ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

TITRE : GESTION DE RESERVOIRS

AUTEUR : EL HADJ MAHINE DIOP

DIRECTEURS DE PROJET : JEAN CLAUDE PICARD
RAYMOND DESJARDINS

1980

REMERCIEMENTS

A Monsieur JEAN CLAUDE PICARD, professeur de recherche opérationnelle à l'Ecole Polytechnique de Thiès qui a bien voulu diriger notre travail, nous exprimons notre profonde gratitude
A Monsieur RAYMOND DESJARDINS, professeur d'hydrologie et de traitement des eaux à l'Ecole Polytechnique de Thies, nous exprimons nos sincères remerciements.
Nos remerciements vont enfin à Monsieur JACQUES DESLAURIERS, techinicien en informatique à l'Ecole Polytechnique de Thies, pour la disponibilité dont il a fait preuve à notre égard -

SOMMAIRE

Au cours de notre étude, nous avons utilisé plusieurs techniques de la recherche opérationnelle. C'est ainsi que nous avons utilisé les techniques de la programmation linéaire, de la programmation non linéaire et enfin de la programmation dynamique.

Les principaux résultats auxquels nous avons abouti sont contenus dans les courbes que nous avons tracées.

La courbe n° I nous permet de savoir pour une capacité donnée quels projets de reservoirs faudra-t-il développer. La courbe n° II nous permet elle aussi de savoir pour un débit donné quels projets hydrauliques faudra-t-il développer. Enfin la courbe n° III nous donne pour une capacité choisie le rendement optimum que l'on peut tirer du système de projets.

Les programmes à l'ordinateur obtenus nous permettent de résoudre respectivement notre problème pour un projet de 3 reservoirs et pour quatre projets hydrauliques.

TABLE DES MATIERES

ω

Pages

INTRODUCTION

L'évolution actuelle du monde incite les hommes à réfléchir à plus d'une fois avant de prendre une quelconque décision. C'est ainsi que l'ingénieur moderne est toujours confronté à des problèmes de minimisation des coûts ou de maximisation de profits avant de se lancer dans un projet donné. En un mot, il est confronté à des problèmes d'optimisation c'est à dire des problèmes qui consistent à trouver la meilleure solution parmi un ensemble de solutions possibles. Pour réaliser sa mission, l'ingénieur dispose d'un outil moderne et puissant qui est la recherche opérationnelle dont le champ d'applications n'est plus à démontrer aujourd'hui.

Aussi n'est-il pas étonnant que notre projet de fin d'études soit axé sur cette dernière.

Il s'agira donc, dans notre étude, d'utiliser les techniques de la recherche opérationnelle pour minimiser les coûts et maximiser les bénéfices d'un projet de réservoirs. Les réservoirs devant alimenter plusieurs autres projets nécessitant l'utilisation de l'eau. Les coûts proviendront de l'emmagasinage de l'eau dans les réservoirs et les bénéfices quant à eux de l'utilisation de l'eau dans les différents projets.

Schématiquement, notre étude pourra être divisée en trois grandes parties.

La première partie sera un problème d'allocation de ressources. Le problème à résoudre sera donc, connaissant une capacité K à allouer aux réservoirs, de savoir la combinaison de réservoirs qui minimise les coûts et la combinaison de projets qui maximise les profits.

Dans la deuxieme partie, le problème sera de combiner les coûts et les profits afin d'obtenir le niveau de rendement optimum.

Dans la troisieme partie, nous essaierons de mettre sur pied un programme à l'ordinateur qui nous permettra de résoudre notre problème dans les cas ci-dessus.

Chapitre I

CAS OU LES COUTS ET LES PROFITS SONT DES FONCTIONS LINEAIRES

1. CAS DES COUTS LINEAIRES

1-1 Problème n°1 : minimisation des coûts

Supposons qu'on ait n projets de réservoirs. Notre problème ici est de chercher la combinaison de réservoirs qui nous donne, pour une capacité, le coût minimum d'emmagasinage.

Soit $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ les projets de reservoirs.

Soit x_i la variable qui décrit la capacite d'emmagasinage du reservoir X_i.

Soit $f_i(x_i)$ le coût annuel associé au reservoir X_i.

Puisqu'on a supposé que les coûts en fonction de la capacité d'emmagasinage étaient linéaires, on peut dire que $f_i(x_i)$ peut s'écrire sous la forme

$f_i(x_i) = c_i x_i$, c_i étant le coût associé à X_i

Soit d_i la capacité maximale du réservoir X_i c'est à dire le nombre de mètres-cubes que peut emmagasiner X_i.

1-1-1 Formulation mathématique du problème.

Le problème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\operatorname{Min} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k$$

$$0 \leq x_i \leq \alpha_i$$

avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

le problème peut s'écrire encore sous la forme suivante :

$$\operatorname{Min} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$

$$\sum x_i = k$$

$$0 \leq x_i \leq \alpha_i$$

avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Nous avons ici un programme linéaire, lequel consiste en la recherche du minimum de la fonction économique coût qui est aussi appelée fonction objective.

1-1-2 Résolution du problème

Pour résoudre le problème posé, nous pouvons utiliser la méthode du simplexe.

La méthode du simplexe est une technique numérique itérative (un algorithme) qui permet de passer d'une solution de base réalisable à une autre

meilleure pour obtenir en un nombre fini d'itérations une solution de base optimale. Géométriquement c'est une méthode qui va d'un sommet du polyèdre Ω des contraintes à un autre meilleur (sommet voisin)
L'un des intérêts de la méthode, considérée sous sa forme la plus générale est de permettre, dans le cas le plus fréquent où l'on ne sait rien au départ de la compatibilité des équations ou de la redondance du système, de savoir si le programme est possible ou non et, dans l'affirmative, de trouver un programme de base initial. Elle met aussi en évidence l'absence de programme optimal fini.
Pour le problème qui nous concerne, nous allons utiliser pour sa résolution une méthode qui tient beaucoup plus compte de l'intuition que de la mathématique.
Cette méthode peut se résumer en ceci :
Il faut utiliser les réservoirs ayant les coûts les plus faibles à leur pleine capacité jusqu'à satisfaire la demande k.
On peut démontrer que les solutions obtenues par cette méthode sont optimales.
Supposons que les variables soient numérotées de telle sorte que $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots \leq c_n$

et que la solution optimale soit telle que $\sum_{i=1}^{n} x_i = k > \alpha_1$.
Alors il existe une solution optimale $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$
telle que $x_1^* = \alpha_1$

PREUVE

Soit X' une solution optimale telle que $x'_1 < \alpha_1$

Posons $x_1^* = \alpha_1$ et $x_i^* = x'_i - \varepsilon_i \quad (i = 2, \dots, n)$

avec $\sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i = \alpha_1 - x'_1$ et $\varepsilon_i \geq 0$

Nous avons pour la fonction économique

$$z(X^*) = c_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i (x'_i - \varepsilon_i)$$

$$= c_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x'_i - \sum_{i=2}^{n} c_i \varepsilon_i$$

$$\leq c_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x'_i - c_1 \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i$$

$$c_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x'_i - c_1 \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i = c_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x'_i - c_1 (\alpha_1 - x'_1)$$
$$= z(X')$$

Donc $z(X^*) \leq z(X')$

En effet $z(X') = c_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x'_i - c_1 (\alpha_1 - x'_1)$

$$= c_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x'_i - c_1 \alpha_1 + c_1 x'_1$$

$$= \sum_{i=2}^{n} c_i x'_i + c_1 x'_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i x'_i$$

Donc il existe une solution optimale X^* avec $x_1^* = \alpha_1$ (CQFD)

1-1-3 Illustration du problème : Cas particuliers

Prenons le cas où $n=3$. Donc nous avons trois réservoirs : X_1, X_2, X_3. Supposons que les coûts associés respectivement à ces derniers soient \$ 10^6, \$ 3×10^6, \$ 2×10^6 par $10^8\ m^3$ d'eau emmagasinée.

Soient $4\times10^8\ m^3$, $8\times10^8\ m^3$ et $10^9\ m^3$ les capacités maximales respectives des reservoirs X_1, X_2, X_3.

Soit k la capacité à allouer aux differents reservoirs egal à 20×10^8 m^3.

Dès lors, le problème peut s'écrire sous la manière suivante.

$$\text{Min } x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 8$$

$$0 \leq x_3 \leq 10$$

D'après le résultat énoncé ci haut, X_1 ayant le coût le plus faible, on lui alloue le maximum de sa capacité c'est à dire 4. Entre X_2 et X_3, c'est X_3 qui a le coût le plus faible. Donc on va lui allouer le maximum de sa capacité c'est à dire 10. Finalement la capacité de 6 qui reste va être allouée au réservoir X_2 pour satisfaire la demande 20.

En définitive, la solution obtenue est :

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 10$$

Et le coût minimum est alors égal à $4 + 6 \times 3 + 10 \times 2 = 42$

N.B les solutions obtenues pour les capacités doivent être multipliées par $10^8 m^3$ tandis que le coût doit être multiplié par $\$ 10^6$.

2. CAS DES PROFITS LINEAIRES

2-1 : Problème n°2 : maximisation des profits

Supposons qu'on ait m projets qui nécessitent de l'eau emmagasinée, dans les n projets de réservoirs. Notre problème ici est de chercher la combinaison de projets qui nous donne, pour un débit fixé, le profit maximum

Soient $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_m$ les dits projets.

Soit y_j la variable qui décrit le débit du projet Y_j

Soit $g_j(y_j)$ le revenu tiré du projet Y_j pour un débit utilisé y_j.

Les revenus obtenus des différents projets peuvent être fonction de :

a) la quantité d'eau fournie

b) la qualité de l'eau

c) la régularité de l'approvisionnement

d) le temps de l'année (demande saisonnière)

e) la croissance de la demande.

Dans le cas présent nous considérons uniquement le débit d'eau comme variable.

Le revenu de l'eau est alors calculé en multipliant le débit d'eau par le prix maximum qu'un utilisateur est prêt à payer.

Puisqu'on a supposé que les profits en fonction du débit d'eau utilisée étaient linéaires, $g_j(y_j)$ pourra donc s'écrire sous la forme $g_j(y_j) = P_j y_j$, P_j étant le profit tiré de Y_j.

Soit β_j le débit maximal utilisable dans le projet Y_j

2-1-1 <u>Formulation mathématique du problème</u>

Le problème peut s'écrire sous la forme :

$$\operatorname{Max} \sum_{j=1}^{m} g_j(y_j)$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = k'$$

$$0 \leq y_j \leq \beta_j$$

avec $j \in \{1, 2, \dots, m\}$

Le problème peut s'écrire encore sous la forme suivante :

$$\operatorname{Max} \sum_{j=1}^{m} P_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = k'$$

$$0 \leq y_j \leq \beta_j$$

avec $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$

Nous sommes ici en présence d'un cas de programme linéaire

2-1-2- Résolution du problème

Pour résoudre le problème, on utilise le même principe que celui qui nous a permis de résoudre le cas de la minimisation des coûts linéaires. Pour ce problème, le principe peut s'énoncer comme suit :

Il faut alimenter les projets dont les bénéfices sont les plus élevés à leur capacité maximale jusqu'à satisfaire la demande k'

On peut démontrer que les solutions obtenues par ce résultat sont optimales.

La démonstration est quasi identique à celle qu'on a faite pour le cas des réservoirs

Nous supposerons dans ce cas-ci que les variables sont numérotées de telle sorte que $P_1 \geq P_2 \geq P_3 \cdots \geq P_m$. Supposons aussi que la solution optimale soit telle que $\sum_{j=1}^{m} y_j = k'$ avec $k' > \beta_1$. Alors il existe une solution optimale Y^* telle que $y_1^* = \beta_1$

PREUVE

Soit Y' une solution optimale telle que $y'_1 < \beta_1$

Posons $y_1^* = \beta_1$ et $y_j^* = y'_j - \varepsilon_j$ $(j = 2, \dots, m)$ avec $\varepsilon_j \geq 0$

$$\sum_{j=2}^{m} \varepsilon_j = \beta_1 - y'_1$$

Dès lors nous avons pour la fonction économique

$$z(Y^*) = \rho_1 \beta_1 + \sum_{j=2}^{m} \rho_j (y'_j - \varepsilon_j) = \rho_1\beta_1 + \sum_{j=2}^{m} \rho_j y'_j - \sum_{j=2}^{m} \rho_j \varepsilon_j$$

$$\rho_1 \beta_1 + \sum_{j=2}^{m} \rho_1 y'_j - \sum_{j=2}^{m} \rho_j \varepsilon_j \geq \rho_1 \beta_1 + \sum_{j=2}^{m} \rho_j y'_j - \rho_1 \sum_{j=2}^{m} \varepsilon_j$$

$$\rho_1 \beta_1 + \sum_{j=2}^{m} \rho_1 y'_j - \sum_{j=2}^{n} \rho_j \varepsilon_j \geq \rho_1 \beta_1 + \sum_{j=2}^{m} \rho_j y'_j - \rho_1 (\beta_1 - y'_1)$$

$$\rho_1 \beta_1 + \sum_{j=2}^{m} \rho_1 y'_j - \sum_{j=2}^{m} \rho_j \varepsilon_j \geq \rho_1 \beta_1 + \sum_{j=2}^{m} \rho_1 y'_j - \rho_1 \beta_1 + \rho_1 y'_1$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \rho_j y'_j = z(Y')$$

Donc $z(Y^*) \geq z(Y')$

Donc il existe une solution optimale Y^* avec $y_1^* = \beta_1$.

