



école polytechnique de thiès

PROJET DE FIN D'ETUDES

Gm.0563

TITRE: Écoulement radial
entre disques coaxiaux

Auteur Alpha Kane
Génie mécanique
Date Juin 1978

Projet de fin d'études

présenté

à l'École Polytechnique
de Thiès

par

Alpha Kane

Élève-ingénieur en 4^e année génie mécanique.
Pour l'obtention du grade d'ingénieur

Sujet : "Écoulement radial entre
disques coaxiaux."

Directeur de Projet

Dinh To Ngoc

1978

À mon épouse,
À mes parents.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de Sujets, Monsieur Dinko V. Stojic qui m'a constamment guidé au cours de cette étude et dont les conseils ont été des plus fructueux.

Je tiens à remercier également Messieurs Ghislain Morin et René Gauthier pour leur sollicitude.

Je ne saurais également oublier Monsieur Daniel Fortin, Responsable des Sujets pour l'attention particulière apportée à ce modeste travail.

Table des matières

	Pages
Notations	
- Sommaire	i
Introduction	v
- Chapitre I Problème théorique	1
1 - Equations de Navier - Stokes	1
2 - Choix des grandeurs de référence	2
3 - Hypothèses de von Kármán	3
Equations réduites du problème.	
4 - Calcul de la pression et du frottement.	5
- Chapitre II Résolution du problème	7
A - Résolution analytique	8
1 - Méthode employée	8
2 - Calculs	10
3 - Résultats	10
B - Résolution numérique	12
1 - Choix de la méthode	12
2 - Transformation du système (10) en un système d'équations du 1 ^{er} ordre.	12

3 - Formulation de la méthode de Runge - Kutta	13
4 - Formulation de la méthode des tirés	14
5 - Programmation	17

- Chapitre III Discussion des résultats obtenus et étude comparative avec les résultats déjà obtenus.	20
---	----

- Conclusion	23	
Bibliographie	24	
Figures	28	
Annexe I	Problème théorique (calculs)	39
Annexe II	Méthode de Runge - Kutta : dérivation des formules.	43
Annexe III	Résolution analytique (calculs)	53
Annexe IV	Résolution analytique (résultats)	68

Sommaire

On se propose d'étudier l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques coaxiaux en rotation.

Après la mise en équation du problème, nous proposons deux types de résolution analytique et numérique.

Dans la recherche d'une solution analytique, nous imposons à f et g une forme donnée vérifiant les équations différentielles et les conditions aux limites du problème étudié. Les fonctions f et g proposées ne conviennent cependant qu'aux faibles valeurs du nombre de Taylor ($T \leq 8,26$) et offrent quatre solutions dont :

- deux sont physiquement redoutables et à notre connaissance ne se trouvent pas dans la littérature.
- une ressemble à celle trouvée par Greenspan [21]
- une ressemble à celle du type von Kármán déjà trouvée dans les études précédentes [21], pour les grands nombres de Taylor.

La solution numérique obtenue montre par ailleurs qu'aux faibles nombres de Taylor, on a une répartition linéaire de la composante tangentielle de la vitesse. Pour des nombres de Taylor plus grands, cette composante a tendance à devenir celle du type von Kármán, c'est-à-dire qu'elle s'annule dans la région près du disque fixe.

Notations

a	distance entre les disques
Ω	vitesse de rotation du disque supérieur, - constante
$f, g(z)$	solutions du problème, fonctions de z
ν	viscosité cinématique du fluide.
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	composantes radiale, tangentielle, - axiale de la vitesse, dimensionnelles.
u, v, w	composantes non dimensionnelles de la vitesse
\bar{p}	pression statique, dimensionnelle.
p	pression statique, non dimensionnelle.
p_c	pression sur l'axe des disques, non dimensionnelle.
T	nombre de Taylor de rotation $T = \frac{\Omega a^2}{\nu}$
r, z, θ	coordonnées cylindriques, non dimensionnelles.
ε	precision que nous nous fixons dans nos calculs.

$\phi, \psi(z)$

fonctions définissant la répartition de pression.

 \mathbb{N}

ensemble des entiers naturels

 \mathbb{N}^*
 $=$
 $\mathbb{N} - \{0\}$
 \mathbb{R}

ensemble des nombres réels.

 τ_{z_0}

composantes tangentielles du fluide.

Introduction

L'écoulement radial entre disques coaxiaux en rotation a déjà fait l'objet de plusieurs études.

L'étendue de la bibliographie relative au sujet est assez significative. Il présente à la fois

- un intérêt théorique (mathématique, numérique):
Résolution de systèmes d'équations différentielles non linéaires.

- un grand intérêt pratique :

- étude des paliers à air [6].

- étude des pompes et compresseurs à entraînement visqueux.

- étalonnage des sondes anémométriques [2].

Le problème est étudié à partir

- des équations de Navier - Stokes écrites en coordonnées cylindriques.

- et de certaines hypothèses :

- le fluide est incompressible,

- l'écoulement est laminaire et stationnaire

- les disques sont de dimensions infinies,

- la composante axiale de la vitesse w ne dépend que de la coordonnée axiale

(hypothèse de von Kármán)

- Ensuite, nous résolvons le problème en proposant :

- une solution analytique (les systèmes non linéaires admettent une multiplicité de solutions),
- une solution numérique classique (méthode de Runge-Kutta) utilisant la technique des tirs.

- Enfin, nous faisons une étude comparative de nos résultats et des résultats déjà trouvés par différents auteurs.

Chapitre I

Problème théorique

1 - Equations de Navier - Stokes.

On étudie l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques parallèles coaxiaux infinis de côtes $\bar{z} = c$ et $\bar{z} = a$.

Le disque supérieur tourne à une vitesse constante Ω . Le disque inférieur reste fixe. Le problème est étudié dans le cas stationnaire.

En tenant compte de la géométrie de révolution et en négligeant les forces extérieures, l'écoulement est régi par les équations de Navier - Stokes écrites en coordonnées cylindriques [1].

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (1-a)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{r}} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (1-b)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (1-c)$$

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{r}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{w})}{\partial\bar{z}} = 0 \quad (2)$$

Les conditions aux limites, déduites de la condition de non-glissement à la paroi s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{z} = 0 & \quad \bar{u} = 0 & \quad \bar{v} = 0 & \quad \bar{w} = 0 \\ \bar{z} = a & \quad \bar{u} = 0 & \quad \bar{v} = \bar{r}\Omega & \quad \bar{w} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

2 - Choix des grandeurs de référence

Les vitesses \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , la pression \bar{p} sont fonctions des variables du problème : les longueurs \bar{z} , \bar{r} . Les paramètres sont ρ , ν , Ω , a .

On prend a comme longueur de référence, ν/a comme vitesse de référence.

On en déduit une pression de référence $\rho \frac{\nu^2}{a^2}$.

Le problème se trouve alors ramené aux grandeurs adimensionnelles.

$$\begin{aligned} r &= \frac{\bar{r}}{a} & z &= \frac{\bar{z}}{a} \\ u &= \frac{a}{\nu} \bar{u} & v &= \frac{a}{\nu} \bar{v} & w &= \frac{a}{\nu} \bar{w} \end{aligned}$$

$$p = \frac{a^2}{\rho \nu^2} \bar{p}$$

Les équations (1-a, b, c) (2) deviennent :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4-a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (4-b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (4-c)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{array}{llll} z=0 & u=0 & v=0 & w=0 \\ z=1 & u=0 & v=r \frac{\Omega a^2}{\nu} & w=0 \end{array} \quad (6)$$

En fait apparaît ainsi un seul paramètre qui définit le problème à savoir $T = \frac{\Omega a^2}{\nu}$ que nous appelons nombre de Taylor dans ce qui suit.

3 - Hypothèses de un Kármán - Équations réduites du problème.

On cherche à ramener le problème à une seule variable spatiale en utilisant une hypothèse du type von Kármán en ce qui concerne la vitesse axiale (21, 131). On suppose que la vitesse axiale est indépendante de la coordonnée radiale, soit

$$w = f(z) \quad (7)$$

De l'équation de continuité (5), on tire (Annexe I) :

$$u = -\frac{r}{2} f'(z) \quad (8)$$

puis de (4-a-b-c), on tire : (121, 131)

$$v = r g(z) \quad (9)$$

En éliminant la pression statique entre les équations 4-a et 4-c, on trouve que f et g doivent satisfaire le système (Annexe I) :

$$f^{(4)} - 4gg' - ff''' = 0 \quad (10)$$

$$fg' - f'g - g'' = 0$$

avec les conditions aux limites (6) qui deviennent:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & f'(0) &= 0 & g(0) &= 0 \\ f'(1) &= 0 & f(1) &= 0 & g(1) &= \frac{\Omega a^2}{\nu} = T \end{aligned} \quad (11)$$

4 - Calcul de la pression et du frottement

À partir du champ des vitesses, on peut calculer la répartition des pressions. Des équations 4-a et 4-c, on tire l'expression suivante pour la pression | Annexe I |

$$p = \frac{r^2}{2} \phi(z) + \psi(z) \quad (12)$$

Les fonctions ϕ et ψ vérifient | Annexe I |.

$$2\phi + \frac{1}{2} f'^2 - f f'' - 2g^2 + f''' = 0$$

$$\psi' + f f' - f'' = 0 \quad (13)$$

$$\phi' = 0$$

(les dérivées sont par rapport à z)

Dans le cas stationnaire, ϕ est une constante qui ne dépend que du paramètre

Ω | 2 |.

La distribution des pressions s'écrit alors :

$$p(z) - p_0(z) = \frac{r^2}{2} \phi(\Omega) \quad (14)$$

où $p_0(z)$ est la pression sur l'axe à la côte z .

Cette loi parabolique reste la même quelle que soit la côte z et est valable en particulier aux parois |2|.

Enfin les composantes tangentielles du frottement $\tau_{z\theta} = \rho \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}$ à $\bar{z} = 0$ et $\bar{z} = a$, donc les moments des forces agissant sur les disques sont respectivement proportionnels à $g'(0)$ et $g'(1)$ |2|.

Puisque les équations (10), ainsi que les conditions aux limites (11) sont déjà établies, nous passons à la recherche d'une solution de ces systèmes.

Chapitre II

Résolution du système

(10)

avec les conditions
aux limites

(11)

A - Résolution analytique.

Il s'agit de résoudre analytiquement le système (10) avec les conditions aux limites (11). Le système (10) étant non linéaire, il n'y a pas à notre connaissance une méthode générale de résolution.

1 - Méthode employée

Nous cherchons deux fonctions f et g de forme :

$$\begin{aligned} f &= az^m(z-1)^m + bz^p(z-1)^q e^{z-1} \\ g &= cTz^{m'} e^{z-1} + dTz^{n'} + ez^{p'}(z-1)^{q'} \end{aligned} \quad (15)$$

il faut fixer $m, n, p, q, m', n', p', q' \in \mathbb{N}^*$ pour obtenir une solution particulière.

Les constantes a, b, c, d, e figurant dans f et g seront déterminées par la vérification du système (10) et des conditions aux limites (11), ce qui impose à considérer certaines hypothèses supplémentaires :

$$1^\circ) g''(0) = 0 \text{ et } g''(1) = 0 \text{ pour des valeurs définies de } g'(0) \text{ et } g'(1)$$

$$2^\circ) f^{(iv)}(0) = 0 \text{ pour } f'''(0) \text{ défini}$$

$$3^\circ) f^{(iv)}(1) = 4g(1) \times g'(1) \text{ pour } f'''(1) \text{ défini.}$$

Ces hypothèses peuvent d'ailleurs être vérifiées.

- à partir des résultats déjà obtenus par certains auteurs [3]

En choisissant $m = p = q = 5$;

$$n = q' = 2 ;$$

$$m' = n' = p' = 3 \quad | \text{Annexe III} |,$$

on obtient :

$$f = a z^5 (z-1)^2 + b z^5 (z-1)^5 e^{(z-1)} \quad (16)$$

$$g = c T z^3 e^{(z-1)} + d T z^3 + e z^3 (z-1)^2$$

et c'est là une famille de solutions dépendant des constantes a, b, c, d, e .

De (16), nous obtenons une solution particulière aux faibles nombres de Taylor ($T \leq 8,26$); la détermination détaillée des constantes se trouve en Annexe III.

La solution trouvée a quatre possibilités :

- Cas 1

$$f = 0,08 T^2 z^5 (z-1)^2 + 4,9010^4 z^5 (z-1)^5 e^{(z-1)}$$

$$g = 1,74 T z^3 e^{(z-1)} - 0,74 T z^3 - 9,10 T z^3 (z-1)^2$$

- Cas 2

$$f = 0,04 T^2 z^5 (z-1)^2 - 0,8310^4 z^5 (z-1)^5 e^{(z-1)}$$

$$g = -0,5 T z^3 e^{(z-1)} + 1,50 T z^3 - 1,25 T z^3 (z-1)^2$$

Cas 3

$$f = -0,01 T^2 z^5 (z-1)^2 + 22,42 10^4 z^5 (z-1) e^{5(z-1)}$$

$$g = -3,6 T z^3 e^{5(z-1)} + 4,6 T z^3 + 9,60 T z^3 (z-1)^2.$$

Cas 4

$$f = -0,054 T^2 z^5 (z-1)^2 + 0,37 10^4 z^5 (z-1) e^{5(z-1)}$$

$$g = -6,27 T z^3 e^{5(z-1)} + 7,27 T z^3 + 18,94 T z^3 (z-1)^2.$$

2 - Calculs (voir Annexe III)

3 - Résultats

Les fonctions f, g, f' sont obtenues pour les nombres de Taylor désirés à l'aide du programme de la page suivante.

