

REPUBLIQUE DU SENEGAL
UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP



GC 0052

ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

Centre de Thiès
Département Génie Civil

NUM

Projet de fin d'études
En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur de Conception

Titre : Modélisation des plaques épaisses (Type Mindlin) par éléments
finis appliquée au calcul des réservoirs d'assainissement

Auteur : Sacoura WAGUE
Directeur : Dr. Moustapha NDIAYE

Année : 2002 – 2003

A handwritten signature or mark in the bottom right corner of the page.

Dédicace

A mon défunt père, pour tout le soutien moral et matériel qu'il a eu à m'apporter, toute sa vie durant, pour ma réussite.

A ma mère, pour la grande ambition qu'elle a toujours nourrie, aussi bien pour mes études que pour ma propre éducation.

Aux membres de ma famille et à mes amis pour les bonnes relations que nous avons eu à entretenir, toutes ces années durant.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Le Tout Puissant pour toutes les grâces qu'il m'a accordées.

Mes remerciements particuliers iront à Monsieur Moustapha NDIAYE , professeur à l'Ecole Supérieure Polytechnique pour sa disponibilité durant toute l'année pour la réalisation de ce projet.

Sommaire

Les structures épaisses sont très répandues dans les réalisations humaines les plus diverses telles les réservoirs.

Ainsi, vu leur géométrie, la théorie de Mindlin sur les plaques épaisses a été jugée bien adaptée pour l'analyse structurale de tels ouvrages.

La théorie des plaques de Mindlin est basée sur l'hypothèse cinématique des sections droites ou planes. L'influence des déformations de cisaillement transversal (CT) est prise en compte : cette théorie inclut ainsi celle de Kirchhoff basée sur l'hypothèse de conservation des normales (en supposant négligeable l'influence des déformations CT).

Il s'agit, donc dans le présent projet, de développer une théorie de modélisation par éléments finis des plaques épaisses pour ensuite l'adapter à des cas pratiques de calcul d'ouvrages dans le domaine de l'assainissement. Cette adaptation concerne, en particulier, les bassins ou réservoirs parallélépipédiques.

L'idée sera d'abord, de générer les équations aux dérivées partielles fondamentales (EDPF) qui régissent le comportement mécanique de ces structures après avoir procédé à une description complète de leur surface et à la détermination de leurs paramètres géométriques pour ensuite terminer par la formulation par éléments finis.

Table des matières

	Pages
Table des matières.....	i
Liste des symboles.....	iii
Liste des figures.....	iv.
Liste des tableaux.....	v
Introduction.....	1.
Chapitre 1 THEORIE.....	2
1.1 Géométrie et cinématique des plaques.....	2
1.2 Relations cinématiques.....	6
1.3 Conditions d'équilibre.....	8
1.4 Loi constitutive.....	12
1.4.1 Cas anisotrope.....	12
1.4.2 Cas orthotrope.....	15
1.4.3 Cas d'un matériau homogène et isotrope.....	20
1.5 Les équations aux dérivées partielles fondamentales(EDPF).....	22
1.5.1 Anisotropie générale.....	23
1.5.2 Isotropie.....	25
1.6 Conditions aux limites.....	27
1.7 Spécialisation suivant l'hypothèse de Kirchhoff.....	28
1.8 Formulation variationnelle.....	28
1.8.1 Equivalence des travaux virtuels.....	28
A-Membrane.....	32
B-Flexion-Cisaillement.....	32
1.8.2 Formulation mixte à deux champs, (u, σ)	32
1.8.3 Formulation mixte à trois champs, (u, σ, ε)	36
1.8.4 Modèle contrainte.....	37
Chapitre 2 TOPOLOGIE DE DIFFERENTS ELEMENTS.....	39
2.1 Élément linéique.....	39
2.1.1 Type H.....	39
2.1.2 Type P.....	43
2.2 Élément triangulaire.....	44

2.2.1	Elément triangulaire à trois nœuds.....	44
2.2.2	Elément triangulaire à six nœuds.....	46
2.2.3	Elément triangulaire à dix nœuds.....	47
2.3	Elément rectangulaire.....	48
2.3.1	Type H.....	48
2.3.1.1	Elément rectangulaire à quatre nœuds.....	48
2.3.1.2	Elément rectangulaire à huit nœuds.....	52
2.3.1.3	Elément rectangulaire à neuf nœuds.....	53
	A- Justification du choix de l'élément et étude préliminaire.....	53
	B- Matrice de transformation	56
	C- Forces équivalentes aux nœuds.....	57
	C-1 Cas d'un chargement plan constant.....	58
	C-2 Cas chargement vertical constant.....	59
	C-3 Cas chargement linéaire surf.....	59
	C-4 Cas chargement volumique.....	61
	D- Les différents cas d'étude.....	61
	D-1 Cas membrane.....	61
	D-2 Cas flexion avec cisaillement transversal	61
	E- Détermination des matrices élémentaires de raideur et de masse.....	65
	E-1 Cas d'un matériau anisotrope.....	65
	E-2 Cas d'un matériau orthotrope.....	66
	E-3 Cas d'un matériau homogène et isotrope.....	67
2.3.2	Type P.....	68
Chapitre 3 ASSEMBLAGE, TEST DE VALIDATION ET PERFORMANCES DES		
	ELEMENTS.....	71
3.1	Assemblage.....	71
3.2	Test de validation et performances des éléments.....	72
3.2.1	Influence des conditions aux limites.....	73
3.2.2	Influence de la distorsion géométrique.....	73
Chapitre 4 PRESENTATION DE QUELQUES APPLICATIONS PRATIQUES.....		
	75	
Conclusion et recommandations.....		
	90	
Bibliographie.....		
	91	

Liste des symboles et abréviations

\int = intégrale

$\{ \}$ = matrice colonne

$[]$ = matrice

$[M]^T$ = transposée de la matrice M

$[M]^{-1}$ = inverse de la matrice M

$f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}$

W, W_e = formes intégrales globales et élémentaires

δ = symbole de calcul des variations

∂A = Contour de A

Π = fonctionnelle d'énergie

$[B]$ = matrice reliant les déformations aux variables nodales

$[C_m]$, $[C_{mf}]$ et $[C_f]$ = flexibilités homogénéisées

$[H]$ = matrice de comportement élastique

$[H_m]$, $[H_{mf}]$ et $[H_f]$ = matrices de comportement homogénéisées de membrane, flexion et couplage membrane flexion .