2-1-3 <u>Illustration du problème</u> : cas particuliers

Prenons le cas où $m = 4$. Donc nous avons quatre projets Y_1, Y_2, Y_3, Y_4. Supposons que les bénéfices associés respectivement à ces derniers soient $\$10^6$, $\$0.5 \times 10^6$, $\$0.3 \times 10^6$, $\$0.2 \times 10^6$ par m^3/s de débit

Soient $20 m^3/s$, $50 m^3/s$, $70 m^3/s$, $80 m^3/s$, les débits

maximaux utilisables pour les projets Y_1, Y_2, Y_3, Y_4
Supposons que la capacité k' à allouer aux differents projets soit egal à $200\, m^3/s$.
Dès lors le problème peut s'ecrire sous la manière suivante

$$\max(y_1 + 0.5y_2 + 0.3y_3 + 0.2y_4)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 200$$

$$0 \leq y_1 \leq 20$$

$$0 \leq y_2 \leq 50$$

$$0 \leq y_3 \leq 70$$

$$0 \leq y_4 \leq 80$$

En utilisant le résultat ci haut, il vient :

$$y_1 = 20 \quad y_2 = 50 \quad y_3 = 70 \quad y_4 = 60$$

le profit maximum P est égal à $P = 20\times1 + 0.5\times50 + 0.3\times70 + 0.2\times60$
c'est à dire $P = 78$

N.B : Il faudra multiplier le résultat P par $\$10^6$.

3 - Combinaison des coûts et des profits : cas général

3-1 Problème général

Il s'agit ici de combiner les revenus et les coûts afin d'obtenir le niveau de rendement optimum.
Soit x_i la capacité, du réservoir i $(i=1,2,\dots,n)$
Soit y_j la capacité pour le projet j $(j=1,2,\dots,m)$
Soit c_i le coût annuel du reservoir i par unité de volume

Soit p_j le bénéfice annuel tiré du projet j par unité de débit.
On suppose en outre qu'il existe une relation linéaire entre la capacité x et le débit y. Soit $x = \delta y$.
Soit k la capacité à allouer aux réservoirs.

3-1-1 Formulation mathématique du problème

Le programme général peut s'écrire de la manière suivante:

$$\operatorname{Max}\left[\sum_{j=1}^{m} p_j y_j - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \delta \sum_{j=1}^{m} y_j$$

$$0 \leq x_i \leq \alpha_i \qquad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$0 \leq y_j \leq \beta_j \qquad j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

3-1-2 Résolution du problème

Pour résoudre ce problème, on combine les deux résultats énoncés ci haut c'est à dire qu'il faudra allouer aux réservoirs ayant les coûts les plus faibles le maximum de leur capacité et aux projets ayant les bénéfices les plus élevés le maximum de leur capacité. La solution que l'on obtient est évidemment optimale.

3-1-3 Illustration : cas particulier

Prenons le cas où $n = 3$ et $m = 4$. Donc nous avons trois réservoirs X_1, X_2, X_3 et quatre projets Y_1, Y_2, Y_3, Y_4

Si nous considérons les données des problèmes 1-1-3 et 2-1-3 nous pouvons écrire le programme général pour une capacité $k = 20$ et $\delta = 0.1$

$$\max\left[(y_1 + 0.5y_2 + 0.3y_3 + 0.2y_2) - (x_1 + 3x_2 + 2x_3)\right]$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.1(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 20$$

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 8$$

$$0 \leq x_3 \leq 10$$

$$0 \leq y_1 \leq 20$$

$$0 \leq y_2 \leq 50$$

$$0 \leq y_3 \leq 70$$

$$0 \leq y_4 \leq 80$$

En utilisant le résultat ci haut, il vient :

$x_1 = 4 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 10$

$y_1 = 20 \qquad y_2 = 50 \qquad y_3 = 70 \qquad y_4 = 60$

Le profit maximum est égal à $78 - 42 = 36$.

N.B Les résultats trouvés pour les réservoirs doivent être multipliés par $10^5\,m^3$ tandis que le profit maximum doit être multiplié par $\$10^6$.

3-2 Courbe donnant le profit en fonction de la demande

En faisant varier le paramètre k, on obtient une courbe profit versus k qui admet un maximum et ce maximum correspond en pratique à la quantité d'eau optimale qu'il faudrait allouer aux différents projets pour avoir le bénéfice le plus grand. Au delà de ce maximum, le projet ne devient plus intéressant car les bénéfices tirés vont décroissant.

3-2-1 Illustration du résultat

On peut illustrer ce résultat par l'exemple ci haut. La fonction profit dans ce cas est égal à

$$P = (y_1 + 0.5y_2 + 0.3y_3 + 0.2y_4) - (x_1 + 3x_2 + 2x_3)$$

La fonction demande est égale à $X = x_1 + x_2 + x_3$.

Posons $X = k$

Faisons varier k dans l'intervalle $[0,22]$, 22 étant la somme des capacités maximales des réservoirs X_1, X_2, X_3

On peut subdiviser l'intervalle $[0,22]$ des valeurs de k en une suite finie d'intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ où la fonction P est affine.

1er Cas $\quad 0 \leq k \leq 2$

Dans ce cas, on a les résultats suivants en utilisant le résultat énoncé en 3-1-2

$$x_1^* = k \qquad y_1^* = 10k \qquad P = 9k$$

2e cas $\quad 2 \leq k \leq 4$

$$x_1^* = k \qquad y_1^* = 20 \qquad y_2^* = 10k - 20$$

$$P = 20 + 0.5(10k - 20) - k$$

d'où $P = 10 + 4k$

<u>3e cas</u> $4 \leq k \leq 7$

$x_1^* = 4 \quad x_3^* = k - 4 \quad y_1^* = 20 \quad y_2^* = 10k - 20$

$$P = 20 + 0.5\,(10k - 20) - 4 - 2\,(k-4)$$

$$P = 14 + 3k$$

<u>4e cas</u> $7 \leq k \leq 14$

$x_1^* = 4 \quad x_3^* = k - 4 \quad y_1^* = 20 \quad y_2^* = 50$

$y_3^* = 10k - 70$

$$P = 20 + 0.5 \cdot 50 + 0.3\,(10k - 70) - 4 - 2\,(k - 4)$$

$$P = 28 + k.$$

<u>5e cas</u> $14 \leq k \leq 22$

$x_1^* = 4 \quad x_3^* = 10 \quad x_2^* = k - 14$

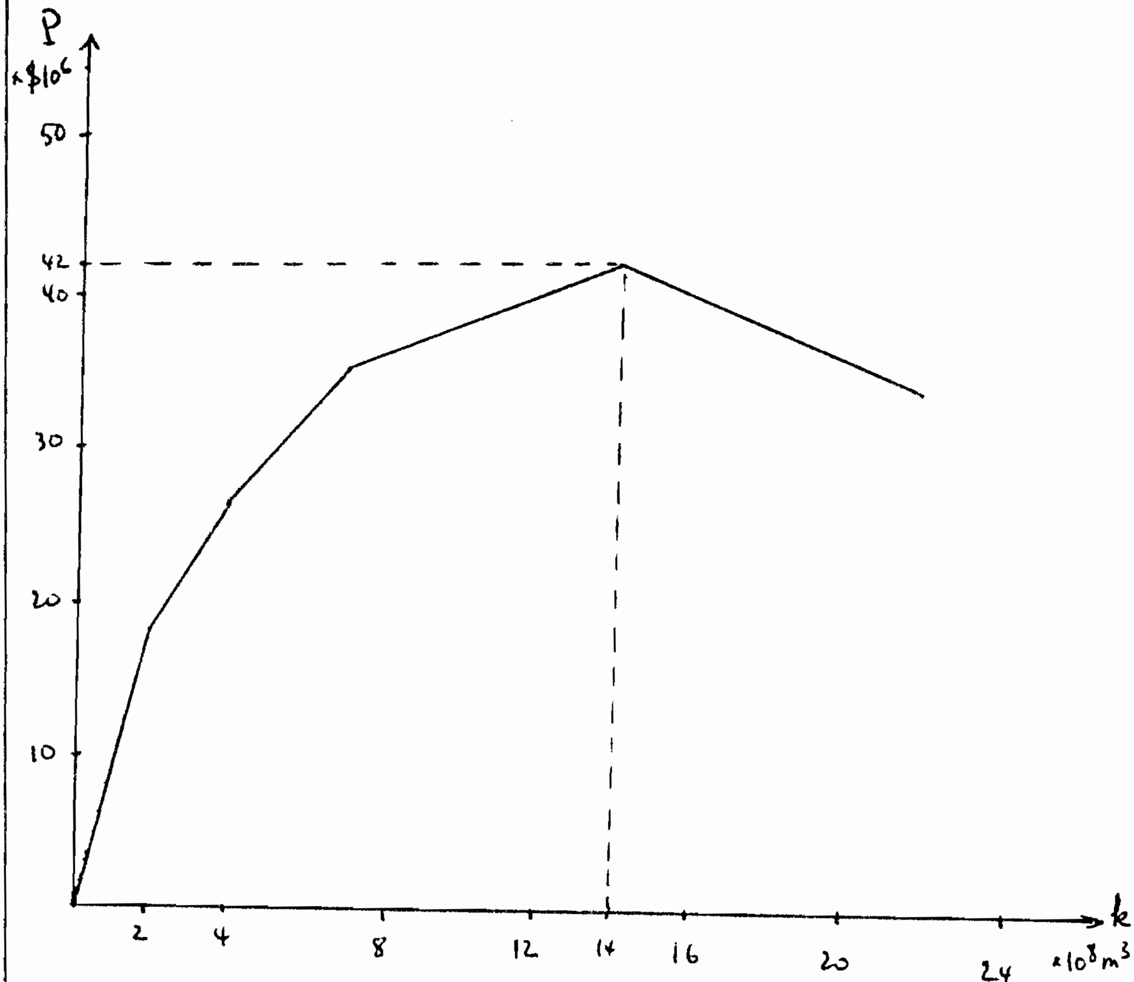
$y_1^* = 20 \quad y_2^* = 50 \quad y_3^* = 70 \quad y_4^* = 10k - 140$

$$P = 20 + 0.5 \cdot 50 + 0.3 \cdot 70 + 0.2\,(10k - 140) - 4 - 2 \times 10 - 3\,(k - 14)$$

$$P = 56 - k$$

<u>N.B</u> : les variables qui n'ont pas été citées dans les differents cas sont égales à zéro.

On peut maintenant tracer la courbe profit en fonction de k



La forme de la courbe (concave) obtenue était à prévoir mathématiquement parce que pour la pente d'intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on se rend compte que la pente des droites obtenues diminue jusqu'à changer de signe : passant du positif au négatif. Le point où la pente passe du positif au négatif correspond au profit optimum. Dans cet exemple, le profit maximum est de 42 pour une capacité optimale de $14 \cdot 10^8 m^3$

4. Remarque

On aurait pu résoudre directement le problème sans essayer de le scinder en deux parties, c'est à dire :

a) Trouver, pour un débit donné, le coût minimal et le revenu maximal.

b) Combiner les revenus et les coûts afin d'obtenir le niveau de rendement optimum.

Le programme général donné, dans le paragraphe 3 aurait suffi pour résoudre le problème.

Chapitre II

CAS OU LES COUTS SONT DES FONCTIONS CONVEXES LES PROFITS DES FONCTIONS CONCAVES

1 - CAS DES COUTS CONVEXES

1-1 Problème n° 1 : minimisation des coûts

les coûts associés aux différents réservoirs sont des fonctions convexes. Soit x_i la capacité allouée au réservoir i et $g_i(x_i)$ le coût associé.

1-1-1 Formulation mathématique du problème

Le problème peut se formuler de la manière suivante

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k$$

1-1-2 Résolution du problème

On est ici en présence d'un cas de programmation non linéaire. Pour résoudre le problème, on utilise le Lagrangien

Le Lagrangien du programme non linéaire (PNL) est :

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - k\right)$$

Si $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ est une solution optimale on doit avoir :

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_\lambda L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$$

Si de plus les variables x_i étaient liées par des contraintes de la forme $x_i \leq \alpha_i$, le Lagrangien serait alors :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) + \lambda\left(\sum_{1}^{n} x_i - k\right) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\alpha_i - x_i)$$

Une solution optimale $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$ devrait alors satisfaire les conditions suivantes (dites conditions de Kühn et Tucker)

$$\nabla_x (\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) = 0$$

$$\bar{\gamma}_i (\bar{\alpha}_i - \bar{x}_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{x}_i \leq \alpha_i \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

<u>Remarque</u> : Pour ces deux derniers problèmes nous devrions normalement rajouter les contraintes $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Mais il est logique de penser que les solutions $\bar{x}_i$ obtenues les satisfont naturellement.

1-1-3 <u>Illustration du problème</u> : cas particulier

Posons $n = 3$ et $\sum_{i}^{n} g_i(x_i) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

on aura donc

$$\text{Min } x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = k$$

k étant la capacité à allouer aux réservoirs.