En annexe IV, nous avons les résultats pour $T = 1, 5, 50$.

```

0010 REM CALCUL DES VALEURS F,G,H
0020 DIM A(4),B(4),C(4),W(11)
0030 DIM D(4),F(11),G(11),H(11),M(4),N(4),X(11)
0040 PRINT FLP,TAB(55),'SOLUTION ANALYTIQUE'
0050 PRINT FLP,
0060 PRINT 'INTRODUIRE LA VALEUR DE T'
0070 INPUT T
0080 PRINT FLP,'LA VALEUR DE T =';T
0090 PRINT FLP,
0100 MAT READ B
0110 MAT READ C
0120 MAT READ D
0130 MAT READ M
0140 MAT READ N
0150 MAT READ X
0160 FOR J=1 TO 4
0170 LET A(J)=M(J)*T2
0180 LET E(J)=N(J)*T
0190 PRINT FLP,
0200 PRINT USING FLP,0210,J,A(J)
0210 :   A(#) = #.#####
0220 PRINT FLP,' X', '      F', '      G', '      H'
0230 PRINT USING FLP,0240
0240 : -----
0250 PRINT FLP,
0260 FOR I=1 TO 11
0270 LET F(I)=A(J)*(X(I)5)*((X(I)-1)2)
0280 LET F(I)=F(I)+(B(J)*(X(I)5)*((X(I)-1)5)*EXP(X(I)-1))
0290 LET G(I)=C(J)*T*(X(I)3)*EXP(X(I)-1)
0300 LET G(I)=G(I)+(D(J)*T*(X(I)3))
0310 LET G(I)=G(I)+(E(J)*(X(I)3)*(X(I)-1)2)
0320 LET H(I)=(7*(X(I)6)-(12*(X(I)5)+(5*(X(I)4))
0330 LET H(I)=H(I)*(A(J)+B(J)*((X(I)-1)3)*(EXP(X(I)-1)))
0340 LET W(I)=3*B(J)*((X(I)-1)2)*(EXP(X(I)-1))
0350 LET W(I)=W(I)*B(J)*((X(I)-1)3)*(EXP(X(I)-1))
0360 LET W(I)=W(I)*((X(I)7)-(2*(X(I)6)+(X(I)5))
0370 LET H(I)=H(I)+W(I)
0380 PRINT FLP,X(I),F(I),G(I),H(I)
0390 NEXT I
0400 PRINT FLP,
0410 NEXT J
0420 DATA 49000,-8300,224200,3700,1.74,-.5,-3.6,-6.27
0430 DATA -.74,1.5,4.6,7.27,.08,.04,-.01,-.054,-9.1
0440 DATA -1.25,9.6,18.94,0,.1,.2,.3,.4,.5,.6,.7,.8,.9,1
0450 IF T≠50 GOTO 0060
0460 END

```

B - Résolution numérique

1 - Choix de la méthode

Il y a plusieurs méthodes de résolution pour le système (10) (11) (12). Nous choisissons la méthode de Runge-Kutta car les formules (à quatre approximations) sont commodes pour la programmation à cause de leur simplicité.

Cependant la dite méthode s'applique à la résolution de problèmes d'équations différentielles du 1^{er} ordre à conditions initiales. Or les deux difficultés se présentent à nous

- Remplacer le système (10) à un système du 1^{er} ordre.
- Écrire les conditions initiales $f'(c)$, $f''(c)$, $f(c)$, $g(c)$ et $g'(c)$.

2 - Transformation du système (10) en

un système d'équations du 1^{er} ordre.

On a les équations suivantes

$$f \longrightarrow F_0$$

$$f' \longrightarrow \frac{dF_0}{dz} = F_1$$

$$f'' \longrightarrow \frac{dF_1}{dz} = F_2$$

$$f''' \longrightarrow \frac{dF_2}{dz} = F_3$$



DUYCOONHUYER
OO thiee

$$f^{IV} \longrightarrow \frac{dF_3}{dz} = F_0 F_3 + 4 F_4 F_5 \quad g \longrightarrow F_4$$

$$g' \longrightarrow \frac{dF_4}{dz} = F_5 \quad g'' \longrightarrow \frac{dF_5}{dz} = F_0 F_5 - F_1 F_4$$

avec les conditions aux limites

$$z = 0 \quad F_0 = F_1 = F_4 = 0 ; F_2, F_3, F_5 \text{ inconnues}$$

$$z = 1 \quad F_0 = F_1 = 0$$

$$F_4 = T, \text{ ces dernières conditions seront}$$

obtenues à une constante ε près que nous nous imposons à l'avance.

3 - Formulation de la méthode de Runge-Kutta.

On est dans le cas particulier où $f(x, y)$ est indépendant de y | Annexe II |

On aura alors [formules de Runge-Kutta 4^e ordre]

$$k_1 = f(x_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$h = \Delta x = 1/n$$

4 - Formulation de la méthode des tirs

Comme la méthode de Runge-Kutta s'applique à des problèmes à conditions initiales, il convient dans notre cas de trouver :

$$\begin{array}{lll} f'''(c) \text{ ou } F_3(c) & f''(c) \text{ ou } F_2(c) & f'(c) \text{ ou } F_1(c) \\ f(c) \text{ ou } F_0(c) & g'(c) \text{ ou } F_5(c) & g(c) \text{ ou } F_4(c) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Or on a } f'(c) = 0 = F_1(c) \\ f(c) = 0 = F_0(c) \\ g(c) = 0 = F_4(c) \end{array} \right\} \text{ (Voir équations 11)}$$

Il nous faut alors :

$$\begin{array}{l} f''(c) \text{ ou } F_2(c) \\ f'''(c) \text{ ou } F_3(c) \\ g'(c) \text{ ou } F_5(c) \end{array}$$

La recherche de ces valeurs inconnues sera faite par la méthode des tirs dont la formulation sera explicitée dans ce qui suit.

D'abord ces valeurs inconnues $F_2(c)$, $F_3(c)$ et $F_5(c)$ peuvent être approchées à des conditions déjà connues $F_0(1)$, $F_1(1)$ et $F_4(1)$ par les relations linéaires suivantes :

$$F_0(1) = a_0 F_2(0) + b_0 F_3(0) + c_0 F_5(0)$$

$$F_1(1) = a_1 F_2(0) + b_1 F_3(0) + c_1 F_5(0)$$

$$F_4(1) = a_4 F_2(0) + b_4 F_3(0) + c_4 F_5(0)$$

On a donc 9 inconnues $a_0, b_0, c_0; a_1, b_1, c_1;$
 a_4, b_4, c_4 et il nous faut alors 9 équations.

Elles sont données par trois itérations consécutives
 (dans les formules qui suivent i indique i^e
 itération) :

$$\begin{cases} F_0^i(1) = a_0 F_2^i(0) + b_0 F_3^i(0) + c_0 F_5^i(0) \\ F_0^{i+1}(1) = a_0 F_2^{i+1}(0) + b_0 F_3^{i+1}(0) + c_0 F_5^{i+1}(0) \\ F_0^{i+2}(1) = a_0 F_2^{i+2}(0) + b_0 F_3^{i+2}(0) + c_0 F_5^{i+2}(0) \end{cases}$$

donnent a_0, b_0, c_0 .

De même avec

$$F_1^i(1), F_1^{i+1}(1) \text{ et } F_1^{i+2}(1) \text{ ou } a_1, b_1, c_1$$

$$F_4^i(1), F_4^{i+1}(1) \text{ et } F_4^{i+2}(1) \text{ ou } a_4, b_4, c_4$$

Pour démaner les calculs, il nous faut donner
 des valeurs arbitraires de $F_2(0), F_3(0), F_5(0)$
 pour trois premières itérations.

Les valeurs de $F_0(1), F_1(1)$ et $F_4(1)$ seront
 obtenues par la méthode de Runge-Kutta.

Par la suite, $F_2(o)$, $F_3(o)$, $F_5(o)$ c'est à dire $f''(o)$, $f'''(o)$, $g'(o)$ de la nouvelle approximation seront calculées par la résolution du système :

$$(f(1) = F_0(1) =) = 0 = a_0 F_2^{i+3} + b_0 F_3^{i+3} + c_0 F_5^{i+3}$$

$$(f'(1) = F_1(1) =) = 0 = a_1 F_2^{i+3} + b_1 F_3^{i+3} + c_1 F_5^{i+3}$$

$$(g(1) = F_4(1) =) = T = a_4 F_2^{i+3} + b_4 F_3^{i+3} + c_4 F_5^{i+3}$$

où tous les coefficients $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_4, b_4, c_4$ sont déjà connus

Nous continuerons ce procédé itératif jusqu'à ce que toutes les valeurs trouvées de $F_0^u(1)$, $F_1^u(1)$ et $F_4^u(1)$ sont tolérées à une constante près, soit ε fixée à l'avance.

5 - Geogrammation

17

Le programme principal, de même, que les
subroutines se trouvent dans les pages qui suivent.

Il est à noter que

- les calculs ont été faits sur le mini-ordinateur
IBM 5100,
- le temps d'exécution requis pour une itération
est environ vingt minutes,
- la vitesse de convergence dépend non seulement
des conditions initiales imposées mais aussi du
nombre de Gaylor étudié. Plus T est grand, plus
la convergence est lente.

```

V RUNGE;ITER;FI;FF;FIM;FFM
[1] ITER←ρ,RERO←[],0ρ[]←'RERO = ?'
[2] FF←FI← 3 3 ρ0
[3] DEBUT:FICITER;1]←[],0ρ[]←'FPP(0) = ?'
[4] FICITER;2]←[],0ρ[]←'FPPP(0) = ?'
[5] FICITER;3]←[],0ρ[]←'GP(0) = ?'
[6] RUN←,FICITER;]
[7] []←FFCITER;]←0 KUTTA RUN
[8] →(3≥ITER←ITER+1)/DEBUT
[9] GO:FIM←FI TIRS FF
[10] []←FFM←0 KUTTA FIM
[11] →(((IFFMC1;3]-RERO)÷RERO)>0.02)/NON
[12] →(((IFFMC1;1])≤0.1)^(IFFMC1;2])≤0.1)/OUI
[13] NON:ITER←ITER+1
[14] FIC1;]←FIC2;]
[15] FIC2;]←FIC3;]
[16] FIC3;]←FIM
[17] FFC1;]←FFC2;]
[18] FFC2;]←FFC3;]
[19] FFC3;]←,FFM
[20] →GO
[21] OUI:FFM←1 KUTTA FIM

```

V

```

V R←I KUTTA MAN;Z;ΔZ;K;F
[1] F←6ρZ←0×ΔZ←0.025
[2] FC3]←MANC1]
[3] FC4]←MANC2]
[4] FC6]←MANC3]
[5] ICI:→(I≠1)/SAUTE
[6] (1 7)ρZ,F
[7] SAUTE:→(Z=1)/RA
[8] F←TOURNE F
[9] Z←Z+ΔZ
[10] →ICI
[11] RA:R← 1 3 ρFC1],FC2],FC5]

```

V

▽ R2←FA TIRS FB;COEFF;FAS;FBS;IL
 [1] COEFF← 3 3 ρIL+1
 [2] HE:FAS+FA
 [3] FBS←FB
 [4] COEFF[IL;]←(,FBSC;IL)BFAS
 [5] →(3≥IL+IL+1)/HE
 [6] R2←(0,0,RER0)BCOEFF
 ▽

▽ R1←TOURNE F;K;J;KJ;IJK;FC
 [1] K← 4 6 ρΔZ+2×ΔZ12+0.0125×J+KJ+ρρFC+F
 [2] HAI:KCKJ;1]+FCC[2]×IJK+1
 [3] KCKJ;2]+FCC[3]
 [4] KCKJ;3]+FCC[4]
 [5] KCKJ;4]+(FCC[1]×FCC[4])+4×FCC[5]×FCC[6]
 [6] KCKJ;5]+FCC[6]
 [7] KCKJ;6]+(FCC[1]×FCC[6])-FCC[2]×FCC[5]
 [8] MOT:FCCIJK]+FC[IJK]+ΔZ12×KCKJ;IJK]×J
 [9] →(6≥IJK+IJK+1)/MOT
 ▽ [10] →(3≥KJ+KJ+1)/HAI
 [11] →(2≥J+J+1)/HAI
 [12] R1←F+ΔZ×(KC[1;]+KC[4;]+2×KC[2;]+KC[3;])+6
 ▽

Chapitre III

Discussion des résultats obtenus

Dans la recherche d'une solution analytique, nous avons imposé à f et g des formes données. La solution obtenue, malgré son domaine de validité limité sur le plan mathématique, est intéressante à plus d'un titre car :

- elle constitue une des solutions des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement donné.

- elle nous a permis de montrer une possibilité de multiplicité de solutions analytiques des équations différentielles non linéaires.

Nous allons discuter dans ce qui suit des fonctions f , g , f' obtenues par nos différentes méthodes de traitement analytique et numérique.

Pour la composante tangentielle v , représentée par $g(z)$, les figures 2, 5 et 8 montrent que seules les solutions numérique et analytique (cas 2) sont physiquement concevables. Cette dernière ressemble à la solution du type von Kármán, où la

-composante tangentielle est nulle près du disque fixe.²¹
La solution numérique ^{montre} qu'aux faibles nombres de
-Taylor, g est une fonction linéaire vis à vis de la
-coordonnée axiale. Elle tend, pour les nombres de
-Taylor plus élevés, fig. 5, vers la solution de
von Kármán. Les autres solutions analytiques sont
-à notre avis physiquement redoutables :

- la solution du cas 1, que nous appelons solution
-du type Greenspan, montre que le fluide tourne
-dans le sens inverse de la rotation du disque.

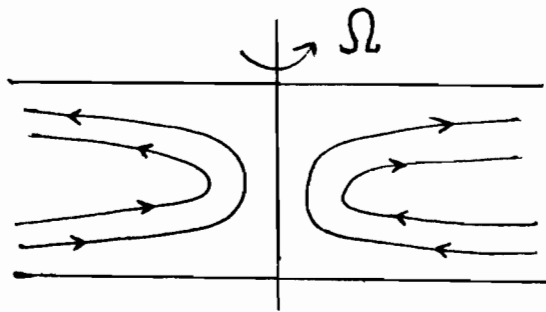
- les solutions des cas 3 et 4 montrent que le
fluide tourne plus vite que la rotation du disque.

En ce qui concerne la composante axiale,
représentée par la fonction f , les solutions numéri-
-que et analytique du type von Kármán montrent
que l'écoulement est dirigé vers le haut, ce qui est
-conforme à des solutions déjà obtenues dans 1131,
pour tous les nombres de Taylor, fig 4, 7 et 9. Il
n'en est pas de même pour les autres solutions
obtenues.

Pour la composante radiale, représentée par
la fonction f' , on constate que seule la solution
numérique semble physiquement plausible car elle

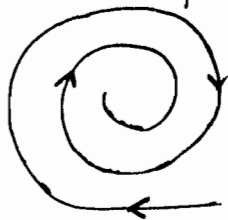
vérifie mieux la condition de conservation de masse, ²²
 fig 3, 6 et 10.

