse de M. Kivehovitch et J. Vialar sur les series chronologiques et la theorie du hasard permet de calculer la probabilité d'une phase croissante : soit p_1 cette probabilité.

Comme la methode d'ajustement des courbes de tendance est fiable à 90%, alors la probabilité de la valeur prevue est $\frac{90}{100} \times p_1 = q$

Si la valeur prevue est identique à la valeur actuelle, on a la même probabilité q calculée si dessus car cette analyse, les auteurs incluent les paliers ou phase constante dans l'ensemble des phases croissantes.

Si la valeur prevue du cours est inferieure à la valeur actuelle, il y a une phase decroissante entre ces deux valeurs ; la probabilité du cours prevue sera $p = \frac{90}{100}(1 - p_1)$

Et dans tous les cas, la probabilité du cours actuel sera considerée comme etant $1-p$ ou $1-q$ conformement aux hypotheses du modèle.

IV-1.5-1 : <u>détérmination des prix C et D</u>

a/ Généralités sur les Courbes de tendances

Il arrive souvent qu'un parametre fasse apparaitre une croissance stable au cours d'un ensemble de periodes données quoiqu'une chute se produise au cours de certaines periodes prises individuellement. Cela suggere lorsque l'on cherche à établir une prévision pour les années futures, de faire passer une courbe reguliere à travers les points ecartés et de prolonger cette courbe pour le futur. Il est préférable de ne pas se fier aux tracés à la main et normalement on ajuste une equation mathematique plus ou moins simple aux chiffres reels, habituellement par la méthode des moindres carrées.

L'ajustement d'une courbe mathématique fait appel à deux hypotheses :

La première concerne le type de courbe que l'on choisit pour l'ajustement des chiffres observés ; la seconde porte sur le fait que la courbe choisie, une fois extrapolée, representera bien l'evolution du parametre dans le futur.

Une courbe de tendance mathematique est ajustée aux valeurs reelles du parametre en trois etapes.

Tout d'abord, il faut verifier s'il existe une courbe de tendance s'ajustant aux données, de sorte que les ecarts observés puissent être vraisemblablement attribués à des facteurs aleatoires ou à très court terme.

Ensuite on choisit le type de courbe qui représente le mieux les données

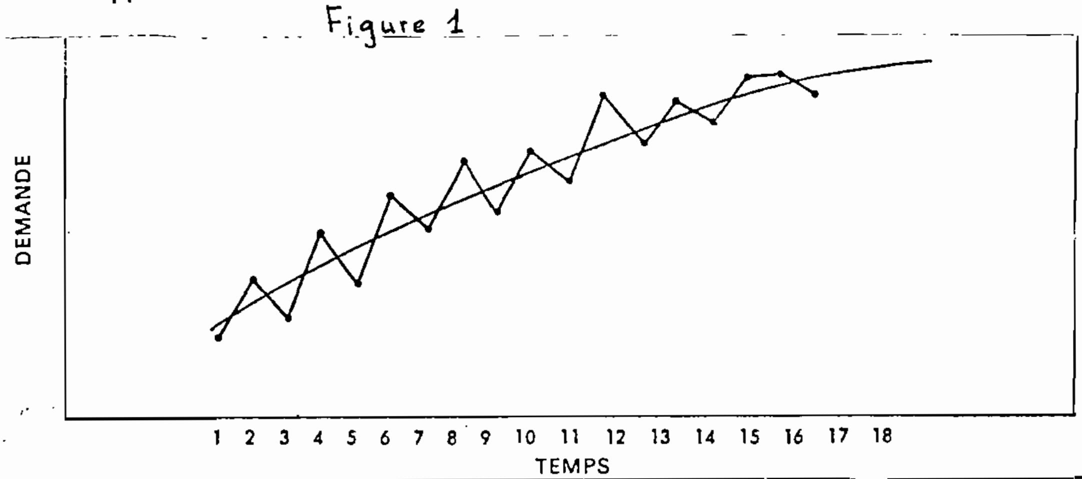
Enfin on determine par le calcul le meilleur ajustement d'une courbe de ce type.

a-1/ notion de moyenne mobile

Il est rare que l'évolution de certains paramètres soit regulière et l'on observe habituellement, comme à la figure 1, que, certaines années, la croissance du parametre est sensiblement differente de son allure generale.

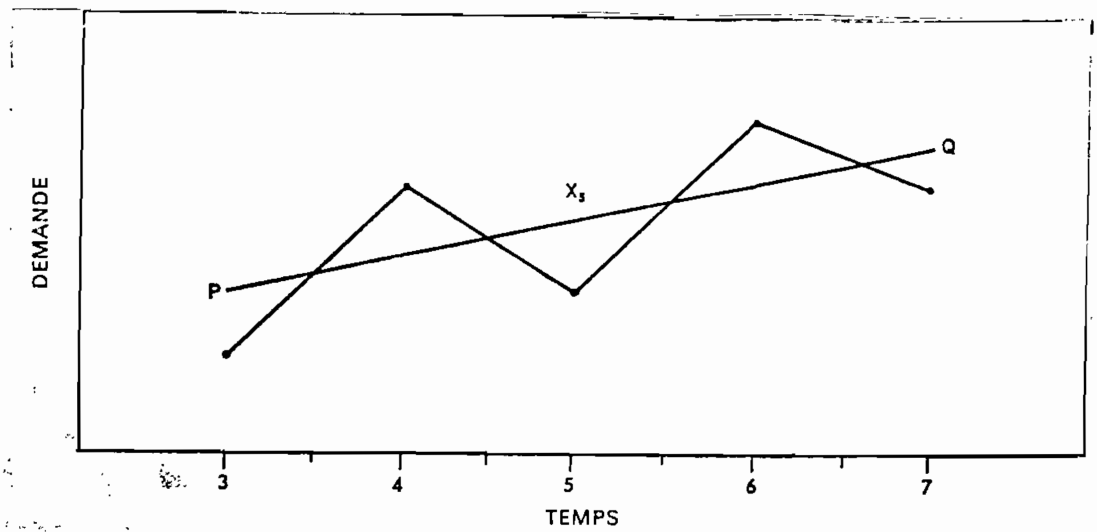
Bien que l'existence d'un certain rythme de croissance paraisse evident, il est peu sage de chercher à preciser ce concept intuitif en traçant à main levée une courbe au voisinage des points observés. Il est habituel cependant de tracer une courbe utilisant la technique de la moyenne mobile en vue d'obtenir une approximation du taux de croissance sous-jacent du parametre à etudier. l'importance de l'ecart devient alors plus apparent

Figure 1



La moyenne mobile est constituée par une suite de points annuels, semestriels, etc (tout depend de la periode considerée) de la façon suivante : la figure 2 represente une partie de la croissance du parametre (dans figure 1 il s'agit par exemple d'une demande) que l'on trouve à la figure 1 en entier. Pour la commodité de la representation, on a accru l'echelle des temps. Si une ligne de meilleur ajustement PQ est ajustée aux chiffres de la demande, par exemple, pour les années 3 à 7, elle donnera une approximation de la croissance de ce paramètre (demande) au cours de cette periode limitée.

Figure 2



Tout point, sur cette ligne, donnera une estimation de la demande moyenne à la periode considerée et, en particulier, le point median PQ(X_5) constitue une estimation de la demande à l'année 5, le point median de la période. En ajustant des lignes semblables à des moyennes quinquennales successives, de l'année 4 à l'année 8, de l'année 5 à l'année 9, etc, on obtiendra une serie de points X_5, X_6, X_7, ... comme estimation des demandes moyennes aux années 5, 6, 7, ... respectivement. En vue d'obtenir des valeurs appropiées pour X_5, X_6, X_7, il n'est pas necessaire de construire, à chaque fois, la ligne de meilleur ajustement. X_5 est egal à la moyenne des cinq demandes annuelles pour les années 3 à 7, X_6 pour les années 4 à 8 etc. C'est la raison pour laquelle les points X_5, X_6, X_7 sont qualifiés de points de moyenne mobile, et la courbe reliant ces points est dite moyenne mobile.

La moyenne mobile s'exprime par une courbe qui traduit le taux de croissance sous-jacent du paramètre, mais minimise les ecarts aleatoires du paramètre par rapport à cette tendance. Plus longue est la periode servant au calcul de la moyenne mobile, plus les ecarts se trouveront reduits et plus regulière sera la courbe qui la representera. A mesure que la durée de la periode s'accroît, la moyenne mobile à tendance à niveler le taux de croissance sous-jacent, en particulier lorsqu'il est nettement non lineaire. Il est prudent, dans ces conditions, d'utiliser une periode aussi courte que possible qui soit compatible avec une moyenne mobile raisonnablement regulière. Comme la valeur de la moyenne mobile est representée au point median de la periode, il est commode d'effectuer son calcul sur un nombre impair d'années de façon que le point median coïncide effectivement avec une année rèlle.

a-2/ Pente

L'objet d'une prevision est d'estimer les changements à intervenir entre les situations actuelles et futures. Lorsqu'une courbe de tendance est ajustée aux chiffres de la demande et extrapolée pour etablir une prevision, la confiance à lui accorder depend de la precision avec laquelle est estimée la pente de la courbe. A la figure 2, la ligne de meilleur ajustement PQ fournit une estimation de la pente à l'année 5, point median de la periode. Des estimations semblables de la pente peuvent être faites pour les periodes successives. Si la tendance est lineaire, ces estimations sont egales. Si la tendance a la forme d'une progression géometrique ou d'une exponentielle modifiée, les estimations de la pente se modifieront en consequence. La pente de la demande est, dans ces conditions, un critère pour le choix d'une courbe de tendance et se trouve à la base de la technique decrite ici en vue du choix de la courbe. Le mot pente sera utilisé pour designer la serie des estimations de la pente faites aux points medians des periodes successives.

a-3/ Caractéristiques de Pente

Il est difficile par simple observation d'etablir quelle est la forme mathematique particulière de la courbe, susceptible de s'ajuster aux chiffres du paramètre, bien que l'on puisse habituellement detecter une incompatibilité grossière. Pour venir à bout de cette difficulté sans avoir recours à des methodes d'analyse raffinées, on a choisi une procedure qui transforme les valeurs originales du parametre en une relation lineaire en fonction du temps lorsque la courbe particulière est est susceptible de s'ajuster aux données. Ces transformations amenent les fonctions de la pente ou du taux de croissance à se presenter sous forme de ligne droite lorsqu'on represente les points correspondants en fonction du temps. La caracteristique de pente de chaque courbe de tendance est confrontée avec celle des valeurs de la demande et, si la même relation lineaire est obtenue pour la periode sur laquelle portent les données, la procedure conduit à penser qu'il n'y a pas d'incompatibilité avec les chiffres de la demande pour cette periode. S'il y a dissemblance entre les caracteristiques de pente des chiffres de la demande et de la courbe de tendance, on est conduit à proscrire cette courbe de tendance pour la prevision.

Cette procedure fournit une methode pour la recherche de la capacité de differents types de courbes qui donnent une representation des données et un guide pour le choix des courbes à utiliser.

a-4/ Quelques Types de Courbes de Tendance et leurs Caracteristiques de Pente.

Les courbes de tendance les plus frequemment utilisées peuvent être classées en 3 categories :

- Les courbes polynomiales ;
- Les courbes exponentielles ;
- Les courbes exponentielles modifiées.

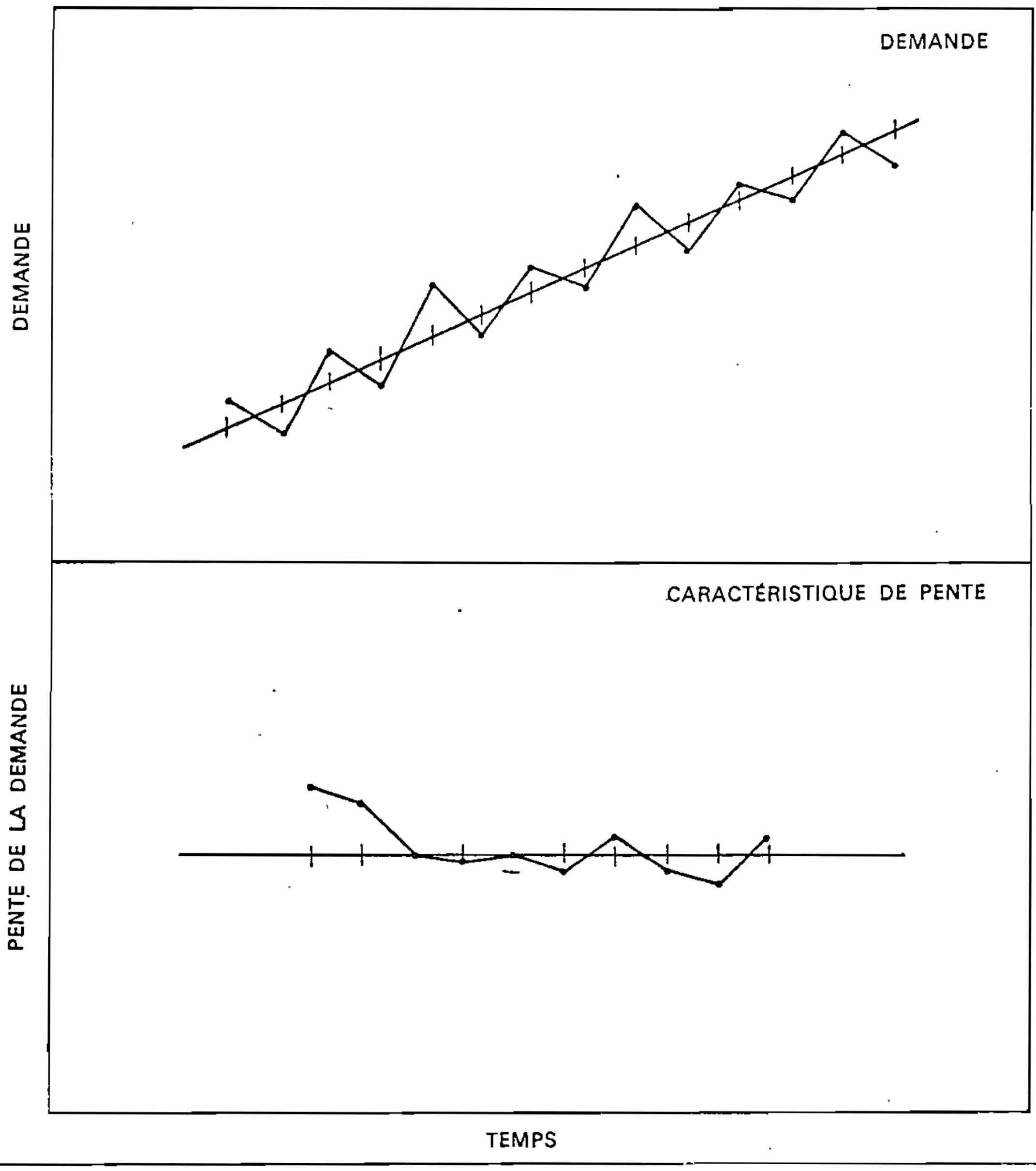
– Courbes Polynomiales

Elles comprennent la ligne droite et la parabole

ligne droite : $y = a + bt$ où a et b sont des constantes

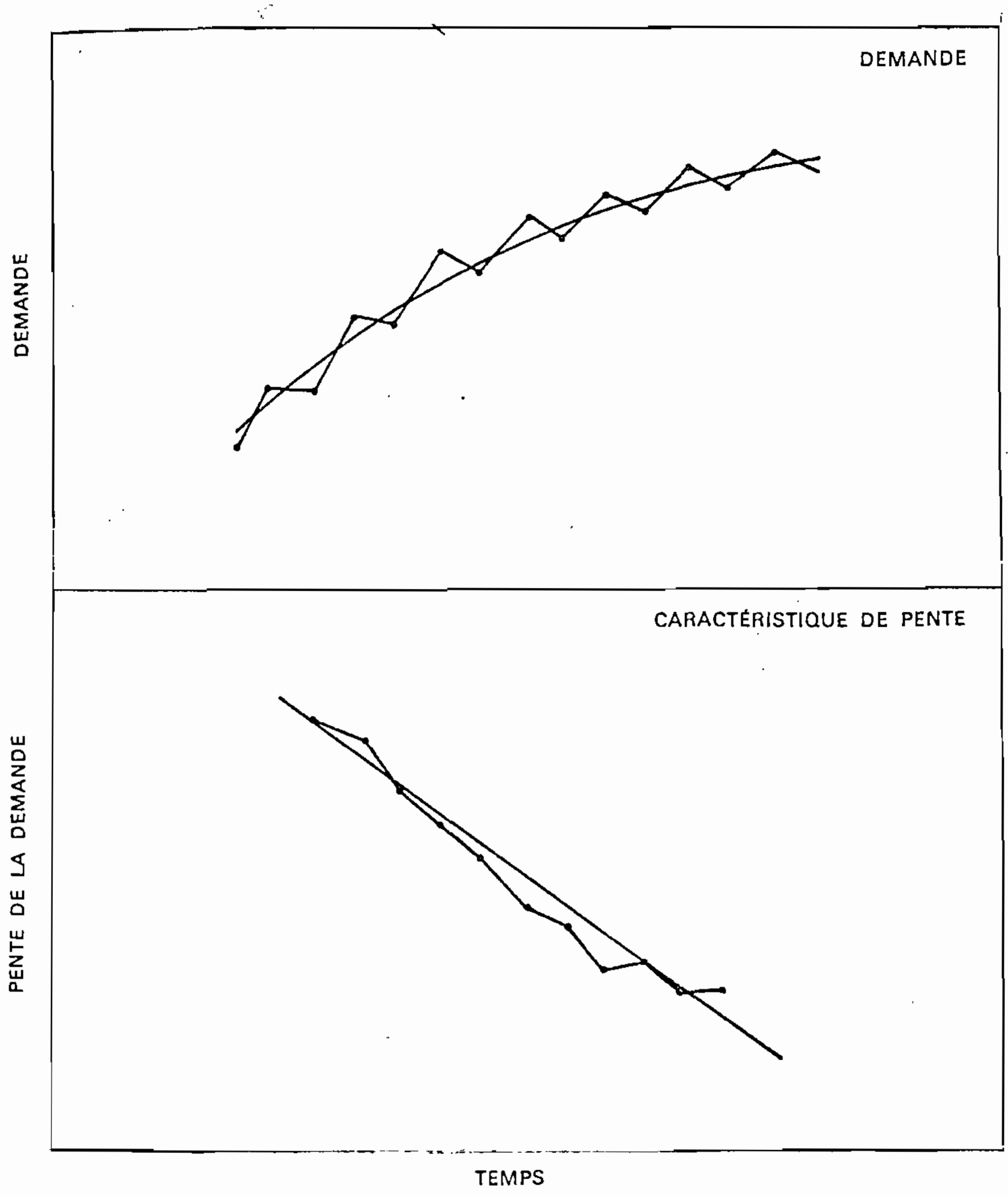
la pente de la ligne droite est constante et, par suite, la demande s'accroît d'un montant constant chaque année. Si on represente la pente en fonction du temps, on obtient une ligne droite horizontale : c'est la caracteristique de pente cherchée. La figure 3 montre un exemple où la croissance peut être correctement representée au moyen d'une ligne droite (le paramètre dans cet exemple est une demande d'un certain produit

FIGURE 3 — LIGNE DROITE



la parabole : $y = a + bt + ct^2$ où a, b et c sont des constantes
La pente de la parabole varie uniformement dans le temps et, lorsqu'on la represente en fonction du temps, on obtient une ligne droite inclinée sur l'horizontale qui constitue la caracteristique de pente. La figure 4 montre un cas où la croissance peut être correctement representée au moyen d'une parabole.