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - k)$$

On doit avoir $\nabla_x L(X,\lambda) = 0$

$\nabla_\lambda L(X,\lambda) = 0$

$$\nabla_x L(X,\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0 \\ 4x_2 + \lambda = 0 \\ 6x_3 + \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -2x_1 = -4x_2 = -6x_3 \Rightarrow 2x_1 = 4x_2 = 6x_3$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 2/_3\, x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = k \Rightarrow 2x_2 + x_2 + 2/_3 x_2 = k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{11}{3} x_2 = k$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{6k}{11}, \quad \bar{x}_2 = \frac{3k}{11}, \quad \bar{x}_3 = \frac{2k}{11}, \quad \bar{\lambda} = -\frac{12k}{11}$$

<u>Remarque</u> : les x_i sont positifs (ou nuls) $(i = 1, 2, 3)$. Ce qui semble confirmer la remarque précédente -

2. <u>Combinaison des coûts et profits</u> : Problème général

On suppose que les profits obtenus des differents projets j sont des fonctions concaves. Soit $h_j(y_j)$ le profit tiré du projet j par une allocation y_j.

Le probleme qui se pose est de maximiser le bénéfice total net.

2-1 <u>Formulation mathématique du problème</u>

Le programme peut s'écrire de la façon suivante

$$\operatorname{Max} \left[\sum_{j=1}^{m} h_j(y_j) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha \sum_{j=1}^{m} y_j$$

La résolution du PNL est la même que précédemment.

2-2 - Illustration : cas particuliers

Posons $n = 3$ et $m = 4$ $\sum_{1}^{m} h_j(y_j) = y_1^{1/2} + 2y_2^{1/2} + 3y_3^{1/2} + 4y_4^{1/2}$

Le PNL devient dès lors :

$$\mathrm{Max}\left[(y_1^{1/2} + 2y_2^{1/2} + 3y_3^{1/2} + 4y_4^{1/2}) - (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)\right]$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \alpha(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

Soit k la capacité à allouer.

Le Lagrangien de ce PNL est :

$$L(X, Y, d) = \left[(y_1^{1/2} + 2y_2^{1/2} + 3y_3^{1/2} + 4y_4^{1/2}) - (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)\right] + d\left[(x_1 + x_2 + x_3) - \alpha(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\right]$$

avec $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ et $X = (x_1, x_2, x_3)$

on doit avoir :

$$\nabla_X L(X, Y, d) = 0 \qquad \nabla_Y L(X, Y, d) = 0 \qquad \nabla_d L(X, Y, d) = 0$$

Donc $\nabla_X L(X, Y, d) = 0 \iff \begin{cases} -2x_1 + d = 0 \\ -4x_2 + d = 0 \\ -6x_3 + d = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x_1 = 4x_2 = 6x_3$ et $d = 2x_1 = 4x_2 = 6x_3$

$\Rightarrow x_2 = x_1/2 \qquad x_3 = x_1/3$

$x_1 + x_2 + x_3 = k \implies x_1 + x_1/2 + x_1/3 = k = \frac{11}{6}x_1$

$x_1 = \frac{6}{11}k \qquad x_2 = \frac{3}{11}k \qquad x_3 = \frac{2}{11}k \qquad d = \frac{12}{11}k$

$$\nabla_Y L(X, Y, d) = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2} y_1^{-1/2} - \alpha = 0 \\ y_2^{-1/2} - \alpha = 0 \\ \frac{3}{2} y_3^{-1/2} - \alpha = 0 \\ 2 y_4^{-1/2} - \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y_1^{-1/2} = y_2^{-1/2} = 3/2\, y_3^{-1/2} = 2 y_4^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} y_1^{-1} = y_2^{-1} = \frac{9}{4} y_3^{-1} = 4 y_4^{-1} = \alpha^2$$

$$\frac{1}{4y_1} = \frac{1}{y_2} = \frac{9}{4y_3} = \frac{4}{y_4} = \alpha^2$$

$$\begin{cases} 4y_1 = y_2 \\ 4y_3 = 9y_2 \\ 9y_4 = 16y_3 \end{cases} \Rightarrow y_2 = 4y_1 \quad y_3 = 9y_1 \quad y_4 = 16y_1$$

$$\alpha(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = k$$

$$\alpha(y_1 + 4y_1 + 9y_1 + 16y_1) = k = 30\alpha y_1$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{k}{30\alpha} \quad y_2 = \frac{4k}{30\alpha} \quad y_3 = \frac{9k}{30\alpha} \quad y_4 = \frac{16k}{30\alpha}$$

En conclusion, les solutions sont:

$$\bar{x}_1 = \frac{6}{11} k \quad \bar{x}_2 = \frac{3}{11} k \quad \bar{x}_3 = \frac{2}{11} k \quad \bar{\lambda} = \frac{12}{11} k$$

$$\bar{y}_1 = \frac{k}{30\alpha} \quad \bar{y}_2 = \frac{4k}{30\alpha} \quad \bar{y}_3 = \frac{9k}{30\alpha} \quad \bar{y}_4 = \frac{16k}{30\alpha}$$

Chapitre III

CAS OU LES FONCTIONS COUTS ET PROFITS SONT QUELCONQUES

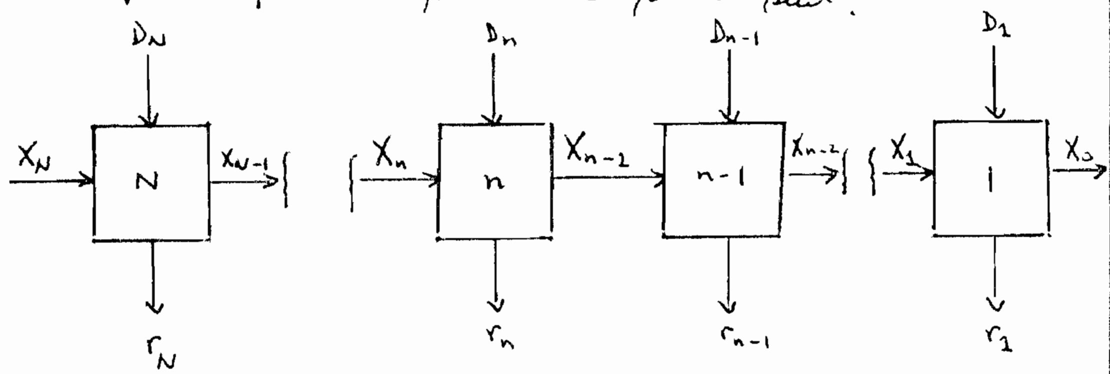
1 - Exposé sur la technique de résolution

Jusqu'à present, nous n'avons étudié que des cas simples où on excluait les coûts fixes associés aux differents réservoirs. Il s'agit maintenant de résoudre le problème dans le cas le plus général. Et pour se faire, on va utiliser la programmation dynamique qui est une approche plutôt qu'une technique pour resoudre des problèmes d'optimisation
La programmation dynamique opère par phases ou séquences.
Le point de départ de cette méthode est le théorème d'optimalité de Bellman qui peut s'enoncer comme suit:
" Une politique optimale ne peut être formée que de sous politiques optimales".
Pour résoudre notre problème, nous allons utiliser le systeme "multi-stages" qui consiste en ceci:
Partant d'un problème complexe, on décompose ce dernier en une serie de petits problèmes et ensuite on

combine les résultats des différents petits problèmes afin d'obtenir la solution du problème en entier.

Une série de systèmes multi-stages consiste en une série d'étages liés entre eux (en série), de telle sorte que l'entrée de l'un (input) devient la sortie de l'autre (output)

Ce système peut être schématisé comme suit :



X_N : état initial du système

X_n : état du système (initial) à l'étape n

r_n : mesure de performance (appelé retour) à l'étape n

D_n : décision que l'on prend à l'étape n. Elle est appelée une politique ou une stratégie.

Une politique est optimale si elle optimise l'objectif global.

2. <u>CAS DES COUTS DONNES SOUS FORME DE TABLEAU</u>

2-1 <u>Problème n° 1</u>, minimisation des coûts.

Nous considérons ici le cas de trois réservoirs X, Y, Z dont les coûts en fonction de la capacité d'emmagasinage sont donnés par les tableaux ci dessous. les valeurs qui sont dans ces tableaux ont été tirées d'une étude faite par J. Kuiper (voir bibliographie)

Réservoir Z

Z	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$h(z)$	0	0.5	0.75	1.1	1.5	2	2.5	3.3	4

Réservoir Y

Y	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$g(y)$	0	1.25	1.6	2.1	2.5	2.75	3.25	3.6	4

Réservoir X

X	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(x)$	0	0.60	0.75	0.80	1.20	1.35	1.75	2.20	2.80

$f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ sont les fonctions coûts associés aux différents réservoirs. Elles constituent ici les retours ; X, Y, Z doivent être multipliés par $10^8\,m^3$ tandis que $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ doivent être multipliés par $\$10^6$ pour que ces tableaux aient un sens physique.

La capacité maximale de chaque réservoir est égale à $4 \times 10^8\,m^3$

La capacité totale maximale donc est égale à $12 \times 10^8 \, m^3$
Soit k la variable qui décrit la capacité totale à allouer aux réservoirs. Nous allons essayer d'étudier, suivant les valeurs de k, quel projet de réservoir faudra-t-il développer et ensuite tracer le graphe qui nous permettra de choisir pour une capacité donnée, quel projet de réservoir faudra-t-il développer.

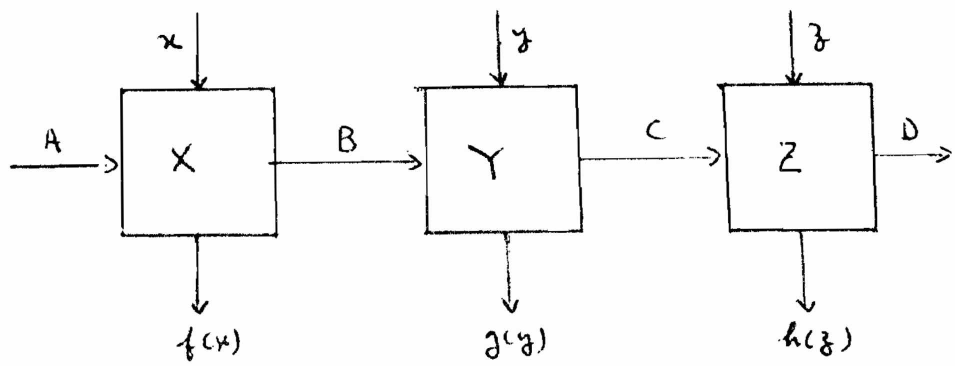
2-1-1 <u>Formulation mathématique du problème</u>

Le problème peut être écrit mathématiquement sous la forme suivante

$$\text{Min } f(x) + g(y) + h(z)$$
$$x + y + z = k$$
$$x \leq 4 \qquad (10^8 \, m^3)$$
$$y \leq 4 \qquad (10^8 \, m^3)$$
$$z \leq 4 \qquad (10^8 \, m^3)$$

2-1-2 <u>Résolution du problème</u>

Le problème peut être schematisé comme suit :



Posons $A = k$

$B = k - x$

$C = B - y$

$D = C - z = 0$

$D = 0$ car la capacité k doit être répartie entre les trois réservoirs.

$D = 0 \Rightarrow z^* = C$

Dans un premier temps on cherche le retour minimal correspondant à l'étape z c'est à dire $f_z(C)$, dans un deuxième temps on cherchera le retour minimal correspondant aux étapes Y, Z c'est à dire $f_y(B) = \min_y [g(y) + f_z(C)]$ et dans un troisième temps on cherchera le retour minimal correspondant aux étapes X, Y, Z c'est à dire $f_x(A) = \min_x [f(x) + f_y(B)]$

① Calcul de $f_z(C)$

C	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f_z(C)$	0	0.50	0.75	1.1	1.5	2	2.5	3.3	4

② Calcul de $f_y(B)$

$$f_y(B) = \min_y [g(y) + f_z(C)]$$

Les valeurs marquées par un asterix seront les valeurs prises par $f_y(B)$; les valeurs des variables correspondantes sont également marquées par un asterix.