$[Hc]$ = matrice de comportement global en CT

CT = cisaillement transversal

$[J]$ = jacobienne de transformation

$[k]$, = rigidité élémentaire

$[K]$ = rigidité globale

$[N]$ = matrice des fonctions d'interpolation ou de forme

Liste des figures

Figure 1.1 : Description géométrique d'une plaque	p.2
Figure 1.2 : Idéalisaton de la plaque	p.3
Figure 1.3 : Géométrie et cinématique sur le contours	p.4
Figure 1.4 : Déformations e , $z\chi$ et γ	p.6
Figure 1.5 : Efforts résultants sur A	p.8
Figure 1.6 : Forces et moments sur le contours S_f	p.10
Figure 2.1 : Elément linéaire réel à 2 nœuds	p.39
Figure 2.2 : Elément linéaire de référence à 2 nœuds	p.39
Figure 2.3 : Elément linéaire réel à 3 nœuds	p.41
Figure 2.4 : Elément linéaire de référence à 3 nœuds	p.41
Figure 2.5 : Elément linéaire réel à 3 nœuds (type P)	p.43
Figure 2.6 : Elément triangulaire de référence à 3 nœuds (Type P)	p.44
Figure 2.7 : Elément triangulaire réel à 3 nœuds	p.44
Figure 2.8 : Elément triangulaire réel à 6 nœuds	p.46
Figure 2.9 : Elément triangulaire de référence à 6 nœuds	p.46
Figure 2.10 : Elément triangulaire de réel à 10 nœuds	p.47
Figure 2.11 : Elément rectangulaire réel à 4 nœuds	p.48
Figure 2.12 : Elément rectangulaire de référence à 4 nœuds	p.48
Figure 2.13 : Elément rectangulaire réel à 8 nœuds	p.52
Figure 2.14 : Elément rectangulaire de référence à 8 nœuds	p.52
Figure 2.15 : Elément rectangulaire réel à 9 nœuds :	p.52
Figure 2.16 : Elément rectangulaire de référence à 9 nœuds :	p.54

Figure 2.17 : Matrice de transformation	p.56
Figure 2.18 : Élément soumis à une charge surfacique constante :	p.58
Figure 2.19 : Élément soumis à une charge verticale constante :	p.59
Figure 2.20 : Élément soumis à une charge linéaire quelconque :	p.59
Figure 2.21 : Élément rectangulaire réel à neuf nœuds (Type P):	p.68
Figure 2.22 : Élément rectangulaire de référence à neuf nœuds (Type P):	p.69
Figure 3.1 : Réservoir de forme parallélépipédique :	p.75
Figure 3.2 : Maillage de la plaque en éléments quadrilatéraux :	p.75
Figure 3.3 : Vue en plan d'un bassin aérobie parallélépipédique :	p.77

Liste des tableaux

Tableau 1 : Conditions de bord (conditions limites) :	p 27
Tableau 2 : Fonctions d'interpolation de type H pour l'élément linéaire à 3 nœuds :	p 38

Introduction

Une coque peut être considérée comme un élément structural de grande efficacité transmettant les charges qui lui sont appliquées par action membranaire, si elle est correctement appuyée. En effet, à l'exception des zones de singularités adjacentes aux discontinuités de géométrie ou de chargement (bordures, ouvertures, changement brusque d'épaisseur, charges concentrées ou sectorielles), les effets flexionnels sont négligeables.

Les propriétés structurales intéressantes des coques ont été mises à jour depuis l'antiquité dans des applications comme la construction navale.

De nos jours, vu leur efficacité de transmission de charges, les coques font l'objet d'une grande convoitise dans les domaines, aussi bien du Génie civil que de l'aéronautique. Elles sont souvent utilisées en Génie civil dans la construction des voûtes cylindriques ou sphériques en maçonnerie. Avec l'avènement du béton armé, les formes et les applications se sont diversifiées vers d'autres applications telles la construction des barrages voûtes, des châteaux d'eau et réservoirs et des toitures de grandes portées.

Les structures en forme de coque constituent les éléments structuraux de base dans la construction aéronautique et aérospatiale.

Le comportement structural des coques est entièrement décrit par des équations aux dérivées partielles complexes dont les solutions ne sont obtenues, de façon précise, que pour quelques rares cas, souvent d'ordre académique.

Les difficultés rencontrées dans la résolution de tels cas de structures sont contournées avec l'usage de la méthode des éléments finis.

Cette méthode donne une solution certes approximative, mais suffisamment précise pour des applications pratiques. Bien qu'étant élaborée depuis le début des années soixante, la méthode des éléments finis est en perpétuelle amélioration en vue d'obtenir des solutions proches des solutions réelles qui, elles, sont, pour la plupart des cas, inaccessibles.

Les coques peuvent être classées en deux catégories : les coques de révolution et les coques à géométrie quelconque.

Mais, dans ce qui suit, notre étude portera sur l'analyse des coques plates.

Cette analyse repose sur la description de leur surface avec un système de coordonnées le plus approprié, la détermination des paramètres géométriques déterminants et l'écriture des équations aux dérivées partielles fondamentales (EDPF) qui décrivent leur comportement mécanique global.

Chapitre 1 : Théorie

1.1 Géométrie et cinématique d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan $x y$) et par une épaisseur (notée $h(x,y)$), petite par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur. Suivant l'ordre de grandeur de h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince ou épais aux plaques et coques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (CT). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur h varie en sens inverse de l'influence CT.

La plaque peut être constituée d'un matériau homogène ou d'un empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

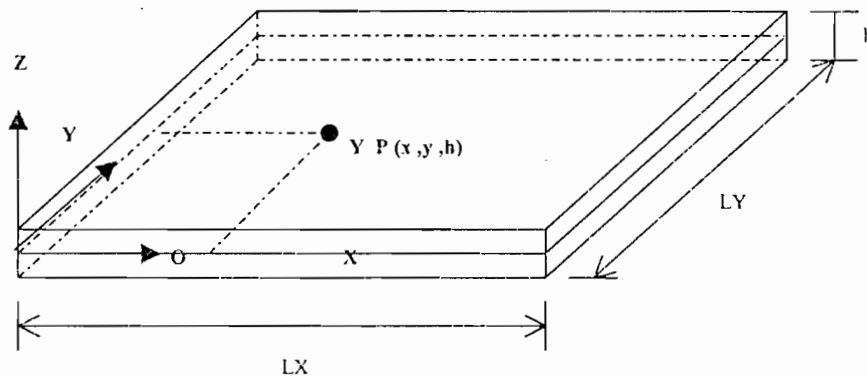


Fig.1.1 Description géométrique d'une plaque

Pour étudier cette plaque, il a été fait une idéalisation de la structure en considérant un plan de référence ; il s'agit du plan moyen de la plaque.