FIGURE 4 — PARABOLE

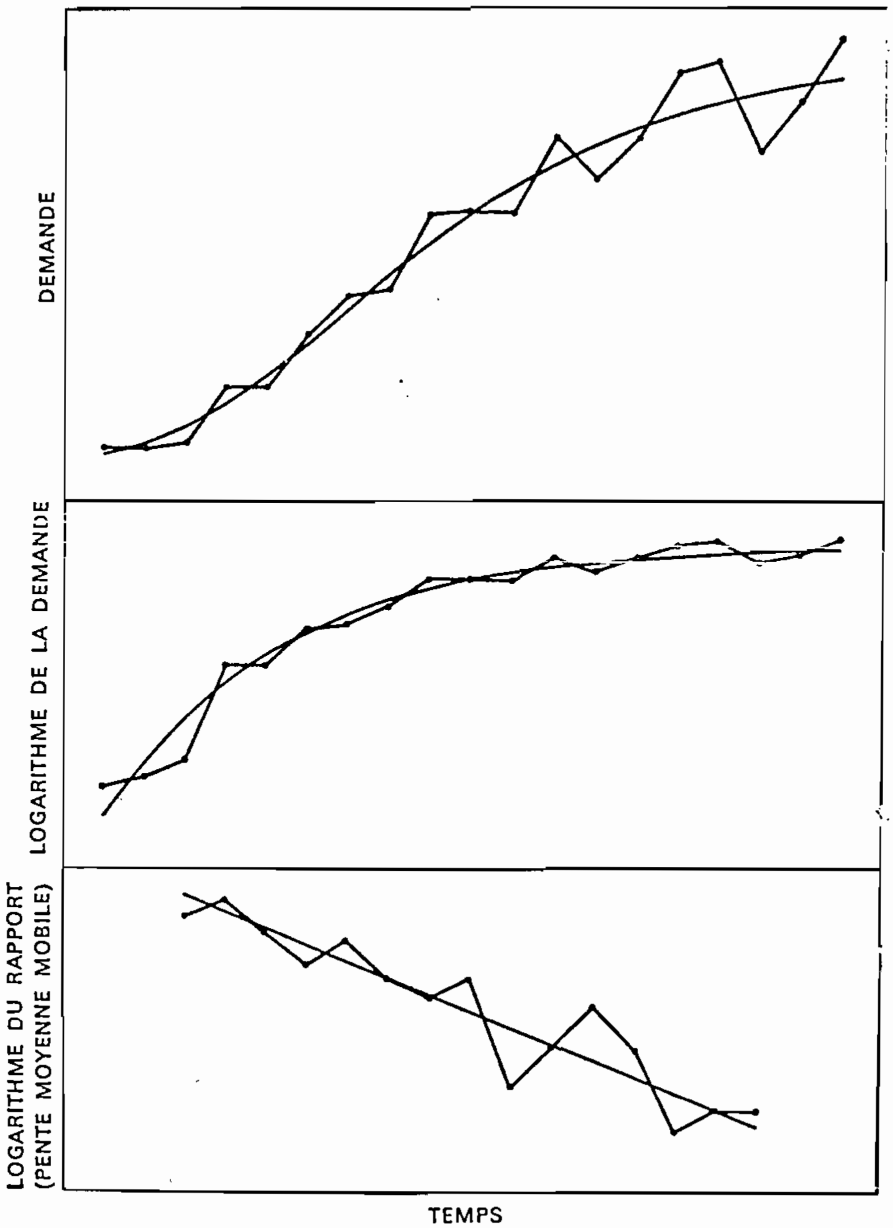


Courbe de Gompertz : $\log y = a - br^t$ où a, b et r sont des constantes positives avec r inferieur à 1.

Avec la courbe de Gompertz, le logarithme du rapport de la pente à la moyenne, quand on le represente en fonction du temps, donne une ligne droite s'abaissant vers la droite qui constitue la caracteristique de pente.

La figure 8 donne un exemple de croissance susceptible d'une representation correcte au moyen de la courbe de Gompertz.

FIGURE 8 — COURBE DE GOMPERTZ



a-5/ Procedure d'utilisation des caracteristiques de pente

Les diverses caracteristiques de pente decrites dans les paragraphes precedents possedent de nombreux traits communs que l'on peut resumer de la façon suivante:

Tableau 1

Calculer et representer en fonction du temps:	Si le resultats est au voisinage d'une ligne droite :	le type de courbe suggere est :
Pente	Horizontale	ligne droite
Pente	Faisant un angle avec l'horizontale	Parabole
Pente/(moyenne mobile)	Horizontale	Exponentielle simple
Pente/(moyenne mobile)	Faisant un angle avec l'horizontale	Parabole logarithmique
Logarithme de la pente	S'inclinant vers la droite	Exponentielle simple modifiée
Logarithme du rapport [pente/(moyenne mobile)]	S'inclinant vers la droite	Courbe de Gompertz
Logarithme du rapport [pente/(moyenne mobile)^2]	S'inclinant vers la droite	Courbe logistique

a-6/ Limitations à l'utilisation des courbes de tendance

• données à utiliser pour l'ajustement des courbes

Il peut arriver que l'etude des caracteristiques de pente montre qu'un certain type de courbe n'est compatible qu'avec les ~~données se rapportant à une~~ partie de la periode considerée. Puisque ceci est en contradiction avec l'hypothese de cette technique selon laquelle il existe une relation permanente entre les valeurs prises par le paramètre etudié et le temps, il n'est pas justifié d'ajuster la courbe à la totalité des données. On devra n'effectuer l'ajustement que pour la partie des données qui apparait convenable du point de vue caracteristique de pente et, puisque la courbe est destinée à etre extrapolée, c'est sur les données les plus recentes que devra porter l'ajustement. Si une courbe n'est pas a-5/ Procedure d'utilisation des caracteristiques de pente

Les diverses caracteristiques de pente decrites dans les paragraphes precedents possedent de nombreux traits communs que l'on peut resumer de la façon suivante:

Tableau 1

Calculer et representer en fonction du temps:	Si le resultats est au voisinage d'une ligne droite:	le type de courbe suggere est:
Pente	Horizontale	ligne droite
Pente	Faisant un angle avec l'horizontale	Parabole
Pente/(moyenne mobile)	Horizontale	Exponentielle simple
Pente/(moyenne mobile)	Faisant un angle avec l'horizontale	Parabole logarithmique
Logarithme de la pente	S'inclinant vers la droite	Exponentielle simple modifiée
Logarithme du rapport [pente/(moyenne mobile)]	S'inclinant vers la droite	Courbe de Gompertz
Logarithme du rapport [pente/(moyenne mobile)]	S'inclinant vers la droite	Courbe logistique

a-6/ Limitations à l'utilisation des courbes de tendance

• données à utiliser pour l'ajustement des courbes

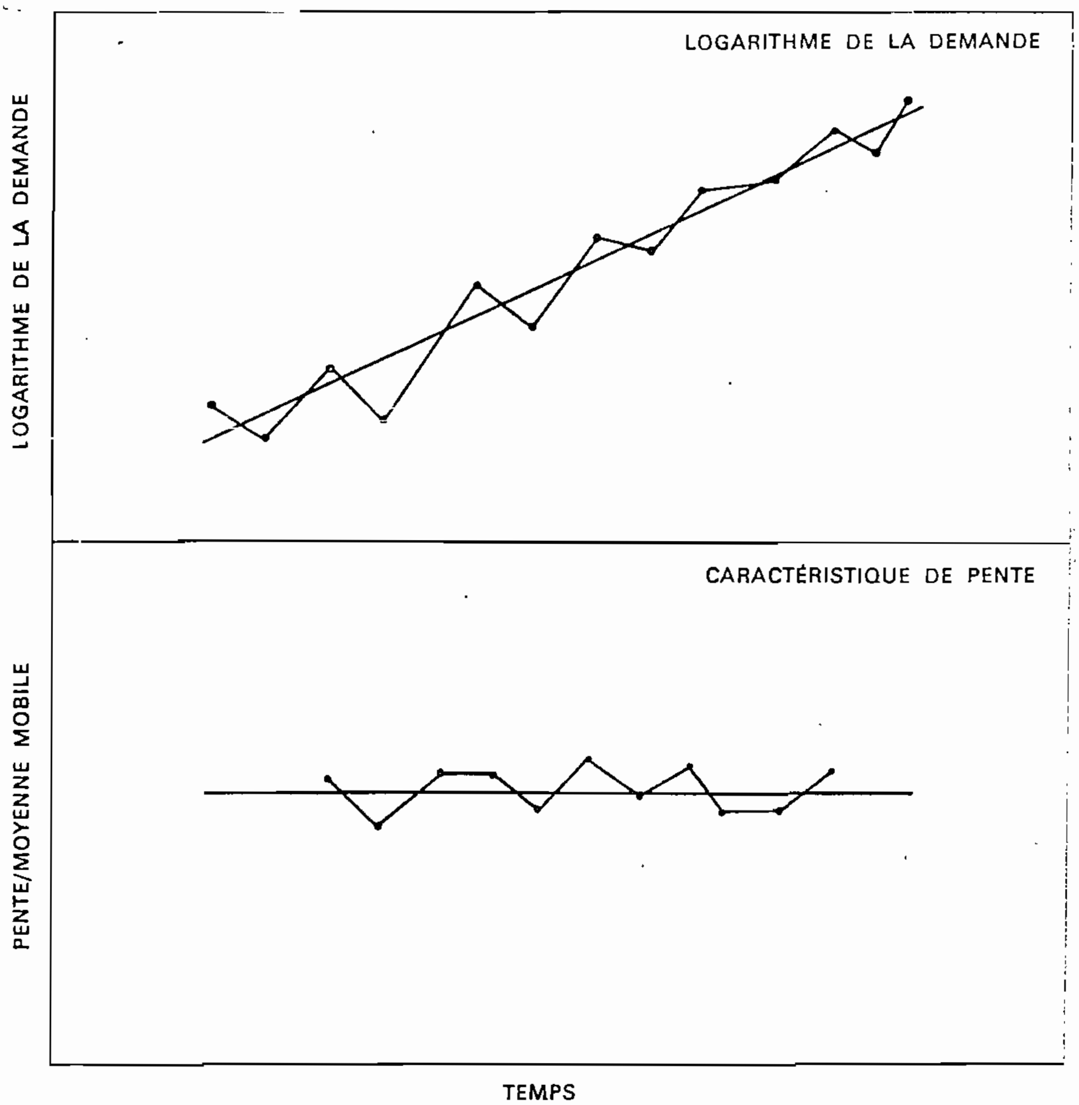
Il peut arriver que l'etude des caracteristiques de pente montre qu'un certain type de courbe n'est compatible qu'avec les données se rapportant à une partie de la periode considerée. Puisque ceci est en contradiction avec l'hypothese de cette technique selon laquelle il existe une relation permanente entre les valeurs prises par le paramètre etudié et le temps, il n'est pas justifié d'ajuster la courbe à la totalité des données. On devra n'effectuer l'ajustement que pour la partie des données qui apparait convenable du point de vue caracteristique de pente et, puisque la courbe est destinée à etre extrapolée, c'est sur les données les plus recentes que devra porter l'ajustement. Si une courbe n'est pas

– Courbes exponentielles

Exponentielle simple : Si y designe le paramètre etudié, on a log y = a + bt où a et b sont des constantes. Ici le paramètre s'accroît chaque année d'un pourcentage constant et le rapport de la pente du parametre au paramètre lui même reste fixe.

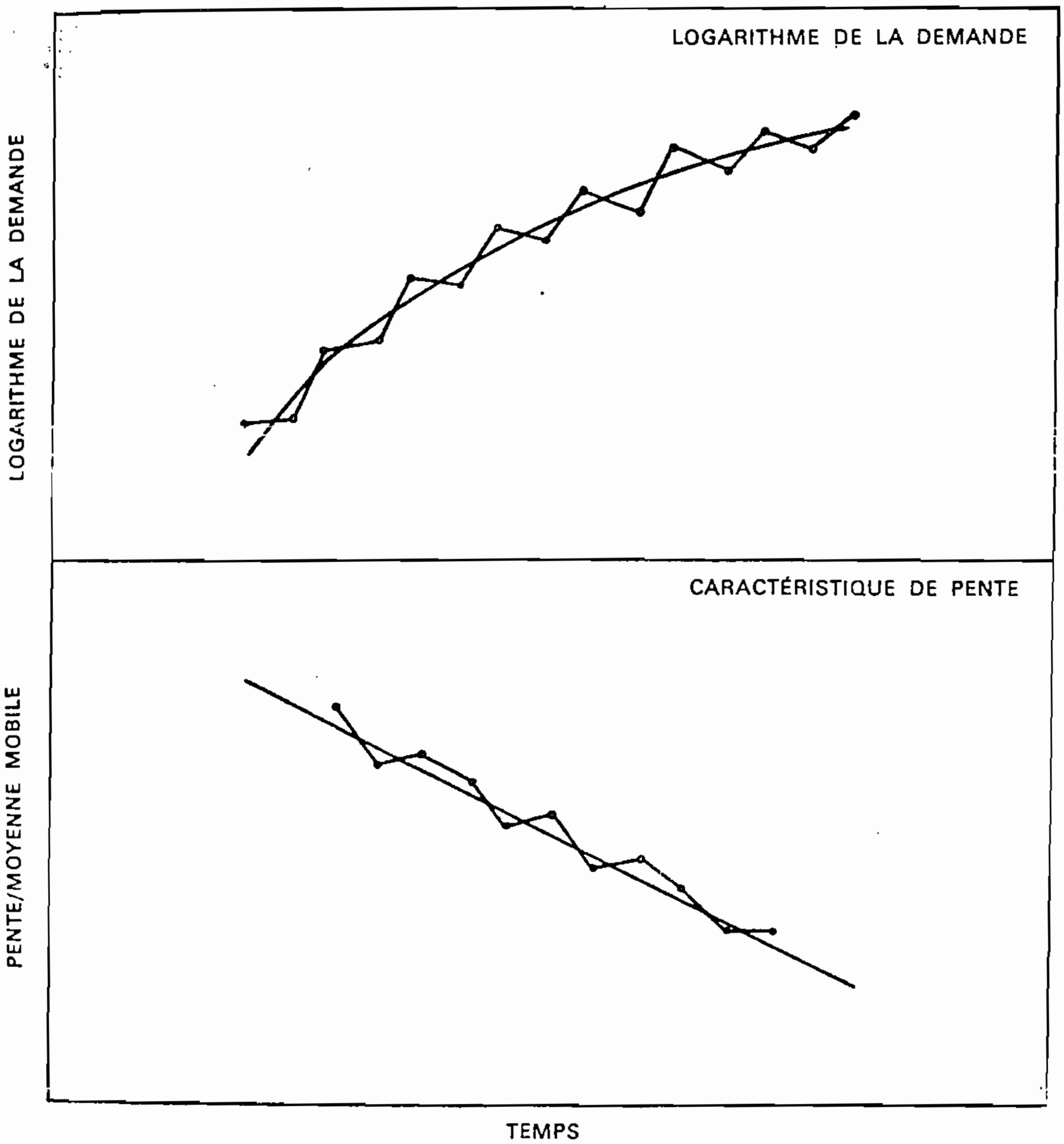
La moyenne mobile donne une estimation du parametre et, par suite, si le rapport de la pente à la moyenne mobile est représenté en fonction du temps, on obtient une ligne droite horizontale qui est la caracteristique de pente. La figure 5 donne un exemple où la croissance peut être representée correctement au moyen d'une exponentielle simple.

FIGURE 5 — EXPONENTIELLE SIMPLE



Parabole logarithmique : $\log y = a + bt + ct^2$ où a, b et c sont des constantes.
Tandis que le rapport de la pente du paramètre au parametre lui même reste constant dans le cas de l'exponentielle simple, il varie linéairement en fonction du temps pour une parabole logarithmique.
Si on represente le rapport de la pente du parametre à la moyenne mobile en fonction du temps, on obtient comme caracteristique de pente une ligne droite inclinée sur l'horizontale.
La figure 6 montre un exemple de cas où la croissance peut être representée convenablement par une parabole logarithmique.