B	y	C	$f_y(B) = g(y) + f_z(C)$
0	0*	0*	0 + 0 = 0*
0.5	0*	0.5*	0 + 0,50 = 0,50*
	0.5	0	1,25 + 0 = 1 25
1	0*	1*	0 + 0.75 = 0.75*
	0.5	0.5	1 25 + 0.50 = 1.75
	1	0	1.6 + 0 = 1.6
1.5	0*	1.5*	0 + 1.1 = 1.1*
	0.5	1	1 25 + 0,75 = 2
	1	0.5	1 60 + 0.50 = 2.1
	1.5	0	2,1 + 0 = 2.1
2	0*	2*	0 + 1,5 = 1,50*
	0.5	1.5	1,25 + 1.1 = 2,35
	1	1	1.60 + 0.75 = 2,35
	1.5	0.5	2,1 + 0,50 = 2,60
	2	0	2,5 + 0 = 2,50
2.5	0*	2.5*	0 + 2 = 2*
	0.5	2	1.25 + 1.5 = 2,75
	1	1.5	1,60 + 1.1 = 2,70
	1.5	1	2,1 + 0.75 = 2,85
	2	0.5	2,5 + 0,5 = 3
	2.5	0	2,75 + 0 = 2,75

B	y	C	$g(y) + f_2(C) = f_3(B)$
3	0*	3*	0 + 2.5 = 2.5*
	0.5	2.5	1.25 + 2 = 3.25
	1	2	1.6 + 1.5 = 3,10
	1.5	1.5	2,1 + 1.1 = 3,20
	2	1	2.5 + 0.75 = 3.25
	2.5	0.5	2.75 + 0.5 = 3.25
	3	0	3.25 + 0 = 3.25
3.5	0*	3.5*	0 + 3.3 = 3.3*
	0.5	3	1.25 + 2.5 = 3.75
	1	2.5	1.60 + 2 = 3,60
	1.5	2	2.1 + 1.5 = 3,60
	2	1.5	2.5 + 1.1 = 3.60
	2.5	1	2.75 + 0.75 = 3.50
	3	0.5	3.25 + 0.50 = 3.75
	3.5	0	3.60 + 0 = 3.60
4	0	4	0 + 4 = 4
	0.5	3.5	1.25 + 3.3 = 4.55
	1	3	1.6 + 2.5 = 4,10
	1.5	2.5	2,1 + 2 = 4,10
	2	2	2.5 + 1.5 = 4
	2.5*	1.5*	2.75 + 1.1 = 3.85*

B	y	C	$g(y) + f_3(C) = f_4(B)$
4	3	1	3.25 + 0.75 = 4
	3.5	0.5	3.60 + 0.5 = 4.10
	4	1	4 + 0 = 4
4.5	0.5	4	1.25 + 4 = 5.25
	1	3.5	1.60 + 3.30 = 4.90
	1.5	3	2.1 + 2.5 = 4.60
	2	2.5	2.5 + 2 = 4.50
	2.5*	2*	2.75 + 1.5 = 4.25*
	3	1.5	3.25 + 1.1 = 4.35
	3.5	1	3.60 + 0.75 = 4.35
	4	0.5	4 + 0.50 = 4.50
5	1	4	1.6 + 4 = 5.60
	1.5	3.5	2.1 + 3.3 = 5.40
	2	3	2.5 + 2.5 = 5.00
	2.5	2.5	2.75 + 2 = 4.75
	3	2	3.25 + 1.5 = 4.75
	3.5*	1.5*	3.60 + 1.1 = 4.70*
	4	1	4 + 0.75 = 4.75
5.5	1.5	4	2.1 + 4 = 6.1
	2	3.5	2.5 + 3.3 = 5.80
	2.5	3	2.75 + 2.5 = 5.25

B	y	c	$g(y) + f_3(c) = f_4(B)$
5.5	3	2.5	3.25 + 2 = 5.25
	3.5*	2*	3.60 + 1.50 = 5.10*
	4*	1.5*	4 + 1.1 = 5.10*
6	2	4	2.5 + 4 = 6.50
	2.5	3.5	2.75 + 3.3 = 6.05
	3	3	3.25 + 2.5 = 5.75
	3.5	2.5	3.60 + 2.0 = 5.60
	4*	2*	4 + 1.5 = 5.5*
6.5	2.5	4	2.75 + 4 = 6.75
	3.0	3.5	3.25 + 3.3 = 6.55
	3.5	3	3.6 + 2.5 = 6.10
	4*	2.5*	4 + 2 = 6*
7	3	4	3.25 + 4 = 7.25
	3.5	3.5	3.6 + 3.3 = 6.90
	4*	3*	4 + 2.5 = 6.50*
7.5	3.5	4	3.25 + 4 = 7.25*
	4	3.5	4 + 3.3 = 7.30
8	4*	4*	4 + 4 = 8*

(3) <u>Calcul de</u> $f_x(A) = f_x(k)$

$$f_x(k) = \min_x \left[f(x) + f_y(B) \right]$$

Les valeurs marquées par un asterix seront les valeurs prises par $f_x(k)$, ainsi que les valeurs des variables correspondantes.

k	x	B	$f_x(k) = f(x) + f_y(B)$
0	0^*	0	$0 + 0 = 0^*$
1	0^*	1	$0 + 0.75 = 0.75^*$
	0.5	0.5	$0,60 + 0.50 = 1.10$
	1^*	0	$0.75 + 0 = 0.75^*$
2	0	2	$0 + 1.50 = 1.50$
	0.5	1.5	$0.60 + 1.1 = 1.70$
	1	1	$0.75 + 0.75 = 1.50$
	1.5	0.5	$0.80 + 0.50 = 1.30$
	2^*	0	$1,20 + 0 = 1.20^*$
3	0	3	$0 + 2,50 = 2,50$
	0.5	2.5	$0.60 + 2 = 2,60$
	1	2	$0.75 + 1.50 = 2.25$
	1.5	1.5	$0.80 + 1.1 = 1.80$
	2	1	$1.20 + 0.75 = 1.95$
	2.5	0.5	$1.35 + 0.50 = 1.85$
	3^*	0	$1.75 + 0 = 1.75^*$

k	x	B	$f_x(k) = f(x) + f_y(B)$
4	0	4	0 + 3.85 = 3.85
	0.5	3.5	0.60 + 3.30 = 3.90
	1	3	0.75 + 2.50 = 3.25
	1.5	2.5	0.80 + 2 = 2.80
	2	2	1.20 + 1.50 = 2.70
	2.5*	1.5	1.35 + 1.1 = 2.45*
	3	1	1.75 + 0.75 = 2.50
	3.5	0.5	2.20 + 0.50 = 2.70
	4	0	2.80 + 0 = 2.80
5	0	5	0 + 4.70 = 4.70
	0.5	4.5	0.60 + 4.25 = 4.85
	1	4	0.75 + 3.85 = 4.60
	1.5	3.5	0.80 + 3.30 = 4.10
	2	3	1.20 + 2.50 = 3.70
	2.5	2.5	1.35 + 2 = 3.35
	3*	2	1.75 + 1.50 = 3.25*
	3.5	1.5	2.20 + 1.1 = 3.30
	4	1	2.80 + 0.75 = 3.55
6	0	6	0 + 5.50 = 5.50
	0.5	5.5	0.60 + 5.10 = 5.70
	1	5	0.75 + 4.70 = 5.45

k	x	B	$f_x(k) = f(x) + f_y(B)$
6	1.5	4.5	0.80 + 4.25 = 5.05
	2	4	1.20 + 3.85 = 5.05
	2.5	3.5	1.35 + 3.30 = 4.65
	3	3	1.75 + 2.50 = 4.25
	3.5*	2.5	2.20 + 2,00 = 4,20*
	4	2	2,80 + 1.50 = 4,30
7	0	7	0 + 6.50 = 6.50
	0.5	6.5	0.60 + 6 = 6.60
	1	6	0.75 + 5.50 = 6.25
	1.5	5.5	0.80 + 5.10 = 5.90
	2	5	1.20 + 4.90 = 5.90
	2.5	4.5	1.35 + 4.25 = 5.60
	3	4	1.75 + 3.85 = 5.60
	3.5	3.5	2.20 + 3.30 = 5.50
	4*	3	2.80 + 2.50 = 5,30*
8	0	8	0 + 8 = 8
	0.5	7.5	0.60 + 7.25 = 7.85
	1	7	0.75 + 6.50 = 7.25
	1.5	6.5	0.80 + 6 = 6.80
	2	6	1.20 + 5.50 = 6.70
	2.5*	5.5	1.35 + 5,10 = 6.45*

k	x	B	$f_x(k) - f(x) + f_y(B)$
7	3	5	1.75 + 3.85 = 5.60
	3.5	4.5	2.20 + 3.30 = 5.50
	4*	4	2.80 + 2.50 = 5.30*
8	0	8	0 + 8 = 8
	0.5	7.5	0.60 + 7.25 = 7.85
	1	7	0.75 + 6.50 = 7.25
	1.5	6.5	0.80 + 6 = 6.80
	2	6	1.20 + 5.50 = 6.70
	2.5*	5.5	1.35 + 5.10 = 6.45*
	3*	5	1.75 + 4.70 = 6.45*
	3.5*	4.5	2.20 + 4.25 = 6.45*
	4	4	2.80 + 3.85 = 6.65
9	1	8	0.75 + 8 = 8.75
	1.5	7.5	0.80 + 7.25 = 8.05
	2	7	1.20 + 6.50 = 7.70
	2.5	6.5	1.35 + 6 = 7.35
	3*	6	1.75 + 5.50 = 7.25*
	3.5	5.5	2.20 + 5.10 = 7.30
	4	5	2.80 + 4.70 = 7.50

k	x	B	$f_x(k) = f(x) + f_y(B)$
10	2	8	1,20 + 8 = 9,20
	2.5	7.5	1.35 + 7.25 = 8.60
	3	7	1.75 + 6.50 = 8.25
	3.5*	6.5	2.20 + 6 = 8.20*
	4	6	2.80 + 5.50 = 8.30
11	3	8	1.75 + 8 = 9.75
	3.5	7.5	2.20 + 7.25 = 9.45
	4*	7	2.80 + 6.50 = 9.30*
12	4*	8	2,80 + 8 = 10.80*

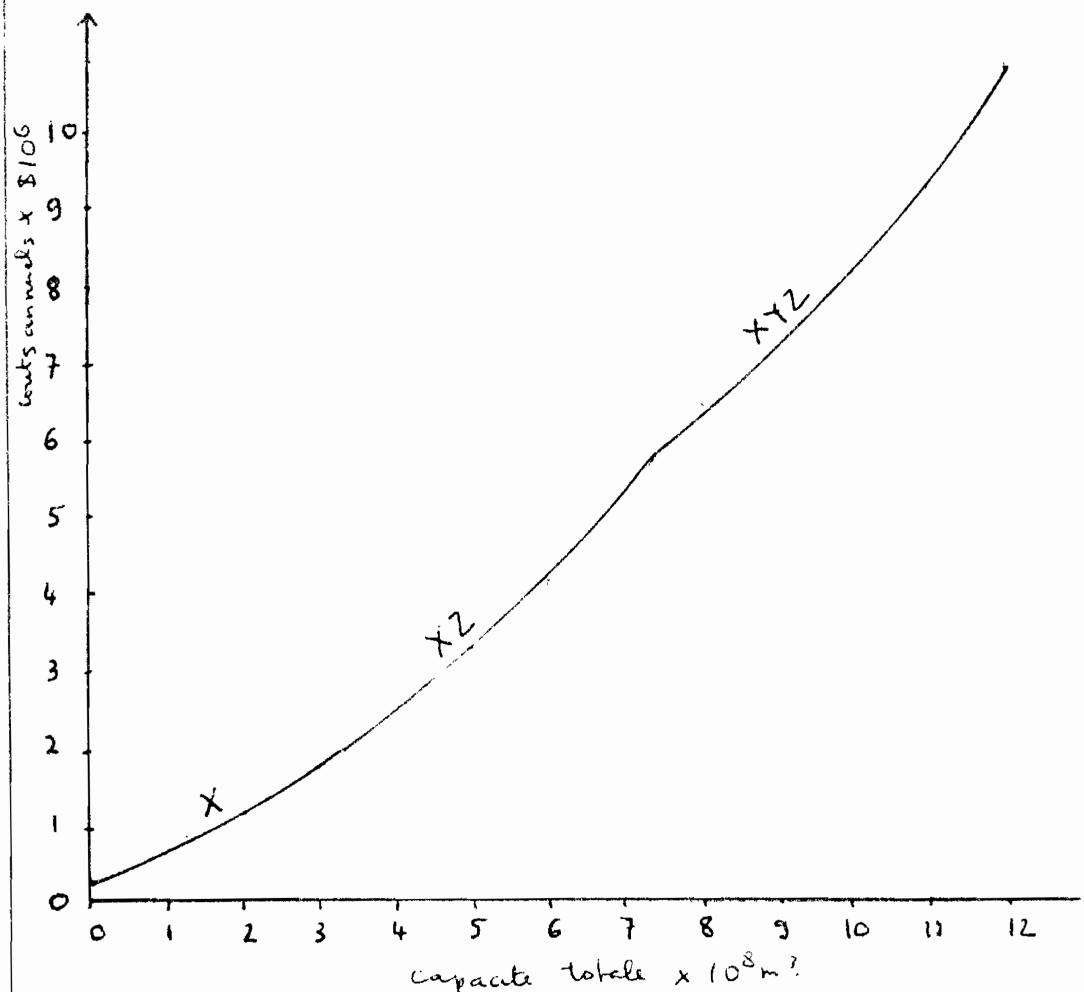
TABLEAU DES RESULTATS

k	x	y	z	coût
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0.75
	0	0	1	0.75
2	2	0	0	1.20
3	3	0	0	1.75
4	2.5	0	1.5	2.45
5	3	0	2	3.25
6	3.5	0	2.5	4.20
7	4	0	3	5.30
8	2.5	3.5 4	2 1.5	6.45
	3	3.5	1.5	6.45
	3.5	2.5	2	6.45
9	3	4	2	7.25
10	3.5	4	2.5	8.20
11	4	4	3	9.30
12	4	4	4	10.80

COURBES DU COUT MINIMUM TOTAL

POUR LES RESERVOIRS X, Y, Z

COURBE NO I



Cette courbe nous permet de déterminer, directement, connaissant la capacité k à allouer aux différents réservoirs quel(s) projet(s) de réservoirs faudra-t-il développer.