Si l'on essaie de tracer la direction de l'écoulement dans un plan méridien passant par le centre du disque, à partir des composantes w et u de cette solution, nous obtenons :

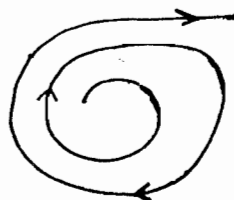


Cette figure montre que le fluide est aspiré vers l'intérieur près du disque fixe et est éjecté près du disque tournant, ce qui est physiquement concevable.

En combinant w et u avec la composante tangentielle v , nous remarquons la direction globale et spirale du fluide :



près du disque fixe



près du disque tournant

Conclusion

L'intérêt principal du projet aura été l'acquisition d'une modeste expérience dans la recherche théorique d'un type d'écoulement de la Mécanique des Fluides.

La méthode utilisée démontre une possibilité de multiplicité de solutions pour les systèmes d'équations différentielles non linéaires. Les solutions obtenues nous ont permis une discussion intéressante en fonction de l'écoulement réel pouvant éventuellement être observé et mesuré à partir d'une installation expérimentale, pour la gamme des nombres de Taylor nous concernant.

Bibliographie

111 D^r Hermann Schlichting

Boundary Layer Theory

4th edition, Mc Graw-Hill

- Chapter III Derivation of the equations of motion
of a compressible viscous fluid

(Navier Stokes equations)

- Chapter V Exact solutions of the

Navier-Stokes equations pages 83-96

- Chapter X Axially symmetrical and three-
dimensional boundary layers pages 176-181

121 J. P. Ribault

Contribution à l'étude de l'écoulement
radial entre disques coaxiaux.

Thèse de Doctorat d'Ingénieur 1976

131 P. Florent, Nguyen N. Dinh et
Vo N. Dinh

25

Écoulement instationnaire entre disques coaxiaux

Journal de Mécanique Vol 12, N° 4 Décembre 1973

141 Jean LeGras

Méthodes et techniques de l'analyse numérique

- Chapitre VII Dunod Paris 1971

151 Francis Scheid

Numerical Analysis

Schaum's Outline Series Mc Graw-Hill

pages 202 - 203

161

Standard Handbook for

Mechanical Engineers 7th Edition

Mc Graw-Hill Section 8: Machine Elements

171 Spiegel, Murray R.

Theory and problems of Laplace Transforms

- Schaum's Outline Series Mc Graw-Hill

181 Notes personnelles de Dinh Vo Ngoc

Autres volumes, revues consultés.

191 L. A. Dorfman

Flow of a viscous fluid between fixed and
blown rotating disks

National Aeronautics and Space Administration
Washington D.C. 20546 May 1967

1101 Victor L. Streeter,

Editor-in-Chief

Handbook of Fluid Dynamics

First edition, Mc Graw-Hill 1961

1111 Shan S. Kuo

Computer applications of numerical methods

Addison - Wesley Publishing Company 1972

1121 Kaiser S. Kunz

Numerical analysis

Mc Graw-Hill 1957

1131

Dinh Vo Ngoc

Contribution à l'étude de l'écoulement
radial entre disques coaxiaux.