FIGURE 6 — PARABOLE LOGARITHMIQUE



1. L'exponentielle simple est parfois désignée sous le nom de *croissance en progression géométrique*.

– Courbes exponentielles modifiees

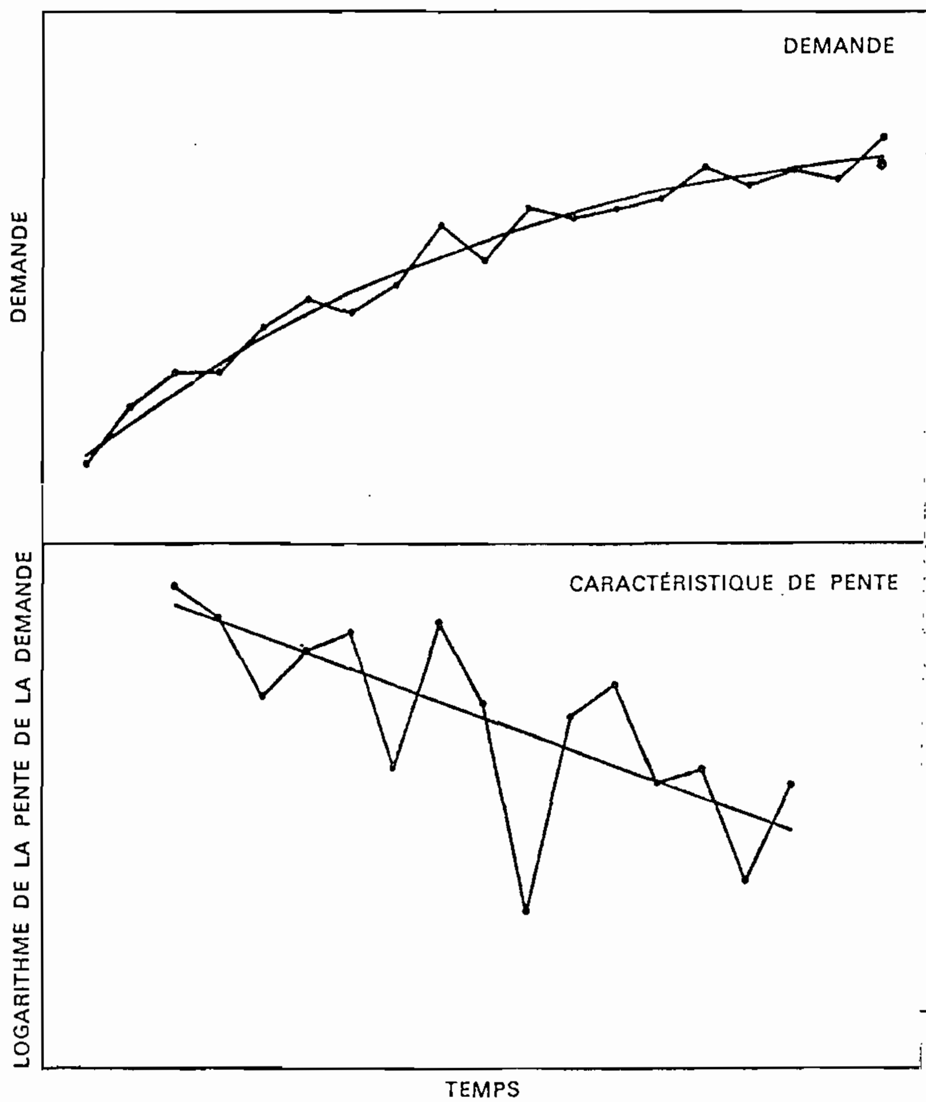
L'utilisation, comme courbes de tendance, d'exponentielles modifiées suppose qu'il existe, pour le paramètre, une limite superieure dont elle se rapproche asymptotiquement. On examinera ci-dessous les trois formes sous lesquelles on les utilise habituellement :

Exponentielle modifiée simple : $y = a - br^t$ où a, b et r sont des constantes positives et r est inferieur à 1.

Pour l'exponentielle modifiée simple, le logarithme de la pente representé en fonction du temps donne une ligne droite s'abaissant vers la droite qui est la caracteristique de pente.

La figure 7 donne un exemple de cas où la croissance est representée convenablement par une exponentielle modifiée simple.

FIGURE 7 — EXPONENTIELLE MODIFIÉE SIMPLE



compatible avec les données pour une fraction importante de la totalité de la période, on ne la considerera pas comme valable, à moins d'avoir des raisons de conclure que les conditions auxquelles dependent le parametre en question se sont modifiées dans un sens compatible avec l'evolution, sur le diagramme, de la caracteristique de pente propre à cette courbe.

• Les erreurs de prevision

Lorsqu'on utilise des courbes de tendance pour la prevision, les erreurs dans les resultats peuvent se rattacher à une ou à plusieurs des raisons suivantes:

- la tendance dans le futur peut ne pas correspondre à celle du genre de courbe choisi; par exemple, l'apparition d'un point d'inflexion alors que la courbe choisie n'en comporte pas;
- les parametres de la courbe ont été determinés à partir de données en nombre insuffisant et sont entachés de quelque incertitude, ce qui a pour effet une incertitude sur la position de la courbe;
- la dispersion des points pris individuellement autour de la courbe ajustée

Il est probable que l'incertitude decoulant de la première cause s'accroît à mesure que s'eloigne l'echeance de la prevision, mais il n'est pas facile de caractériser numeriquement cette incertitude et on devra prendre des precautions particulieres pour les previsions, surtout lorsqu'elles portent sur une periode de plus de cinq ans.

• Les limites de confiance.

Les effets de l'incertitude sur les resultats de la prevision, liée à la deuxieme cause ci dessus peuvent être pris en compte statistiquement. Une manière commode d'exprimer l'incertitude consiste à fixer des limites qui, avec une probabilité donnée, encadreront la valeur exacte. On peut alors considerer comme peu vraisemblable que la valeur exacte se situe en dehors des limites données. De telles limites sont dites limites de confiance et des methodes pour les calculer sont connues. La probabilité adoptée dans la presente etude est de 90%. Ainsi on peut affirmer que des limites, calculées

encadreront la valeur exacte avec une probabilité de 90% pourvu que les caracteristiques regissant l'evolution du paramètre étudié ne se modifient pas de façon appreciable durant la periode concernée.
Il est essentiel de noter que ces limites de confiance determinent une marge d'incertitude, liée à la façon dont la courbe est estimée, et ne tiennent pas compte de l'incertitude portant sur le choix de la courbe. Par suite, l'existence de doutes quant à la validité du choix du type de courbe contribuera à accroître l'incertitude des resultats.
Le choix de limites de confiance à 90%, plutôt qu'à 95% comme c'est generalement le cas en matière de recherche experimentale, est lié au caractère aleatoire de la prevision à long terme et à ce que peu de gens s'attendent à atteindre un degré elevé de precision. On doit arbitrer entre une reduction des risques d'erreur de prevision, en admettant un elargissement de la fourchette renfermant la vraie valeur, et un accroissement du risque d'erreur dans le cas de limites plus etroites. Des limites de confiance à 90% ont paru equilibrer ces risques de façon raisonnable. C'est pourquoi elles ont été choisies dans cette technique.

b/ Ajustement des courbes de tendance

b-1/ calcul de la moyenne mobile et de la pente

Si l'on ajuste une ligne droite aux chiffres du cours pour une durée d'un certain nombre de periodes, le point median donne une estimation du cours moyen et la pente de la droite fournit une estimation de la pente caracterisant la croissance du cours au milieu de la durée choisie. Si on ajuste successivement une serie de lignes droites, on obtient une serie d'estimations pour les cours moyens et les pentes. Les valeurs moyennes du cours sont dites moyenne mobile. Il est preferable d'utiliser un nombre impair de periodes pour la durée considerée afin que le point moyen de cette durée auquel correspondent la moyenne mobile et la pente, coïncide avec une periode reelle. Il est souhaitable d'utiliser une durée d'au moins de cinq periodes. L'estimation de la pente est sujette à erreur en fonction de la longueur de la durée choisie et de la dispersion des valeurs du cours. Si les periodes de la durée choisie sont telles que cette durée soit très courte

eu egard à la dispersion des données, l'estimation de la pente peut eventuellement changer de signe ou devenir très petite.
Devant ces dernieres considerations, nous avons choisi une periode semestrielle et une durée de cinq semestres pour le calcul de moyenne mobile et de pente.
L'autre raison qui nous a conduit à choisir le semestre est qu'une première etude faite avec une variation annuelle du cours ne nous a pas permis souvent après les representations des differentes courbes d'avoir les cinq points au moins necessaires sur une phase croissante ou decroissante pour un bon ajustement. Cette consideration nous a permis egalement d'avoir un echantillon de valeurs plus exhaustif. D'un echantillon de 17 valeurs nous passons à 21 valeurs. La procedure suivie pour determiner les valeurs semestrielles est la suivante :

Exemple :

De janvier 77 à Juin 77 soit 1 semestre le cours est 10141 donc la première valeur est 10141 (pour $t=1$, $y=10141$)

De Juillet 77 à Août 77 soit 2 mois le cours est 13622

De Août 77 à Avril 78 soit 4 mois (pour terminer le second semestre de 1977) on a 15176.

Pour calculer la valeur moyenne du cours correspondant au second semestre de 1977 on fait une moyenne ponderée (ou esperance mathematique). soit $\frac{13622 \times 2 + 15176 \times 4}{(2+4)} = 14399$

donc pour $t=2$, $y=14399$

Ainsi de suite jusqu'à la fin. On obtient un echantillon de 21 valeurs (de la periode $t=1$ à $t=21$). Ces valeurs de y sont à la colonne 2 du tableau 1

On a choisi une periode de 5 semestres pour le calcul des moyennes mobiles et des pentes. Le tableau 2 donne le calcul d'une moyenne mobile sur 5 semestres, et le tableau 3 le calcul de pente sur 5 semestres

• methode de calcul pour obtenir la moyenne mobile

La determination de la moyenne mobile au moyen d'un calcul separé pour chaque periode est trop laborieux : par exemple pour une moyenne mobile sur cinq ans, on effectuera les calculs de la façon suivante :

5(moyenne mobile du semestre t) $= Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + Y_{t+2}$

où Y_t est le cours au semestre t, Y_{t-1}, le cours au semestre $t-1$ etc.

Il serait fastidieux de faire ce même calcul pour toutes les 19 moyennes mobiles. Ainsi la procedure suivante a été proposée pour conduire les calculs de façon systematique:

Considerons le calcul d'une moyenne mobile sur cinq semestres, presenté comme dans le tableau 2. Pour les besoins du traitement numerique, les chiffres du cours sont donnés dans ce tableau à la colonne 2. Les données completes sont presentées au tableau A.

Y_1, Y_2, Y_3 - - - sont les cours semestriels successifs

S_1, S_2, S_3 . . . . sont les cours cumulés, à savoir

$$S_1 = Y_1$$
$$S_2 = S_1 + Y_2 = Y_1 + Y_2$$
$$S_3 = S_2 + Y_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

A_t est la moyenne mobile sur cinq semestres au semestre t

- methode de calcul des pentes

Le calcul direct des pentes par simple repetition de la formule appliquée pour chaque semestre separement peut se reveler fastidieuse, en particulier, s'il est necessaire d'avoir recours à une periode de plus de cinq semestres. Le travail de calcul peut être conduit en utilisant une des formules iteratives suivantes:

Pour une periode de cinq semestres:

10(pente au semestre t) $= 10$(pente au semestre $t-1$) $+ 3Y_{t+2} + 2Y_{t-3} - 5$(moyenne mobile au semestre t)

On calcule la pente correspondant à la première etape et les autres pentes sont obtenues par les formules d'iteration appropriées données ci-dessus. La marche à suivre pour le calcul des pentes est indiquée au tableau 3 qui est la suite du tableau 2.

Le symbole L_t est utilisé pour designer la pente au semestre t.

Il est possible d'effectuer un contrôle sur les erreurs arithmetiques dans l'estimation des pentes en operant de la façon suivante:

Pour une periode de cinq semestres:

Somme de toutes les valeurs estimées de 10L $= (2y_n + 3y_{n-1} + 3y_{n-2} + 2y_{n-3}) - (2y_4 + 3y_3 + 3y_2 + 2y_1)$

où y_1 et y_n sont les cours pour le premier et le dernier semestre.

b-2/ Etude des caracteristiques de pente

Les procedures de calcul decrites ci dessus et illustrees essentiellement par les tableaux 2 et 3 fournissent les elements numeriques necessaires à l'etude des caracteristiques de la pente pour l'evolution du cours.

b-2-1/ Lignes droites et paraboles

La caracteristique de pente appropriée s'obtient en representant la pente des données originales en fonction du temps, ces pentes sont données au tableau A, colonne 8 et sont representées à la figure A2, il est clair que la tendance est non lineaire. Si la tendance etait lineaire, il n'y aurait pas eu de modification dans le niveau moyen de la caracteristique de pente. Les données concernant le cours et leur moyenne mobile apparaissent à la figure A1. La ligne droite est dès à present exclue car il est impossible d'approximer le niveau moyen de la caracteristique de pente par une ligne horizontale.

Des periodes 17 à 21 il y a une baisse persistante et l'examen de la figure A2 ne donne pas à penser que cette chute puisse être autre que lineaire. Dans ces conditions, la parabole est acceptable pour les periodes 17 à 21.

b-2-2/ Exponentielle simple modifiée

La caracteristique de pente appropriée est obtenue en representant le logarithme de la pente du cours en fonction du temps. Les pentes sont données au tableau A, colonne 9 et representées à la figure A3.

L'examen de la figure A3 montre que la caracteristique de pente presente une hausse moyenne suivie d'une baisse. L'exponentielle simple modifiée ne s'ajustera pas, dans ces conditions à l'ensemble des periodes, mais comme la caracteristique de pente est apparemment lineaire pour les periode 17 à 21, l'exponentielle simple modifiée peut s'ajuster à cette dernière partie.

b-2-3/ Exponentielle simple et parabole logarithmique

La caracteristique de pente appropriée s'obtient en representant, en fonction du temps, le rapport de la pente à la moyenne mobile. La caracteristique de pente est donnée au tableau A, colonne 10 et representée à la figure B2. Le logarithme du cours est representé à la figure B1. Le tracé de B1 est evidemment non lineaire et, en l'absence d'indication sur B2, on ne peut affirmer qu'une exponentielle simple ne peut s'ajuster aux données. La caracteristique de pente à la figure B2 fait apparaître à nouveau une hausse moyenne suivie d'une baisse moyenne qui montre qu'une parabole logarithmique ne s'ajustera pas à la totalité des periodes. Dans la derniere partie (des periodes 17 à 21) du tracé sur B2, la baisse de la caracteristique est lineaire et la parabole logarithmique est susceptible de s'y ajuster.

b-2-4/ Courbe de Gompertz

La caracteristique de pente appropriée est obtenue en representant, en fonction du temps, le logarithme du rapport de la pente à la moyenne mobile. Les données necessaires figurent à la colonne 11 du tableau A et sur le graphique B3.
La caracteristique de pente fait apparaître une hausse moyenne et une baisse moyenne montrant que la courbe de Gompertz ne peut s'ajuster à l'ensemble des periodes. La baisse dans la derniere partie (de la periode 17 à 21) est apparement lineaire et la courbe de Gompertz est susceptible de s'y ajuster.

b-2-5/ Courbe Logistique

Les inverses des données du cours figurent au tableau C, colonne 39. La caracteristique de pente pour la courbe logistique est donnée au tableau A, colonne 13. Elle est constituée par le logarithme du rapport de la pente au carré de la moyenne mobile. La caracteristique de la pente est representée à la figure C2. Le graphique C1 donne les inverses du cours en fonction des periodes.
L'observation de la caracteristique de pente (graphique C2) fait apparaître de façon generale une baisse allant des periodes 17 à 21. Sur cette portion du graphique la courbe logistique peut s'y ajuster.

Remarques : D'après ce qui precede, nous constatons que pour chaque type de courbe susceptible de s'ajuster, cet ajustement ne peut se faire d'une manière precise que sur la partie couvrant les periodes 17 à 21 soit 5 points.

Ce nombre de point est petit d'apres la methode pour pouvoir conduire complètement les calculs. Autrement dit avec ce nombre de point il serait impossible de trouver les coefficients de l'equation de l'exponentielle simple modifiée, comme nous pourrons nous en rendre compte à la section sur l'ajustement de cette equation.

C'est pour cette raison que nous considerons un ajustement de la periode 12 à la periode 21 soit 10 points.

L'autre raison qui nous a conduit à considerer l'ajustement valable à partir de la 12ième periode est que dans toutes les caracteristiques de pente tracées, la courbe ne prend au delà de la 12ième periode une valeur superieure à celle prise par la periode 12. Donc une droite moyenne descendante peut toujours approximer la tendance de la caracteristique de pente de la periode 12 à 21.

L'effet de cette approximation est de rendre plus grande l'erreur commise dans la partie allant de 12 à 17.