3 - CAS DES PROFITS DONNES SOUS FORME DE TABLEAU

3-1 Probleme n°2 : Maximisation des profits

On suppose qu'on a ici quatre projets : Irrigation I, Irrigation II, un projet d'alimentation en eau, une centrale hydro-electrique.
Numérotons les projets de 1 à 4. Soit 1 le projet Irrigation I, 2 le projet Irrigation II, 3 le projet Alimentation et 4 la centrale hydroelectrique.

Les profits en fonction du débit utilisé sont donnés par le tableau suivant. Les valeurs de ce tableau sont tirés d'une étude faite par J. Kuipers (System optimisation) (voir bibliographie)

$Y_{débit}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$P_1(Y_1)$	0	0	0	1.25	2.3	3.1	3.70	4.20	4.30	4.4	4.2	–	–
$P_2(Y_2)$	0	0.50	1.50	2.0	1.7	1	0						
$P_3(Y_3)$	0	1.9	2.5	2.7	2.9	3	3	3					
$P_4(Y_4)$	0	0	0	0	0	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5

$P_1(Y_1)$, $P_2(Y_2)$, $P_3(Y_3)$, $P_4(Y_4)$ sont les fonctions profits associées aux differents projets. Ils constituent ici les retours.
Les débits sont exprimés en m^3/s tandis que les bénéfices sont exprimés en $\$ 10^6$

Les revenus sont ici fonction des critères donnés dans le chapitre I paragraphe 2-1 les valeurs données dans le tableau ci dessus appelle de notre part quelques reflexions.

a) Irrigation I :

Il faut un débit minimal pour assurer une certaine rentabilité. Il n'est pas souhaitable de dépasser un débit maximal de 50 m^3/sec. Au delà de ce débit, l'eau ne peut plus être utilisée convenablement.

b) Irrigation II

Il faut également ici un débit minimal et maximal.

c) Alimentation

les revenus sont importants même pour des débits très faibles. Lorsque le débit augmente les bénéfices tendent à plafonner.

d) Hydroelectrique :

les revenus augmentent régulierement à partir d'un débit de base de 50 m^3/sec.

N.B : L'eau utilisée dans un projet ne peut être utilisée dans un autre projet.

3-1-1 Formulation mathématique du problème

le problème est donc le suivant :

$$\text{Max } f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) + f_4(y_4)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = k$$

$$0 \leq y_1 \leq 100$$

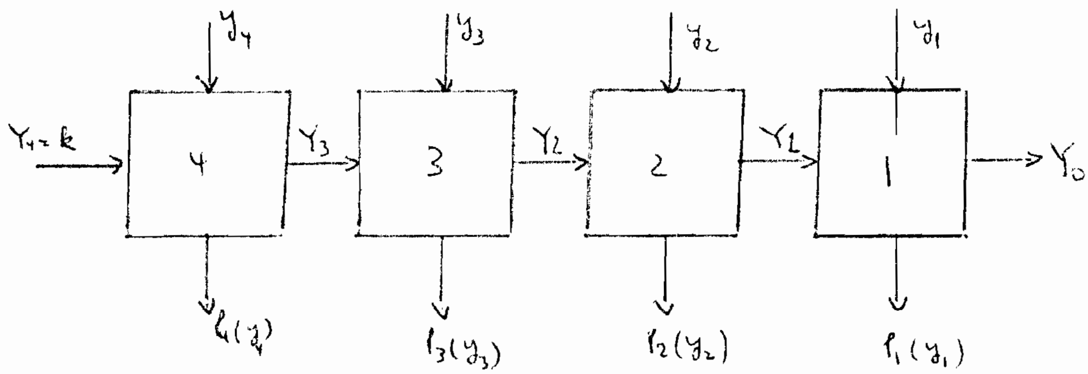
$$0 \leq y_2 \leq 50$$

$$0 \leq y_3 \leq 70$$

$$0 \leq y_4 \leq 120$$

3-1-3 Résolution du problème

On utilise la même méthode de calcul que pour le problème précédent c'est à dire la programmation dynamique. Dès lors notre problème peut se schématiser comme suit :



$$Y_3 = Y_4 - y_4$$

$$Y_2 = Y_3 - y_3$$

$$Y_1 = Y_2 - y_2$$

$$Y_0 = Y_1 - y_1 = 0$$

$Y_0 = 0$ car la capacité k doit être répartie entre les quatre projets.

$$Y_0 = 0 \Rightarrow y_1^* = Y_1$$

Dans un premier temps, on cherchera le retour maximal correspondant à l'étape 1, dans un second temps on cherchera le retour maximal correspondant aux étapes 1 et 2, Dans un troisième temps, on cherchera le retour maximal correspondant aux étapes 1, 2, 3 et enfin dans un quatrième temps, on cherchera le retour maximal correspondant aux étapes 1, 2, 3, 4.

(1) Calcul de $f_1(Y_1)$

Y_1	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f_1(y_1)$	0	0	0	1.25	2.3	3.1	3.7	4.2	4.3	4.4	4.2

(2) Calcul de $f_2(Y_2)$

$$f_2(Y_2) = \max_{y_2} \left[f_2(y_2) + f_1(Y_1) \right]$$

les valeurs marquées par un astérix seront les valeurs prises par $f_2(Y_2)$

Y_2	y_2	Y_1	$f_2(y_2) + f_1(Y_1) = f_2(Y_2)$
150	50*	100	1 + 4.2 = 5.2*
140	50	90	1 + 4.4 = 5.4
	40*	100	1.7 + 4.2 = 5.9*
130	50	80	1 + 4.3 = 5.3
	40	90	1.7 + 4.4 = 6.1
	30*	100	2.00 + 4.2 = 6.2*
120	50	70	1 + 4.2 - 5.2
	40	80	1.7 + 4.3 = 6.0
	30*	90	2 + 4.4 = 6.4*

Y_2	y_2	Y_1	$f_2(y_2) + f_1(Y_1) = f_2(Y_2)$
120	20	100	$1.5 + 4.2 = 5.7$
	50	60	$1 + 3.7 = 4.7$
	40	70	$1.7 + 4.2 = 5.9$
110	30*	80	$2 + 4.3 = 6.3$*
	20	90	$1.5 + 4.4 = 5.9$
	10	100	$0.5 + 4.2 = 4.7$
	50	50	$1 + 3.1 = 4.1$
	40	60	$1.7 + 3.7 = 5.4$
100	30*	70	$2 + 4.2 = 6.2$*
	20	80	$1.5 + 4.3 = 5.8$
	10	90	$0.5 + 4.4 = 4.9$
	0	100	$0 + 4.2 = 4.2$
	50	40	$1 + 2.3 = 3.3$
	40	50	$1.7 + 3.1 = 4.8$
90	30*	60	$2 + 3.7 = 5.7$*
	20*	70	$1.5 + 4.2 = 5.7$*
	10	80	$0.5 + 4.3 = 4.8$
	0	90	$0 + 4.4 = 4.4$
	50	30	$1 + 1.25 = 2.25$
80	40	40	$1.7 + 2.3 = 4$
	30	50	$2 + 3.1 = 5.1$

Y_2	y_2	Y_1	$r_2(y_2) + f_1(Y_1) = f_2(Y_2)$
80	20*	60	1.5 + 3.7 = 5.2*
	10	70	0.5 + 4.2 = 4.7
	0	80	0 + 4.3 = 4.3
70	50	20	1 + 0 = 1
	40	30	1.7 + 1.25 = 2.95
	30	40	2 + 2.3 = 4.3
	20*	50	1.5 + 3.1 = 4.6*
	10	60	0.5 + 3.7 = 4.2
	0	70	0 + 4.2 = 4.2
60	50	10	1 + 0 = 1
	40	20	1.7 + 0 = 1.7
	30	30	2 + 1.25 = 3.25
	20*	40	1.5 + 2.3 = 3.8*
	10	50	0.5 + 3.1 = 3.6
	0	60	0 + 3.7 = 3.7
50	50	0	1 + 0 = 1
	40	10	1.7 + 0 = 1.7
	30	20	2 + 0 = 2
	20	30	1.5 + 1.25 = 2.75
	10	40	0.5 + 2.3 = 2.80
	0*	50	0 + 3.1 = 3.1*

Y_2	y_2	Y_1	$f_2(y_2) + f_1(Y_1) = f_2(Y_2)$
40	40	0	$1.7 + 0 = 1.7$
	30	10	$2 + 0 = 2$
	20	20	$1.5 + 0 = 1.50$
	10	30	$0.5 + 1.25 = 1.75$
	0^*	40	$0 + 2.3 = 2.3^*$.
30	30^*	0	$2 + 0 = 2^*$
	20	10	$1.5 + 0 = 1.5$
	10	20	$0.5 + 0 = 0.5$
	0	30	$0 + 1.25 = 1.25$
20	20^*	0	$1.5 + 0 = 1.5^*$
	10	10	$0.5 + 0 = 0.5$
	0	20	$0 + 0 = 0$
10	10^*	0	$0.5 + 0 = 0.5^*$
	0	10	$0 + 0 = 0$
0	0^*	0	$0 + 0 = 0^*$

③ Calcul de $f_3(Y_3)$

$$f_3(Y_3) = \max_{y_3} \left[f_3(y_3) + f_2(Y_2) \right]$$

Les valeurs marquées par un asterix seront les valeurs prises par $f_3(Y_3)$ aussi que les valeurs des variables correspondantes

Y_3	y_3	Y_2	$f_3(y_3) + f_2(Y_2) = F_3(Y_3)$
160	10	150	$1.9 + 5.2 = 7.1$
	20	140	$2.5 + 5.9 = 8.4$
	30	130	$2.7 + 6.2 = 8.9$
	40*	120	$2.9 + 6.4 = 9.3^*$
	50*	110	$3 + 6.3 = 9.3^*$
	60	100	$3 + 6.2 = 9.2$
	70	90	$3 + 5.7 = 8.7$
150	0	150	$0 + 5.2 = 5.2$
	10	140	$1.9 + 5.9 = 7.8$
	20	130	$2.5 + 6.2 = 8.7$
	30	120	$2.7 + 6.4 = 9.1$
	40*	110	$2.9 + 6.3 = 9.2^*$
	50*	100	$3 + 6.2 = 9.2^*$
	60	90	$3 + 5.7 = 8.7$
	70	80	$3 + 5.2 = 8.2$
140	0	140	$0 + 5.9 = 5.9$
	10	130	$1.9 + 6.2 = 8.1$
	20	120	$2.5 + 6.4 = 8.9$
	30	110	$2.7 + 6.3 = 9.0$
	40*	100	$2.9 + 6.2 = 9.1^*$
	50	90	$3 + 5.7 = 8.7$

Y_3	y_3	Y_2	$f_3(y_3) + f_2(Y_2) = f_3(Y_3)$
140	60	80	3 + 5.2 = 8.2
	70	70	3 + 4.6 = 7 6
130	0	130	0 + 6.2 = 6.2
	10	120	1.9 + 6.4 = 8.3
	20	110	2.5 + 6.3 = 8 3
	30*	100	2.7 + 6.2 = 8.9*
	40	90	2.9 + 5.7 = 8.6
	50	80	3 + 5.2 = 8.2
	60	70	3 + 4.6 = 7.6
	70	60	3 + 3 8 = 6.8
120	0	120	0 + 6.4 = 6.4
	10	110	1 9 + 6.3 = 8.2
	20*	100	2.5 + 6.2 = 8.7*
	30	90	2.7 + 5.7 = 8.4
	40	80	2.9 + 5.2 = 8.1
	50	70	3 + 4.6 = 7.6
	60	60	3 + 3.8 = 6.8
	70	50	3 + 3.1 = 6.1
110	0	110	0 + 6.3 = 6.3
	10	100	19 + 62 = 8.1
	20*	90	2.5 + 5.7 = 8.2*

Y_3	y_3	Y_2	$P_3(y_3) + f_2(Y_2) = f_3(Y_3)$
110	30	80	2.7 + 5.2 = 7.9
	40	70	2.9 + 4.6 = 7.5
	50	60	3 + 3.8 = 6.8
	60	50	3 + 3.1 = 6.1
	70	40	3 + 2.3 = 5.3
100	0	100	0 + 6.2 = 6.2
	10	90	1.9 + 5.7 = 7.6
	20*	80	2.5 + 5.2 = 7.7*
	30	70	2.7 + 4.6 = 7.3
	40	60	2.9 + 3.8 = 6.7
	50	50	3 + 3.1 = 6.1
	60	40	3 + 2.3 = 5.3
	70	30	3 + 2 = 5
90	0	90	0 + 5.7 = 5.7
	10*	80	1.9 + 5.2 = 7.1*
	20*	70	2.5 + 4.6 = 7.1*
	30	60	2.7 + 3.8 = 6.5
	40	50	2.9 + 3.1 = 6
	50	40	3 + 2.3 = 5.3
	60	30	3 + 2 = 5
	70	20	3 + 1.5 = 4.5