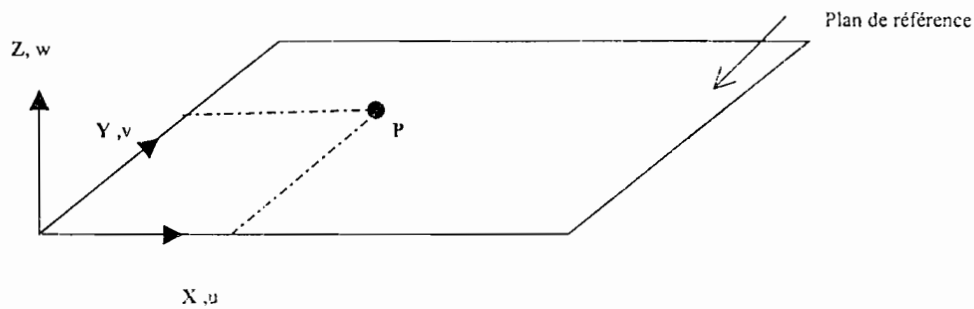


Fig.1.2 Idéalisation de la plaque

La théorie des plaques qui sera présentée est basée sur un certain nombre d'hypothèses :

_ l'hypothèse des sections droites (ou planes) : les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée. Les déplacements u et v (suivant x et y) d'un point $P(x,y,z)$ quelconque varient alors linéairement en z et le déplacement transversal, w n'est fonction que de z .

_ l'hypothèse d'une déformation transversale, ϵ_z nulle .

_ l'hypothèse des déformations planes : dans les relations de comportement, la contrainte σ_z est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes.

_ l'hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite. C'est à dire que l'axe z est l'axe d'orthotropie de toutes les couches .

_ La prise en compte d'une loi de comportement de CT (cisaillement transversal) ,fonction du facteur de correction qui est déterminé, à priori, par des considérations d'équivalence énergétique.

Cette théorie fait intervenir :

- Cinq variables cinématiques indépendantes : les déplacements de membrane ,u et v, dans le plan de référence z=0, le déplacement transversal, w et les rotations β_x et β_y de la normale à la surface moyenne dans les plans xz et yz respectivement.

- Trois efforts de membrane notés N_x , N_y et N_{xy} ; trois moments de flexion notés M_x , M_y et M_{xy} et deux efforts tranchants , Q_x et Q_y .

Au niveau du contour, on a l'élément de surface ds qui s'écrit

$$ds \cdot \vec{n} = n_x ds \times \vec{i} + n_y ds \times \vec{j} \tag{1.1.1}$$

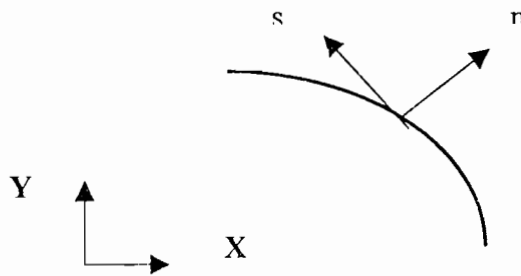


Fig.1.3: Géométrie et cinématique sur le contours

On définit la matrice [Q] par :

$$[Q] = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,n} & x_{,s} \\ y_{,n} & y_{,s} \end{bmatrix} \tag{1.1.2}$$

$$[Q]^{-1} = [Q]^T$$

[Q] est une matrice de transformation

$$|Q| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = 1 \quad (1.1.3)$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dn \\ ds \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} dn \\ ds \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (1.1.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.1.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (1.1.6)$$

$$\langle \chi^s \rangle = \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} \quad \beta_{y,x} \rangle \quad (1.1.7)$$

$$\langle \chi^n \rangle = \langle \beta_{n,n} \quad \beta_{s,s} \quad \beta_{n,s} \quad \beta_{s,n} \rangle \quad (1.1.8)$$

1.2 Relations cinématiques

Les déformations linéaires s'écrivent :

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z\{\chi\} \tag{1.2.1}$$

avec
$$\{e\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} ; \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \tag{1.2.2}$$

Les déformations de cisaillement transversal $\{\gamma\}$ sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque ; $\{e\}$ représente les déformations membranaires et $\{\chi\}$ les courbures

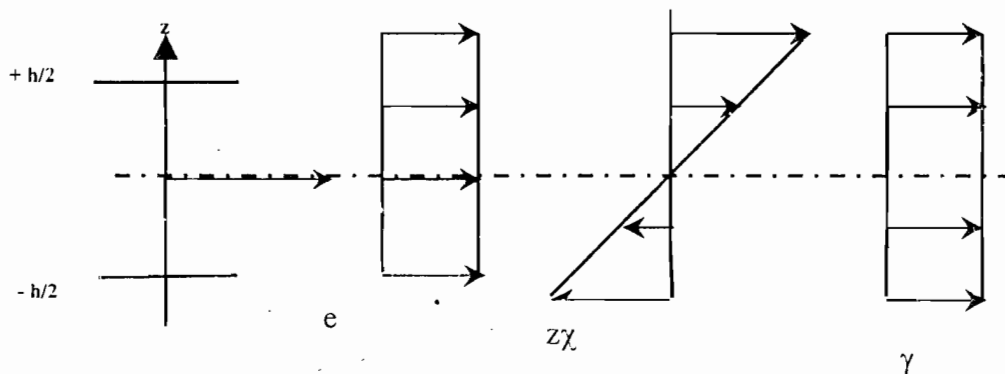


Fig.1.4 : Déformations e, zχ et γ

Les déformations globales liées à tous les efforts auxquels la plaque est soumise sont données par :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \\ \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \tag{1.2.3}$$

et donc les relations cinématiques peuvent s'écrire :

$$\{\epsilon\} = [L] * \{u\} \tag{1.2.4}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u + v_{,x} \\ \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,x} + \beta_{y,x} \\ \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \tag{1.2.5}$$

avec : $\beta_x = \theta_y$
 et $\beta_y = -\theta_x$

la relation devient :

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \\ \theta_y + w_{,x} \\ -\theta_x + w_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ -\theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} \tag{1.2.7}$$

1.3 Conditions d'équilibre

Considérons l'isolement d'un élément de plaque en équilibre :

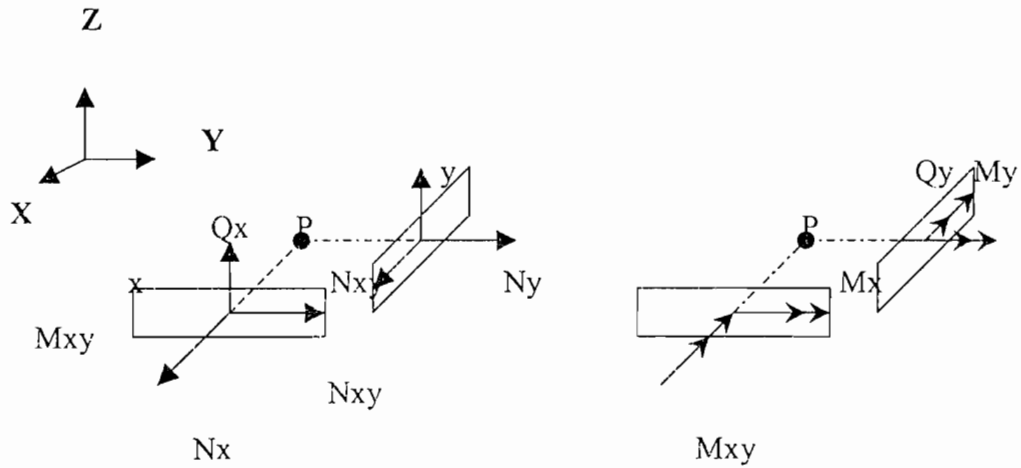


Fig.1.5 : Efforts résultants sur A

Les équations d'équilibre s'écrivent, tenant compte des effets d'inertie, :