Thèse de Maîtrise, Université Laval

Décembre 1972

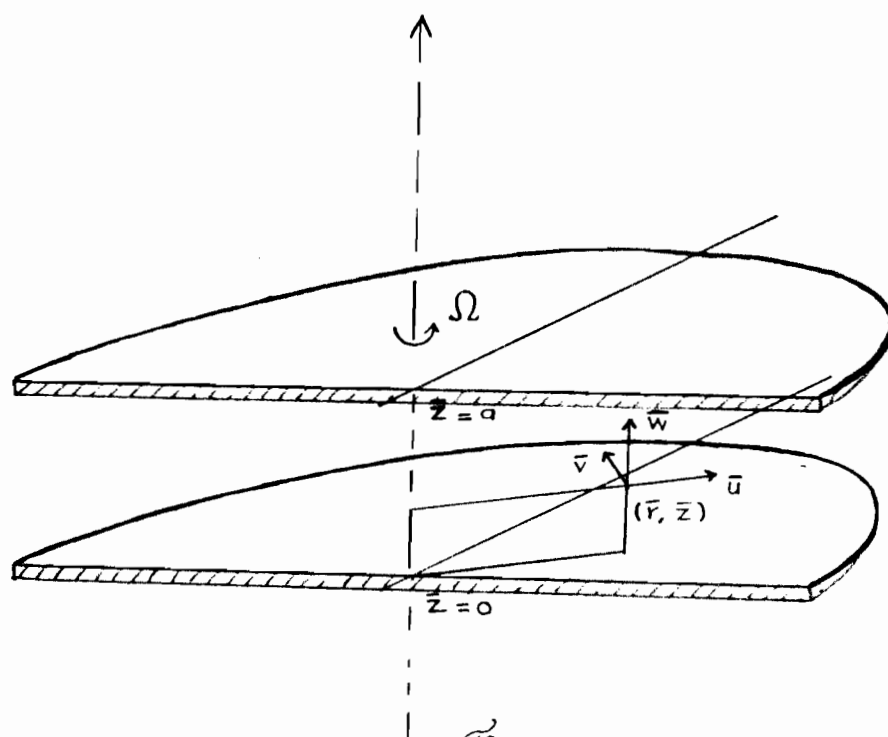


Fig. 1

Configuration du problème

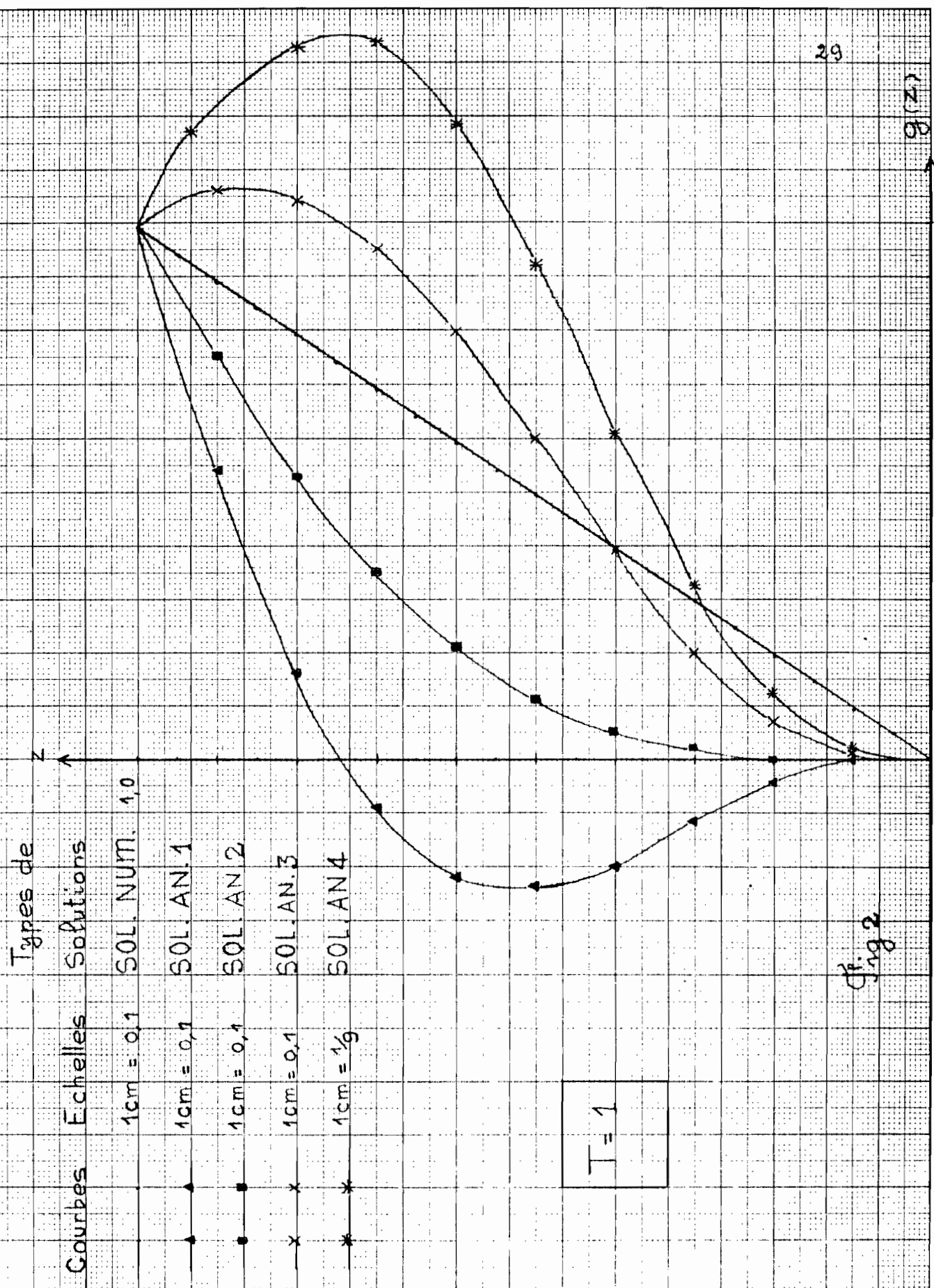


Fig. 2

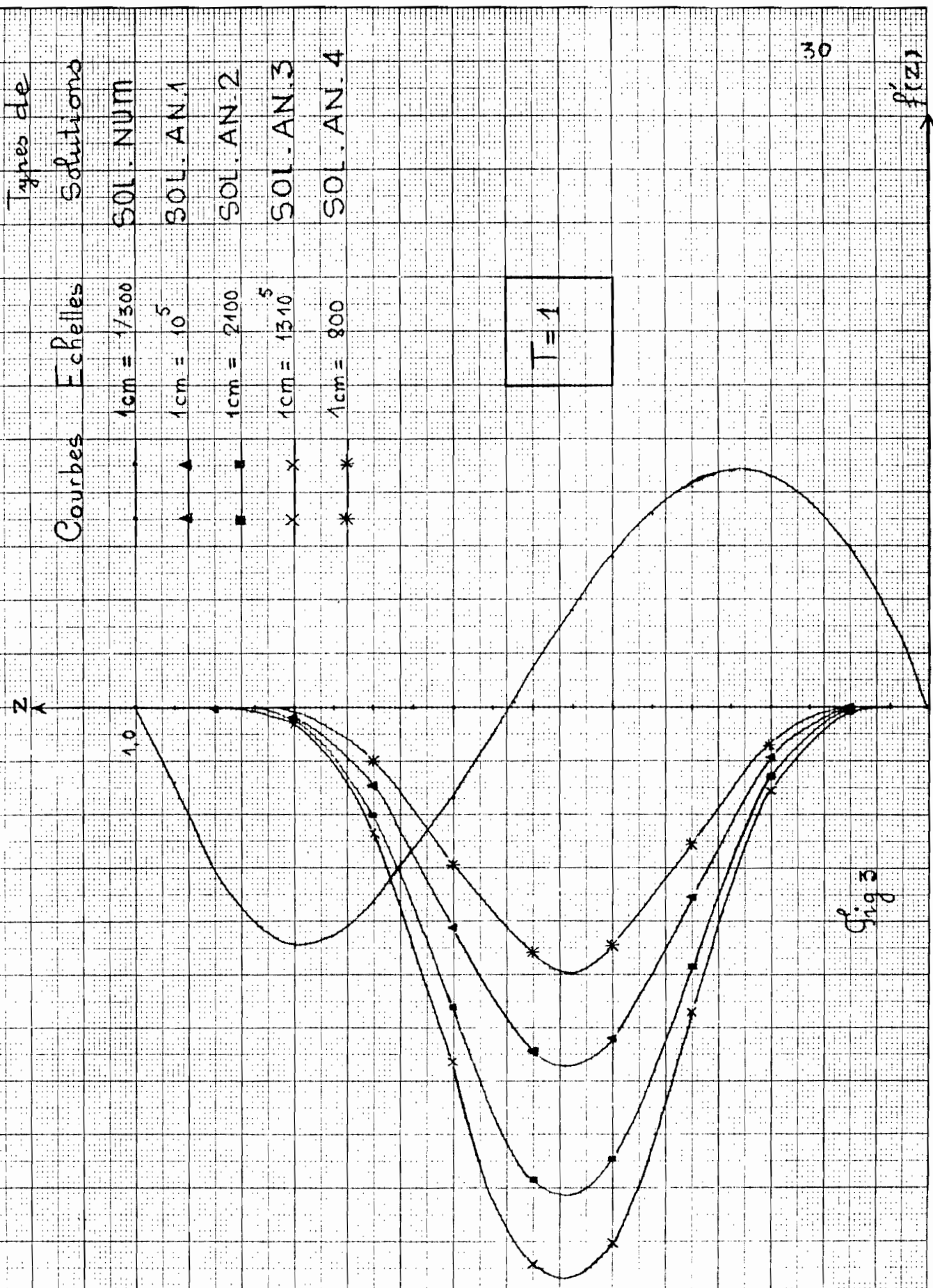


Fig 3

Types de Solutions

- SOL. NUM.
- SOL. AN.1
- SOL. AN.2
- SOL. AN.3
- SOL. AN.4

Courbes Echelles

- 1cm = 10^{-3}
- 1cm = 7
- 1cm = 1
- 1cm = 16
- 1cm = 0,35

T=1

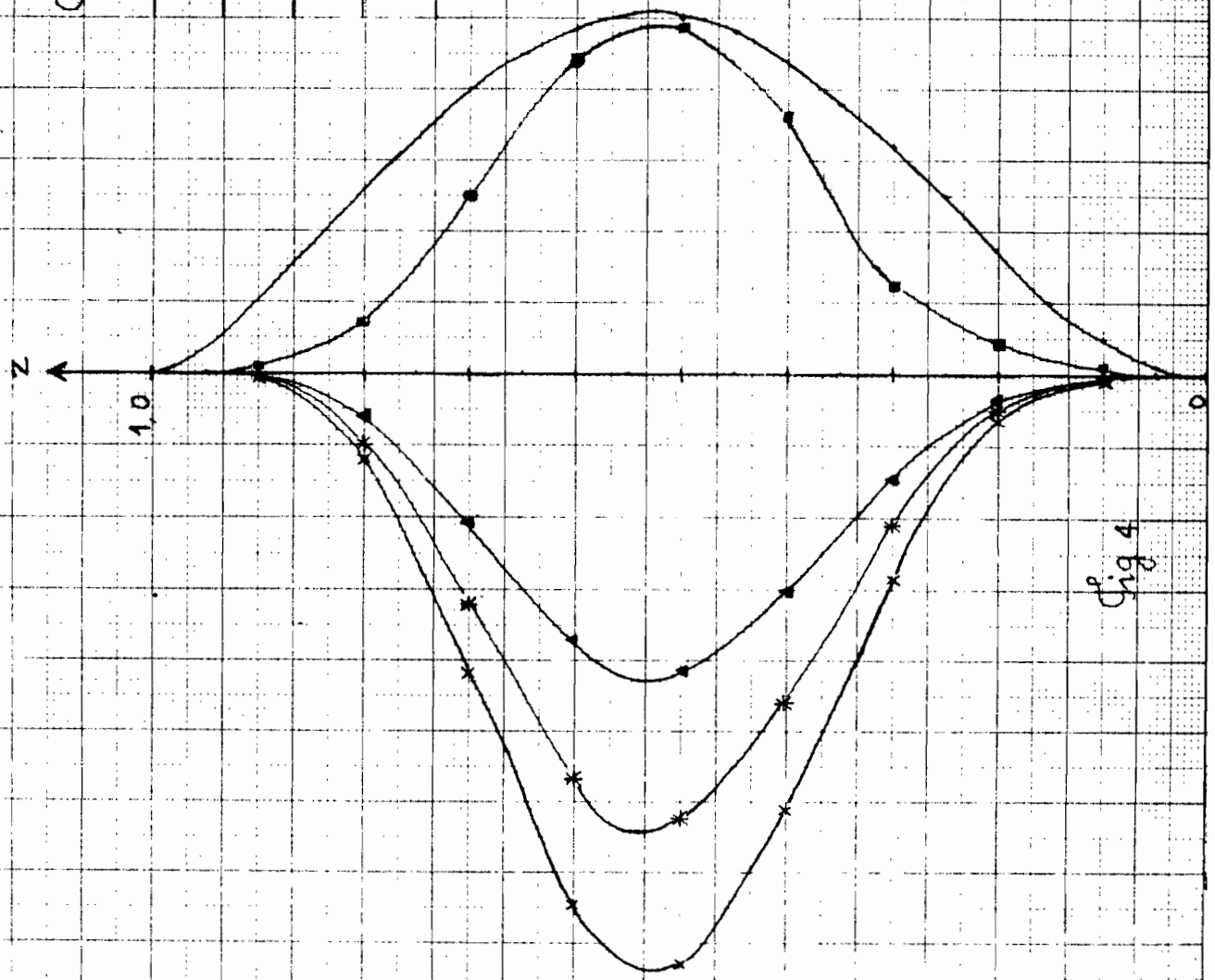


Fig 4

T = 50

Z

1,0

-10

10

50

g(z)

Types de solutions

Courbes

SOL. NUM.