Y_3	y_3	Y_2	$f_3(y_3)+f_2(Y_2)=f_3(Y_3)$
80	0	80	$0+5.2=5.2$
	10*	70	$1.9+4.6=6.5^*$
	20	60	$2.5+3.8=6.3$
	30	50	$2.7+3.1=5.8$
	40	40	$2.9+2.3=5.2$
	50	30	$3+2=5$
	60	20	$3+1.5=4.5$
	70	10	$3+0.5=3.5$
70	0	70	$0+4.6=4.6$
	10*	60	$1.9+3.8=5.7^*$
	20	50	$2.5+3.1=5.6$
	30	40	$2.7+2.3=5{,}0$
	40	30	$2.9+2=4.9$
	50	20	$3+1.5=4.5$
	60	10	$3+0.5=3.5$
	70	0	$3+0=3$
60	0	60	$0+3.8=3.8$
	10*	50	$1.9+3.1=5^*$
	20	40	$2.5+2.3\quad 4.8$
	30	30	$2.7+2=4.7$
	40	20	$2{,}9+1.5=4.4$

Y_3	y_3	Y_2	$f_3(y_3) + f_2(Y_2) = f_3(Y_3)$
60	50	10	$3 + 0.5 = 3.5$
	60	0	$3 + 0 = 3$
50	0	50	$0 + 3.1 = 3.1$
	10	40	$1.9 + 2.3 = 4.2$
	20*	30	$2.5 + 2 = 4.5^*$
	30	20	$2.7 + 1.5 = 4.2$
	40	10	$2.9 + 0.5 = 3.4$
	50	0	$3 + 0 = 3$
40	0	40	$0 + 2.3 = 2.3$
	10	30	$1.9 + 2 = 3.1$
	20*	20	$2.5 + 1.5 = 4.0^*$
	30	10	$2.7 + 0.5 = 3.2$
	40	0	$2.9 + 0 = 2.9$
30	0	30	$0 + 2 = 2$
	10*	20	$1.9 + 1.5 = 3.4^*$
	20	10	$2.5 + 0.5 = 3$
	30	0	$2.7 + 0 = 2.7$
20	0	20	$0 + 1.5 = 1.5$
	10	10	$1.9 + 0.5 = 2.4$
	20*	0	$2.5 + 0 = 2.5^*$

Y_3	y_3	Y_2	$f_3(y_3) + f_2(Y_2) = f_3(Y_3)$
10	0	10	$0 + 0.5 = 0.5$
	10^*	0	$1.9 + 0 = 1.9^*$
0	0	0	$0 + 0 = 0^*$

④ Calcul de $f_4(Y_4)$

$$f_4(Y_4) = \max_{y_4}\left[f_4(y_4) + f_3(Y_3)\right]$$

Y_4	y_4	Y_3	$f_4(y_4) + f_3(Y_3) = f_4(Y_4)$
	0^*	160	$0 + 9.3 = 9.3^*$
	10	150	$0 + 9.2 = 9.2$
	20	140	$0 + 9.1 = 9.1$
	30	130	$0 + 8.9 = 8.9$
	40	120	$0 + 8.7 = 8.7$
	50	110	$0 + 8.2 = 8.2$
	60	100	$0.5 + 7.7 = 8.2$
	70	90	$1 + 7.1 = 8.1$
	80	80	$1.5 + 6.5 = 8$
	90	70	$2 + 5.7 = 7.7$
	100	60	$2.5 + 5 = 7.5$
	110	50	$3 + 4.5 = 7.5$
	120	40	$3.5 + 4 = 7.5$

Y_4	y_4	Y_3	$f_4(y_4) + F_3(Y_3) = F_4(Y_4)$
150	0*	150	0 + 9.2 = 9.2*
	10	140	0 + 9.1 = 9.1
	20	130	0 + 8.9 = 8.9
	30	120	0 + 8.7 = 8.7
	40	110	0 + 8.2 = 8.2
	50	100	0 + 7.7 = 7.7
	60	90	0.5 + 7.1 = 7.6
	70	80	1 + 6.5 = 7.5
	80	70	1.5 + 5.7 = 7.2
	90	60	2 + 5 = 7
	100	50	2.5 + 5 = 7.5
	110	40	3 + 4 = 7
	120	30	3.5 + 3.4 = 6.9
140	0*	140	0 + 9.1 = 9.1*
	10	130	0 + 8.9 = 8.9
	20	120	0 + 8.7 = 8.7
	30	110	0 + 8.2 = 8.2
	40	100	0 + 7.7 = 7.7
	50	90	0 + 7.5 = 7.5
	60	80	0.5 + 6.5 = 7
	70	70	1 + 5.7 = 6.7

Y_4	y_4	Y_3	$p_4(y_4) + f_3(Y_3) = f_4(Y_4)$
130	0*	130	0 + 8.9 = 8.9*
	10	120	0 + 8.7 = 8.7
	20	110	0 + 8.2 = 8.2
	30	100	0 + 7.7 = 7.7
	40	90	0 + 7.1 = 7.1
	50	80	0 + 6.5 = 6.5
	60	70	0.5 + 5.7 = 6.2
	70	60	1 + 5 = 6.0
	80	50	1.5 + 4.5 = 6.0
	90	40	2.0 + 4.0 = 6.0
	100	30	2.5 + 3.4 = 5.9
	110	20	3 + 2.5 = 5.5
	120	10	3.5 + 1.9 = 5.4
120	0*	120	0 + 8.7 = 8.7*
	10	110	0 + 8.2 = 8.2
	20	100	0 + 7.7 = 7.7
	30	90	0 + 7.1 = 7.1
	40	80	0 + 6.5 = 6.5
	50	70	0 + 5.7 = 5.7
	60	60	0.5 + 5 = 5.5
	70	50	1 + 4.5 = 5.5

Y_4	y_4	Y_3	$P_4(y_4) + f_3(Y_3) = f_4(Y_4)$
120	80	40	1.5 + 4 = 5.5
	90	30	2 + 3.4 = 5.4
	100	20	2.5 + 2.5 = 5.0
	110	10	3 + 1.5 = 4.5
	120	0	3.5 + 0 = 3.5
110	0*	110	0 + 8.2 = 8.2*
	10	100	0 + 7.7 = 7.7
	20	90	0 + 7.1 = 7.1
	30	80	0 + 6.5 = 6.5
	40	70	0 + 5.7 = 5.7
	50	60	0 + 5 = 5
	60	50	0.5 + 4.5 = 5
	70	40	1 + 4 = 5
	80	30	1.5 + 3 = 4.5
	90	20	2 + 2.5 = 4.5
	100	10	2.5 + 1.9 = 4.4
	110	0	3 + 0 = 3
100	0*	100	0 + 7.7 = 7.7*
	10	90	0 + 7.1 = 7.1
	20	80	0 + 6.5 = 6.5
	30	70	0 + 5.7 = 5.7

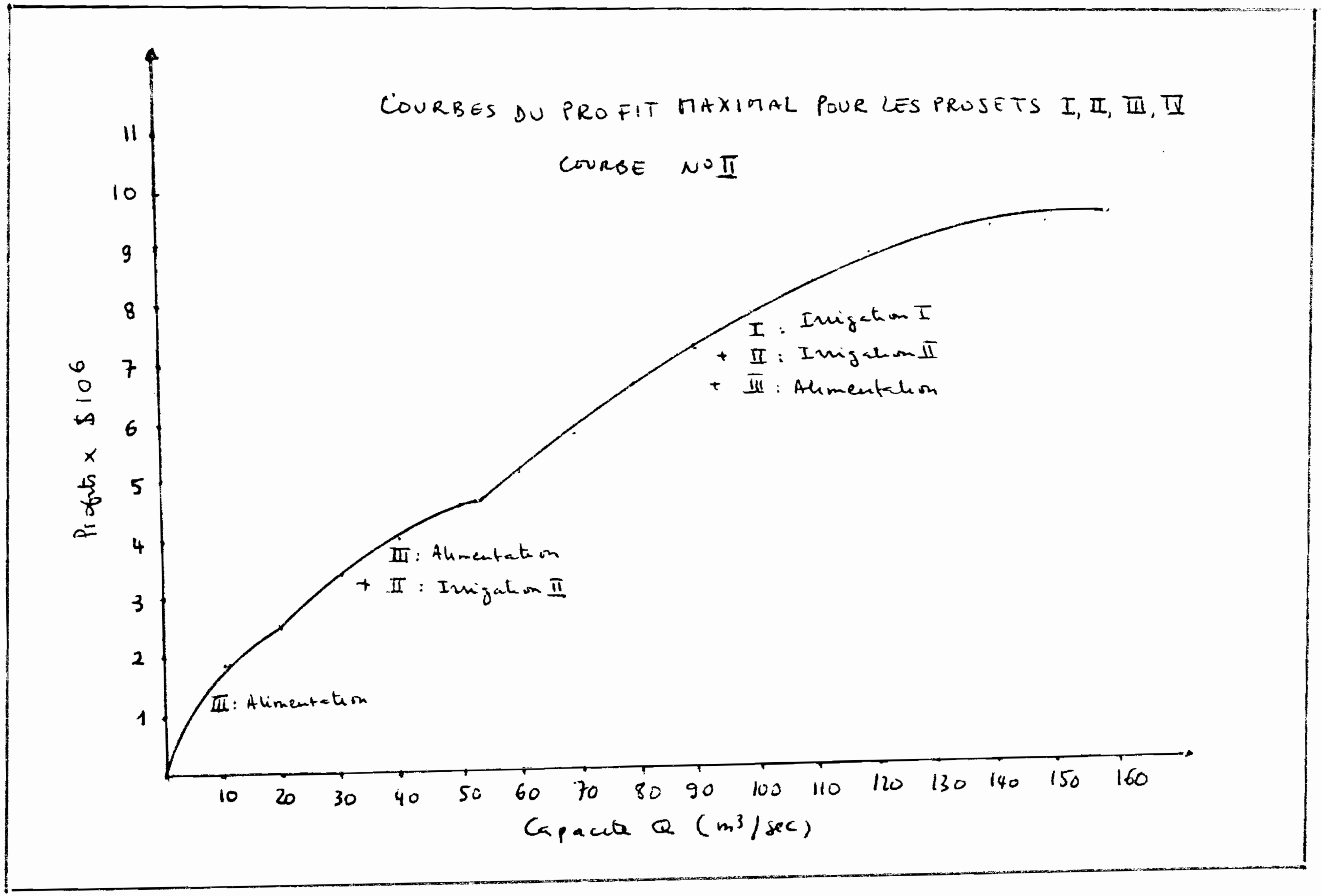
Y_4	y_4	Y_3	$f_4(y_4) + f_3(Y_3) = f_4(Y_4)$
100	40	60	0 + 5 = 5
	50	50	0 + 4.5 = 4.5
	60	40	0.5 + 4 = 4.5
	70	30	1 + 3.4 = 4.4
	80	20	1.5 + 2.5 = 4
	90	10	2 + 1.9 = 3.9
	100	0	2.5 + 0 = 2.5
90	0*	90	0 + 7.1 = 7.1*
	10	80	0 + 6.5 = 6.5
	20	70	0 + 5.7 = 5.7
	30	60	0 + 5 = 5
	40	50	0 + 4.5 = 4.5
	50	40	0 + 4 = 4
	60	30	0.5 + 3.4 = 3.9
	70	20	1 + 2.5 = 3.5
	80	10	1.5 + 1.9 = 3.4
	90	0	2 + 0 = 2
80	0*	80	0 + 6.5 = 6.5*
	10	70	0 + 5.7 = 5.7
	20	60	0 + 5 = 5
	30	50	0 + 4.5 = 4.5

Y_4	y_4	Y_3	$f_4(y_4) + f_3(Y_3) = f_4(Y_4)$
	40	40	$0 + 4 = 4$
	50	30	$0 + 3.4 = 3.4$
80	60	20	$0.5 + 2.5 = 3$
	70	10	$1 + 1.9 = 2.9$
	80	0	$1.5 + 0 = 1.5$
	0*	70	$0 + 5.7 = 5.7^*$
	10	60	$0 + 5 = 5$
	20	50	$0 + 4.5 = 4.5$
	30	40	$0 + 4 = 4$
70	40	30	$0 + 3.4 = 3.4$
	50	20	$0 + 2.5 = 2.5$
	60	10	$0.5 + 19 = 2.4$
	70	0	$1 + 0 = 1$
	0*	60	$0 + 5 = 5^*$
	10	50	$0 + 4.5 = 4.5$
	20	40	$0 + 4 = 4$
60	30	30	$0 + 3 = 3$
	40	20	$0 + 2.5 = 2.5$
	50	10	$0 + 1.9 = 1.9$
	60	0	$0.5 + 0 = 0.5$

Y_4	y_4	Y_3	$f_4(y_4) + f_3(Y_3) = f_4(Y_4)$
50	0*	50	0 + 4.5 = 4.5*
	10	40	0 + 4 = 4
	20	30	0 + 3.4 = 3.4
	30	20	0 + 2.5 = 2.5
	40	10	0 + 1.9 = 1.9
	50	0	0 + 0 = 0
40	0*	40	0 + 4 = 4*
	10	30	0 + 3.4 = 3.4
	20	20	0 + 2.5 = 2.5
	30	10	0 + 1.9 = 1.9
	40	0	0 + 0 = 0
30	0*	30	0 + 3.4 = 3.4*
	10	20	0 + 2.5 = 2.5
	20	10	0 + 1.9 = 1.9
	30	0	0 + 0 = 0
20	0*	20	0 + 2.5 = 2.5*
	10	10	0 + 1.9 = 1.9
	20	0	0 + 0 = 0
10	0*	10	0 + 1.9 = 1.9*
	10	0	0 + 0 = 0
0	0*	0	0 + 0 = 0*

TABLEAU DES RESULTATS

$Y_4 = k$	y_1	y_2	y_3	y_4	Profit
0	0	0	0	0	0
10	0	0	10	0	1.9
20	0	0	20	0	2.5
30	0	20	10	0	3.4
40	0	20	20	0	4
50	0	30	20	0	4.5
60	50	0	10	0	5.0
70	40	20	10	0	5.70
80	50	20	10	0	6.50
90	60	20	10	0	7.10
100	60	20	20	0	7.70
110	70	20	20	0	8.20
120	70	30	20	0	8.70
130	70	30	40	0	8.9
140	70	30	40	0	9.10
150	80	30	40	0	9.20
160	90	30	40	0	9.30


COURBES DU PROFIT MAXIMAL POUR LES PROJETS I, II, III, IV
COURBE NO II
Profits x $10^6
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
III : Alimentation
III : Alimentation
+ II : Irrigation II
I : Irrigation I
+ II : Irrigation II
+ III : Alimentation
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
Capacité Q (m3/sec)

4. Combinaison des coûts et profits : Cas general.

4-1 Problème General.