$$N_{x,x} + N_{xy,y} + f_x = \rho m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho m f \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \quad (1.3.1)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} + f_y = \rho m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho m f \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \quad (1.3.2)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + m_x = \rho f \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} + \rho m f \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3.3)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y + m_y = \rho f \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} + \rho m f \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.3.4)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + f_z = \rho m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.3.5)$$

avec :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz ; \quad (1.3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz ; \quad (1.3.7)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (1.3.8)$$

$$\{f(x,y)\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} f_{vx}(x,y,z) \\ f_{vy}(x,y,z) \\ f_{vz}(x,y,z) \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (1.3.9)$$

$$\{m(x,y)\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} f_{vx}(x,y,z) \\ f_{vy}(x,y,z) \end{Bmatrix} z dz = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \end{Bmatrix} \quad (1.3.10)$$

M_x , M_y et M_{xy} représentent les efforts résultants de flexion ou moments (Nm/m)

Q_x et Q_y constituent les efforts résultants au cisaillement ou efforts tranchants (N/m)

f_{vx} , f_{vy} et f_{vz} sont des forces par unité de volume suivant les directions x , y et z .

f_x , f_y , f_z , m_x et m_y sont des efforts par unité de surface moyenne.

Sur la frontière S_f , agissent les efforts surfaciques $f_{sx}(x, z)$, $f_{sy}(x, z)$, et $f_{sz}(x, z)$.

Les efforts $\{f_s\}$, et $\{m_s\}$ par unité de longueur du contours S_f sont matérialisés dans le schémas ci dessous

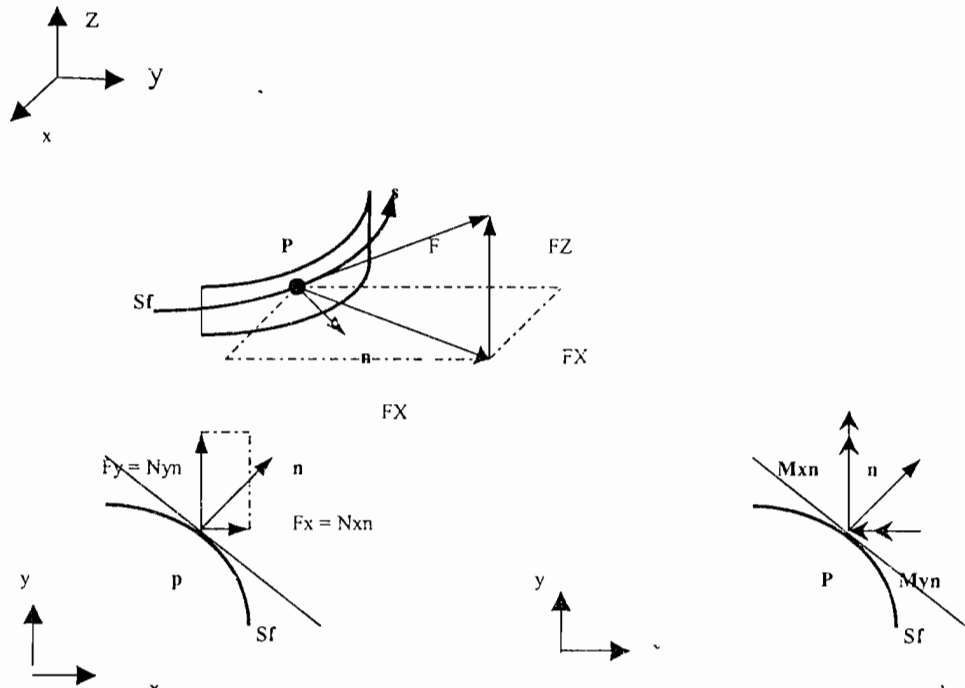


Fig.1.6 Forces et moments sur le contour Sf

$$\{f_s(s)\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} f_{sx}(s,z) \\ f_{sy}(s,z) \\ f_{sz}(s,z) \end{Bmatrix} dz \quad \text{et} \quad \{m_s(s)\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} f_{sx}(s,z) \\ f_{sy}(s,z) \end{Bmatrix} z dz \quad (1.3.11)$$

Les conditions d'équilibre peuvent ainsi s'écrire, sous forme matricielle :

$$[L]^T \{\sigma\} + \{b\} = [\rho] \frac{\partial^2 \{u\}}{\partial t^2} ; \quad (1.3.12)$$

avec

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_y \\ -\theta_x \end{Bmatrix} \quad (1.3.13)$$

Soit

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \rho_m & 0 & 0 & \rho_{mf} & 0 \\ 0 & \rho_m & 0 & 0 & \rho_{mf} \\ 0 & 0 & \rho_m & 0 & 0 \\ \rho_{mf} & 0 & 0 & \rho_f & 0 \\ 0 & \rho_{mf} & 0 & 0 & \rho_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \end{Bmatrix} \tag{1.3.14}$$

$$\rho_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) dz ; \quad \rho_{mf} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) z dz ; \quad \rho_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) z^2 dz , \tag{1.3.15}$$

$\rho(z)$ désignant la masse volumique du matériau et supposé, par souci de généralité, comme fonction de z . Dans le cas d'un matériau constitué de nc couches homogènes de masse volumique ρ_i , on a :

$$\rho_m = \sum_{i=1}^{nc} h_i \rho_i ; \quad \rho_{mf} = \sum_{i=1}^{nc} h_i \eta_i \rho_i ; \quad \rho_f = \sum_{i=1}^{nc} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) \rho_i \tag{1.3.16}$$

1.4 Loi constitutive

1.4.1 Cas anisotrope

La loi constitutive est définie par la relation :

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (1.4.1.1)$$

Cette relation qui peut être explicitée par la relation ci-dessous, après intégration :

$$\{N\} = [H_m] \{e\} + [H_m f] \{\chi\} + \{N_0\} \quad (1.4.1.2)$$

$$\{M\} = [H_m f] \{e\} + [H f] \{\chi\} + \{M_0\} \quad (1.4.2.3)$$

$$\{Q\} = [H c] \{\gamma\} + \{Q_0\} \quad (1.4.1.4)$$

avec

$$\langle e \rangle = \{e\}^T = \langle u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x} \rangle \quad (1.4.1.5)$$

$$\langle \chi \rangle = \{\chi\}^T = \langle \theta_{y,x} \quad -\theta_{x,y} \quad \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \rangle \quad (1.4.1.6)$$

$$\langle \gamma \rangle = \langle \theta_{y+w,x} \quad -\theta_{x+w,y} \rangle \quad (1.4.1.7)$$

$$[H_m] = \int_{-h/2}^{+h/2} [H] dz ; \quad [H_m f] = \int_{-h/2}^{+h/2} [H] z dz ; \quad [H f] = \int_{-h/2}^{+h/2} [H] z^2 dz \quad (1.4.1.8)$$