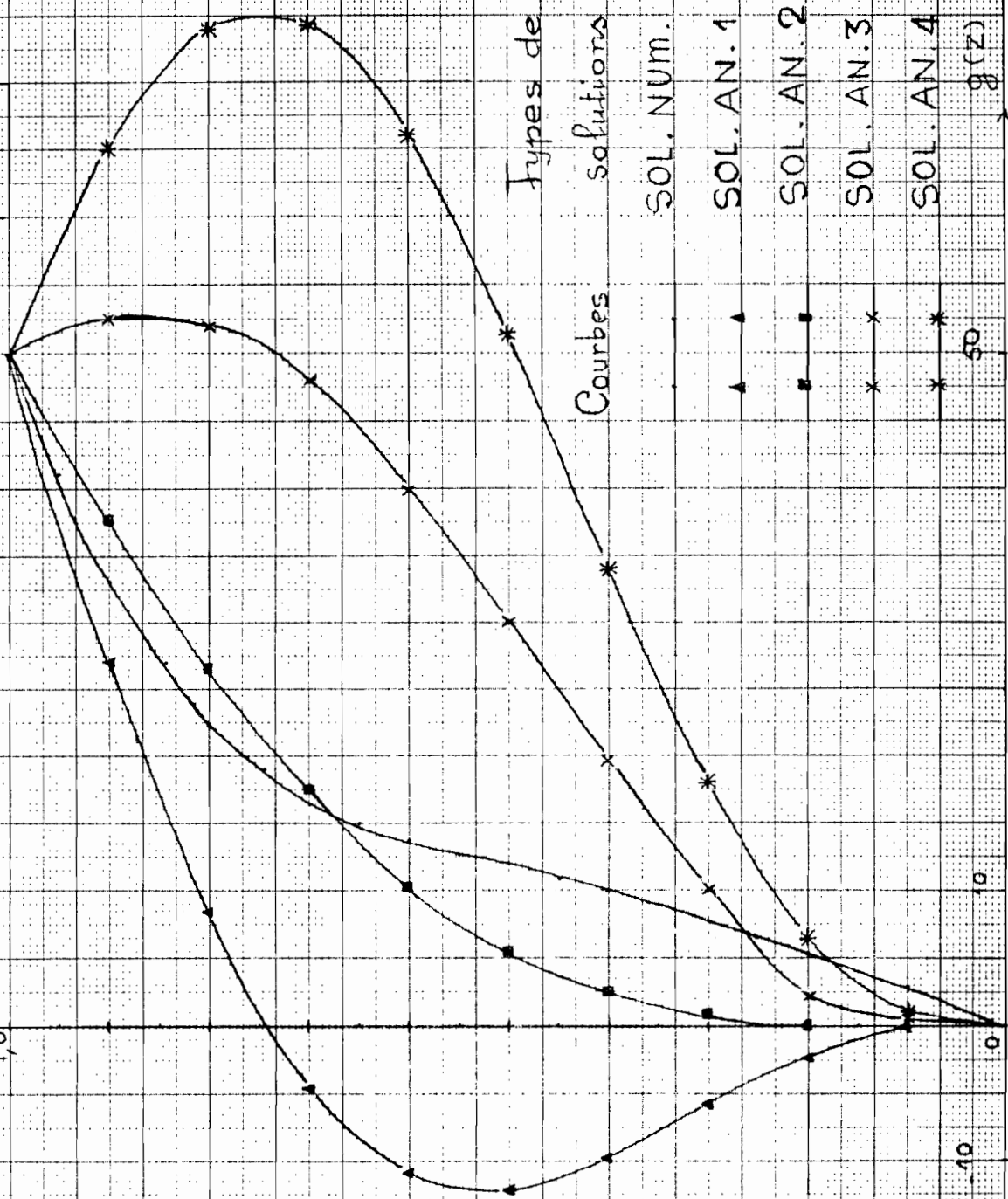
SOL. AN. 1

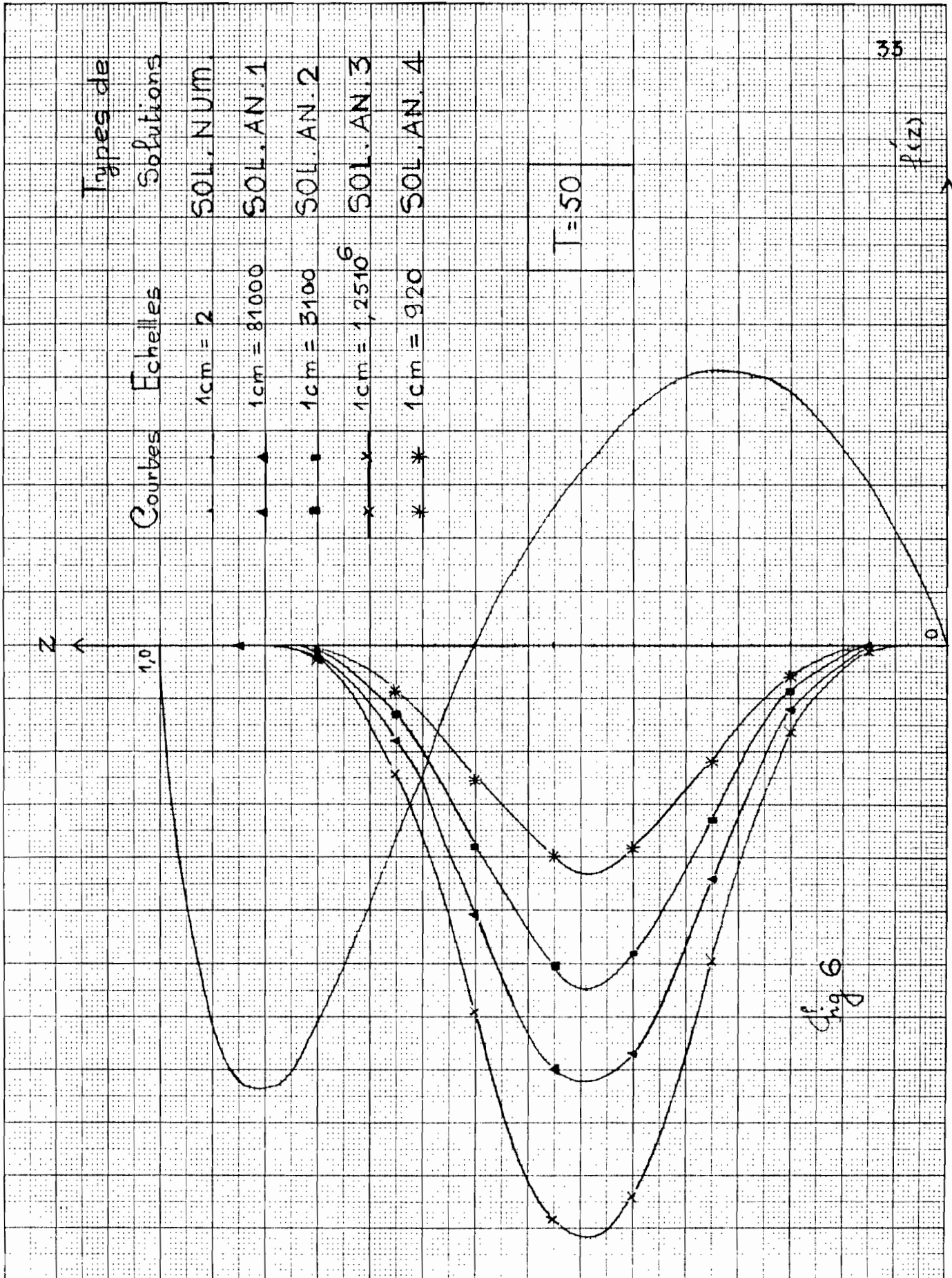
SOL. AN. 2

SOL. AN. 3

SOL. AN. 4

Fig 5





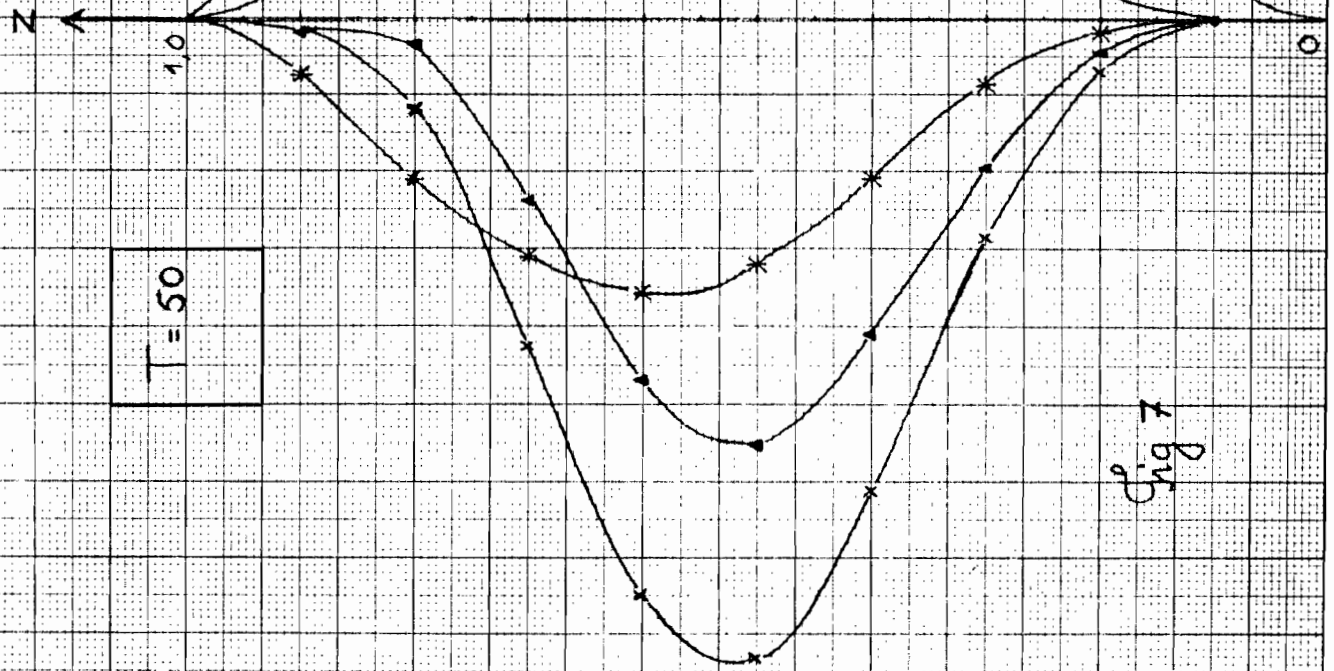
Types de Solutions

Courbes Echelles

1cm = 0.5 SOL. NUM.
 1cm = 5 SOL. AN. 1
 1cm = 1 SOL. AN. 2

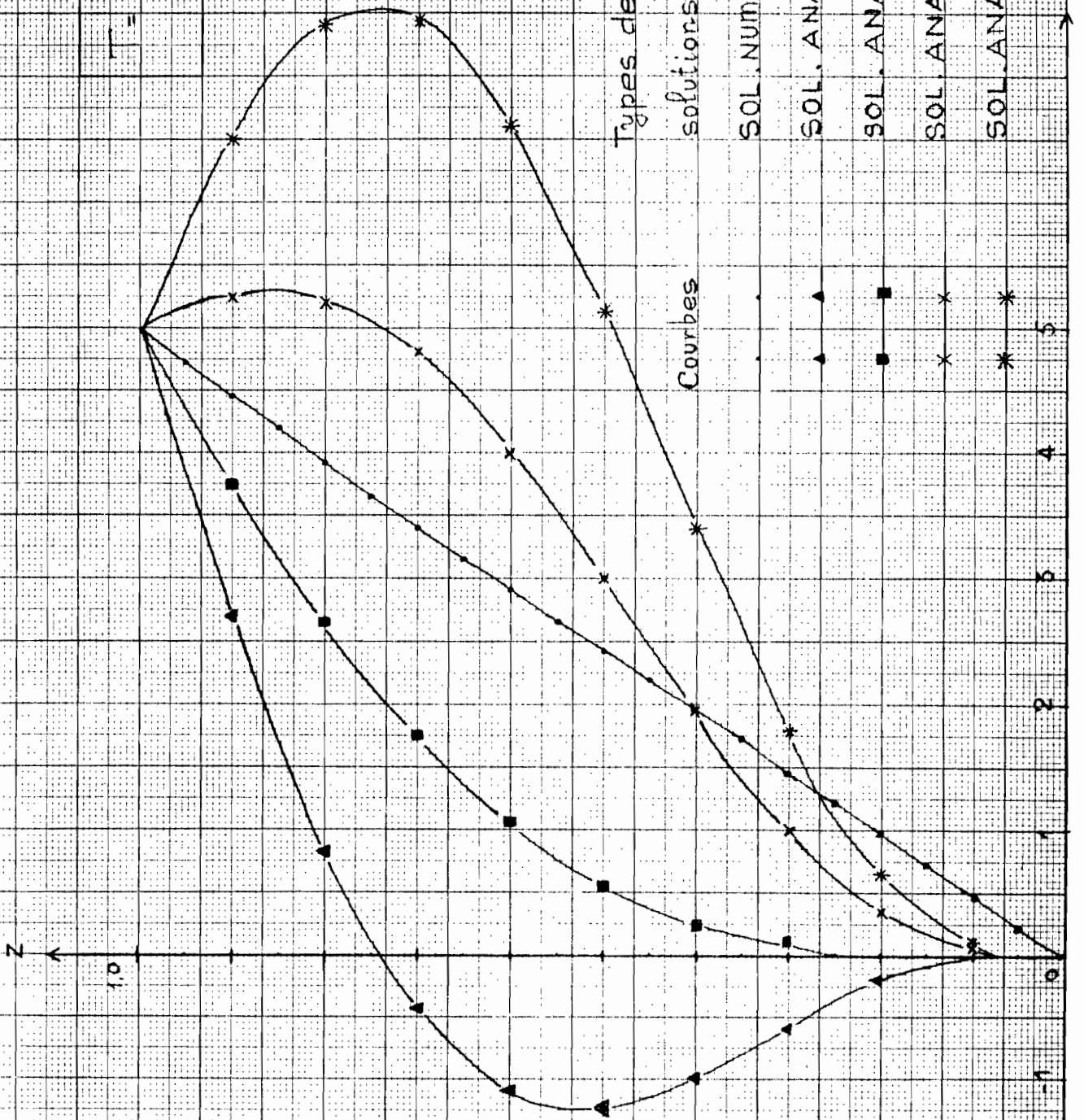
1cm = 16 SOL. AN. 3
 1cm = 1 SOL. AN. 4

$T = 50$



Sig 7

$\tau = 5$



Types de solutions

Courbes

- SOL. NUMÉRIQUE
- SOL. ANAL. 1
- SOL. ANAL. 2
- SOL. ANAL. 3
- SOL. ANAL. 4

Fig 8

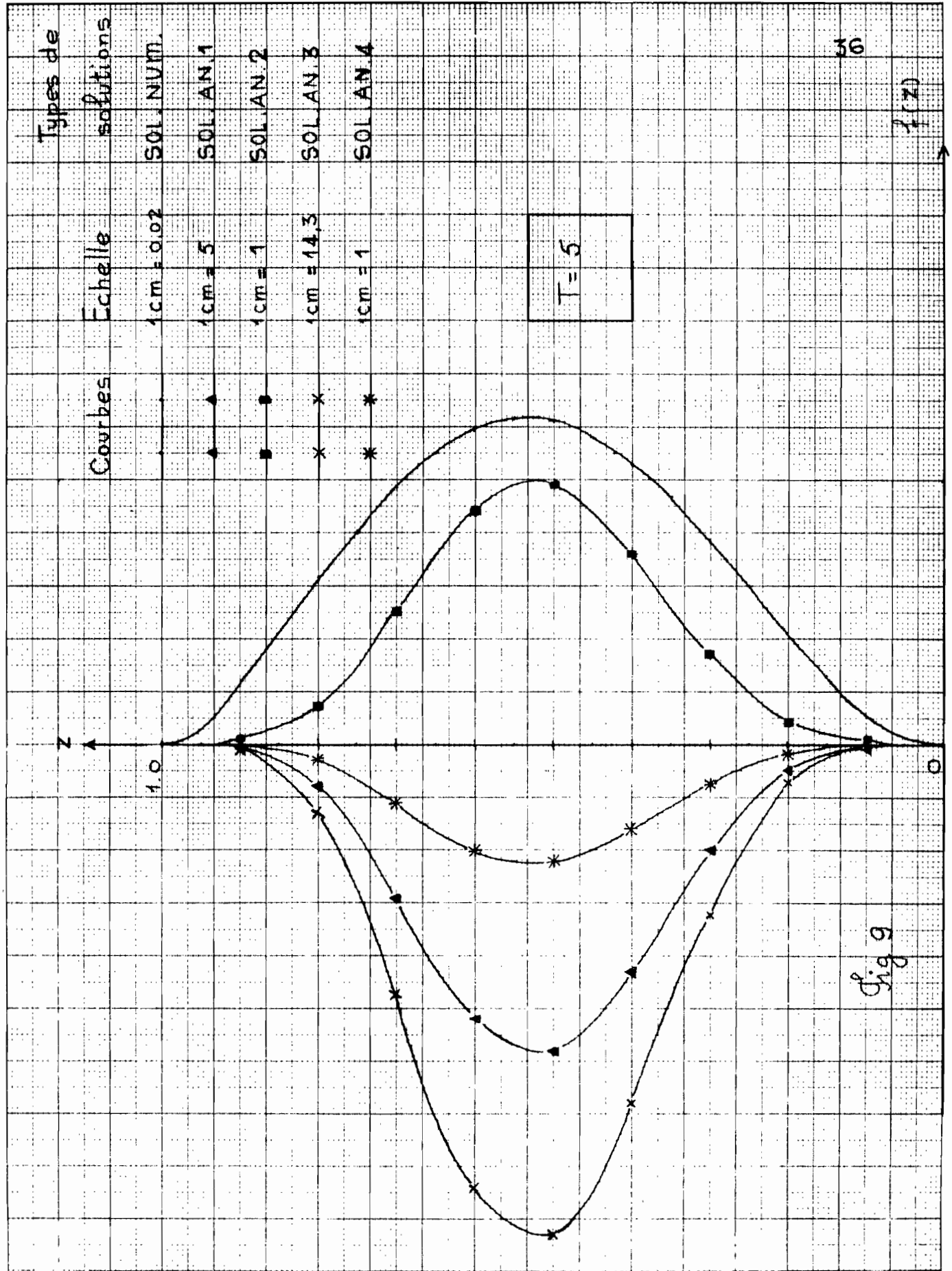
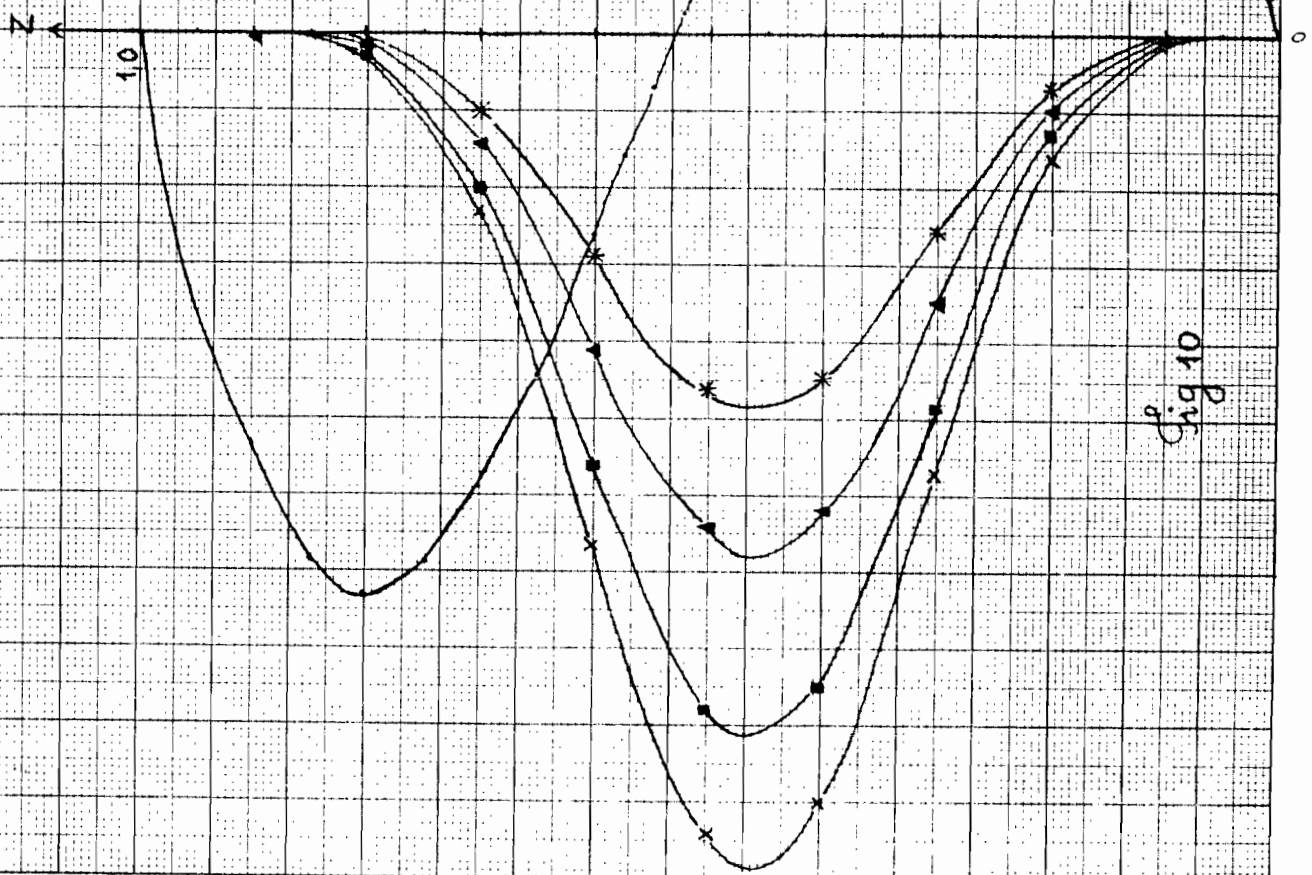


Fig 9



Types de solutions

Courbes Echelle

1cm = 0,05
 1cm = 10⁵
 1cm = 2100
 1cm = 13x10⁵
 1cm = 800

SOL.NUM.
 SOL.AN.1
 SOL.AN.2
 SOL.AN.3
 SOL.AN.4

T=5

Fig 10

Annexes

- Annexe I : Problème théorique (calculs)
- Annexe II : Méthode de Runge-Kutta :
dérivation des formules
- Annexe III : Résolution analytique (calculs)
- Annexe IV : Résolution analytique (résultats)

Annexe 1. Problème théorique (calculs).

* Voir Chapitre I-2 Choix des grandeurs de référence.

L'équation (1-a) devient

- Pour le membre de gauche

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\bar{v}^2}{r} \iff \frac{vu}{a} \frac{\partial (vu/a)}{\partial (ra)} + \frac{vw}{a} \frac{\partial (vu/a)}{\partial (az)} - \frac{v^2 v/a^2}{ra}$$

$$\iff \frac{v^2}{a^3} \left[u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right]$$

- Pour le membre de droite

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + v \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{u}}{r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] \iff$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho v^2/a^2 \bar{p})}{\partial (ra)} + v \left[\frac{\partial}{\partial (ra)} \left(\frac{\partial (vu/a)}{\partial (ra)} + \frac{vu/a}{ra} + \frac{\partial^2 (vu/a)}{\partial (az)^2} \right) \right]$$

$$\iff \frac{v^2}{a^3} \left[-\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

En égalant le membre de gauche et celui de droite et en divisant par v^2/a^3 , on obtient (4-a)

De même, on obtient (4-b) et (4-c), à partir de (1-b) et (1-c)



* Voir Chap. I - 3: Hypothèses de Von Kármán.

Equations réduites du problème.

En remplaçant $w = f(z)$ dans l'équation (5), on obtient

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0 \iff r \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial r}{\partial r} + r \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

$$\left| \frac{\partial r}{\partial r} \sim 1 \right.$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r} \sim \frac{u}{r} \right.$$

$$\left| \frac{\partial r}{\partial z} = 0 \right., \text{ ce qui conduit à } u = -\frac{r}{2} f'_z$$

En éliminant la pression statique entre 4-a et 4-c, on trouve les relations entre f et g .

$$(4-a) \iff +\left(\frac{r}{2} f'_z\right) \left(\frac{1}{2} f'_z\right) + (f') \times \left(-\frac{r}{2} f''_{z^2}\right) - r g^2 =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{r}{2} f'''_{z^3} \iff$$

$$\frac{r}{4} f'^2_{z^2} - \frac{r}{2} f f''_{z^2} - r g^2 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{r}{2} f'''_{z^3}$$

et en dérivant une fois par rapport à z , on obtient:

$$\frac{r}{2} f' f''_{z^2} - \frac{r}{2} \left[f''_{z^3} + f'_z f''_{z^2} \right] - 2r g g'_z = -\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} - \frac{r}{2} f^{(4)}_{z^4} \quad (A)$$

$$(4-c) \Leftrightarrow -\frac{r}{2} f_z' \times 0 + f f_z' = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_{z^2}'' \Leftrightarrow$$

$$f f_z' = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_{z^2}'' \quad , \text{ et en dérivant une fois par}$$

rapport à r , on obtient que : $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$ et avec cette condition, l'expression (A) devient :

$$f_z' f_{z^2}'' - f f_{z^3}''' - f_z' f_{z^2}'' - 4 g g_z' = -f_{z^4}^{(4)} \quad \text{ou}$$

$$-f f_{z^3}''' - 4 g g_z' + f_{z^4}^{(4)} = 0 \quad (B)$$

L'équation (4-b) devient :

$$-\frac{r}{2} f_z' g + f \times r g_z' - \frac{r^2}{2r} g f_z' = r g_{z^2}'' \quad \text{ou}$$

$$-f_z' g + f g_z' - g_{z^2}'' = 0 \quad (C)$$

Les équations (B) et (C) ci-dessus constituent le système (10) du chapitre I.