A partir de la periode 17, periode à partir de laquelle l'ajustement est plus precise, les erreurs restent acceptables.

b-3/ Ajustement des polynomes

Pour l'ajustement des données d'un paramètre donné, on utilise couramment quatre formes de polynômes. En designant par Y le cours et t la periode

On a

a/ 1°/ ligne droite : $Y = a + bt$ (1)

2°/ Exponentielle Simple : $\log Y = a + bt$ (2)

3°/ Parabole $Y = a + bt + ct^2$ (3)

b/ 4°/ Parabole logarithmique : $\log Y = a + bt + ct^2$ (4)

où a, b et c sont des constantes et $t = 1$ pour la periode 1

les valeurs de a, b et c sont estimées par la methode des moindres carrées decrites dans les sections qui suivent.

b-3-1/ Ajustement de la ligne droite et de l'exponentielle simple

ligne droite : $Y = a + bt$ (1)

Exponentielle simple $\log Y = a + bt$ (2)

Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les valeurs du cours (ou logarithme du cours pour l'exponentielle simple) pour les periodes successives $1, 2, \ldots, n$

On a

$$a = \frac{\sum Y_t \sum t^2 - \sum t \sum t Y_t}{n \sum t^2 - (\sum t)^2} \qquad (1\text{-}1)$$

$$b = \frac{n \sum t Y_t - \sum Y_t \sum t}{n \sum t^2 - (\sum t)^2} \qquad (1\text{-}2)$$

où $\sum$ indique la somme de tous les elements de $t = 1$ à $t = n$

par exemple $\sum t Y_t = 1Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 + \ldots + nY_n$

Les formules (1-1) et (1-2) peuvent être utilisées pour calculer a et b mais cela necessite un effort de calcul considerable et implique un risque d'erreur arithmetique. Cependant il est possible de les reecrire :

$$a = \frac{1}{M}(a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_n Y_n) \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

$$b = \frac{1}{M}(b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + \ldots + b_n Y_n) \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

où les coefficients $a_1, a_2, \ldots a_n$ et le diviseur M sont independants des $Y_1, \ldots Y_n$ et ne dependent que de n. Ces coefficients ont été calculés pour des periodes ininterrompues allant jusqu'à 20 à la table D (où l'année est considérée comme unité de periode)

b-3-2/ Ajustement de la parabole et de la parabole logarithmique

Parabole $Y = a + bt + ct^2$ (3)

Parabole logarithmique : $\log Y = a + bt + ct^2$ (4)

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les valeurs du cours (ou logarithme du cours pour la parabole logarithmique) pour les periodes successives $1, 2, \ldots, n$

Comme dans le cas de la tendance lineaire, il est possible d'estimer a, b et c à partir des formules suivantes :

$$a = \frac{1}{M}(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n) \quad (3\text{-}1)$$

$$b = \frac{1}{M}(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_n y_n) \quad (3\text{-}2)$$

$$c = \frac{1}{M}(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n) \quad (3\text{-}3)$$

où les coefficients $a_1, \ldots, b_1, \ldots, c_1, \ldots$ et le diviseur M sont independants des valeurs $y_1, \ldots y_n$ et ne dependent que de n le nombre de periodes que comporte la serie de valeurs. Ces valeurs ont été determinées au tableau E

b-3-3/ Ajustement de la parabole

Cette methode a été appliquée aux données du cours, comme on peut le voir au tableau A, colonne 14 à 19. L'examen des caracteristiques de pente de la ligne droite et de la parabole a montré qu'un ajustement de la parabole etait possible pour les periodes allant de 12 à 21. Il s'agit d'une periode de 10 semestres et les coefficients appropriés sont tirés au Tableau E. Ils figurent au tableau 5

L'equation de la parabole est dans ces conditions

$$Y = 28126{,}07 + 3068{,}48t - 139{,}15t^2$$

La parabole logarithmique s'ajuste d'une façon analogue, comme on peut le voir au tableau B et dans ses notes. Dans ces conditions l'equation de la parabole logarithmique est

$$\log Y = 4{,}470 + 0{,}0364t - 1{,}75.10^{-3}t^2$$

Dans les deux equations ci dessus t = 1 à la periode 12 (debut d'ajustement)

b-4/ Ajustement des exponentielles modifiées

On utilise communement trois formes d'exponentielles modifiées

L'exponentielle simple modifiée $Y = a - br^t$ (5)

Courbe de Gompertz $\log Y = a - br^t$ (6)

Courbe logistique $Y = \frac{1}{a+br^t}$ ou $\frac{1}{Y} = a+br^t$ (7)

où a, b et r sont des constantes positives avec r inferieur à 1 et $t = 1$ pour la première periode de la serie où s'effectue l'ajustement

On remarquera que ces courbes de tendance sont similaires, la tendance $a \pm br^t$ etant ajustée soit au cours effectif, au logarithme du cours, ou à l'inverse du cours. C'est donc au même principe de base que l'on fera appel au 3 cas.

b-4-1/ Approximation de l'exponentielle simple modifiée par la methode des 3 points

L'exponentielle simple modifiée est de la forme $Y = a - br^t$ et la methode des trois points donne effectivement trois valeurs moyennes qui doivent satisfaire l'equation. La methode standard consiste à diviser l'ensemble de la periode en trois periodes egales sans tenir compte d'une ou deux années au debut de la periode, si necessaire. On trouve les cours moyens pour les 3 periodes et on les utilise pour determiner a, b et r.

Si les données sont $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots Y_n$, l'estimation du cours moyen en debut de periode est : $R = \frac{1}{5}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5)$ --- (5-1)

et en fin de periode $T = \frac{1}{5}(Y_n + Y_{n-1} + Y_{n-2} + Y_{n-3} + Y_{n-4})$ --- (5-2)

Le cours moyen en milieu de periode est la moyenne du cours pour les cinq semestres du milieu de la periode, si le nombre d'unité de temps (ici le semestre est choisi comme unité de temps) est impair, ou des six semestres du milieu de periode s'il est pair. Ce cours moyen est designé par S.

On determine a, b, r comme suit

$$r^{(n-5)/2} = \frac{T-S}{S-R} \quad \text{ou} \quad \log r = \frac{2}{n-5} \log \frac{T-S}{S-R} \qquad \text{--- (5-3)}$$

$$a = \frac{S^2 - TR}{2S - T - R} \qquad \text{--- (5-4)}$$

$$b = \frac{5}{(r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5)} \; \frac{(S-R)^2}{2S - T - R} \qquad \text{--- (5-5)}$$

On a utilisé cette methode des 3 points pour ajuster une exponentielle modifiée simple aux données concernant le cours. Le tableau 4 reproduit une partie du tableau A colonnes 20 à 25.

$$R = \frac{1}{5}(33304 + 33304 + 35456 + 36640 + 42346) = 36210$$

$$T = \frac{1}{5}(44845 + 45717 + 43614 + 43614 + 43614) = 44280,8$$

$$S = \frac{1}{6}(35456 + 36640 + 42346 + 43614 + 43614 + 43614) = 40880,7$$

L'ajustement se faisant une periode de 10 semestres donc $n = 10$

$$r^{(10-5)/2} = \frac{44280,8 - 40880,7}{40880,7 - 36210} = 0,72796$$

$$\text{ou} \quad \log r = \frac{2}{5} \log 0,72796 = -0,055156$$

ce qui donne $r = 0,8807$

$$a = \frac{(40880,7)^2 - 44280,8 \times 36210}{2 \times 40880,7 - 44280,8 - 36210} = 53379,40$$

$$b = \frac{5}{0,8807 + 0,8807^2 + 0,8807^3 + 0,8807^4 + 0,8807^5} \times \frac{(40880,7 - 36210)^2}{2 \times 36210 - 44280,8 - 36210} = -3893,85$$

L'equation est donc

$$Y = 53379,40 - 3893,85 \times (0,8807)^t$$

b-4-2/ Approximation de la courbe de Gompertz

Les calculs concernant R, T et S sont donnés aux notes du tableau B

$R = 4,557$, $S = 4,610$ et $T = 4,646$

$$r^{(10-5)/2} = \frac{4,646 - 4,610}{4,610 - 4,557} = 0,6792 = r^{5/2}$$

$$\log r = \frac{2}{5} \log 0,6792 = 0,067129$$

$$r = 0,8566$$

$$a = \frac{4,610^2 - 4,646 \times 4,551}{2 \times 4,610 - 4,646 - 4,557} = 4,722$$

$$b = \frac{5}{0,8566 + 0,8566^2 + 0,8566^3 + 0,8566^4 + 0,8566^5} \times \frac{(4,610 - 4,557)^2}{2 \times 4,610 - 4,646 - 4,557} = 0,2567$$

L'equation de la courbe de Gompertz est

$$\log Y = 4,722 - 0,2567 \times (0,8566)^t$$

b-4-3/ Approximation de la courbe logistique

Les calculs concernant R, T et S sont données aux notes du tableau C

$R = 2,782 \cdot 10^{-5}$, $S = 2,463 \cdot 10^{-5}$ et $T = 2,258 \cdot 10^{-5}$

$$r^{(10-5)/2} = \frac{2,258 \cdot 10^{-5} - 2,463 \cdot 10^{-5}}{2,463 \cdot 10^{-5} - 2,782 \cdot 10^{-5}} = 0,6426 = r^{5/2}$$

$$\log r = \frac{2}{5} \log(0,6426) = -0,07681$$

$$r = 0,8379$$

$$a = \frac{(2,463 \cdot 10^{-5})^2 - (2,258 \times 10^{-5}) \times (2,782 \cdot 10^{-5})}{2 \times 2,463 \cdot 10^{-5} - 2,258 \cdot 10^{-5} - 2,782 \cdot 10^{-5}} = 1,889 \cdot 10^{-5}$$

$$b = \frac{5}{0,8379 + 0,8379^2 + 0,8379^3 + 0,8379^4 + 0,8379^5} \times \frac{2,463 \cdot 10^{-5} - 2,782 \cdot 10^{-5}}{2 \times 2,463 \cdot 10^{-5} - 2,258 \cdot 10^{-5} - 2,782 \cdot 10^{-5}} = -6,507 \times 10^{-7}$$

$$b = -6,507 \cdot 10^{-7}$$

l'equation de la courbe logistique

$$Y = \frac{1}{1,889 \cdot 10^{-5} + 6,507 \times 10^{-7} \times (0,8379)^t}$$

Pour recapituler on a:

Parabole	$Y = 28726,07 + 3068,48t - 139,15t^2$
Parabole logarithmique	$\log Y = 4,470 + 0,0364t - 1,75 \cdot 10^{-3} t^2$
Exponentielle simple modifiée	$Y = 53379,40 - 3893,85 \times (0,8807)^t$
Courbe de Gompertz	$\log Y = 4,722 - 0,2567 \times (0,8566)^t$

Courbe logistique $$Y = \frac{1}{1{,}889.10^{-5} + 6{,}507.10^{-7} \times (0{,}8379)^t}$$

où $t = 1$ pour le semestre 12

Nous donnons au tableau 6 une comparaison des données du cours effectifs avec celles obtenues à partir des courbes de tendance.

Après examen de ce tableau 6, nous remarquons que la parabole logarithmique s'ajuste mieux au sens des moindres carrées; c'est la courbe qui a la plus petite valeur du residu quadratique moyen par rapport au cours effectif. Cette courbe est alors choisie

c/ Raffinement de la courbe d'ajustement choisie

D'après la remarque ennoncée plus haut, nous avons considéré que l'ajustement se fait à partir de la periode 12 pour pouvoir etablir les equations de toutes les courbes d'ajustement choisies communement dans cette technique.

Cependant l'observation du graphique B2 montre (comme nous l'avions dejà dit) que l'ajustement le plus precis est obtenu en considerant la portion de courbe allant de la periode 17 à 21.

C'est ainsi que nous reprenons la parabole logarithmique (courbe selectionnée) et l'ajustons à nouveau une deuxieme fois pour obtenir un ajustement beaucoup plus precis. Les calculs pour determiner la nouvelle equation de la parabole logarithmique sont montrés au tableau 7 ci dessous et le tableau 8 permet de comparer les valeurs effectifs du cours et celles obtenues à travers la parabole logarithmique. Nous remarquons que le residu quadratique moyen par rapport au cours effectif est abattu de 54% ; il est passé de 1233 à 570

N.B. La construction du tableau 7 est similaire à celle du tableau C pour sa partie concernant la parabole logarithmique. Tout ce qui change est le nombre de periode sur laquelle on ajuste (Ici 5 semestres). Les valeurs des colonnes 27, 29 et 31 sont prises au tableau E.

Tableau 7 : Calcul à nouveau de la tendance de la parabole logarithmique

Semestre	log du Cours	Facteur a		Facteur b		Facteur c	
1	26	27	28	29	30	31	32
17	4,640	+ 126	584,640	− 74	− 343,360	10	46,400
18	4,640	0	0	23	106,720	− 5	− 23,200
19	4,640	− 56	− 259,840	60	278,40	− 10	− 46,400
20	4,660	− 42	− 195,720	37	172,42	− 5	− 23,300
21	4,652	42	195,384	− 46	− 213,992	10	46,520

a = total colonne 28 divisé par 70 (tableau E pour 5 periodes) ; $a = \frac{324,464}{70} = 4,635$

b = total colonne 30 divisé par 70 ; $b = \frac{0,188}{70} = 2,685.10^{-3}$

c = total colonne 32 divisé par 70 ; $c = \frac{0,02}{70} = 2,857.10^{-4}$

L'equation finale de la parabole logarithmique est :

$$\log Y = 4,635 + 2,685.10^{-3}t + 2,857.10^{-4}t^2$$

où t = 1 pour le semestre 17

Tableau 8 : Comparaison des données effectifs du cours et celles de la parabole logarithmique

Semestres	Cours effectifs	Parabole logarithmique
17	43614	43448
18	43614	43804
19	43614	44221
20	45717	44700
21	44845	45245
22		45856*
R		570

C-1/ Estimation des limites de confiance

Les limites de confiance reposent sur la dispersion des points autour de la courbe d'ajustement. Plus grande est cette dispersion, et plus grande est l'incertitude sur la position de la courbe et, par consequent, plus larges sont les limites de confiance.

La première etape dans leur determination consiste à calculer l'ecart-type des distances de ces points par rapport à la courbe d'ajustement.

Puisqu'on calculera habituellement les valeurs moyennes pour l'ensemble de la periode sur laquelle portent les données, le procedé le plus simple consiste à prendre les differences entre ces valeurs et les valeurs correspondantes des données et à calculer leur ecart-type. Ce chiffre est alors multiplié par un facteur qui mesure l'importance de l'ecart entre la valeur moyenne et les limites de confiance pour chaque periode consideré. On dispose de tables pour les facteurs utilisés à cette etape du calcul.

C-1-1/ Limites de confiance pour la parabole logarithmique

La parabole logarithmique est estimée en ajustant une parabole aux logarithmes des données. Ainsi les limites de confiance sont obtenues en prenant les logarithmes du cours et en appliquant la procedure ennocée ci dessus.

On a deja montré qu'une parabole logarithmique donne le meilleur ajustement.

l'equation obtenue est : $\log Y = 4{,}635 + 2{,}685.10^{-3}t + 2{,}857.10^{-4}t^2$

Le tableau 9 donne les logarithmes du cours effectif, les valeurs obtenues à partir de l'equation ci dessus et les ecarts des seconds par rapport aux premiers.

Tableau 9 : Estimation des limites de confiance à 90% pour la parabole logarithmique

Semestres	t	log du Cours effectif y_i	log du Cours calculé Y_i	$Y_i - y_i$
17	1	4,640	4,638	- 0,002
18	2	4,640	4,642	0,002
19	3	4,640	4,646	0,006
20	4	4,660	4,650	- 0,001
21	5	4,652	4,656	0,004

$$S^2 = \sum_{i=1}^{5} (Y_i - y_i)^2 = 6{,}1.10^{-5}$$

$$S^2/_{n-3} = S^2/_{5-3} = 6{,}1.10^{-5}/2 = 3{,}05.10^{-5}$$

$$S/\sqrt{n-3} = S/\sqrt{2} = 5{,}522.10^{-3}$$

La prevision portant sur le cours s'obtient en faisant $t=6$ dans l'equation de la parabole logarithmique et en prenant la fonction inverse de la fonction log:
On obtient $45856 = 10^{4,661}$

Dans la table G pour $n=5$ (ce qui correspond à $n+1=6$), nous trouvons le facteur 6,263. Par suite, les logarithmes des limites de confiance sont :

$$4{,}661 \pm (6{,}263 \times 5{,}522.10^{-3}) = 4{,}661 \pm 0{,}034$$

En prenant la fonction inverse de la fonction log; on trouve les limites de confiances à 90% pour le cours prevu au second semestre de 1987

Ces limites sont : $10^{4,661-0,034} = 42364$ et $10^{4,661+0,034} = 49545$

donc le cours prevu a pour limites de confiance à 90% 42364 et 49545

En conclusion on a : $C = 44845$ et $D = 45856$

IV-1-5-2 : <u>determination des probabilités p et q</u>

D'après l'analyse de M. Kivchovitch et J. Vialar sur les series chronologiques et la theorie du hasard, la probabilité d'une phase croissante parmi les phases croissantes est : $\dfrac{n(5n^2+5n+2)}{4(2n+1)(n+1)^2}$ où $n+1$ est la taille de la population d'où l'echantillon a été extrait

Cette taille de la population est quasiment infini (car le cours varie indefiniment dans le temps)

Quand n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers 5/8

Comme la valeur prevue $D=45856$ est superieure au cours actuelle C donc il s'agit bien d'une phase croissante.

La methode de prevision utilisée n'etant fiable qu'à 90% donc la probabilité q est : $q = \frac{90}{100} \times \frac{5}{8} = 0{,}56$ et $p = 1 - 0{,}56 = 0{,}44$

En resumé $C = 44845$ avec $p = 0,44$
$D = 45856$ avec $q = 0,56$

Comme nous l'avions dit, en decrivant le modèle, il fastidieux de faire tout le travail necessaire pour chaque politique et de trier finalement celle optimale. C'est dans ce souci que nous avions confectionné un programme à l'ordinateur dont la structure est decrite par l'organigramme suivant

IV-2 resolution du probleme

En voulant resoudre rigoureusement le probleme et en considerant comme unité la tonne de ciment, les états du stock varieront de 0 à 99. Le nombre de politique associée à une telle situation est extremement elevé, et il faudrait un ordinateur tres puissant pour pouvoir resoudre un tel probleme. Les ordinateurs de l'ecole ne sont pas aptes pour resoudre un tel probleme (rien que pour un tableau unicolonne, on ne peut le dimensionner que pour un maximum de 255 elements).