La matrice $[Hc]$ tient compte des composantes de $[H\tau]$ et du coefficient k (facteurs de correction de cisaillement transversal); $[H\tau]$ est déterminée par la relation liant les cisaillements $\{\tau\}$ aux déformations $\{\gamma\}$, à savoir :

$$\{\tau\} = [H\tau] \{\gamma\} + \{\tau_0\} \quad (1.4.1.9)$$

Dans le cas le plus général $[H\tau]$ et $[H]$ s'écrivent

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H\tau] = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{54} & H_{55} \end{bmatrix} \quad (1.4.1.10)$$

Dans (1.4.1.1), [H] prend la forme

$$[H] = \begin{bmatrix} [H_m] & [H_{mf}] & [0] \\ [H_{mf}] & [H_f] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c] \end{bmatrix} \quad (1.4.1.11)$$

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_m] & [H_{mf}] & [0] \\ [H_{mf}] & [H_f] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{N_0\} \\ \{M_0\} \\ \{Q_0\} \end{Bmatrix} \quad (1.4.1.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [H] dz & \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [H] z dz & [0] \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [H] z dz & \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [H] z^2 dz & [0] \\ [0] & [0] & [H_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{N_0\} \\ \{M_0\} \\ \{Q_0\} \end{Bmatrix} \quad (1.4.1.13)$$

La matrice [H] est d'ordre 8 * 8 et présente la forme

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{m11} & H_{m12} & H_{m13} & H_{mf11} & H_{mf12} & H_{mf13} & 0 & 0 \\ H_{m21} & H_{m22} & H_{m23} & H_{mf21} & H_{mf22} & H_{mf23} & 0 & 0 \\ H_{m31} & H_{m32} & H_{m33} & H_{mf31} & H_{mf32} & H_{mf33} & 0 & 0 \\ H_{mf11} & H_{mf12} & H_{mf13} & H_{f11} & H_{f12} & H_{f13} & 0 & 0 \\ H_{mf21} & H_{mf22} & H_{mf23} & H_{f21} & H_{f22} & H_{f23} & 0 & 0 \\ H_{mf31} & H_{mf32} & H_{mf33} & H_{f31} & H_{f32} & H_{f33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{c11} & H_{c12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{c21} & H_{c22} \end{bmatrix} \quad (1.4.1.14)$$

Finalement, la loi constitutive s'écrit

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{m11} & H_{m12} & H_{m13} & H_{mf11} & H_{mf12} & H_{mf13} & 0 & 0 \\ H_{m21} & H_{m22} & H_{m23} & H_{mf21} & H_{mf22} & H_{mf23} & 0 & 0 \\ H_{m31} & H_{m32} & H_{m33} & H_{mf31} & H_{mf32} & H_{mf33} & 0 & 0 \\ H_{mf11} & H_{mf12} & H_{mf13} & H_{f11} & H_{f12} & H_{f13} & 0 & 0 \\ H_{mf21} & H_{mf22} & H_{mf23} & H_{f21} & H_{f22} & H_{f23} & 0 & 0 \\ H_{mf31} & H_{mf32} & H_{mf33} & H_{f31} & H_{f32} & H_{f33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{c11} & H_{c12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{c21} & H_{c22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_{,y} + v_{,x} \\ \theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \\ \theta_y + w_{,x} \\ -\theta_x + w_{,y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{x0} \\ N_{y0} \\ N_{xy0} \\ M_{x0} \\ M_{y0} \\ M_{xy0} \\ Q_{x0} \\ Q_{y0} \end{Bmatrix} \quad (1.4.1.15)$$

1.4.2 Cas orthotrope

Considérant le cas où on a une couche orthotrope avec comme directions d'orthotropie L, T et Z, on a :

$$[HL] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ H_{TL} & H_{TT} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H\tau L] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix} \quad (1.4.2.1)$$

avec

$$H_{LL} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT} \times \nu_{TL}} \quad ; \quad H_{LT} = \frac{E_T \times \nu_{LT}}{1 - \nu_{LT} \times \nu_{TL}}$$

$$H_{TT} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT} \times \nu_{TL}} \quad ; \quad H_{TL} = H_{LT} \quad ; \quad G_{LZ} = G_{TZ} \quad ; \quad (1.4.2.2)$$

Et le module de cisaillement G du matériau qui s'écrit

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.4.2.3)$$

E_L représente le module d'Young du matériau dans la direction L ; de même que pour E_T .

ν_{LT} est le coefficient de Poisson relatif aux directions L et T.

Les matrices [H] et [H τ] sont ainsi définies :

$$[H] = [T1]^T [HL] [T1] \quad (1.4.2.4)$$

$$[H\tau] = [T2]^T [H\tau L] [T2] \quad (1.4.2.5)$$

$$\text{avec: } [T1] = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & -\sin\phi\cos\phi \\ -\sin 2\phi & \sin 2\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \quad (1.4.2.6)$$

$$\text{et } [T2] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (1.4.2.7)$$

où $\phi = (x, L)$ désigne l'angle que fait l'axe x avec la direction d'orthotropie L .

$$\begin{aligned} [H] = & [(\cos(\phi)^2 HLL + \sin(\phi)^2 HTL) \cos(\phi)^2 + (\cos(\phi)^2 HLT + \sin(\phi)^2 HTT) \sin(\phi)^2 + \sin(2\phi)^2 GLT, \\ & (\cos(\phi)^2 HLL + \sin(\phi)^2 HTL) \sin(\phi)^2 + (\cos(\phi)^2 HLT + \sin(\phi)^2 HTT) \cos(\phi)^2 - \sin(2\phi)^2 GLT, \\ & (\cos(\phi)^2 HLL + \sin(\phi)^2 HTL) \cos(\phi) \sin(\phi) - (\cos(\phi)^2 HLT + \sin(\phi)^2 HTT) \cos(\phi) \sin(\phi) \\ & - \sin(2\phi) GLT (\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2)] \\ & [(\sin(\phi)^2 HLL + \cos(\phi)^2 HTL) \cos(\phi)^2 + (\sin(\phi)^2 HLT + \cos(\phi)^2 HTT) \sin(\phi)^2 - \sin(2\phi)^2 GLT, \\ & (\sin(\phi)^2 HLL + \cos(\phi)^2 HTL) \sin(\phi)^2 + (\sin(\phi)^2 HLT + \cos(\phi)^2 HTT) \cos(\phi)^2 + \sin(2\phi)^2 GLT, \\ & (\sin(\phi)^2 HLL + \cos(\phi)^2 HTL) \cos(\phi) \sin(\phi) - (\sin(\phi)^2 HLT + \cos(\phi)^2 HTT) \cos(\phi) \sin(\phi) \\ & + \sin(2\phi) GLT (\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2)] \\ & [(\cos(\phi) \sin(\phi) HLL - \cos(\phi) \sin(\phi) HTL) \cos(\phi)^2 \\ & + (\cos(\phi) \sin(\phi) HLT - \cos(\phi) \sin(\phi) HTT) \sin(\phi)^2 - \sin(2\phi) GLT (\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2), \\ & (\cos(\phi) \sin(\phi) HLL - \cos(\phi) \sin(\phi) HTL) \sin(\phi)^2 \\ & + (\cos(\phi) \sin(\phi) HLT - \cos(\phi) \sin(\phi) HTT) \cos(\phi)^2 + \sin(2\phi) GLT (\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2), \\ & (\cos(\phi) \sin(\phi) HLL - \cos(\phi) \sin(\phi) HTL) \cos(\phi) \sin(\phi) \\ & - (\cos(\phi) \sin(\phi) HLT - \cos(\phi) \sin(\phi) HTT) \cos(\phi) \sin(\phi) + (\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2)^2 GLT] \end{aligned} \quad (1.4.2.8)$$