* Voir Chapitre I - 4 Calcul de la pression et du frottement.

L'équation (4-a) équivaut à :

$$\frac{r}{4} f_z'^2 - \frac{r}{2} f f_z'' - r g^2 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{r}{2} f_z''' \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = r \left[-\frac{1}{4} f_z'^2 + \frac{1}{2} f f_z'' + g^2 - \frac{1}{2} f_z''' \right]$$

En posant $-\frac{1}{4} f_z'^2 + \frac{1}{2} f f_z'' + g^2 - \frac{1}{2} f_z''' = \phi(z)$, on a :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = r \phi(z), \quad \text{ce qui conduit à :}$$

$$p = \frac{r^2}{2} \phi(z) + \psi(z).$$

Considérant l'équation (A-a) et en remplaçant

u, v, w, p par leurs valeurs

$$\frac{r}{4} f_z'^2 - \frac{r}{2} f f_z'' - r g^2 = -r \phi - \frac{r}{2} f_z''' \quad \Leftrightarrow$$

$$2\phi + \frac{1}{2} f_z'^2 - f f_z'' + f_z''' - 2g^2 = 0 \quad (D)$$

L'équation (A-c) devient :

$f f_z' = -\frac{r^2}{2} \phi_z' - \psi_z' + f_z''$, et en dérivant une fois par rapport à r , on obtient $r \phi_z' = 0$ et ceci pour tout r , d'où $\phi_z' = 0$, ce qui conduit à :

$$\psi_z' + f f_z' - f_z'' \quad (E)$$

Les équations (D) et (E) constituent avec $\phi_z' = 0$

le système (13) du chapitre I.

Annexe II · Méthode de Runge - Kutta
dérivation des formules 141, 151

43

Equation du 1^{er} ordre.

Soit à résoudre l'équation différentielle.

$$dy/dx = f(x, y)$$

Il existe une infinité de solutions qui dépendent d'une constante arbitraire. On peut fixer une de ces solutions, par exemple en se donnant une valeur y_0 de la solution pour une valeur initiale x_0 de la variable.

La technique exposée, méthode à pas libres a pour but de calculer numériquement une solution particulière, connaissant le couple de valeurs x_0, y_0 .

1 - Fondements géométriques de la méthode.

a) Méthode de la tangente : approximation au second ordre.

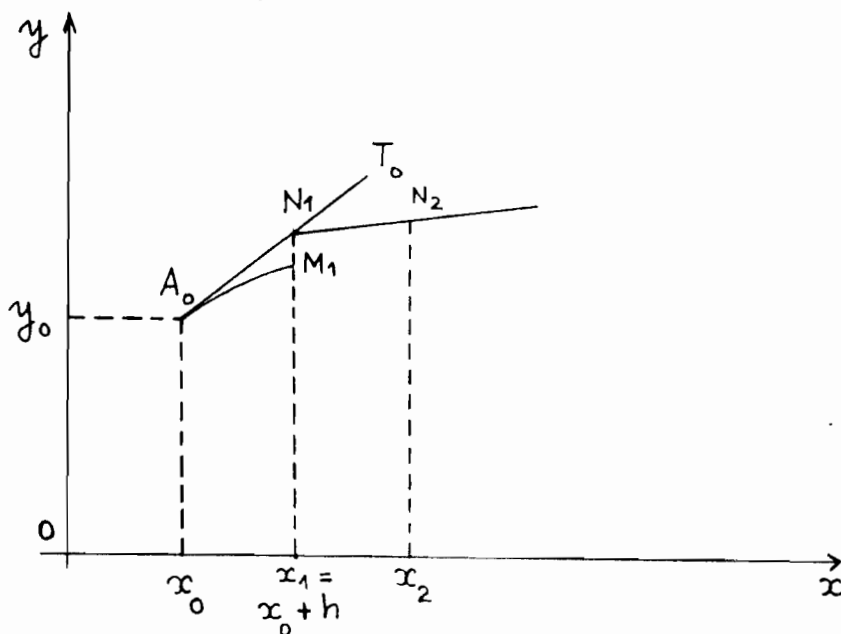


figure 1

Soit $A_0(x_0, y_0)$ le point initial de la courbe solution x_0, y_0 connus.

L'équation différentielle $y' = f(x, y)$ permet de calculer $p_0 = f(x_0, y_0)$ égal à la valeur de la dérivée dy/dx au point A_0 , qui peut s'interpréter comme pente de la tangente $A_0 T_0$ à la courbe solution. L'approximation consiste à confondre sur un petit arc, l'arc de la courbe et la tangente et à remplacer le point inconnu M_1 par N_1 , point de même abscisse mais situé sur $A_0 T_0$.

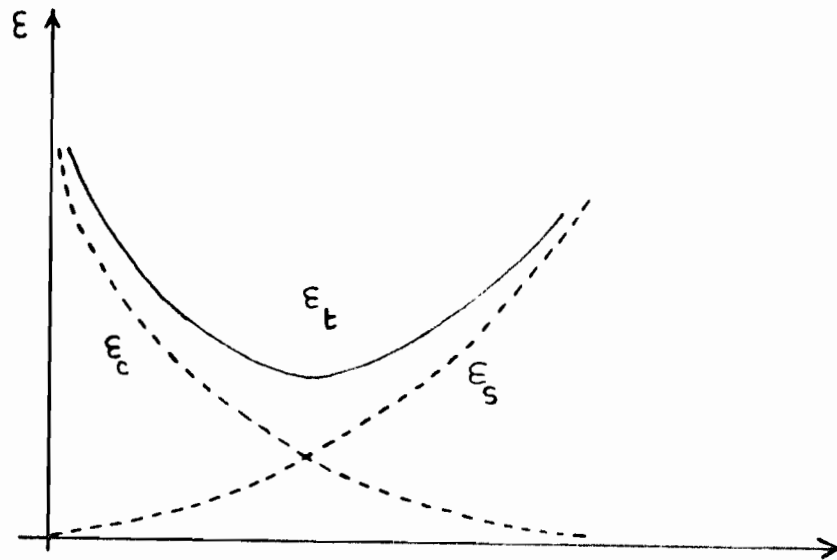
On a alors par construction :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y \\ \Delta y &= h p_0 = h f(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (1)$$

- Ces formules permettent le calcul d'une valeur approchée de la solution au point d'abscisse $x_1 = x_0 + h$. En recommençant ce processus, soit graphiquement, soit par le calcul à partir de $N_1(x_1, y_1)$, puis comme point initial, nous déterminons N_2 , puis $N_3 \dots$ et de plus en plus proche nous aurons tabulé la solution pour les valeurs $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h \dots$
- C'est la méthode d'Euler.

L'erreur commise dans ce procédé est due à deux causes distinctes : il y a d'abord une erreur systématique due au procédé de calcul, qui est l'écart entre M , point de la courbe et N , point de la tangente, pris comme approximation de M ; il y a en plus une erreur de chute (ou erreur d'arrondi) qui intervient dans le calcul de $f(x_0, y_0)$ (termes négligés en particulier dans les multiplications et divisions).

Un examen de la figure 2 conduit à chercher de meilleures approximations en approchant un petit arc de courbe non par sa tangente mais par un arc de parabole.



- Courbe (ϵ_c) : erreur de chute
 - Courbe (ϵ_s) : erreur systématique
 - Courbe (ϵ_t) : erreur totale
- figure 2

b) Approximations au troisième ordre.

Ces méthodes sont des applications d'une des propriétés suivantes, strictes pour une parabole d'axe parallèle à Oy , et qui introduisent pour une courbe quelconque, une erreur qui est un infiniment petit du troisième ordre :

- a) Soit un arc M_0M_1 ; P est le point d'abscisse $(x_0 + x_1)/2$. La tangente PT est parallèle à la corde M_0M_1 (propriété diamétrale de la parabole).
- b) La pente de la corde de M_0M_1 est moyenne arithmétique des pentes des tangentes M_0T_0 et M_1T_1 .

Montrons par exemple comment la propriété (a) permet une détermination approchée de M_1 connaissant M_0 .

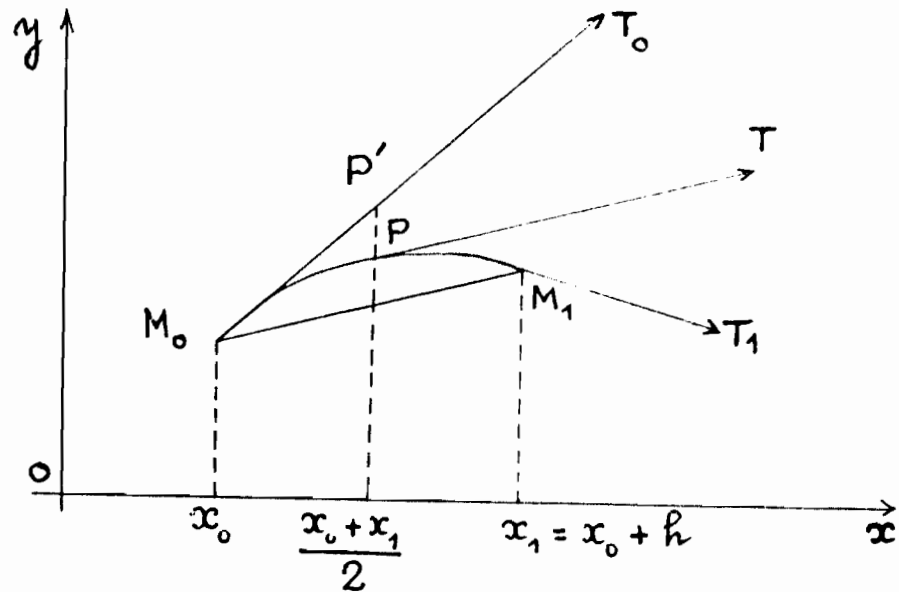


figure 3.

Si nous connaissons le point P (point d'abscisse $(x_0 + x_1)/2$), il suffirait de déterminer la tangente en P puis de mener M_0M_1 parallèle à cette tangente; le point d'intersection de cette droite avec la droite $x = x_0 + h$ serait le point M_1 cherché. Or nous ne connaissons pas P , mais nous pouvons l'approcher par P' situé sur M_0T_0 . On est ainsi conduit aux formules suivantes:

- Coordonnées de P' $\left\{ \begin{array}{l} x' = x_0 + h/2 \\ y' = y_0 + h/2 \cdot p_0, \quad p_0 = f'(x_0, y_0) \end{array} \right.$

- pente commune de la tangente en P' et M_0M_1

$$p' = f(x', y') = f(x_0 + h/2; y_0 + hp_0/2)$$

- coordonnées de M_1 $\begin{cases} x_1 = x_0 + h \\ y_1 = y_0 + hp' \end{cases}$

formules que nous présenterons de la façon suivante:

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2)$$

$$y_1 = y_0 + k_2$$

et qui permettent le calcul des coordonnées de M_1 connaissant celles de M_0 .

Une fois ce calcul fait, les mêmes formules permettent le calcul des coordonnées de M_2 , d'abscisse $x_0 + 2h$, à partir de celles de M_1 pris comme point initial; de proche en proche, nous obtenons la tabulation de la solution $y(x)$ pour les valeurs

$$x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \quad x_0 + 3h \dots$$

On pourrait de façon analogue utiliser la propriété (b) comme départ d'une méthode d'approximation.

Nous remplaçons d'abord M_1 par le point M'_1 de même abscisse, mais situé sur la tangente M_0T_0 ; connaissant alors la pente en M'_1 , soit p'_1 , on définit M_0M_1 par sa pente égale à $\frac{1}{2}(p_0 + p'_1)$.

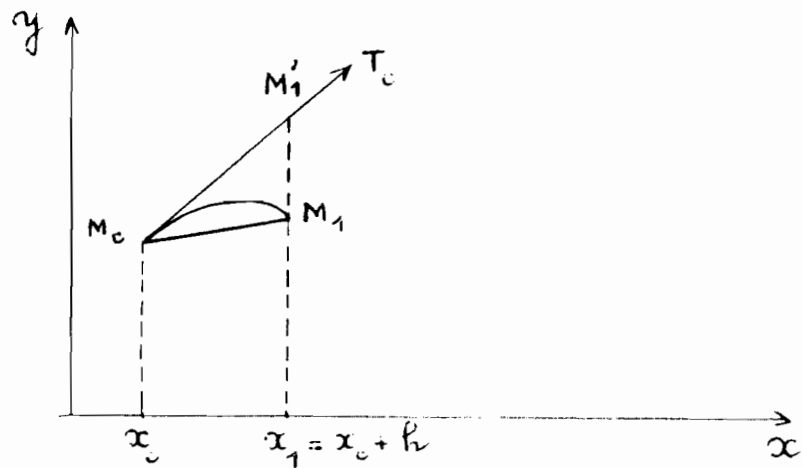


figure 4.