Devant cette difficulté, nous avons modifié le probleme de la manière suivante. Nous avons considéré un stock de securité de 40 tonnes; ce qui permettrait en cas de difficulté d'approvisionnement un jour particulier de pouvoir tourner en puisant les 30 tonnes necessaire pour la journée de ce stock de securité; la marge de 10 tonnes sert de paliatif à certaine fluctuation dans la consommation quotidienne.

Et toujours par souci d'une politique optimale qui minimise toute depense, nous avons consideré 30t comme representant une unité car il n'est pas economique de faire deplacer le camion-citerne qui a une capacité de 30t pour acheter moins de 30 tonnes. Ce deplacement n'est rentabilisé au maximum que s'il charge plein.

Ainsi l'etat zero correspond à l'etat où il n'y a que le stock de securité, l'etat 1 quand le stock contient en plus du stock de securité $30 \times 1 = 30$ tonnes, l'etat 2 quand le stock contient en plus du stock de securité $30 \times 2 = 60$ tonnes le nombre d'etats possibles du stock est alors 3 et la consommation journalière necessaire pour tourner est 1 unité.

En resumé les données du problème sont:

Nombre d'etats possibles du stock .... 3 etats

Consommation journalière .... 1 unité

Cours inferieur C .... 44845 F/t

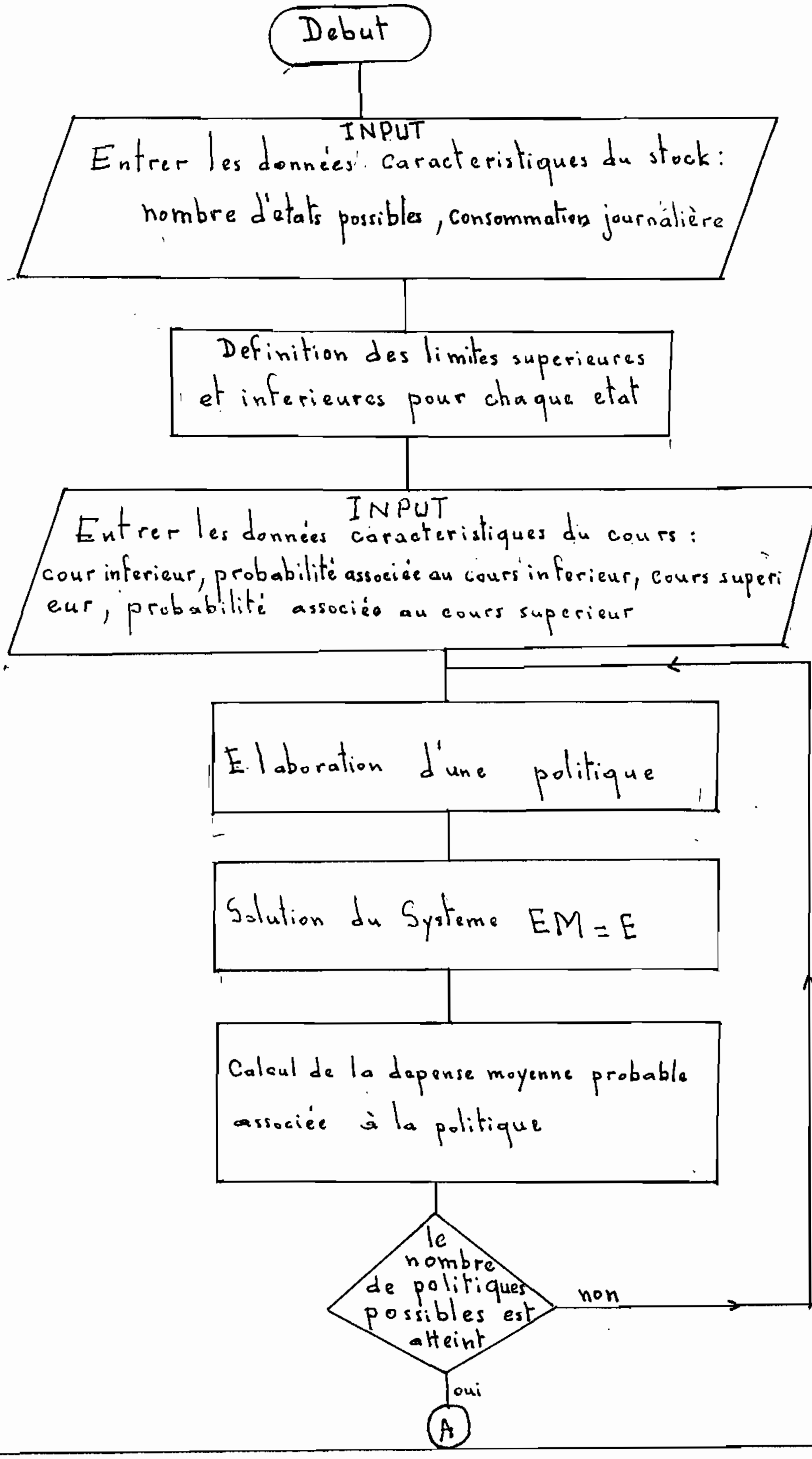
Probabilité associée au cours inferieur P 0,44

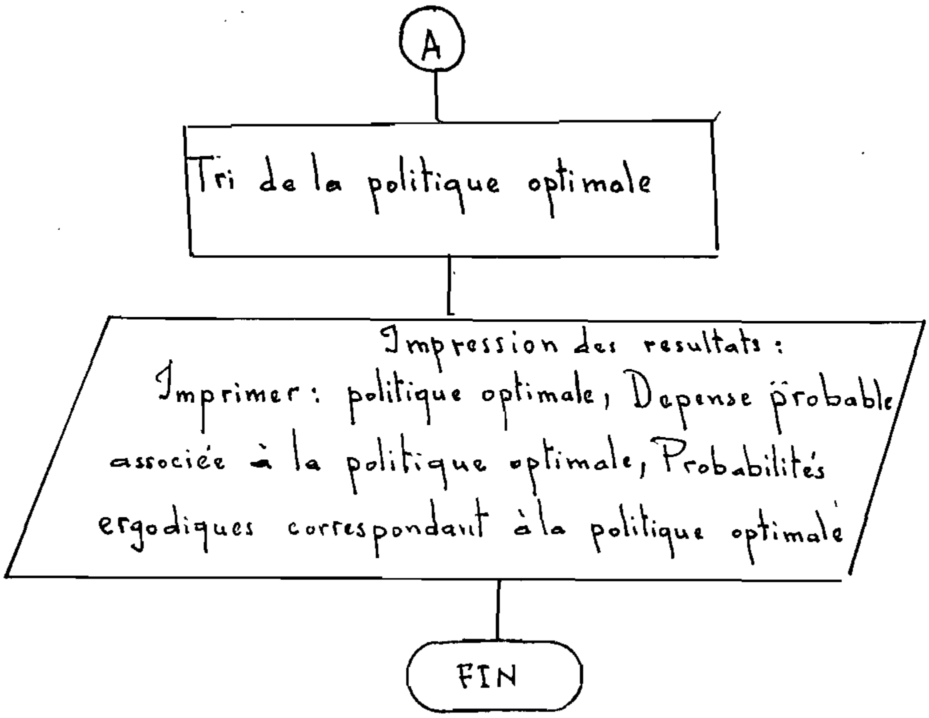
Cours superieur D .... 45856 F/t

Probabilité associée au cours Superieur Q 0,56

Remarque: Ici nous avons donné le prix d'une tonne, l'unité considerée etant de 30 tonnes, dans les calculs des coûts d'achat nous avons multiplié ce prix d'une tonne par 30. Il en est de même pour le calcul des coûts d'energie; ce coût etant de 2,4 F/t il faut donc dans chaque le multiplier par 30.

IV.2.1 : Organigramme




A
Tri de la politique optimale
Impression des resultats :
Imprimer : politique optimale, Depense probable associée à la politique optimale, Probabilités ergodiques correspondant à la politique optimale
FIN

Ce programme ennumere toutes les politiques possibles ,calcule pour chaque politique les probabilites ergodiques correspondantes et la depense moyenne probable sur le long terme associee a la politique. Le programme trie enfin dans une derniere phase la politique optimale c'est à dire celle qui minimise toute sorte de depense.

IV.2.2: Programme de resolution et resultats

```
1LIST   2RUN  3LOAD"  4SAVE"  5CONT 6,"LPT1 7TRON 8TROFF9KEY    0SCREEN
20 REM DONNEES CARACTERISTIQUES DU STOCK
30 INPUT "DONNER LE NOMBRE D'ETATS POSSIBLES DU STOCK            ",M
40 INPUT "DONNER LA CONSOMMATION JOURNALIERE MOYENNE             ",B
50 DIM L(M):DIM S(M):DIM U(2,M)
55 DIM Q(M,M)
56 DIM C2(M,M)
60 FOR I=1 TO M
70 S(I)=M+1-I
80 IF I<=B THEN L(I)=B+1-I:GOTO 100
90 L(I)=0
100 NEXT I
110 PEM DONNEES CARACTERISTIQUES DU COURS
120 INPUT "DONNER LE COURS INFERIEUR                             ",C
130 INPUT "DONNER LA PROBABILITE ASSOCIEE                        ",P
140 INPUT "DONNER LE COURS SUPERIEUR                             ",D'
150 INPUT "DONNER LA PROBABILITE ASSOCIEE                        ",Q
160 REM ENUMERATION DES POLITIQUES
170 DIM M(M,M):DIM I(M):DIM J(M)
180 DIM T(M):DIM C(M,M+1):DIM E(M)
190 DIM D(200):DIM Z(M):DIM F(M,M)
195 W1=0
200 N1=0
205 X1=0
206 B1=0
210 A=0
220 FOR I1=L(1) TO S(1)
230 T(1)=I1
240 FOR I2=L(2) TO S(2)
250 T(2)=I2
260 FOR I3=L(3) TO S(3)
270 T(3)=I3
272 FOR I=1 TO M
274 U(1,I)=T(I)
276 U(2,I)=L(I)
278 NEXT I
280 B1=B1+1
```

```
290 IF B1<>1 THEN GOTO 310
300 E(1)=1:E(2)=0:E(3)=0
305 GOTO 1010
310 IF B1<>2 THEN GOTO 330
315 GOTO 1083
330 IF B1<>3 THEN GOTO 330
340 E(1)=1:E(2)=0:E(3)=0
345 GOTO 1010
350 IF B1<>4 THEN GOTO 370
360 E(1)=1:E(2)=0:E(3)=0
365 GOTO 1010
370 IF B1<>5 THEN GOTO 390
380 GOTO 1083
390 IF B1<>6 THEN GOTO 410
400 GOTO 1083
410 IF B1<>7 THEN GOTO 430
420 E(1)=1/(1-Q):E(2)=(1-Q)/(2-Q):E(3)=0
425 GOTO 1010
430 IF B1<>8 THEN GOTO 450
440 GOTO 1083
450 IF B1<>9 THEN GOTO 470
460 E(1)=Q:E(2)=1-Q:E(3)=0
465 GOTO 1010
470 IF B1<>10 THEN GOTO 490
480 E(1)=Q:E(2)=1-Q:E(3)=0
485 GOTO 1010
490 IF B1<>11 THEN GOTO 510
500 E(1)=Q/(1+P^2):E(2)=P/(1+P^2):E(3)=P^2/(1+P^2)
505 GOTO 1010
510 IF B1<>12 THEN GOTO 530
520 E(1)=Q^2/(P+Q^2):E(2)=(Q-Q^2)/(P+Q^2):E(3)=(1-2*Q+Q^2)/(P+Q^2)
525 GOTO 1010
530 IF B1<>13 THEN GOTO 550
540 E(1)=1/(3-2*Q):E(2)=P/(3-2*Q):E(3)=P/(3-2*Q)
545 GOTO 1010
550 IF B1<>14 THEN GOTO 570
560 GOTO 1083
570 IF B1<>15 THEN GOTO 590
580 E(1)=Q/(1+Q-Q^2):E(2)=P/(1+Q-Q^2):E(3)=(Q-Q^2)/(1+Q-Q^2)
585 GOTO 1010
590 IF B1<>16 THEN GOTO 610
600 E(1)=Q/(2-Q):E(2)=P/(2-Q):E(3)=P/(2-Q)
605 GOTO 1010
610 IF B1<>17 THEN GOTO 630
620 E(1)=1/(2-Q):E(2)=0:E(3)=P/(2-Q)
625 GOTO 1010
630 IF B1<>18 THEN GOTO 1083
640 E(1)=Q^2:E(2)=Q*P:E(3)=P
645 GOTO 1010
1010 REM CALCUL DE LA DEPENSE MOYENNE  PROBABLE ASSOCIEE A LA POLITIQUE
1020 A=A+1
1030 D(A)=0
1040 FOR I=1 TO M
1042 IF U(1,I)<1 THEN H3=1932:GOTO 1050
1044 IF U(1,I)<2 THEN H3=3864:GOTO 1050
1046 IF U(1,I)<3 THEN H3=5796:GOTO 1050
1050 H1=2.4*30*(U(1,I)*P+U(2,I)*Q)
1052 H2=U(1,I)*30*P*C+U(2,I)*30*Q*D
1054 D(A)=D(A)+(H1+H2+H3)*E(I)
```

```
1060 NEXT I
1072 REM CONTINUATION
1073 IF X1<>A THEN GOTO 1083
1074 FOR I=1 TO M
1075 Z(I)=T(I)
1076 NEXT I
1077 FOR I=1 TO M
1078 FOR J=1 TO M
1079 F(I,J)=M(I,J)
1080 NEXT J
1081 NEXT I
1082 S2=D(A)
1083 REM CONTINUATION
1084 IF I1=S(1) THEN GOTO 1086
1085 NEXT I3,I2,I1
1086 IF N1=0 THEN GOTO 1330
1090 REM IMPRESSION DES RESULTATS
1100 PRINT "**************RESULTATS****************"
1105 W1=W1+1
1110 PRINT
1120 PRINT
1130 PRINT
1140 PRINT "*********politique  optimale***********"
1150 PRINT
1155 PRINT
1156 PRINT
1160 PRINT       "***cours***";TAB(20)  "****etats  du   stock****";TAB(50)  "prob
"
1170 PRINT TAB(19) "0";TAB(29) "1";TAB(39) "2"
1175 PRINT
1178 PRINT
1179 PRINT
1180 PRINT TAB(1) C;TAB(18) Z(1);TAB(28) Z(2);TAB(38) Z(3);TAB(52) P
1185 PRINT
1190 PRINT TAB(1) D;TAB(19) "1";TAB(29) "0";TAB(39) "0";TAB(52) Q
1200 PRINT
1210 PRINT "la depense moyenne probable associee est de       ",S2
1220 PRINT
1225 PRINT
1226 PRINT
1230 PRINT "les probabilites ergodiques correspondantes sont  ".
1240 PRINT "E0=";TAB(5) E(1);TAB(15) "E1=";TAB(20) E(2);TAB(30) "E2=";TAB(35) E(
3)
1245 PRINT
1246 PRINT
1250 PRINT
1320 IF W1=1 THEN GOTO 1520
1330 REM TRI DE LA POLITIQUE OPTIMALE
1340 IF N1=1 THEN GOTO 1520
1350 DIM C1(A)
1360 FOR I=1 TO A
1370 C1(I)=D(I)
1380 NEXT I
1390 X=1
1400 W=1
1410 Z=X+1
1420 IF C1(W)>=C1(Z) THEN W=Z:GOTO 1430
1430 IF Z<A THEN Z=Z+1:GOTO 1420
1440 T2=C1(X)
1450 C1(X)=C1(W)
```

```
1460 C1(W)=T2
1470 IF X<(A-1) THEN X=X+1:GOTO 1400
1480 FOR I=1 TO A
1490 IF C1(A)=D(I) THEN X1=I:GOTO 1500
1500 NEXT I
1510 N1=N1+1:GOTO 210
1520 INPUT "VOULEZ VOUS RECOMMANCER   O/N   ",R$
1530 IF R$="OUI" THEN GOTO 10
1540 END
```

```
********politique  optimale***********

***cours***          ***etats  du   stock****       prob
                       0         1         2

 44845                 1         2         0             .44

 45856                 1         0         0             .56
la depense moyenne probable associee est de               722471.3


les probabilites ergodiques correspondantes sont
E0=  .3136    E1=   .2464    E2=   .44
```

• Interpretation des resultats

La politique optimale recommande : pour cette periode où le cours est de 44845F/t et tant que le cours reste à cette valeur, il faut acheter 30t à ajouter au stock de securité ce qui porte le stock à 70t quand il ne reste que le stock de securité (c'est à dire quand le stock se trouve à l'etat 1) ; porter le stock à 100t = 40 + 2x30 quand le stock se trouve à l'etat 2 c'est à dire contient 70t ; et enfin ne rien acheter quand le stock se trouve à l'etat 2 c'est à dire contient 100t. Ce dernier cas ne fait que confirmer le respect de la contrainte sur la capacité de stockage maximale du silo.
Quand le cours prend la valeur de 45856, la politique optimale recommande de n'acheter que la quantité necessaire pour tourner c'est à dire 30tonnes quand le stock est à l'etat 0 et de ne rien acheter quand il se trouve aux etats 1 et 2.