La matrice $[H\tau]$ est donnée par :

$$[H\tau] = \begin{bmatrix} \cos(\phi)^2 GLZ + \sin(\phi)^2 GTZ, & \cos(\phi) GLZ \sin(\phi) - \sin(\phi) GTZ \cos(\phi) \\ \cos(\phi) GLZ \sin(\phi) - \sin(\phi) GTZ \cos(\phi), & \sin(\phi)^2 GLZ + \cos(\phi)^2 GTZ \end{bmatrix}$$

Ces calculs de $[H]$ et $[H\tau]$ permettront d'avoir les expressions de $[H_m]$, $[H_{mf}]$ et $[H_f]$ à partir de (1.4.1.8).

Ils aideront, par conséquent, à la détermination de la matrice

$$\begin{bmatrix} [H_m] & [H_{mf}] & [0] \\ [H_{mf}] & [H_f] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c] \end{bmatrix}$$

La loi constitutive s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_m] & [H_{mf}] & [0] \\ [H_{mf}] & [H_f] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{N_0\} \\ \{M_0\} \\ \{Q_0\} \end{Bmatrix} \quad (1.4.2.10)$$

et avec les substitutions précédentes, on a :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{h}{2} \int [H] dz & +\frac{h}{2} \int [H] z dz & [0] \\ -\frac{h}{2} \int [H] z dz & -\frac{h}{2} \int [H] z^2 dz & [0] \\ +\frac{h}{2} \int [H] z dz & +\frac{h}{2} \int [H] z^2 dz & [0] \\ -\frac{h}{2} [0] & -\frac{h}{2} [0] & [H_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{N_0\} \\ \{M_0\} \\ \{Q_0\} \end{Bmatrix} \quad (1.4.2.11)$$

Application à un matériau composite constitué de nc couches orthotropes

On considère, dans ce cas, que les caractéristiques du matériau sont constantes par couches. Ainsi, les matrices précédemment définies deviennent :

$$[H_m] = \sum_{i=1}^{nc} h_i [H]_i ; [H_{mf}] = \sum_{i=1}^{nc} h_i \eta_i [H]_i ; [H_f] = \sum_{i=1}^{nc} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) [H]_i \quad (1.4.2.12)$$

La matrice $[H]_i$ représente la matrice $[H]$ définie dans le (1.4.1.10) pour la couche i
 $h_i = (z_{i+1} - z_i)$ représente l'épaisseur de la couche i

$$\eta_i = \frac{1}{2} (z_{i+1} + z_i) \quad (1.4.2.13)$$

La couche i étant définie par : $\{ (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ avec } z_i \leq z \leq z_{i+1} \}$ avec A qui désigne l'aire de la couche i .

Les termes précédents seront injectés dans l'équation suivante pour obtenir la loi constitutive du présent cas, à savoir :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum h_i [H] & \sum h_i \eta_i [H] & [0] \\ \sum h_i \eta_i [H] & \sum \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) [H] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{N_0\} \\ \{M_0\} \\ \{Q_0\} \end{Bmatrix} \quad (1.4.2.14)$$

Le calcul de $[H_c]$ est effectué par une méthode basée sur des considérations d'équilibre et d'équivalences énergétiques de manière à ce que la rigidité en CT (cisaillement transversal) du modèle de plaque corresponde au mieux à celle définie par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Ce qui fournit un coefficient k de 5/6.

D'autres auteurs tel que Mindlin ont eu à proposer une méthode basée sur des considérations dynamiques ,c'est à dire d'équivalence de fréquence propre associée au mode de vibration en CT ou de vitesse de propagation d'ondes de flexion .Laquelle méthode fournit un coefficient facteur de correction de cisaillement transversal de $k=\pi/2$.

Dans le cas de plaques composites, avec x et y comme directions d'orthotropie (L=x et T=z), la matrice [HC] est diagonale et deux (2) facteurs de correction sont définis .

La méthode ici présentée pour les plaques stratifiées généralise celle adoptée pour les poutres faisant fi du couplage membrane flexion , c'est à dire que [Hmf] = [0].

La matrice [HC] est définie de sorte que la densité surfacique d'énergie interne de CT obtenue pour une distribution tridimensionnelle (exacte) des contraintes σ_{xz} et σ_{yz} notée U1 soit identique à celle associée au modèle bidimensionnel construit selon l'hypothèse de Reissner/Mindlin Ainsi, :

$$U1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \{\tau\}^T [H_\tau]^{-1} \{\tau\} dz \quad ; \quad \{\tau\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{1.4.2.15}$$

$$U2 = \frac{1}{2} \{Q\}^T [Hc]^{-1} \{Q\} = \frac{1}{2} \{y\}^T [Hc] \{y\} \quad ; \quad \{Q\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \{\tau\} dz = [Hc] \{y\} \tag{1.4.2.16}$$

U1 = U2

$$\Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \{\tau\}^T dz [Hc]^{-1} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \{\tau\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \{\tau\}^T [H_\tau]^{-1} \{\tau\} dz \tag{1.4.2.17}$$

La distribution de $\{\tau(z)\}$ est donnée par les équations suivantes

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = - \int_{-\frac{h}{2}}^z (\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y}) dz \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = - \int_{-\frac{h}{2}}^z (\sigma_{y,y} + \sigma_{xy,x}) dz \tag{1.4.2.18}$$

avec $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ pour $z = +h/2$. (1.4.2.19)

1.4.3 Cas d'un matériau homogène et isotrope

$$[H_m] = \int_{-h/2}^{+h/2} [H] dz = [H] \left(\int_{-h/2}^{+h/2} dz \right) = h * [H]$$

$$[H_m] = \frac{hE}{2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.4.3.1)$$

$$[H_m f] = \int_{-h/2}^{+h/2} [H] z dz = [H] \left(\int_{-h/2}^{+h/2} z dz \right) = [0] \quad (1.4.3.2)$$

$$[H_f] = \int_{-h/2}^{+h/2} [H] z^2 dz = [H] \left(\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \right) = \frac{h^3}{12} [H] \quad (1.4.3.3)$$

avec

$$[H] = \frac{E}{2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.4.3.4)$$

$$[H_c] = \frac{5hE}{6 \cdot 2(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.3.5)$$

Autrement dit, k prend la valeur $\frac{5}{6}$.