- Cette construction se traduit par les formules suivantes

- coordonnées de M'_1 $\begin{cases} x_0 + h \\ y_0 + h p_0 \end{cases}$ où $p_0 = f(x_0, y_0)$,
- pente de $M'_1 T_1$, $p'_1 = f(x_0 + h, y_0 + h p_0)$,
- coordonnées de M_1 $\begin{cases} x_0 + h \\ y_0 + \frac{1}{2} h (p_0 + p'_1) \end{cases}$,

formules que nous présenterons de la façon suivante :

$$k_1 = h f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h f(x_0 + h, y_0 + k_1) \quad (2)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

2. Les formules de Runge - Kutta.

La méthode de Runge - Kutta est la généralisation algébrique du procédé géométrique précédent.

a) Formules à deux approximations
 Ce sont les formules (2) ci-dessus.

b) Formules de Runge-Kutta à trois approximations [4]

Il s'agit d'utiliser les formules de la forme

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_0, y_0) \\ k_2 &= h f(x_0 + ah; y_0 + \alpha k_1) \\ k_3 &= h f(x_0 + bh; y_0 + \beta k_1 + \gamma k_2) \end{aligned} \quad (3)$$

$y_1 - y_0 = \Delta y = R_1 k_1 + R_2 k_2 + R_3 k_3$,
 en déterminant $a, b; \alpha, \beta, \gamma, R_1, R_2, R_3$, pour
 que l'écart entre la valeur exacte de y et la
 valeur approchée soit un infiniment petit devant
 h^4 . Pour le détail des calculs voir [4]

On peut choisir arbitrairement a et b et on
 obtient :

$$\alpha = a, \quad \beta = b \frac{3a^2 - 3a + b}{a(3a - 2)}, \quad \gamma = -\frac{b(a-b)}{a(3a-2)},$$

$$R_1 = \frac{6ab - (a+b) \times 3 + 2}{6ab}, \quad R_2 = \frac{2 - 3b}{6a(a-b)}, \quad R_3 = \frac{3a - 2}{6b(a-b)},$$

donc toute une famille de courbes dépendant de

a et b

Preons un exemple $a = 1/2$, $b = 1$, ce qui conduit
aux formules

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0) \\ k_2 &= hf(x_0 + h/2, y_0 + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_0 + h, y_0 - k_1 + 2k_2) \\ \Delta y &= \frac{1}{6} [k_1 + 4k_2 + k_3] \end{aligned} \quad (3')$$

c) Formules à 4 approximations.

Il s'agit d'utiliser les formules

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0) \\ k_2 &= hf(x_0 + mh, y_0 + mk_1) \\ k_3 &= hf(x_0 + nh, y_0 + nk_2) \\ k_4 &= hf(x_0 + ph, y_0 + pk_3) \end{aligned} \quad (4)$$

$$y_1 - y_0 = \Delta y \sim ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4.$$

Pour le détail des calculs 151: on obtient les 8
conditions suivantes.

$$a + b + c + d = 1$$

$$bm + cn + dp = \frac{1}{2}$$

$$bm^2 + cn^2 + dp^2 = \frac{1}{3}$$

$$bm^3 + cn^3 + dp^3 = \frac{1}{4}$$

$$emn + dnp = \frac{1}{6}$$

$$emn^2 + dnp^2 = \frac{1}{8}$$

$$em^2n + dn^2p = \frac{1}{12}$$

$$dmp = \frac{1}{24}.$$

On a un système redondant : 7 inconnues.

Une solution classique est :

$$m = n = \frac{1}{2}, \quad p = 1, \quad a = d = \frac{1}{6}, \quad b = c = \frac{1}{3}.$$

Dès lors les formules de Runge-Kutta ^a quatre approximations admettent :

$$k_1 = h f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) \quad (a')$$

$$k_4 = h f(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$y_1 \sim y_0 + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

On pourrait donner les formules à six approximations (erreur pas pas : terme en h^2) etc etc.

Annexe IIISolution analytique (calculs) *

Il s'agit de résoudre le système

$$ff''' + 4gg' - f^{IV} = 0 \quad (1)$$

$$fg' - fg' - y'' = 0 \quad (2)$$

avec

$$\begin{array}{lll} f(0) = 0 & f'(0) = 0 & g(0) = 0 \\ f(1) = 0 & f'(1) = 0 & g(1) = T. \end{array}$$

Hypothèses :

- $g''(0) = 0$ et $g''(1) = 0$ pour des valeurs définies de $g'(0)$ et $g'(1)$.

- $f^{IV}(0) = 0$ pour $f'''(0)$ défini

- $f^{IV}(1) = 4g(1)g'(1)$ pour $f'''(1)$ défini

- Solution proposée (forme générale)

$$f = ax^m(x-1)^n + bx^p(x-1)^q e^{(x-1)}$$

$$g = cT x^{m'} e^{(x-1)} + dT x^{n'} + e x^{p'}(x-1)^{q'}$$

$$m, n, p, q \in \mathbb{N}^* ; \quad m', n', p', q' \in \mathbb{N}^*$$

a, b, c, d, e constantes réelles.

* Dans ce qui suit, nous noterons x pour z .

Vérifions les conditions aux limites

$$\left. \begin{array}{l} - f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}^* \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \dots \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} - f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Pour avoir ces conditions pour tout } a, b \\ \text{appartenant à } \mathbb{R}, \text{ il faut} \\ m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2 \text{ et } q \geq 2. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} - g(0) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall m', n', p', q' \in \mathbb{N}^* \\ \forall c, d, e \in \mathbb{R}. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} - g''(0) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Pour réaliser cette condition pour} \\ \text{tout } c, d, e \in \mathbb{R}, \text{ il faut} \\ m' \geq 3, n' \geq 3 \text{ et } p' \geq 3 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} - f^{(5)}(0) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Pour avoir cette relation pour tout} \\ a, b \in \mathbb{R}, \text{ il faut } m \geq 5, p \geq 5. \end{array}$$

Compte tenu de ces considérations ci-dessus et compte tenu du fait, que nous devons aboutir au même nombre d'équations que d'inconnues, nous adoptons les formes suivantes pour f et g :

$$f = ax^5(x-1)^2 + bx^5(x-1)^3 e^{(x-1)}$$

$$g = cTx^3 e^{(x-1)} + dTx^3 + ex^3(x-1)^2$$

On les trouve les dérivées respectives pour
f et g

$$\begin{aligned} \cdot f' &= (7x^6 - 12x^5 + 5x^4) [a + b(x-1)^3 e^{(x-1)}] + \\ &(x^7 - 2x^6 + x^5) [3b(x-1)^2 e^{(x-1)} + b(x-1)^3 e^{(x-1)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot f'' &= (42x^5 - 60x^4 + 20x^3) [a + b(x-1)^3 e^{(x-1)}] + \\ &2b(7x^6 - 12x^5 + 5x^4) [3(x-1)^2 e^{(x-1)} + (x-1)^3 e^{(x-1)}] + \\ &b(x^7 - 2x^6 + x^5) [6(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot f''' &= (210x^4 - 240x^3 + 60x^2) [a + b(x-1)^3 e^{(x-1)}] + \\ &3b(42x^5 - 60x^4 + 20x^3) [3(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)} + \\ &3b(7x^6 - 12x^5 + 5x^4) [6(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)} + \\ &b(x^7 - 2x^6 + x^5) [6 + 18(x-1) + 9(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot f^{IV} &= (840x^3 - 720x^2 + 120x) [a + b(x-1)^3 e^{(x-1)}] + \\
 &4b(210x^4 - 240x^3 + 60x^2) [\{3(x-1)^2 + (x-1)^3\} e^{(x-1)}] + \\
 &6b(42x^5 - 60x^4 + 20x^3) [\{6(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3\} e^{(x-1)}] + \\
 &4b(7x^6 - 12x^5 + 5x^4) [\{6 + 18(x-1) + 9(x-1)^2 + (x-1)^3\} e^{(x-1)}] + \\
 &b(x^7 - 2x^6 + x^5) [\{24 + 36(x-1) + 12(x-1)^2 + (x-1)^3\} e^{(x-1)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot g' &= 3x^2 [cTe^{(x-1)} + dT + e(x-1)^2] + \\
 &x^3 [cTe^{(x-1)} + 2e(x-1)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot g'' &= 6x [cTe^{(x-1)} + dT + e(x-1)^2] + \\
 &6x^2 [cTe^{(x-1)} + 2e(x-1)] + x^3 [cTe^{(x-1)} + 2e]
 \end{aligned}$$

- Pour $g(1) = T$, il faut $c + d = 1$ (3)

- Pour $g'(1) = 0$, il faut $13cT + 6dT + 2e = 0$ (4)

- Pour $f^{IV}(1) = 4g(1) \times g'(1)$, il faut :

$$60a = (4c + 3d)T^2 \quad (5)$$

De (3) on a $d = 1 - c$

De (3) et (4), $e = -T(3.5c + 3)$

De (3) et (5), $a = \frac{1}{60}(c+3)T^2$

Les fonctions f et g deviennent :

$$f = \frac{1}{60}(c+3)T^2 x^5(x-1)^2 + bx^5(x-1)^5 e^{(x-1)}$$

$$g = cTx^3 e^{(x-1)} + (1-c)x^3T - T(3.5c+3)x^3(x-1)^2$$

f et g ne dépendent que de b et c .

- On trouve deux relations entre b et c en remplaçant f et g par leurs valeurs ci-dessus, dans le système $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$

- Etape 1 : Mettre f et g , de même que leurs dérivées respectives sous forme réduite afin de les rendre commodes pour la manipulation.

a) Pour g

$$g = c\{x^3T[e^{(x-1)} + 7x - 3,5x^2 - 4,5]\} + x^3T(6x - 3x^2 - 2)$$

$$\text{- On pose : } U_1 = x^3T[e^{(x-1)} + 7x - 3,5x^2 - 4,5]$$

$$U_2 = x^3T(6x - 3x^2 - 2)$$

$$\text{d'où } g = cU_1 + U_2.$$

b) Trouver g'

$$g' = 3x^2 [cTe^{(x-1)} + (1-c)T - T(3.5c + 3)(x-1)^2] + x^3 [cTe^{(x-1)} - 2T(3.5c + 3)(x-1)]$$

$$g' = c(Tx^2) [(x+3)e^{(x-1)} - (x-1)(17.5x - 10.5) - 3] + x^2 T(-15x^2 + 24x - 6)$$

$$\text{On pose } U_3 = Tx^2 [(x+3)e^{(x-1)} - (x-1)(17.5x - 10.5) - 3]$$

$$U_4 = x^2 T(-15x^2 + 24x - 6)$$

$$\text{donc } g' = cU_3 + U_4$$

c) Trouver g''

$$g'' = cTx [e^{(x-1)} (6 + (x+x^2)) - 6 - (3(x-1)^2 + 6x(x-1) + x^2)] + 6xT [1 - (3(x-1)^2 + 6x(x-1) + x^2)]$$

On pose

$$U_5 = Tx [e^{(x-1)} (6 + (x+x^2)) - 6 - (3(x-1)^2 + 6x(x-1) + x^2)]$$

$$U_6 = 6xT [1 - (3(x-1)^2 + 6x(x-1) + x^2)]$$

$$\text{donc } g'' = cU_5 + U_6$$

d) Trouver f

$$f = \frac{1}{6c} cT^2 x^5 (x-1)^2 + \frac{1}{20} T^2 x^5 (x-1)^2 + \frac{1}{2} x^5 (x-1)^5 e^{(x-1)}$$

$$\text{On pose } V_1 = \frac{1}{6c} T^2 x^5 (x-1)^2$$

$$V_2 = \frac{1}{20} T^2 x^5 (x-1)^2$$

$$V_3 = x^5 (x-1)^5 e^{(x-1)}$$

$$\text{d'où } f = cV_1 + bV_3 + V_2$$

En remarquant que $V_2 = 3V_1$, on a :

$$f = cV_1 + 3V_1 + bV_3$$

e) Pour f'

$$f' = c \frac{T^2}{60} (7x^6 - 12x^5 + 5x^4) + \frac{T^2}{20} (7x^6 - 12x^5 + 5x^4) +$$

$$b(x-1)^2(x-1) [(7x^6 - 12x^5 + 5x^4)(x-1) + (x^7 - 2x^6 + x^5)(x+2)]$$

En pose

$$V_4 = \frac{T^2}{60} (7x^6 - 12x^5 + 5x^4)$$

$$V_5 = \frac{T^2}{20} (7x^6 - 12x^5 + 5x^4) = 3V_4$$

$$V_6 = (x-1)^2(x-1) [(7x^6 - 12x^5 + 5x^4)(x-1) + (x^7 - 2x^6 + x^5)(x+2)]$$

On a dès lors

$$f' = cV_4 + bV_6 + V_5 = cV_4 + bV_6 + 3V_4$$

f) Pour f'''

$$f''' = (210x^4 - 240x^3 + 60x^2)(c+d) \frac{T^2}{(c)} +$$

$$b(x-1)^3 e^{(x-1)} [210x^4 - 240x^3 + 60x^2] +$$

$$3b(42x^5 - 60x^4 + 20x^3)(x-1)^2 [x+2] e^{(x-1)} +$$

$$3b(7x^6 - 12x^5 + 5x^4)(x-1)[6 + 6(x-1) + (x-1)^2] e^{(x-1)} +$$

$$b(x^7 - 2x^6 + x^5)[6 + 18x - 18 + 9(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)}$$

On pose: $V_7 = \frac{T^2}{60} (210x^4 - 240x^3 + 60x^2)$

$$V_8 = \frac{T^2}{20} (210x^4 - 240x^3 + 60x^2) = 3V_7.$$

$$V_9 = 3B_1 + 3B_2 + B_3 + B_4.$$

avec $B_1 = (42x^5 - 60x^4 + 20x^3)(x-1)^2 (x+2) e^{(x-1)}$.