• Suggestions et recommandations

La prevision portant sur le cours doit se faire sur un court intervalle de temps, car plus la prevision se fait sur une longue periode, plus les erreurs de previsions augmentent. Toutefois si la periode choisie dans les calculs est trop courte, il est tout de même fastidieux de refaire à la main le même travail de prevision chaque fois que le cours change.
D'autre part, la politique optimale trouvée n'est rigoureusement optimale que vis à vis des deux cours de 44845 et 45856 avec les probabilités respectives 0,44 et 0,56, c'est dire donc que quand le cours prend une valeur differente de ces deux, rigoureusement parlant nous ne pouvons plus decider d'une politique, il faut alors refaire le meme travail de prevision pour trouver une valeur prevue avec sa probabilité et la probabilité du nouveau cours. Tenant compte des deux aspects soulignés ci-dessus, il est souhaitable aussi que tous les calculs d'ajustement se fasse à l'ordinateur dans un programme bien etabli. Ce programme d'ajustement et de prevision conjugué avec un programme similaire à celui etabli dans ce projet pour la résolution du problème, guarantira à l'acheteur une efficacité plus grande dans ces decisions. Devant chaque nouveau cours different des deux necessaires à la

resolution du probleme, avec cet outil entièrement informatisé il peut decider très rapidement sur la politique d'achat la meilleure qu'il faut adopter.
Cet outil lui permettra de raffiner très rapidement la meilleure courbe et de comparer plusieurs scenarios dans les cas où plusieurs possibilités s'averent adequates.
Dans cette etude nous n'avons pas tenu compte du risque de depreciation technologique car quelle que soit la quantité considerée, elle ne reste au stock au maximum que pendant 4 jours s'il n'y a pas d'arrêt dans la production. Le temps de sejour maximum dans le stock peut être consideré au cas où le silo est rempli à la veille d'un week end, ainsi on aura 4 jours plus les 2 jours du week end soit au maximum 7 jours. Comme en 7 jours et même plus, le ciment conservé dans le silo ne court aucun risque de depreciation technologique, il est dès lors superflu dans ce probleme de tenir compte de cet aspect. Il faut voir ici que la capacité de stockage maximale du silo (100 t) est petit vis à vis de la consommation journalière qui est de 30 t/j, c'est ce qui fait que le ciment ne sejourne pas trop longtemps dans le silo pour pouvoir courir un quelconque risque de depréciation technologique.
Toutefois pour certains produits plus delicats, ce facteur est à tenir en compte. Il faudrait alors une contrainte supplementaire portant sur la durée de séjour.
Les resultats prouvent enfin le fait qu'une immobilisation dans les stocks n'est pas source de dividende, c'est une depense supplementaire quelle qu'en soit la durée. Autrement dit qu'aucune certitude de benefice ou d'economie ne peut être avancée si l'on stocke pendant une durée donnée la matière première.
Bien que l'on ait decrit des techniques permettant de comparer la mesure dans laquelle differents types de courbes permettent de representer valablement les données il faut reconnaitre que de telles methodes ne peuvent servir que de guide pour la prevision. Elles ne peuvent remplacer entierement le jugement. La decision

finale quant à la courbe la plus appropiée depend en partie du jugement de l'utilisateur.

L'extrapolation d'une tendance ne doit pas aboutir à des resultats absurdes ou incompatibles avec les conditions generales regnant sur le marché. Si la tendance conduit à de tels resultats, on est conduit à penser que la courbe utilisée permet une representation regulière des données mais ne correspond pas au taux de croissance du marché, de l'economie ou de l'inflation.

Si toutefois, la methode étudiée dans ce projet constitue un outil de decision lorsque des achats provisionnelles s'imposent, il faut toujours se garder à l'esprit que l'elaboration d'un modele mathematique pour representer un systéme reel exige des simplifications et des approximations. Cependant il faut être extremement prudent dans l'application d'un modele. Il faut bien veiller à ce que toutes les hypotheses puissent être respectées.

Dans le cas particulier du modele decrit dans ce projet les deux hypotheses fondamentales sont la constance du regime, autrement dit l'etat ergodique du systeme et la constance de la consommation periodique.

En bref disons pour terminer que quelle que soit la difficulté, une gestion basée sur des principes scientifiquement elaborés est plus digne de confiance que celle basée sur le tatonnement. C'est à ce titre que Albert Einstein disait: « Pourquoi les mathematiques qui ne sont que le produit de la pensée humaine independante de l'experience s'adaptent-elles si bien aux objets reels? »

Suite de la rédaction

CHAP IV APPLICATION DU MODELE

IV.1 Données obtenues

IV.2 / Traitement des données → hypothèse (lot = 1 unité)

IV.2.1 / calcul du coût de stocks

IV.2.1 / Déterminat° des prix et probab. associée à prendre en compte

Tableaux E

F

Figure 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

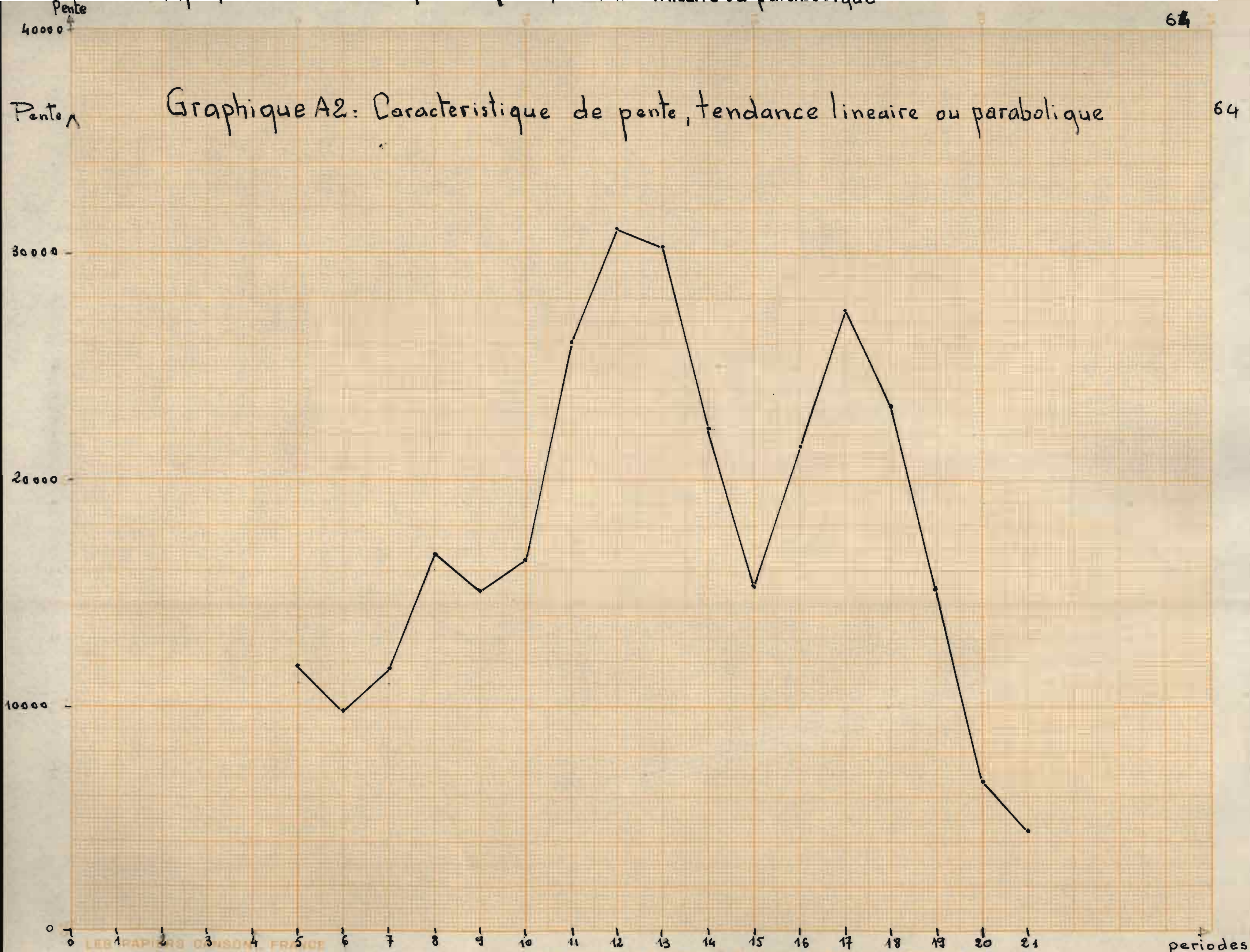
BIBLIOGRAPHIE

1. V. Koroliouk Aide-memoire de la theorie des probabilités et de statistique mathamatique.
2. J. Mehdi Stochastique process
3. Emlyn Lloyd Probability (volume II)
4. Stuart Heinritz L'approvisionnement dans l'entreprise
5. Claude Tricot et Jean Marc Picard Ensembles et statistiques
6. G. Hadley et T.M. Whitin Etude pratique des modeles de stock
7. J.V. Gregg et C.H. Hossell et J.T. Richardson Les courbes de tendance
8. Dioum Oumar These de doctorat en mathematique

ANNEXES

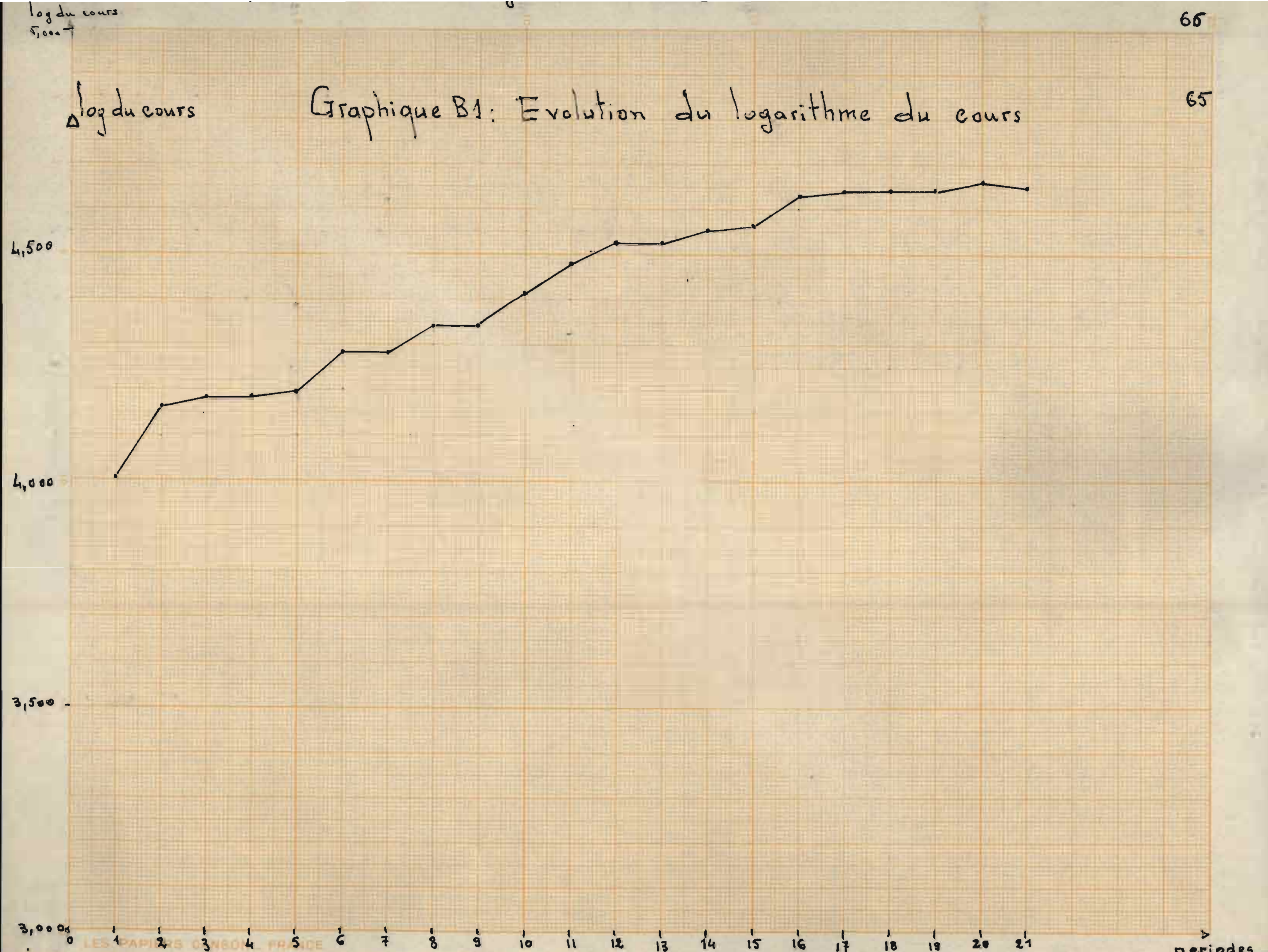
tableaux et graphiques

Graphique A2 : Caracteristique de pente, tendance lineaire ou parabolique



Graphique A3: Caracteristique de pente de l'exponentielle simple

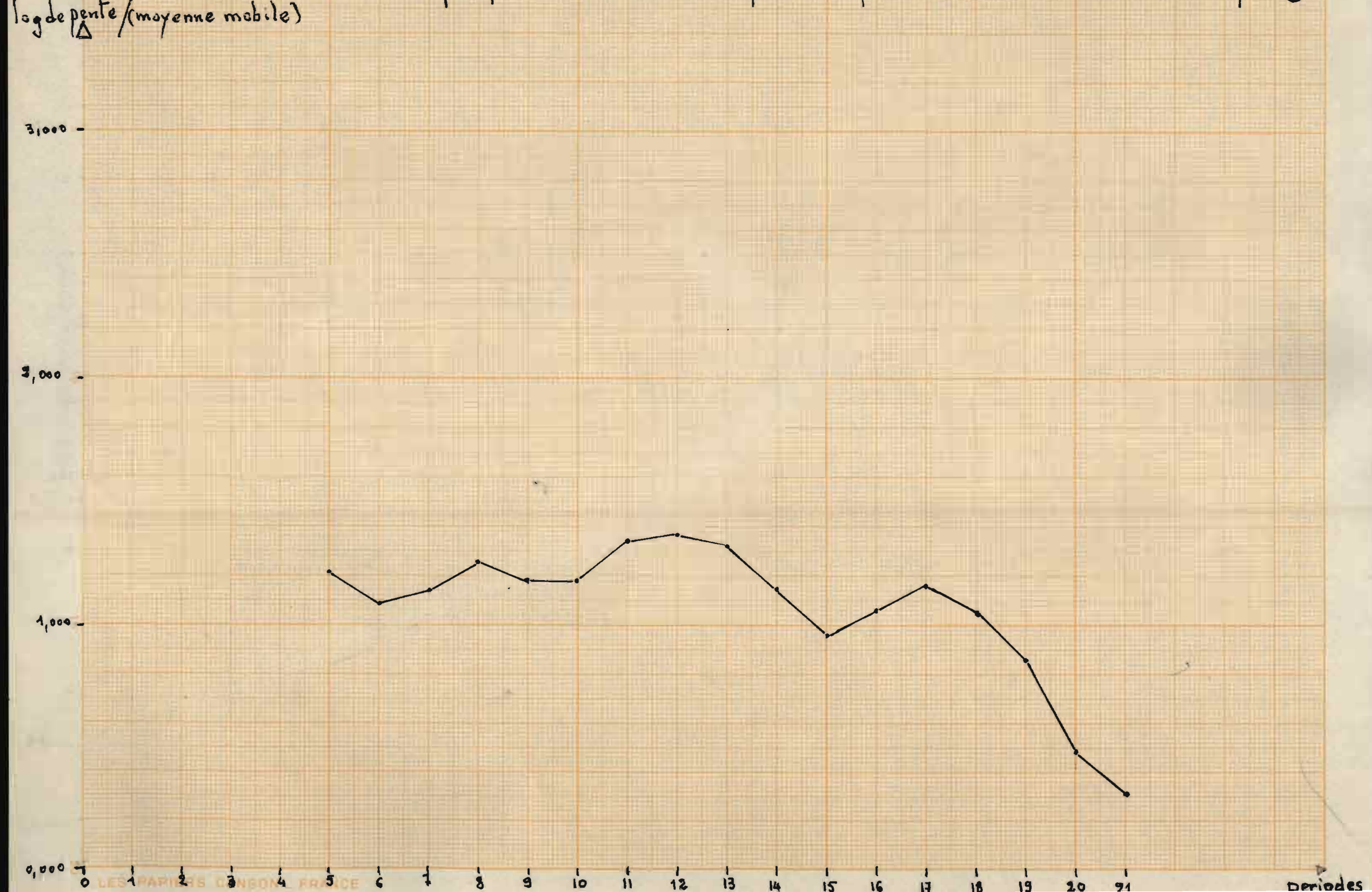
Graphique B1 : Evolution du logarithme du cours