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{hE}{1-\nu^2} & \frac{hE\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{hE\nu}{1-\nu^2} & \frac{hE}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{hE}{2+2\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3E}{12-12\nu^2} & \frac{h^3E\nu}{12-12\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3E\nu}{12-12\nu^2} & \frac{h^3E}{12-12\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3E}{24+24\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} \frac{hE}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} \frac{hE}{1-\nu} \end{bmatrix} \quad (1.4.3.6)$$

La loi constitutive s'écrit alors:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{hE}{1-\nu^2} & \frac{hE\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{hE\nu}{1-\nu^2} & \frac{hE}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{hE}{2+2\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3E}{12-12\nu^2} & \frac{h^3E\nu}{12-12\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3E\nu}{12-12\nu^2} & \frac{h^3E}{12-12\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3E}{24+24\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} \frac{hE}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} \frac{hE}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y+v_x \\ \theta_{yx} \\ -\theta_{xy} \\ \theta_{y,y}-\theta_{x,x} \\ \theta_y+w_x \\ -\theta_x+w_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{x0} \\ N_{y0} \\ N_{xy0} \\ M_{x0} \\ M_{y0} \\ M_{xy0} \\ Q_{x0} \\ Q_{y0} \end{Bmatrix} \quad (1.4.3.7)$$

1.5 Equations aux dérivées partielles fondamentales (E.D.P.F)

Elles sont obtenues à partir des équations précédentes.

En effet,

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (1.5.1)$$

$$\{\epsilon\} = [L] * \{u\} \quad (1.5.2)$$

$$\{\sigma\} = [H] [L] \{u\} + \{\sigma_0\} \quad (1.5.3)$$

Or, par ailleurs :

$$[L]^T \{\sigma\} + \{b\} = [\rho] \frac{\partial^2 \{u\}}{\partial t^2}$$

$$[L]^T ([H] [L] \{u\} + \{\sigma_0\}) + \{b\} = [\rho] \frac{\partial^2 \{u\}}{\partial t^2}$$

$$[[L]^T [H] [L] - [\rho] \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \{u\} + [L]^T \{\sigma_0\} + \{b\} = \{0\} \quad (1.5.4)$$

1.5.1 Anisotropie générale

Les EDPF se résument aux cinq équations suivantes, en ne tenant pas compte des contraintes initiales $\{\sigma_0\}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 (uHm_1)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (uHm_3)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (uHm_3)}{\partial y^2} - \rho_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (vHm_2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vHm_3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (vHm_3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (vHm_3)}{\partial x \partial y} + \\
 & + \frac{\partial^2 (\beta_x Hmf_1)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (\beta_x Hmf_3)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hmf_3)}{\partial y^2} - \rho_{mf} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hmf_2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hmf_3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hmf_3)}{\partial x^2} + \\
 & + \frac{\partial^2 (\beta_y Hmf_{33})}{\partial x \partial y} + f_x = 0
 \end{aligned} \tag{1.5.1.1}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 (uHm_2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (uHm_3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (uHm_3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (uHm_{33})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vHm_2)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 (vHm_3)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vHm_3)}{\partial x^2} - \rho_m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \\
 & + \frac{\partial^2 (\beta_x Hmf_2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hmf_{23})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hmf_{33})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hmf_{33})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hmf_{22})}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 (\beta_y Hmf_{23})}{\partial x \partial y} + \\
 & + \frac{\partial^2 (\beta_y Hmf_{33})}{\partial x^2} - \rho_{mf} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} + f_y = 0
 \end{aligned} \tag{1.5.1.2}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 (uHmf_1)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (uHmf_{13})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (uHmf_{33})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (vHmf_{12})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vHmf_{23})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (vHmf_{13})}{\partial x^2} + \\
 & \frac{\partial^2 (vHmf_{33})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{33})}{\partial x \partial y} + H\alpha_2 \beta_y + \frac{\partial (wH\alpha_1)}{\partial x} + \frac{\partial (wH\alpha_2)}{\partial y} - \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_x = 0
 \end{aligned} \tag{1.5.1.3}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{11})}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{13})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{33})}{\partial y^2} + H_{c1} \beta_x + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{12})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{23})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{13})}{\partial x^2} + \\
 & \frac{\partial^2 (uHmf_2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (uHmf_{23})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (uHmf_{13})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (uHmf_3)}{\partial x \partial y} - \rho_{mf} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (vHmf_2)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 (vHmf_3)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vHmf_3)}{\partial x^2} + \\
 & \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{33})}{\partial x \partial y} + \beta_x H_{c2} - \rho_f \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{22})}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{23})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{12})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{23})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{13})}{\partial x^2} + \\
 & + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{33})}{\partial x^2} + \beta_y H_{c2} + \frac{\partial (wH_{c2})}{\partial x} + \frac{\partial (wH_{c2})}{\partial y} + m_y = 0
 \end{aligned} \tag{1.5.1.4}$$

$$\begin{aligned}
 & - \rho_{mf} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial (\beta_x H_{c1})}{\partial x} + \frac{\partial (\beta_x H_{c2})}{\partial y} + \frac{\partial (\beta_y H_{c1})}{\partial x} + \frac{\partial (\beta_y H_{c2})}{\partial y} - \rho_f \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} + \\
 & + \frac{\partial^2 (wH_{c1})}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial (wH_{c1})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (wH_{c2})}{\partial y^2} + f_z = 0
 \end{aligned} \tag{1.5.1.5}$$

1.5.2 Cas isotrope

On a un découplage membrane – flexion. Ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} [H_{mf}] &= [0] \\ \rho_{mf} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5.2.1)$$

Ainsi, les équations précédentes se réduisent à :

$$\frac{\partial^2 (uHm_{11})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (uHm_{33})}{\partial y^2} - \rho_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (vHm_{12})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vHm_{33})}{\partial x \partial y} + f_x = 0 \quad (1.5.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 (uHm_{12})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (uHm_{33})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (vHm_{22})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (vHm_{33})}{\partial x^2} - \rho_m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f_y = 0 \quad (1.5.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{11})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{33})}{\partial y^2} + hc_{11} \beta_x + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{12})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{33})}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha (wHc_{11})}{\partial x} - \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_x = 0 \quad (1.5.2.4)$$

$$+ \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{12})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\beta_x Hf_{33})}{\partial x \partial y} - \rho_r \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{22})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\beta_y Hf_{33})}{\partial x^2} + \beta_y Hc_{22} + \frac{\alpha (wHc_{22})}{\partial y} + m_y = 0 \quad (1.5.2.5)$$

$$\frac{\alpha (\beta_x Hc_{11})}{\partial x} + \frac{\alpha (\beta_y Hc_{22})}{\partial y} - \rho_r \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (wHc_{11})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (wHc_{22})}{\partial y^2} + f_z = 0 \quad (1.5.2.6)$$