Il s'agit maintenant de combiner les revenus et les coûts afin d'obtenir le niveau de rendement optimum.
Pour se faire, il faudra connaître la correspondance qui existe entre le volume d'eau à allouer aux differents reservoirs et le débit à fournir aux differents projets.
Pour notre cas particulier, le tableau suivant nous donne la correspondance.

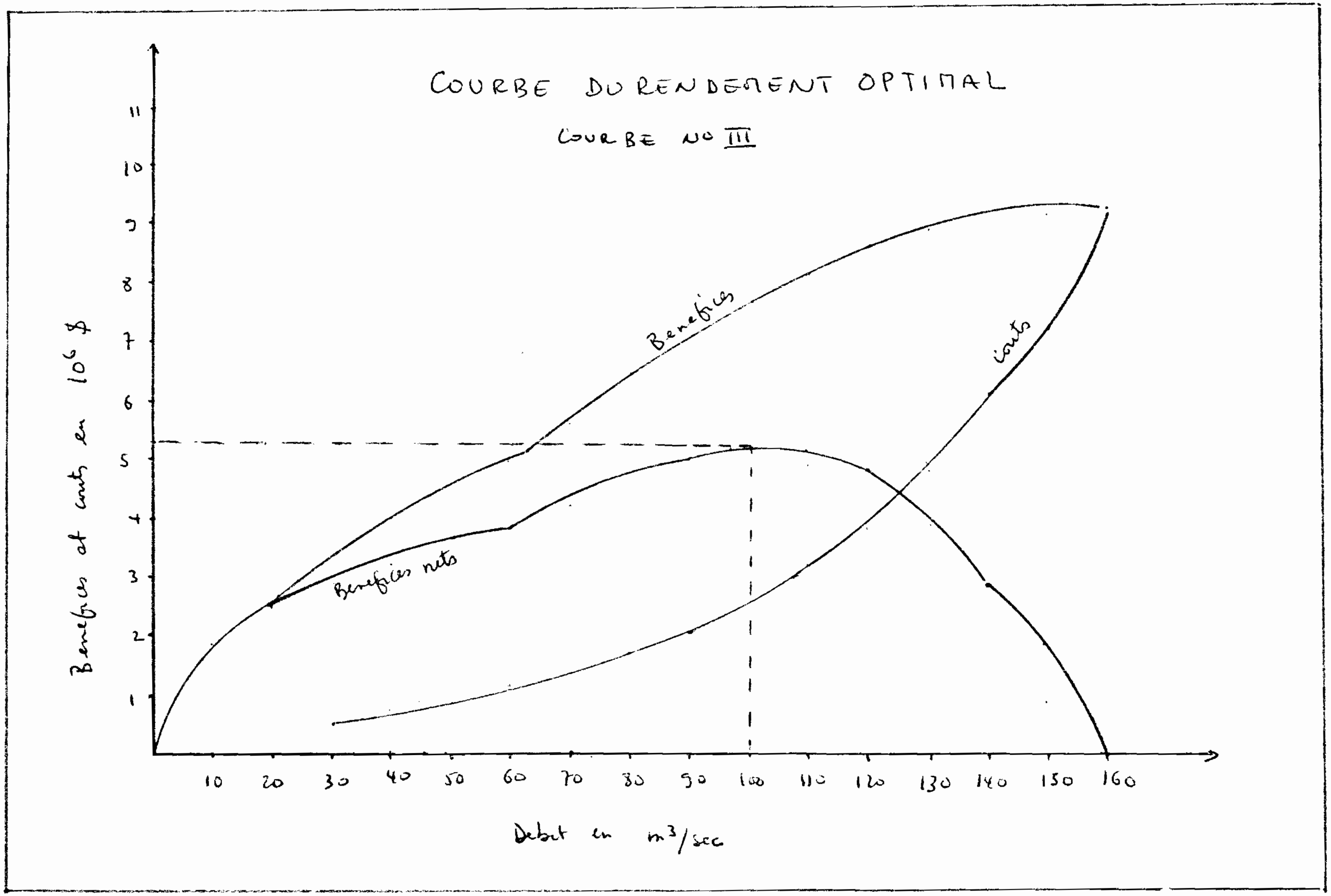
Volume ($\times 10^8 m^3$)	Debit (m^3/s)	Volume ($\times 10^8 m^3$)	Debit (m^3/s)
ε^*	20	4	100
0.5	30	5	110
1	40	5.7	120
1.5	50	6.8	130
2	60	7.8	140
2.5	70		
3	80	9	150
3.5	90	11	160

* ε : est une valeur très voisine de 0.

4-1-1 Détermination du bénéfice total net

Débit (m³/s)	Profit x $10^6	Volume 10^8 m³	Coût $10^6	Revenu total net $10^6
20	2.5	0	0	2.5
30	3.4	0.5	0.5	2.9
40	4	1	0.75	3.25
50	4.5	1.5	0.80	3.7
60	5	2	1.20	3.8
70	5.7	2.5	1.35	4.35
80	6.5	3	1.75	4.75
90	7.1	3.5	2.10	5
100	7.7	4	2.45	5.25
110	8.2	5	3.25	4.95
120	8.7	5.7	3.80	4.9
130	8.9	6.8	5	3.9
140	9.1	7.8	6.2	2.9
150	9.2	9	7.25	1.95
160	9.3	11	9.30	0

Remarque : le profit optimum est obtenu pour un débit égal à 100 m³/sec et est égal à $ 5,25 × 10⁶.


COURBE DU RENDEMENT OPTIMAL
COURBE NO III
Benefices et couts en 10^6 $
Benefices
Couts
Benefices nets
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160
Debit en m^3/sec

Chapitre IV

PARTIE INFORMATIQUE.

1 - MINIMISATION DES COUTS

Nous avons établi deux programmes qui sont tous valables pour le cas de trois reservoirs X, Y, Z. Le premier programme concerne la minimisation des coûts. Il est enregistré sur la cassette n° 19 du centre de calcul de L'EPT dans le fichier n° 3. Le deuxième programme nous donne la variation de la capacité d'emmagasinage en fonction du coût. Il est enregistré dans le fichier n° 7. Les données quant à elles sont enregistrées dans le fichier n° 4. Du fait que les données sont mises sur fichier, notre programme peut s'appliquer à n'importe quel projet de trois réservoirs. Il suffit simplement de changer les données qui sont dans le fichier.

Les seules données dont nous avons besoin sont les coûts associés à la capacité d'emmagasinage des différents réservoirs ainsi que les capacités maximales de chaque reservoir. Nous avons pour notre projets 9 coûts par réservoir

Les coûts correspondent ici aux capacités variant entre 0 et 4×10^8 m³ par incrément de 0.5×10^8 m³. 4×10^8 m³ étant la capacité maximale de chaque reservoir. Il est absolument necessaire pour notre programme que l'on ait le même nombre de données par réservoir. S'il y a un réservoir qui a un nombre de données moindre que les autres, on contourne le problème en complétant avec des zeros jusqu'à atteindre le même nombre de données que les autres reservoirs.

2 - MAXIMISATION DES PROFITS

Nous avons établi deux programmes qui sont tous valables pour le cas de quatre projets I, II, III, IV. Ils sont tous enregistrés sur la cassette n° 19 du centre de calcul de l'EPT. Le premier programme concerne la maximisation des profits. Il est enregistré dans le fichier n° 5. Le deuxième programme qui nous donne la variation du profit en fonction du débit est enregistré dans le fichier n° 8. Pour les deux programmes, les données sont enregistrées dans le fichier n° 6.

Les données dont nous avons besoin sont les profits associés au débit d'eau utilisé ainsi que les débits maximaux utilisables pour chaque projet. Les données sont au nombre de 13 par projet. Les profits obtenus correspondent à débits variant de zéro jusqu'à la capacité maximale de chaque projet par incrément de $10 m^3/sec$. Les observations qui ont été faites pour les deux premiers programmes demeurent valables pour ces deux derniers.

CONCLUSION

Les courbes de coûts et de profits sur lesquelles nous avons tiré nos données dans l'étude faite par J. Kuiper sont continues. Pour appliquer la méthode de la programmation dynamique, nous avons dû discretiser. Nous avons respectivement choisi des pas de $0.5 \times 10^8\ m^3$ pour les capacités et des pas de $10\ m^3/sec$ pour les débits. Il faut noter que plus le pas est petit, meilleure sera l'approximation.

La recherche opérationnelle n'est pas la seule méthode possible pour résoudre notre problème. Il existe d'autres techniques de résolution parmi lesquelles nous pouvons citer:

- La méthode de la comparaison des projets,

Par cette méthode, nous pouvons calculer la combinaison optimale des trois reservoirs en combinant deux reservoirs que l'on considère comme un seul reservoir que l'on va comparer avec le dernier qui reste.

- La méthode des coûts marginaux:

Le coût total sera minimal pour une combinaison de projets lorsque les coûts marginaux seront égaux.

L'avantage de la recherche opérationnelle sur ces deux dernières méthodes réside dans le fait que ces dernières sont très laborieuses. La méthode de la recherche opérationnelle quant à elle se prête bien à l'ordinateur et peut se généraliser à plusieurs projets -

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION TO DYNAMIC PROGRAMMING. NEMHAUSER

INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH HILLER ET LIEBERMAN

METHODES ET MODELES DE LA RECHERCHE OPERATIONNELLE TOME II A. KAUFMANN

NOTES DE COURS EAU 421, EPT 1980, PARTIE CONSACREE A L'ETUDE DE J. KUIPER SUR L'OPTIMISATION DES SYSTEMES R. DESJARDINS

ANNEXES

A1

```
0010 REM MINIMISATION DES COUTS
0020 REM X:CAPACITE DU RESERVOIR 1
0030 REM Y:CAPACITE DU RESERVOIR 2
0040 REM T:MATRICE COUT
0050 REM W:MATRICE DE LA CAPACITE MAXIMALE DES RESERVOIRS
0060 REM LES COUTS SONT DONNES EN $ 1E6
0070 REM LES CAPACITES SONT DONNES EN 1E8 METRES CUBES
0080 REM P:FONCTION COUT
0090 DIM T(3,9),W(3)
0100 PRINT 'COMBIEN Y-A-T-IL DE RESERVOIRS?'
0110 INPUT N1
0120 PRINT 'COMBIEN Y-A-T-IL DE COUTS PAR RESERVOIR?'
0130 INPUT J
0140 PRINT 'LES DONNEES SONT DANS QUEL FICHIER?'
0150 INPUT F1
0160 OPEN FL1,'E80',F1,IN
0170 FOR L=1 TO N1
0180 FOR K=1 TO J
0190 GET FL1,T(L,K)
0200 NEXT K
0210 NEXT L
0220 FOR I=1 TO N1
0230 GET FL1,W(I)
0240 NEXT I
0250 CLOSE FL1
0260 PRINT 'QUELLE EST LA CAPACITE A ALLOUER?'
0270 INPUT A
0280 P=99999
0290 IF A≥W(1) GOTO 0320
0300 V1=A
0310 GOTO 0330
0320 V1=W(1)
0330 FOR X=0 TO V1 STEP .5
0340 IF (A-X)≥W(2) GOTO 0370
0350 V2=A-X
0360 GOTO 0380
0370 V2=W(2)
0380 FOR Y=0 TO V2 STEP .5
```

```
0390 FOR Z=0 TO (A-(X+Y)) STEP .5
0400 IF (X+Y+Z)≠A|Z>W(3) GOTO 0470
0410 P1=T(1,2*X+1)+T(2,2*Y+1)+T(3,2*Z+1)
0420 IF P1>P GOTO 0470
0430 P=P1
0440 R1=X
0450 R2=Y
0460 R3=Z
0470 NEXT Z
0480 NEXT Y
0490 NEXT X
0500 PRINT USING FLP,0510,A
0510 :CAPACITE TOTALE A ALLOUER EGALE ##.##
0520 PRINT USING FLP,0530,P
0530 : COUT MINIMUM TOTAL EGAL        ##.##
0540 PRINT USING FLP,0550,R1
0550 :CAPACITE DU RESERVOIR 1 EGALE   ##.##
0560 PRINT USING FLP,0570,R2
0570 :CAPACITE DU RESERVOIR 2 EGALE   ##.##
0580 PRINT USING FLP,0590,R3
0590 :CAPACITE DU RESERVOIR 3 EGALE   ##.##
0600 END
```