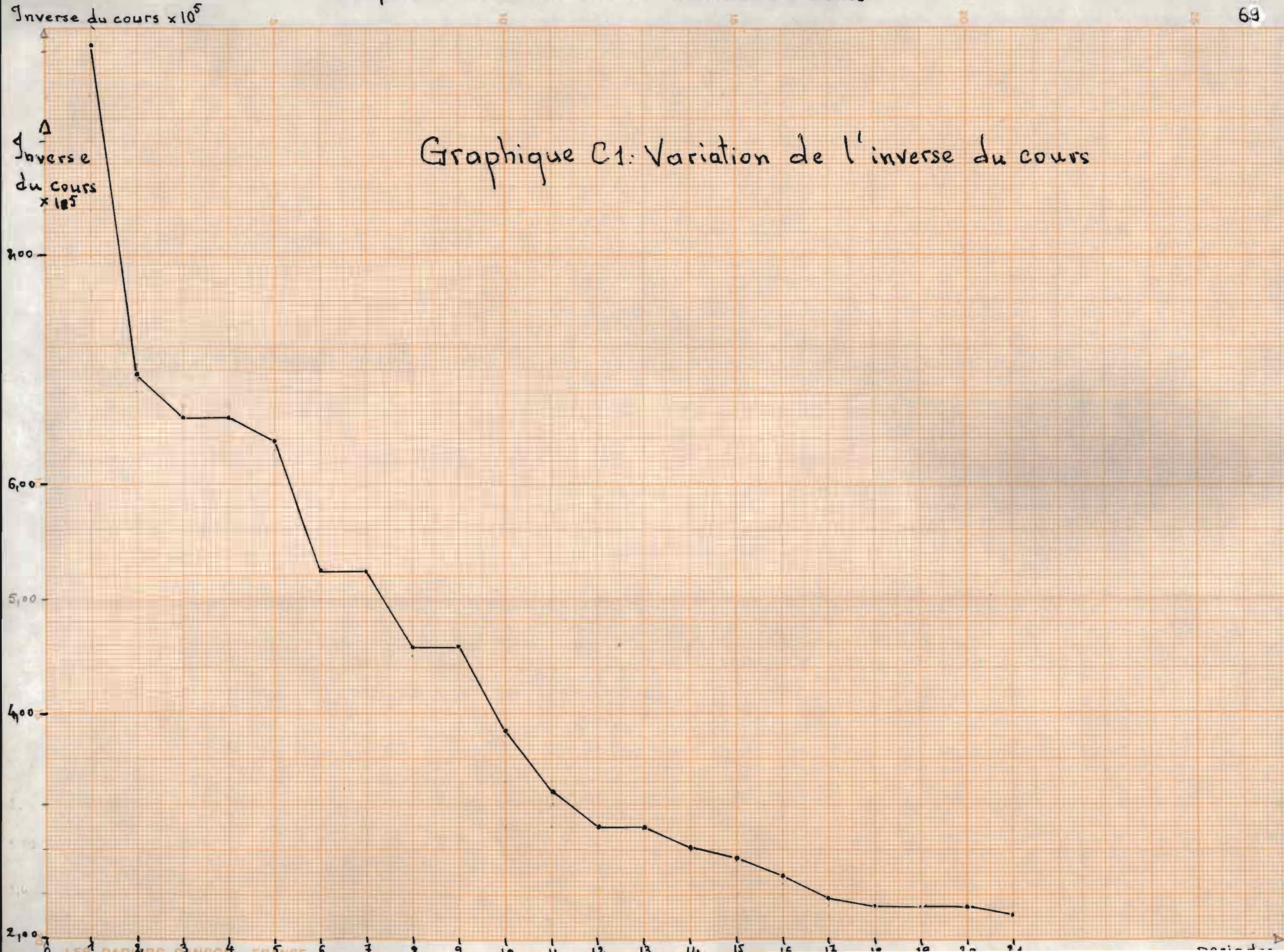
pente/moyenne mobile

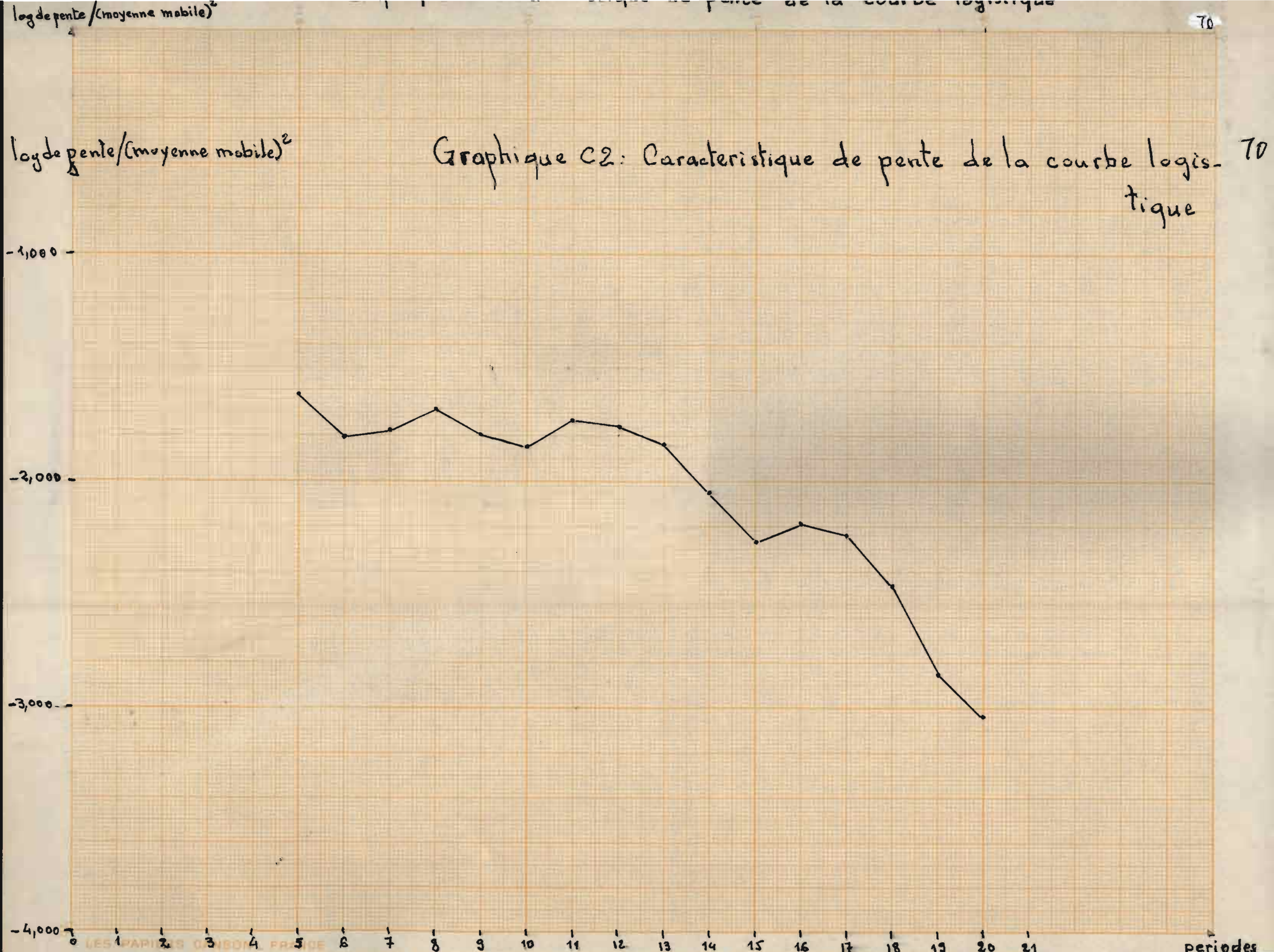
Graphique B2: Caracteristique de pente de l'exponentielle Simple ou parabole logarithmique

Graphique B3 : Caracteristique de pente de la courbe de Gompertz 68



Graphique C1: Variation de l'inverse du cours





Graphique C2: Caracteristique de pente de la courbe logistique

Tableau 2 : Calcul d'une moyenne mobile sur cinq semestres

Semestre	Cours	cours cumulé		5× moyenne mobile	Semestre de la moyenne mobile
Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 5	Col 6
1	$Y_1 = 10141$	$S_1 = 10141$			
2	$Y_2 = 14399$	$S_2 = 24540$			
3	$Y_3 = 15176$	$S_3 = 39716$			
4	$Y_4 = 15176$	$S_4 = 54892$			
5	$Y_5 = 15682$	$S_5 = 70574$		$5A_3 = S_5 = 70574$	3
6	$Y_6 = 19877$	$S_6 = 89651$	$S_1 = 10141$	$5A_4 = S_6 - S_1 = 79510$	4
7	$Y_7 = 19077$	$S_7 = 108728$	$S_2 = 24540$	$5A_5 = S_7 - S_2 = 84188$	5
8	$Y_8 = 21860$	$S_8 = 130588$	$S_3 = 39716$	$5A_6 = S_8 - S_3 = 90872$	6
9	$Y_9 = 21860$	$S_9 = 152448$	$S_4 = 54892$	$5A_7 = S_9 - S_4 = 97556$	7
10	$Y_{10} = 25923$	$S_{10} = 178371$	$S_5 = 70574$	$5A_8 = S_{10} - S_5 = 107797$	8
11	$Y_{11} = 30052$	$S_{11} = 208423$	$S_6 = 89651$	$5A_9 = S_{11} - S_6 = 118772$	9
12	$Y_{12} = 33304$	$S_{12} = 241727$	$S_7 = 108728$	$5A_{10} = S_{12} - S_7 = 132999$	10
13	$Y_{13} = 33304$	$S_{13} = 275031$	$S_8 = 130588$	$5A_{11} = S_{13} - S_8 = 144443$	11
14	$Y_{14} = 35456$	$S_{14} = 310487$	$S_9 = 152448$	$5A_{12} = S_{14} - S_9 = 158039$	12
15	$Y_{15} = 36640$	$S_{15} = 347127$	$S_{10} = 178371$	$5A_{13} = S_{15} - S_{10} = 168756$	13
16	$Y_{16} = 42346$	$S_{16} = 389473$	$S_{11} = 208423$	$5A_{14} = S_{16} - S_{11} = 181050$	14
17	$Y_{17} = 43614$	$S_{17} = 433087$	$S_{12} = 241727$	$5A_{15} = S_{17} - S_{12} = 191360$	15
18	$Y_{18} = 43614$	$S_{18} = 476701$	$S_{13} = 275031$	$5A_{16} = S_{18} - S_{13} = 201670$	16
19	$Y_{19} = 43614$	$S_{19} = 520315$	$S_{14} = 310497$	$5A_{17} = S_{19} - S_{14} = 209828$	17
20	$Y_{20} = 45717$	$S_{20} = 566032$	$S_{15} = 347127$	$5A_{18} = S_{20} - S_{15} = 218905$	18
21	$Y_{21} = 44845$	$S_{21} = 610887$	$S_{16} = 389473$	$5A_{19} = S_{21} - S_{16} = 221404$	19

Totaux = 610877   2477723

Verifier que

(a) $S_{21} = 610877$

(b)
$$\begin{array}{r} 2607012 \\ 129289 \\ \hline 2477723 \end{array}$$

Verifications

(a) La valeur de la dernière ligne de la colonne 3 doit être egale au total de tous les elements de la colonne 2. S'il n'en est pas ainsi, recalculer la colonne 3;

(b) Le total des lignes de la colonne 5 doit être egal à la somme des cinq dernieres lignes de la colonne 3, diminuée des (5-1) premières lignes de cette colonne.

Les etapes de calcul ci dessus sont les suivantes:

1°/ Inscrire dans la colonne 3 le cours cumulé de la colonne 2;

2°/ Inscrire les nombres de la colonne 3 dans la colonne 4 en commençant par la periode (5+1);

3°/ Les nombres de la colonne 5 sont egaux à cinq fois la moyenne mobile. La première valeur se trouve en regard de la periode 5 et chaque element est obtenu en soustrayant le nombre de la colonne 3 de celui de la colonne 4, sur la même ligne;

4°/ En commençant en regard du premier element de la colonne 5, on inscrit dans la colonne 6 une serie de nombres entiers commençant à $\frac{1}{2}(5+1)=3$. Ce sont les années correspondant aux chiffres de la colonne 5.

Tableau 3 : Calcul de pente sur cinq semestres

Semestre	Cours	5 x moyenne mobile	Semestre de la moyenne mobile et de la pente		10 x pente
Col 1	Col 2	Col 5	Col 6	Col 7	Col 8
1	$y_1 = 10141$				
2	$y_2 = 14399$				
3	$y_3 = 15176$				
4	$y_4 = 15176$				
5	$y_5 = 15682$	$5A_3 = 70574$	3		$10L_3 = -2y_1 - y_1 + y_4 + 2y_5 = 11959$
6	$y_6 = 19077$	$5A_4 = 79510$	4	$y_1 = 10141$	$10L_4 = 10L_3 + 3y_6 + 2y_1 - 5A_4 = 9862$
7	$y_7 = 19077$	$5A_5 = 84188$	5	$y_2 = 14399$	$10L_5 = 10L_4 + 3y_7 + 2y_2 - 5A_5 = 11703$
8	$y_8 = 21860$	$5A_6 = 90872$	6	$y_3 = 15176$	$10L_6 = 10L_5 + 3y_8 + 2y_3 - 5A_6 = 16763$
9	$y_9 = 21860$	$5A_7 = 97556$	7	$y_4 = 15176$	$10L_7 = 10L_6 + 3y_9 + 2y_4 - 5A_7 = 15139$
10	$y_{10} = 25923$	$5A_8 = 107797$	8	$y_5 = 15682$	$10L_8 = 10L_7 + 3y_{10} + 2y_5 - 5A_8 = 16475$
11	$y_{11} = 30052$	$5A_9 = 118772$	9	$y_6 = 19077$	$10L_9 = 10L_8 + 3y_{11} + 2y_6 - 5A_9 = 26013$
12	$y_{12} = 33304$	$5A_{10} = 132998$	10	$y_7 = 19077$	$10L_{10} = 10L_9 + 3y_{12} + 2y_7 - 5A_{10} = 31080$
13	$y_{13} = 33304$	$5A_{11} = 144443$	11	$y_8 = 21860$	$10L_{11} = 10L_{10} + 3y_{13} + 2y_8 - 5A_{11} = 30269$
14	$y_{14} = 35456$	$5A_{12} = 158039$	12	$y_9 = 21860$	$10L_{12} = 10L_{11} + 3y_{14} + 2y_9 - 5A_{12} = 22318$
15	$y_{15} = 36640$	$5A_{13} = 168756$	13	$y_{10} = 25923$	$10L_{13} = 10L_{12} + 3y_{15} + 2y_{10} - 5A_{13} = 15328$
16	$y_{16} = 42346$	$5A_{14} = 181050$	14	$y_{11} = 30052$	$10L_{14} = 10L_{13} + 3y_{16} + 2y_{11} - 5A_{14} = 21420$
17	$y_{17} = 43614$	$5A_{15} = 191360$	15	$y_{12} = 33304$	$10L_{15} = 10L_{14} + 3y_{17} + 2y_{12} - 5A_{15} = 27540$
18	$y_{18} = 43614$	$5A_{16} = 201670$	16	$y_{13} = 33304$	$10L_{16} = 10L_{15} + 3y_{18} + 2y_{13} - 5A_{16} = 23290$
19	$y_{19} = 43614$	$5A_{17} = 209828$	17	$y_{14} = 35456$	$10L_{17} = 10L_{16} + 3y_{19} + 2y_{14} - 5A_{17} = 15216$
20	$y_{20} = 45717$	$5A_{18} = 218905$	18	$y_{15} = 36640$	$10L_{18} = 10L_{17} + 3y_{20} + 2y_{15} - 5A_{18} = 6742$
21	$y_{21} = 44845$	$5A_{19} = 221404$	19	$y_{16} = 42346$	$10L_{19} = 10L_{18} + 3y_{21} + 2y_{16} - 5A_{19} = 4565$
Total					305552

Verifier que : $10L_3 + 10L_4 + 10L_5 + \dots + 10L_{19} = (2y_{21} + 3y_{20} + 3y_{19} + 2y_{18}) - (2y_4 + 3y_3 + 3y_2 + 2y_1)$

$= 444911 - 139359 = 305552$

Les etapes du calcul ci-dessus sont les suivantes:

1/ Inscrire dans la colonne 7 les valeurs de la colonne 2 en commençant à l'année (5+1);

2/ Le premier element de la colonne 3 est une estimation directe par calcul de la pente à l'année 3, obtenue à partir des cours des cinq premiers semestres. L'estimation des valeurs suivantes de la pente est effectuée en utilisant la formule d'iteration donnée à la section intitulée methode de calcul des pentes. $1ol_4$ est egal à l'estimation de la pente precedante ($1ol_3$) plus trois fois l'element correspondant de la colonne 2, plus deux fois celui de la colonne 7, moins celui de la colonne 5.