$$B_2 = (7x^6 - 12x^5 + 5x^4)(x-1)[6x + (x-1)^2] e^{(x-1)}$$

$$B_3 = (x^7 - 2x^6 + x^5)[-12 + 18x + 9(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)}$$

$$B_4 = (210x^4 - 240x^3 + 60x^2)(x-1)^3 e^{(x-1)}$$

On a des fois

$$f''' = cV_7 + V_8 + bV_9$$

$$f''' = cV_7 + 3V_7 + bV_9$$

g) Pour $f^{(IV)}$

$$f^{\bar{v}} = cF_1 + 3F_1 + bF_3$$

$$F_1 = \frac{T^2}{60} (840x^3 - 720x^2 + 120x)$$

$$F_3 = (R_1 + 4R_2 + 6R_3 + 4R_4 + R_5) \text{ avec}$$

$$R_1 = (840x^3 - 720x^2 + 120x)(x-1)^3 e^{(x-1)}$$

$$R_2 = (210x^4 - 240x^3 + 60x^2) [3(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)}$$

$$R_3 = (42x^5 - 60x^4 + 20x^3) [6(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)}$$

$$R_4 = (7x^6 - 12x^5 + 5x^4) [6 + 18(x-1) + 9(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)}$$

$$R_5 = (x^7 - 2x^6 + x^5) [24 + 36(x-1) + 12(x-1)^2 + (x-1)^3] e^{(x-1)}$$

Étape 2 : Trouver une première relation entre c et b en utilisant l'équation (2) du système à résoudre :

$$fg' - f'g - g'' \text{ équivaut à :}$$

$$(cV_1 + bV_3 + 3V_1)(cU_3 + U_4) - (cV_4 + bV_6 + 3V_4)(cU_1 + U_2) - (cU_5 + U_6) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$c^2(V_1 \cdot U_3 - V_4 \cdot U_1) + c(V_1 \cdot U_4 - V_4 \cdot U_2) + bc(V_3 \cdot U_3 - V_6 \cdot U_1) + b(V_3 \cdot U_4 - V_6 \cdot U_1) + c(3V_1 \cdot U_3 - 3V_4 \cdot U_1 - U_5) + (3V_1 \cdot U_4 - 3V_4 \cdot U_2 - U_6) = 0$$

$$\text{En posant : } \alpha = V_1 \cdot U_3 - V_4 \cdot U_1,$$

$$\beta = V_1 \cdot U_4 - V_4 \cdot U_2 + 3V_1 \cdot U_3 - 3V_4 \cdot U_1 - U_5,$$

$$\gamma = V_3 \cdot U_3 - V_6 \cdot U_1,$$

$$\delta = V_3 U_4 - V_6 U_2,$$

$$\varepsilon = 3V_1 U_4 - 3V_4 U_2 - U_6, \text{ on obtient :}$$

$$\alpha c^2 + \beta c + \gamma bc + \delta b + \varepsilon = 0 \quad (A)$$

et ceci pour tout $x \in [c, 1]$

Étape 3. Trouver une deuxième relation entre c et b en utilisant l'équation (1) de notre système à résoudre :

$$\begin{aligned} & f f''' + 4g g' - f''^2 = 0 \text{ équivaut à :} \\ & (cV_1 + bV_3 + 3V_1)(cV_7 + 3V_7 + bV_9) + \\ & 4(cU_1 + U_2)(cU_3 + U_4) - (cF_1 + 3F_1 + bF_3) = 0 \\ \Leftrightarrow & c^2(V_1 V_7 + 4U_1 U_3) + \\ & c(3V_1 V_7 + 3V_1 V_7 + 4U_1 U_4 + 4U_2 U_3 - F_1) + \\ & b(3V_1 V_9 - F_3 + 3V_3 V_7) + [c(V_1 V_9 + V_3 V_7) + \\ & b^2 V_3 V_9 + (9V_1 V_7 + 4U_2 U_4 - 3F_1)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{En posant : } K = V_1 V_7 + 4U_1 U_3, \\ \lambda &= 6V_1 V_7 + 4U_1 U_4 + 4U_2 U_3 - F_1, \\ \mu &= 3V_1 V_9 - F_3 + 3V_3 V_7, \\ \nu &= V_1 V_9 + V_3 V_7, \\ \varphi &= 9V_1 V_7 + 4U_2 U_4 - 3F_1, \\ \psi &= V_3 V_9, \text{ on obtient :} \end{aligned}$$

$$c^2 \kappa + c\lambda + b\mu + bc\nu + b^2\psi + \varphi = 0 \quad (B)$$

et ceci pour tout $x \in [0, 1]$

Étape 4. Les relations (A) et (B) donnent une famille de systèmes de deux équations à deux inconnues en c et b suivant la valeur de x .

Nous nous fixons $x = 0,5$ et nous essayons de trouver f et g .

Pour $x = 0,5$ (A) et (B) deviennent respectivement :

$$0,67T^2 c^2 + (2,51T^2 - 1,55 \cdot 10^4) c + 1,66 bc - 3,12 b + (1,47T^2 - 4,5 \cdot 10^4) = 0 \quad (A_1)$$

$$\begin{aligned} & (-0,0410^{-4} T^4 + 0,28T^2) c^2 + (-0,2410^{-4} T^4 - 0,164T^2) c \\ & + (0,82 \cdot 10^{-4} T^2 + 0,267) b + (0,2810^{-4} T^2) bc \\ & + (-0,410^{-4}) b^2 + (0,36210^{-4} T^4 + 0,82T^2) = 0 \quad (B_1) \end{aligned}$$

Nous obtenons un système de deux équations (A₁) et (B₁) à deux inconnues b et c . Les solutions, si elles existent, sont fonctions du nombre de Taylor. Il s'agit de déterminer les valeurs de T pour lesquelles il existe une solution et de trouver b et c ; une fois b et c connus, toutes les autres constantes sont établies.

Pour cela, nous réécrivons (A_1) et (B_1) sous forme d'équations de T .

$$T^2 (0,67c^2 + 2,51c + 1,47) + (-1,5510^4 c + 1,66bc - 3,12b - 4,510^4) = 0 \quad (A_2)$$

$$T^4 (-0,0410^{-4} c^2 - 0,2410^{-4} c + 0,36210^{-4}) + T^2 (0,28c^2 - 0,164c + 0,8210^{-4} b + 0,2810^{-4} bc + 0,82) + (0,267b - 0,410^{-4} b^2) = 0 \quad (B_2)$$

Pour que (A_2) et (B_2) puissent avoir la même solution en T il faut

$$1^\circ T^4 (-0,0410^{-4} c^2 - 0,2410^{-4} c + 0,36210^{-4})$$

négligeable devant

$$T^2 (0,28c^2 - 0,164c + 0,8210^{-4} b + 0,2810^{-4} bc + 0,82) + (0,267b - 0,410^{-4} b^2)$$

$$2^\circ 0,67c^2 + 2,51c + 1,47 =$$

$$0,28c^2 - 0,164c + 0,8210^{-4} b + 0,2810^{-4} bc + 0,82$$

$$3^\circ -1,5510^4 c + 1,66bc - 3,12b - 4,510^4 =$$

$$0,267b - 0,410^{-4} b^2$$

La condition 1° est réalisée en négligeant dans (B1) les termes $\alpha 10^{-4} T^4$ devant les termes sT^2 , ce qui est effectivement réalisable aux faibles nombres de Taylor et à ces seuls nombres. ($\alpha = -0,04$; $-0,24$, $0,362$
 $s = 0,28$, $-0,164$, $0,82$)

Notre région de T est déterminée par la précision que nous désirons obtenir : nous exigeons :

$$\begin{cases} 0,04 \cdot 10^{-4} T^4 \leq (0,28 T^2) / 100 \\ 0,24 \cdot 10^{-4} T^4 \leq (0,164 T^2) / 100 \\ 0,362 \cdot 10^{-4} T^4 \leq (0,82 T^2) / 100 \end{cases}$$

ce qui conduit à $T \leq 8,26$

Une fois le domaine de T défini, trouvons c et b .

De 2° on tire

$$b = \frac{0,4c^2 + 2,67c + 0,65 \cdot 10^4}{0,82 + 0,28c}$$

En prenant la valeur de b donnée ci-dessus et la condition n° 3, nous obtenons une équation du 4° degré en c :

$$c^4 + 9,6c^3 + 9,32c^2 - 36,41c - 19,40 = 0$$

L'équation ci-dessus a quatre racines réelles

$$c = 1,74$$

$$c = -0,50$$

$$c = -3,60$$

$$c = -6,27$$

Nous avons des lors quatre possibilités

1^o Cas $c = 1,74$

$$b = 4,90 \times 10^4 ; \quad d = -0,74$$

$$e = -9,10T ; \quad a = 0,09T^2$$

2^o Cas $c = -0,50$

$$b = -0,83 \times 10^4 ; \quad d = 1,50$$

$$e = -1,25T ; \quad a = 0,04T^2$$

3^o Cas $c = -3,6$

$$b = 22,42 \times 10^4 ; \quad d = 4,6$$

$$e = 9,60T ; \quad a = -0,01T^2$$

4^o Cas $c = -6,27$

$$b = 0,37 \times 10^4 ; \quad d = 7,27$$

$$e = 18,94T ; \quad a = -0,054T^2$$

- Conclusion. Nos fonctions f et g dont les formes ont été imposées au début ne vérifient pas de façon générale notre système cependant pour les faibles valeurs de T , elles constituent une classe de solutions. Notons que nos hypothèses de départ sont toutes vérifiées.

Annexe IV : Solution analytique (Résultats)

SOLUTION ANALYTIQUE

LA VALEUR DE T = 1

A(1) = .08000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	-.117636	-7.403569E-3	-5700.452356
.2	-2.308646	-4.625734E-2	-97645.722641
.3	-9.937617	-.117043	-355599.654214
.4	-21.412611	-.195908	-622093.688963
.5	-29.022815	-.244955	-647106.660022
.6	-26.152786	-.222403	-412425.802939
.7	-14.824114	-9.260187E-2	-145310.436396
.8	-4.205608	.164143	-20235.651109
.9	-.261333	.541951	-344.455893
1	0	1	0

A(2) = .04000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	1.992658E-2	2.842152E-4	-162.445276
.2	.391067	3.802684E-3	-2791.382316
.3	1.683374	1.725860E-2	-10175.756377
.4	3.627231	4.963803E-2	-17810.362352
.5	4.916528	.110529	-18532.425664
.6	4.430628	.208405	-11816.138367
.7	2.511833	.348862	-4167.879133
.8	.713080	.532805	-583.732141
.9	4.458288E-2	.754574	-10.635484
1	0	1	0

T = 1 (suite)

A(3) = - .01000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	-.538249	1.091235E-2	-119248.695512
.2	-10.563310	7.301133E-2	-2043392.07541
.3	-45.470116	.202940	-7442338.06648
.4	-97.975004	.389138	-13020502.91973
.5	-132.797123	.602061	-13544519.1118
.6	-119.667020	.804135	-8632829.120004
.7	-67.833575	.959390	-3042001.170432
.8	-19.247733	1.042723	-423897.289896
.9	-1.197954	1.048729	-7273.008339
1	0	1	0

A(4) = - .05400

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	-8.883224E-3	2.006221E-2	-32.895162
.2	-.174339	.132594	-560.381937
.3	-.750463	.362799	-2037.135938
.4	-1.617092	.681430	-3560.752330
.5	-2.191988	1.025257	-3701.825913
.6	-1.975549	1.317059	-2357.653804
.7	-1.120280	1.485077	-829.022944
.8	-.318353	1.481809	-114.275550
.9	-2.008787E-2	1.302045	-1.695381
1	0	1	0

LA VALEUR DE T = 5

A(1) = 2.00000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	-.117621	-3.701784E-2	-5700.451613
.2	-2.308253	-.231287	-97645.713794
.3	-9.935331	-.585217	-355599.622643
.4	-21.405533	-.979542	-622093.624082
.5	-29.007815	-1.224773	-647106.570022
.6	-26.128899	-1.112015	-412425.723313
.7	-14.795072	-.463009	-145310.422566
.8	-4.180443	.820714	-20235.745481
.9	-.249996	2.709755	-344.619655
1	0	5	0

A(2) = 1.00000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	1.993435E-2	1.421076E-3	-162.444904
.2	.391264	1.901342E-2	-2791.377892
.3	1.684517	8.629299E-2	-10175.740592
.4	3.630770	.248190	-17810.329911
.5	4.924028	.552647	-18532.380664
.6	4.442572	1.042027	-11816.098554
.7	2.526355	1.744311	-4167.872218
.8	.725663	2.664025	-583.779326
.9	5.025159E-2	3.772871	-10.717365
1	0	5	0

$T = 5$ (suite)

A(3) = - .25000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	-.538251	5.456175E-2	-119248.695605
.2	-10.563359	.365057	-2043392.076516
.3	-45.470401	1.014700	-7442338.070427
.4	-97.975889	1.945689	-13020502.92784
.5	-132.798998	3.010306	-13544519.12305
.6	-119.670006	4.020676	-8632829.129957
.7	-67.837205	4.796948	-3042001.172161
.8	-19.250879	5.213617	-423897.278100
.9	-1.199371	5.243643	-7272.987869
1	0	5	0

A(4) = - 1.35000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	-8.893722E-3	.100311	-32.895663
.2	-.174604	.662972	-560.387909
.3	-.752006	1.813996	-2037.157248
.4	-1.621870	3.407152	-3560.796124
.5	-2.202113	5.126283	-3701.886663
.6	-1.991674	6.585293	-2357.707551
.7	-1.139884	7.425384	-829.032279
.8	-.335340	7.409045	-114.211849
.9	-2.774062E-2	6.510223	-1.584841
1	0	5	0

LA VALEUR DE T = 50

A(1) = 200.00000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	-.116017	-.370178	-5700.374987
.2	-2.267702	-2.312867	-97644.801410
.3	-9.699572	-5.852171	-355596.366929
.4	-20.675625	-9.795417	-622086.933266
.5	-27.460940	-12.247729	-647097.288772
.6	-23.665462	-11.120146	-412417.511857
.7	-11.800065	-4.630093	-145308.996372
.8	-1.585217	8.207143	-20245.477577
.9	.919174	27.097554	-361.507669
1	0	50	0

A(2) = 100.00000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	2.073625E-2	1.421076E-2	-162.406591
.2	.411539	.190134	-2790.921700
.3	1.802397	.862930	-10174.112735
.4	3.995724	2.481901	-17806.984503
.5	5.697465	5.526467	-18527.740039
.6	5.674290	10.420272	-11811.992826
.7	4.023858	17.443109	-4167.159121
.8	2.023276	26.640246	-588.645374
.9	.634837	37.728713	-19.161372
1	0	50	0

T = 50 (suite)

A(3) = -25.00000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	-.538451	.545617	-119248.705183
.2	-10.568428	3.650566	-2043392.190564
.3	-45.499871	10.146995	-7442338.477391
.4	-98.067127	19.456890	-13020503.76419
.5	-132.992357	30.103060	-13544520.28321
.6	-119.977935	40.206757	-8632830.156389
.7	-68.211581	47.969483	-3042001.350435
.8	-19.575282	52.136174	-423896.061588
.9	-1.345517	52.436434	-7270.876867
1	0	50	0

A(4) = ***** - 135.0000

X	F	G	H
0	0	0	0
.1	-9.976287E-3	1.003110	-32.947386
.2	-.201976	6.629723	-561.003768
.3	-.911143	18.139964	-2039.354855
.4	-2.114557	34.071523	-3565.312425
.5	-3.246253	51.262830	-3708.151507
.6	-3.654493	65.852928	-2363.250284
.7	-3.161514	74.253836	-829.994960
.8	-2.087118	74.090449	-107.642684
.9	-.816931	65.102229	9.814569
1	0	50	0