Exemple de calcul.

```
CAPACITE TOTALE A ALLOUER EGALE  6.00
 COUT MINIMUM TOTAL EGAL         4.20
CAPACITE DU RESERVOIR 1 EGALE    3.50
CAPACITE DU RESERVOIR 2 EGALE    0.00
CAPACITE DU RESERVOIR 3 EGALE    2.50
```

```
0010 REM COURBE COUT VERSUS CAPACITE
0020 REM X:CAPACITE DU RESERVOIR 1
0030 REM Y:CAPACITE DU RESERVOIR 2
0040 REM Z:CAPACITE DU RESERVOIR 3
0050 REM T:MATRICE COUT
0060 REM W:MATRICE DE LA CAPACITE MAXIMALE DES RESERVOIRS
0070 REM LES COUTS SONT DONNES EN $ 1E6
0080 REM LES CAPACITES SONT DONNES EN 1E8 METRES CUBES
0090 REM P:FONCTION COUT
0100 DIM T(3,9),W(3),P(13),A(13),X(13),Y(13),Z(13)
0110 PRINT 'COMBIEN Y-A-T-IL DE RESERVOIRS?'
0120 INPUT N1
0130 PRINT 'COMBIEN Y-A-T-IL DE COUTS PAR RESERVOIR?'
0140 INPUT J
0150 PRINT 'LES DONNEES SONT DANS QUEL FICHIER?'
0160 INPUT F1
0170 OPEN FL1,'E80',F1,IN
0180 FOR L=1 TO N1
0190 FOR K=1 TO J
0200 GET FL1,T(L,K)
0210 NEXT K
0220 NEXT L
0230 FOR I=1 TO N1
0240 GET FL1,W(I)
0250 NEXT I
0260 CLOSE FL1
0270 B=0
0280 FOR K1=1 TO N1
0290 B=B+W(K1)
0300 NEXT K1
0310 I=0
0320 FOR A=0 TO B
0330 PRINT A
0340 P=99999
0350 I=I+1
0360 IF A≥W(1) GOTO 0390
```

Exemple de calcul -

COUT	A	X	Y	Z
0.00	0.0	0.0	0.0	0.0
.75	1.0	1.0	0.0	0.0
1.20	2.0	2.0	0.0	0.0
1.75	3.0	3.0	0.0	0.0
2.45	4.0	2.5	0.0	1.5
3.25	5.0	3.0	0.0	2.0
4.20	6.0	3.5	0.0	2.5
5.30	7.0	4.0	0.0	3.0
6.45	8.0	3.5	2.5	2.0
7.25	9.0	3.0	4.0	2.0
8.20	10.0	3.5	4.0	2.5
9.30	11.0	4.0	4.0	3.0
10.80	12.0	4.0	4.0	4.0

```
0370 V1=A
0380 GOTO 0400
0390 V1=W(1)
0400 FOR X=0 TO V1 STEP .5
0410 IF (A-X)≥W(2) GOTO 0440
0420 V2=A-X
0430 GOTO 0450
0440 V2=W(2)
0450 FOR Y=0 TO V2 STEP .5
0460 FOR Z=0 TO (A-(X+Y)) STEP .5
0470 IF (X+Y+Z)≠A!Z>W(3) GOTO 0540
0480 P1=T(1,2*X+1)+T(2,2*Y+1)+T(3,2*Z+1)
0490 IF P1>P GOTO 0540
0500 P=P1
0510 R1=X
0520 R2=Y
0530 R3=Z
0540 NEXT Z
0550 NEXT Y
0560 NEXT X
0570 P(I)=P
0580 X(I)=R1
0590 Y(I)=R2
0600 Z(I)=R3
0610 A(I)=A
0620 NEXT A
0630 PRINT USING FLP,0710
0640 PRINT USING FLP,0720
0650 FOR I=1 TO (B+1)
0660 PRINT USING FLP,0730
0670 PRINT USING FLP,0740,P(I),A(I),X(I),Y(I),Z(I)
0680 NEXT I
0690 PRINT USING FLP,0750
0700 END
0710 :|----------------------------------------------- |
0720 :| COUT    |    A    |    X    |    Y    |   Z    |
0730 :|------------------------------------------------|
0740 :| ###.## | ##.#    | ##.#    | ##.#    |  ##.#  |
0750 :  ------------------------------------------------
```

```
0010 REM MAXIMISATION DES PROFITS
0020 REM Y1:DEBIT DU PROJET 1
0030 REM Y2:DEBIT DU PROJET 2
0040 REM Y3:DEBIT DU PROJET 3
0050 REM Y4:DEBIT DU PROJET 4
0060 REM P:PROFIT
0070 REM W:DEBIT MAXIMAL DE CHAQUE PROJET
0080 REM T:MATRICE PROFIT
0090 REM LES DEBITS SONT DONNES EN M3 PAR SECONDE
0100 REM LES PROFITS SONT DONNES EN $1E6
0110 DIM T(4,13),W(4)
0120 PRINT 'COMBIEN Y-A-T-IL DE PROJETS?'
0130 INPUT N
0140 PRINT 'QUEL EST LE NOMBRE DE DONNEES PAR PROJET?'
0150 INPUT J
0160 PRINT 'LES DONNEES SONT DANS QUEL FICHIER?'
0170 INPUT F2
0180 OPEN FL2,'E80',F2,IN
0190 FOR L=1 TO N
0200 FOR K=1 TO J
0210 GET FL2,T(L,K)
0220 NEXT K
0230 NEXT L
0240 FOR I=1 TO N
0250 GET FL2,W(I)
0260 NEXT I
0270 CLOSE FL2
0280 PRINT 'QUEL EST LE DEBIT A ALLOUER?'
0290 INPUT A
0300 P=-10000
0310 IF A≥W(1) GOTO 0340
0320 V1=A
0330 GOTO 0350
0340 V1=W(1)
0350 FOR Y1=0 TO V1 STEP 10
0360 IF (A-Y1)≥W(1) GOTO 0390
```

A7

```
0370 V2=A-Y1
0380 GOTO 0400
0390 V2=W(2)
0400 FOR Y2=0 TO V2 STEP 10
0410 IF (A-(Y1+Y2))≥W(3) GOTO 0440
0420 V3=A-(Y1+Y2)
0430 GOTO 0450
0440 V3=W(3)
0450 FOR Y3=0 TO V3 STEP 10
0460 FOR Y4=0 TO (A-(Y1+Y2+Y3)) STEP 10
0470 IF (Y1+Y2+Y3+Y4)≠A|Y4>W(4) GOTO 0550
0480 P1=T(1,.1*Y1+1)+T(2,.1*Y2+1)+T(3,.1*Y3+1)+T(4,.1*Y4+1)
0490 IF P1<P GOTO 0550
0500 P=P1
0510 R1=Y1
0520 R2=Y2
0530 R3=Y3
0540 R4=Y4
0550 NEXT Y4
0560 NEXT Y3
0570 NEXT Y2
0580 NEXT Y1
0590 PRINT USING FLP,0600,A
0600 :DEBIT TOTAL A ALLOUER EGAL        ###
0610 PRINT USING FLP,0620,P
0620 :PROFIT MAXIMAL EGAL               ##.##
0630 PRINT USING FLP,0640,R1
0640 :DEBIT ALLOUE AU PROJET 1 EGAL     ##.##
0650 PRINT USING FLP,0660,R2
0660 :DEBIT ALLOUE AU PROJET 2 EGAL     ##.##
0670 PRINT USING FLP,0680,R3
0680 :DEBIT ALLOUE AU PROJET 3 EGAL     ##.##
0690 PRINT USING FLP,0700,R4
0700 :DEBIT ALLOUE AU PROJET 4 EGAL     ##.##
0710 END
```

Exemple de calcul.

```
DEBIT TOTAL A ALLOUER EGAL          70
PROFIT MAXIMAL EGAL                  5.70
DEBIT ALLOUE AU PROJET 1 EGAL       40.00
DEBIT ALLOUE AU PROJET 2 EGAL       20.00
DEBIT ALLOUE AU PROJET 3 EGAL       10.00
DEBIT ALLOUE AU PROJET 4 EGAL        0.00
```

```
0010 REM PROFIT VERSUS DEBIT
0020 REM X :DEBIT DU PROJET 1
0030 REM Y :DEBIT DU PROJET 2
0040 REM Z :DEBIT DU PROJET 3
0050 REM V :DEBIT DU PROJET 4
0060 REM P:PROFIT
0070 REM W:DEBIT MAXIMAL DE CHAQUE PROJET
0080 REM T:MATRICE PROFIT
0090 REM A: DEBIT TOTAL MAXIMUM A ALLOUER
0100 REM LES DEBITS SONT DONNES EN M3 PAR SECONDE
0110 REM LES PROFITS SONT DONNES EN $1E6
0120 DIM T(4,13),W(4),P(17),A(17),X(17),Y(17),Z(17),V(17)
0130 PRINT 'COMBIEN Y-A-T-IL DE PROJETS?'
0140 INPUT N
0150 PRINT 'QUEL EST LE NOMBRE DE DONNEES PAR PROJET?'
0160 INPUT J
0170 PRINT 'LES DONNEES SONT DANS QUEL FICHIER?'
0180 INPUT F2
0190 OPEN FL2,'E80',F2,IN
0200 FOR L=1 TO N
0210 FOR K=1 TO J
0220 GET FL2,T(L,K)
0230 NEXT K
0240 NEXT L
0250 FOR I=1 TO N
0260 GET FL2,W(I)
0270 NEXT I
0280 CLOSE FL2
0290 PRINT 'QUELLE EST LE DEBIT MAXIMUM A ALLOUER?'
0300 INPUT C
0310 I=0
0320 FOR A=0 TO C STEP 10
0330 PRINT A
0340 I=I+1
0350 P=-10000
0360 IF A≥W(1) GOTO 0390
0370 V1=A
0380 GOTO 0400
```

```
0390 V1=W(1)
0400 FOR Y1=0 TO V1 STEP 10
0410 IF (A-Y1)≥W(1) GOTO 0440
0420 V2=A-Y1
0430 GOTO 0450
0440 V2=W(2)
0450 FOR Y2=0 TO V2 STEP 10
0460 IF (A-(Y1+Y2))≥W(3) GOTO 0490
0470 V3=A-(Y1+Y2)
0480 GOTO 0500
0490 V3=W(3)
0500 FOR Y3=0 TO V3 STEP 10
0510 FOR Y4=0 TO (A-(Y1+Y2+Y3)) STEP 10
0520 IF (Y1+Y2+Y3+Y4)≠A|Y4>W(4) GOTO 0600
0530 P1=T(1,.1*Y1+1)+T(2,.1*Y2+1)+T(3,.1*Y3+1)+T(4,.1*Y4+1)
0540 IF P1<P GOTO 0600
0550 P=P1
0560 X=Y1
0570 Y=Y2
0580 Z=Y3
0590 V=Y4
0600 NEXT Y4
0610 NEXT Y3
0620 NEXT Y2
0630 NEXT Y1
0640 P(I)=P
0650 X(I)=X
0660 Y(I)=Y
0670 Z(I)=Z
0680 V(I)=V
0690 A(I)=A
0700 NEXT A
0710 PRINT USING FLP,0790
0720 PRINT USING FLP,0800
0730 FOR I=1 TO (.1*C+1)
0740 PRINT USING FLP,0810
0750 PRINT USING FLP,0820,P(I),A(I),X(I),Y(I),Z(I),V(I)
0760 NEXT I
0770 PRINT USING FLP,0830
0780 END
0790 :|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
0800 :|PROFIT  |   A    |   X    |   Y    |   Z    |   V    |
0810 :|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
0820 :| ##.##  |  ###   |  ###   |  ###   |  ###   |  ###   |
0830 :-----------------------------------------------------------------
```

Exemple de résultat

PROFIT	A	X	Y	Z	V
0.00	0	0	0	0	0
1.90	10	0	0	10	0
2.50	20	0	0	20	0
3.40	30	0	20	10	0
4.00	40	0	20	20	0
4.50	50	0	30	20	0
5.00	60	50	0	10	0
5.70	70	40	20	10	0
6.50	80	50	20	10	0
7.10	90	60	20	10	0
7.70	100	60	20	20	0
8.20	110	70	20	20	0
8.70	120	70	30	20	0
8.90	130	70	30	30	0
9.10	140	70	30	40	0
9.20	150	80	30	40	0
9.30	160	90	30	40	0