Tableau A: Etude de la pente et de la tendance

Semestre	Cours	Cours Cumulé		5x moyenne mobile	Semestre de la pente de la moyenne mobile		ligne droite ou parabole	Exponentielle simple modifiée	Exponentielle simple ou parabole logarithmique	Courbe de Gomperts		Courbe logistique
Calcul de la moyenne mobile sur cinq semestres							Calcul des caracteristiques de pente					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10141	10141										
2	14399	24540										
3	15176	39716										
4	15176	54892										
5	15682	70574		70574	3		11959	3,074	0,168	1,225	$2,380.10^{-4}$	− 1,623
6	19077	89651	10141	79510	4	10141	9862	2,994	0,124	1,093	$1,560.10^{-4}$	− 1,907
7	19077	108728	24540	84188	5	14399	11703	3,068	0,139	1,143	$1,651.10^{-4}$	− 1,782
8	21860	130588	39716	90872	6	15176	16763	3,224	0,184	1,265	$2,025.10^{-4}$	− 1,694
9	21960	152448	54892	97556	7	15176	15139	3,190	0,155	1,190	$1,589.10^{-4}$	− 1,799
10	25923	178371	70574	107797	8	15682	16475	3,217	0,153	1,185	$1,419.10^{-4}$	− 1,849
11	30052	208423	89651	118772	9	19077	26013	3,415	0,219	1,340	$1,844.10^{-4}$	− 1,734
12	33304	241727	108728	132999	10	19077	31080	3,492	0,234	1,369	$1,759.10^{-4}$	− 1,755
13	33304	275031	130588	144443	11	21860	30269	3,481	0,210	1,322	$1,454.10^{-4}$	− 1,837
14	35456	310487	152448	158039	12	21860	22318	3,349	0,141	1,149	$0,892.10^{-4}$	− 2,050
15	36640	347127	178371	168756	13	25923	15328	3,185	0,0908	0,958	$0,538.10^{-4}$	− 2,269
16	42346	389473	208423	184050	14	30052	21420	3,331	0,118	1,072	$0,652.10^{-4}$	− 2,186
17	43614	433087	241727	191360	15	33304	27510	3,439	0,144	1,158	$0,752.10^{-4}$	− 2,124
18	43614	476701	275031	201670	16	33304	23290	3,367	0,115	1,061	$0,570.10^{-4}$	− 2,244
19	43614	520315	310487	209828	17	35456	15216	3,182	0,0725	0,860	$0,346.10^{-4}$	− 2,461
20	45717	566032	347127	218405	18	36640	6742	2,829	0,0308	0,488	$0,141.10^{-4}$	− 2,951
21	44945	610977	389473	221404	19	42346	4565	2,659	0,0206	0,314	$0,093.10^{-4}$	− 3,032

A-5

Les etapes de calcul du tableau A sont les suivantes

Colonne 3 : total cumulé de la colonne 2

Colonne 4 : Colonne 3 decalée de la durée de la moyenne mobile

Colonne 5 : Colonne 3 moins colonne 4

Colonne 6 : Colonne 1 decalée de la moitié de la durée de la moyenne mobile diminuée d'une unité

Colonne 7 : Colonne 2 decalée de la durée de la moyenne mobile

Colonne 8 : premier element = $(-2 \times 5{,}7) - (1 \times 6{,}9) + (1 \times 8{,}6) + (2 \times 11{,}6)$;
chaque element suivant = element precedent + (3x colonne 2) + (2x colonne 7) - colonne 5

Colonne 9 : log colonne 8, moins 1

Colonne 10 : colonne 8 divisé par colonne 5

Colonne 11 : log colonne 10, plus 2

Colonne 12 : 100x colonne 10 divisée par colonne 5

Colonne 13 : log colonne 12, plus 2

Tableau 8 : Calcul des tendances pour la parabole logarithmique et la courbe de Gompertz pour les semestres 12 à 21

courbe logarithmique								courbe de Gompertz					
Semestre	log du cours	Facteurs a		Facteur b		Facteur c		Facteur R		Facteur S		Facteur T	
1	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
12.	4,522	+1188	5372,136	-402	-1817,844	30	135,660	1	4,522				
13	4,522	+660	2984,520	-166	-750,652	10	45,220	1	4,522				
14	4,550	+242	1101,100	15	68,25	-5	-22,75	1	4,550	1	4,550		
15	4,564	-66	-301,224	141	643,524	-15	-68,46	1	4,564	1	4,564		
16	4,627	-264	-1221,528	212	980,924	-20	-92,54	1	4,627	1	4,627		
17	4,640	-352	-1633,280	228	1057,920	-20	-92,80			1	4,640	1	4,640
18	4,640	-330	-1531,200	189	876,960	-15	-69,60			1	4,640	1	4,640
19	4,660	-198	-918,720	95	440,800	-5	-23,20			1	4,640	1	4,640
20	4,660	+44	205,040	-54	-251,640	10	46,60					1	4,660
21	4,652	+396	1842,192	-258	-1200,216	30	139,56					1	4,652

Notes

Colonne 26 = log de la colonne 2

Colonne 27, 29, 31 = tirées de la table

Colonne 28 = Colonne 26 multipliée par colonne 27

Colonne 30 = Colonne 26 multipliée par colonne 29

Colonne 32 = Colonne 26 multipliée par colonne 31

Colonne 34 = Colonne 26 multipliée par colonne 33

Colonne 36 = Colonne 26 multipliée par colonne 35

Colonne 38 = Colonne 26 multipliée par colonne 37

Parabole Logarithmique

a = total de la colonne 28 divisée par 1320 (table

a = 4,470

b = total de la colonne 30 divisée par 1320

b = 0,0364

c = total de la colonne 32 divisée par 1320

c = $-1,75 . 10^{-3}$

Courbe de Gompertz

R = total de la colonne 34 divisée par 5

R = 4,557

S = total de la colonne 36 divisée par 6

S = 4,610

T = total de la colonne 38 divisée par 5

T = 4,646

Tableau C: Calcul de la tendance pour la courbe logistique (par la methode des trois points) pour les semestres 12 à 21

Semestre	Inverse du cours	Facteur R		Facteur S		Facteur T	
Col 1	Col 39	Col 40	Col 41	Col 42	Col 43	Col 44	Col 45
12	$3{,}00.10^{-5}$	1	$3{,}00.10^{-5}$				
13	$3{,}00.10^{-5}$	1	$3{,}00.10^{-5}$				
14	$2{,}82.10^{-5}$	1	$2{,}82.10^{-5}$	1	$2{,}82.10^{-5}$		
15	$2{,}73.10^{-5}$	1	$2{,}73.10^{-5}$	1	$2{,}73.10^{-5}$		
16	$2{,}36.10^{-5}$	1	$2{,}36.10^{-5}$	1	$2{,}36.10^{-5}$		
17	$2{,}29.10^{-5}$			1	$2{,}29.10^{-5}$	1	$2{,}29.10^{-5}$
18	$2{,}29.10^{-5}$			1	$2{,}29.10^{-5}$	1	$2{,}29.10^{-5}$
19	$2{,}29.10^{-5}$			1	$2{,}29.10^{-5}$	1	$2{,}29.10^{-5}$
20	$2{,}19.10^{-5}$					1	$2{,}19.10^{-5}$
21	$2{,}23.10^{-5}$					1	$2{,}23.10^{-5}$

Notes

Colonne 39 = Inverse de la colonne 2

Colonne 41 = Colonne 39 x Colonne 40

Colonne 43 = Colonne 39 x colonne 42

Colonne 45 = Colonne 39 x colonne 44

Courbe Logistique

R = total colonne 41 divisée par 5

$R = 2,782.10^{-5}$

S = total colonne 43 divisée par 6

$S = 2,463.10^{-5}$

T = Total colonne 45 divisée par 5

$T = 2,258.10^{-5}$

Tableau 4: Calcul de l'exponentielle simple modifiée par la methode des trois points

Semestre	Cours			
Col 1	Col 2	Col 21	Col 23	Col 25
12	33304	33304		
13	33304	33304		
14	35456	35456	35456	
15	36640	36640	36640	
16	42346	42346	42346	
17	43614		43614	43614
18	43614		43614	43614
19	43614		43614	43614
20	45717			45717
21	44845			44845
total		181050	245284,2	221404
Divisé par		5	6	5
		R= 36210	S= 40880,7	T= 44280,8

Tableau 5: Calcul de la parabole

Semestre	Cours	Facteur a	Facteur b	Facteur c
col 1	col 2	col 14	col 16	col 18
12	33304	+ 1188	− 402	+ 30
13	33304	+ 660	− 166	+ 10
14	35456	+ 242	+ 15	− 5
15	36640	− 66	+ 141	− 15
16	42346	− 264	+ 212	− 20
17	43614	− 352	+ 228	− 20
18	43614	− 330	+ 189	− 15
19	43614	− 198	+ 95	− 5
20	45717	+ 44	− 54	+ 10
21	44845	+ 396	− 258	+ 30

M = 1320 (Tableau E)

$$a = \frac{1}{1320}\left(33304 \times 1188 + 33304 \times 660 + 35456 \times 242 - 36640 \times 66 - 42346 \times 264 - 43614 \times 352 - 43614 \times 330 - 43614 \times 198 + 45717 \times 44 + 44845 \times 396\right) = 28726,07$$

$$b = \frac{1}{1320}\left(-33304 \times 402 - 33304 \times 166 + 35456 \times 15 + 36640 \times 141 + 42346 \times 212 + 43614 \times 228 + 43614 \times 189 + 43614 \times 95 - 45717 \times 54 - 44845 \times 258\right)$$

$$b = 3068,48$$

$$c = \frac{1}{1320}\left(33304 \times 30 + 33304 \times 10 - 35456 \times 5 - 36640 \times 15 - 42346 \times 20 - 43614 \times 20 - 43614 \times 15 - 43614 \times 5 + 45717 \times 10 + 44845 \times 30\right) = -139,15$$

$$\boxed{a = 28726,07 \; ; \; b = 3068,48 \; ; \; c = -139,15}$$

Les valeurs des colonnes 14, 16 et 18 sont prise à la tableau E

Tableau 6 : Comparaison des données du cours et des courbes de tendance

Semestre	Cours	Parabole	Parabole logarithmique	Exponentielle modifiée	Courbe de Gompertz	Courbe logistique
1	10141					
2	14399					
3	15176					
4	15176					
5	15682					
6	19077					
7	19077					
8	21860					
9	21860					
10	25923					
11	30052					
12	33304	31655	31963	49950	31777	51453
13	33304	34306	34340	50359	34170	51688
14	35456	36679	36591	50720	36362	51887
15	36640	38774	38690	51037	38352	52054
16	42346	40590	40574	51316	40143	52195
17	43614	42128	42208	51562	41743	52314
18	43614	43387	43556	51779	43165	52414
19	43614	44368	44586	51970	44421	52499
20	45717	45071	45274	52138	45526	52569
21	44845	45496	45604	52286	46494	52629
22		45642*	45567*	52417*	47340*	52679*
R		1285	1233	11768	1371	12695

R = Residu quadratique moyen par rapport au cours effectif ; les valeurs en asterique sont prevues

Tableau E. Coefficients à utiliser pour l'ajustement de la tendance quadratique

$Y = a + bt + ct^2$ $t = 1$ pour la première periode de la serie

NOMBRE D'ANNÉES	5			6			7			6		
Coefficients *a*, *b*, *c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Multiplier le 1er élément de la série par	+126	−74	10	420	−215	+25	+108	−49	5	189	−77	7
2e	0	+23	−5	84	11	−5	+36	−6	0	81	−19	1
3e	−56	+60	−10	−112	132	−20	−12	+21	−3	3	21	−3
4e	−42	+37	−5	−168	148	−20	−36	+32	−4	−45	43	−5
5e	42	−46	+10	−84	59	−5	−36	+27	−3	−63	47	−5
6e				140	−135	+25	−12	+6	0	−51	33	−3
7e							+36	−31	+5	−9	1	1
8e										63	−49	7
Diviser le total par *M*	70			280			84			168		

NOMBRE D'ANNÉES	9			10			11			12		
Coefficients *a*, *b*, *c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Multiplier le 1er élément de la série par	+4,620	−1,708	+140	+1,188	−402	30	+3,510	−1,095	+75	3,003	−869	55
2e	+2,310	−581	+35	+660	−166	10	+2,106	−516	+30	1,911	−451	25
3e	+550	246	−40	242	15	−5	+962	−57	−5	1,001	−111	1
4e	−660	773	−85	−66	141	−15	+78	282	−30	273	151	−17
5e	−1,320	1,000	−100	−264	212	−20	−546	501	−45	−273	335	−29
6e	−1,430	927	−85	−352	228	−20	−910	600	−50	−637	441	−35
7e	−990	554	−40	−330	189	−15	−1,014	579	−45	−819	469	−35
8e	0	−119	+35	−198	95	−5	−858	438	−30	−819	419	−29
9e	1,540	−1,092	+140	44	−54	10	−442	177	−5	−637	291	−17
10e				396	−258	30	234	−204	+30	−273	85	1
11e							1,170	−705	+75	273	−199	25
12e										1,001	−561	55
Diviser le total par *M*	4,620			1,320			4,290			4,004		

NOMBRE D'ANNÉES	13			14			15			16		
Coefficients *a*, *b*, *c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Multiplier le 1er élément de la série par	+1,386	−374	+22	+4,680	−1,183	+65	+37,128	−8,827	+455	+16,065	−3,605	+175
2e	+924	−209	+11	+3,240	−701	+35	+26,520	−5,486	+260	+11,781	−2,331	+105
3e	+532	−72	+2	+2,000	−294	+10	+17,272	−2,625	+95	+8,007	−1,227	+45
4e	+210	+37	−5	+960	+38	−10	+9,384	−244	−40	+4,743	−293	−5
5e	−42	+118	−10	+120	+295	−25	+2,856	+1,657	−145	+1,989	+471	−45
6e	−224	+171	−13	−520	+477	−35	−2,312	+3,078	−220	−255	+1,065	−75
7e	−336	+196	−14	−960	+584	−40	−6,120	+4,019	−265	−1,989	+1,489	−95
8e	−378	+193	−13	−1,200	+616	−40	−8,568	+4,480	−280	−3,213	+1,743	−105
9e	−350	+162	−10	−1,240	+573	−35	−9,656	+4,461	−265	−3,927	+1,827	−105
10e	−252	+103	−5	−1,080	+455	−25	−9,384	+3,962	−220	−4,131	+1,741	−95
11e	−84	+16	+2	−720	+262	−10	−7,752	+2,983	−145	−3,825	+1,485	−75
12e	154	−99	+11	−160	−6	+10	−4,760	+1,524	−40	−3,009	+1,059	−45
13e	462	−242	+22	600	−349	+35	−408	−415	+95	−1,683	+463	−5
14e				1,560	−767	+65	5,304	−2,834	260	+153	−303	+45
15e							12,376	−5,733	455	+2,499	−1,239	+105
16e										+5,355	−2,345	+175
Diviser le total par *M*	2,002			7,280			61,880			28,560		

NOMBRE D'ANNÉES	17			18			19			20		
Coefficients *a*, *b*, *c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Multiplier le 1er élément de la série par	4,104	−872	40	7,752	−1,564	68	32,130	−6,171	255	39,501	−7,239	285
2e	3,078	−583	25	5,928	−1,076	44	24,990	−4,352	170	31,185	−5,217	195
3e	2,166	−330	12	4,294	−645	23	18,550	−2,733	95	23,639	−3,405	115
4e	1,368	−113	1	2,850	−271	5	12,810	−1,314	30	16,863	−1,803	45
5e	684	68	−8	1,596	46	−10	7,770	−95	−25	10,857	−411	−15
6e	114	213	−15	532	306	−22	3,430	924	−70	5,621	771	−65
7e	−342	322	−20	−342	509	−31	−210	1,743	−105	1,155	1,743	−105
8e	−684	395	−23	−1,026	655	−37	−3,150	2,362	−130	−2,541	2,505	−135
9e	−912	432	−24	−1,520	744	−40	−5,390	2,781	−145	−5,467	3,057	−153
10e	−1,026	433	−23	−1,824	776	−40	−6,930	3,000	−150	−7,623	3,399	−165
11e	−1,026	398	−20	−1,938	751	−37	−7,770	3,019	−145	−9,009	3,531	−165
12e	−912	327	−15	−1,862	669	−31	−7,910	2,838	−130	−9,625	3,453	−155
13e	−684	220	−8	−1,596	530	−22	−7,350	2,457	−105	−9,471	3,165	−135
14e	−342	77	1	−1,140	334	−10	−6,090	1,876	−70	−8,547	2,667	−105
15e	114	−102	12	−494	81	5	−4,130	1,095	−25	−6,853	1,959	−65
16e	684	−317	25	342	−229	23	−1,470	114	30	−4,389	1,041	−15
17e	1,368	−568	40	1,368	−596	44	1,890	−1,067	95	−1,155	−87	45
18e				2,584	−1,020	68	5,950	−2,448	170	2,849	−1,425	115
19e							10,710	−4,029	255	7,623	−2,973	195
20e										13,167	−4,731	285
Diviser le total par *M*	7,752			15,504			67,830			87,780		

TABLEAU G — PRÉVISION AU MOYEN D'UNE TENDANCE QUADRATIQUE LIMITES DE CONFIANCE À 90%

Longueur de la série (n)	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$n+6$	$n+7$	$n+8$	$n+9$	$n+10$	$n+11$	$n+12$	$n+13$	$n+14$	$n+15$	«t» de Student pour 90%
5	6·263	11·607	18·595	27·539	37·268											2·920
6	4·210	7·203	11·014	15·612	20·989											2·353
7	3·322	5·345	7·867	10·871	14·346	18·293	22·706									2·132
8	2·811	4·306	6·138	8·296	10·770	13·559	16·662									2·015
9	2·471	3·637	5·046	6·688	8·559	10·653	12·971	15·513	18·278	21·264						1·943
10	2·229	3·172	4·298	5·600	7·072	8·713	10·521	12·496	14·635	16·941						1·895
11	2·042	2·827	3·753	4·816	6·010	7·334	8·788	10·371	12·083	13·920						1·860
12	1·895	2·559	3·338	4·225	5·217	6·311	7·510	8·809	10·210	11·713						1·833
13	1·774	2·347	3·013	3·767	4·606	5·528	6·534	7·623	8·794	10·046						1·812
14	1·674	2·175	2·753	3·403	4·124	4·916	5·774	6·701	7·696	8·757						1·796
15	1·588	2·030	2·538	3·106	3·733	4·419	5·161	5·961	6·818	7·729						1·782
16	1·514	1·909	2·359	2·860	3·413	4·013	4·663	5·361	6·108	6·902	7·741	8·630	9·565	10·548	11·577	1·771
17	1·448	1·844	2·207	2·680	3·143	3·695	4·249	4·880	5·521	6·229	6·954	7·741	8·550	9·416	10·307	1·761
18	1·392	1·713	2·076	2·477	2·915	3·390	3·902	4·449	5·031	5·648	6·300	6·987	7·710	8·467	9·259	1·753
19	1·341	1·634	1·962	2·326	2·720	3·148	3·607	4·096	4·616	5·168	5·750	6·362	7·005	7·677	8·381	1·746
20	1·295	1·563	1·864	2·192	2·553	2·939	3·353	3·795	4·263	4·759	5·281	5·831	6·407	7·009	7·637	1·740

Notes: Dans toutes les colonnes, sauf la première et la derniere, la valeur numerique figurant dans l'en-tête se rapporte au nombre de periodes sur lequel porte l'extrapolation. Par exemple (n+5) signifie que l'extrapolation est à l'echeance de 5 periodes, quelle que soit la valeur de n