Ce qui donne, après substitution :

$$\frac{hE}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{hE}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{hE\nu}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + f_x = 0 \quad (1.5.2.7)$$

$$\frac{hE\nu}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{hE}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{hE}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{hE}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho_m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f_y = 0 \quad (1.5.2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{h^3 E}{24(1+\nu)} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{5hE}{12(1-\nu)} \beta_x + \frac{h^3 E\nu}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} + \frac{h^3 E}{24(1+\nu)} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{5hE}{12(1-\nu)} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_x = 0 \end{aligned} \quad (1.5.2.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^3 E\nu}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + \frac{h^3 E}{24(1+\nu)} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} - \rho_m \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} + \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{h^3 E}{24(1+\nu)} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + \frac{5hE}{12(1-\nu)} \beta_y + \\ & \frac{5hE}{12(1-\nu)} \frac{\partial w}{\partial y} + m_y = 0 \end{aligned} \quad (1.5.2.10)$$

$$\frac{5hE}{12(1-\nu)} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{5hE}{12(1-\nu)} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} - \rho_m \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} + \frac{5hE}{12(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_z = 0 \quad (1.5.2.11)$$

1.6 Conditions de bord ou conditions aux limites

Elles ont pour objet, d'éliminer les mouvements de corps rigide et aussi d'aider à la résolution des équations aux dérivées partielles fondamentales (EDPF). Aussi, elles influencent très fortement la distribution des efforts au voisinage des bords. Dans les cas E1 et SS1 (Mindlin), des variations importantes (couches limites) des efforts résultants sont observées au voisinage des bords pour des plaques avec coins.

Elles sont énumérées dans ce tableau

bord	Conditions aux limites théoriques	Possibilités de variation locale (couche limite)
Encastrement E1	$W = \beta_n = M_n = 0$	Q_s
Encastrement E2	$W = \beta_s = \beta_n = 0$	Q_s
Appui simple SS1	$W = M_n = M_{ns} = 0$	Q_s, Q_n, M_{ns}
Appui simple SS2	$W = \beta_s = M_n = 0$	Q_s, Q_n, M_{ns}
Bord libre	$Q_n = M_n = M_{ns} = 0$	Q_s, Q_n, M_{ns}

Tableau 1 : Conditions limites

1.7 Spécialisation suivant l'hypothèse de Kirchhoff

L'hypothèse de Kirchhoff pour les plaques minces est basée sur celle dite de conservation des normales. Autrement dit, les points matériels situés sur une normale à la surface xy avant déformation restent sur une normale à la surface moyenne déformée. Ce qui permet alors de considérer que la rigidité de cisaillement est très grande par rapport à la rigidité de flexion. Ainsi, les déformations de cisaillement transversal sont négligeables par rapport aux autres composantes :

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + \beta_x = 0 \quad (1.7.1)$$

$$\gamma_{yz} = w_{,y} + \beta_y = 0 \quad (1.7.2)$$

Cette théorie de Kirchhoff traitant du cas des plaques minces peut être interprétée comme un cas particulier de la théorie de Reissner/Mindlin qui, elle, s'intéresse au cas des plaques épaisses. Ainsi, un « bon » modèle élément fini basé sur la théorie de Reissner/Mindlin devra donner des résultats en accord avec la théorie de Kirchhoff si l'influence du cisaillement transversal est négligeable.

1.8 Formulation variationnelle

La méthode des éléments finis est en utilisation constante pour l'obtention des valeurs numériques représentatives des quantités cinématiques (déplacements, déformations) et mécaniques (contraintes) liées à l'équilibre d'un solide soumis à des sollicitations. Cette méthode permet d'obtenir une solution approximative qui satisfait des lois de la physique écrites sous une forme variationnelle.

1.8.1 Equivalence des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels est un modèle fréquemment utilisé en mécanique des solides et structures.

Elle consiste en une traduction, mais sous forme intégrale, de l'équilibre du solide soumis à l'action de forces de volume, f_v et de surface, f_S .

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad (1.8.1.1)$$

Pour le cas des plaques, on a :

$$W_{\text{int}} = \int_A \left(\{e^*\}^T \{N\} + \{\chi^*\}^T \{M\} + \{\gamma^*\}^T \{Q\} \right) dA \quad (1.8.1.2)$$

$$W_{\text{ext}} = \int_A \left(\{u^*\}^T \{f\} + \{\beta^*\}^T \{m\} - \{u^*\}^T \left(\rho_m \frac{\partial^2 \{u\}}{\partial t^2} + \rho_{mf} \frac{\partial^2 \{\beta\}}{\partial t^2} \right) + \right. \\ \left. + \int_{S_f} \left(\{u^*\}^T \{f_s\} + \{\beta^*\}^T \{m_s\} \right) dS \right) \quad (1.8.1.3)$$

$\{u^*\}$ et $\{\beta^*\}$ sont des variables cinématiques virtuelles

Avec les relations suivantes liant les efforts généralisés $\{N\}$, $\{M\}$ et $\{Q\}$ aux déformations $\{e\}$, $\{\chi\}$ et $\{\gamma\}$:

$$\{N\} = [Hm] \{e\} + [Hmf] \{\chi\} + \{N0\} \quad (1.8.1.4)$$

$$\{M\} = [Hmf] \{e\} + [Hf] \{\chi\} + \{M0\} \quad (1.8.1.5)$$

$$\{Q\} = [Hc] \{\gamma\} + \{Q0\} \quad (1.8.1.6)$$

on a, après substitution :

$$\begin{aligned}
 W = & \int_A \left(\{e\}^T ([H_m] \{e\} + [H_{m_f}] \{\chi\}) + \{\chi\}^T ([H_{m_f}] \{e\} + [H_f] \{\chi\}) + \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} \right) dA + \int_A \left(\{e\}^T \{N_0\} + \{\chi\}^T \{M_0\} + \{\gamma\}^T \{Q\} \right) dA \\
 & + \int_A \left(\{u\}^T \{f\} + \{\beta\}^T \{m\} \right) dA - \int_{S_f} \left(\{u\}^T \{f_s\} + \{\beta\}^T \{m_s\} \right) dS + \int_A \left(\{u\}^T \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) + \{\beta\}^T \left(\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) \right) dA
 \end{aligned} \tag{1.8.1.7}$$

Ici, W n'est fonction que de $\{u\}$ et $\{\beta\}$. Il est, en effet, exprimé en fonction des dérivées premières de $\{u\}$ et $\{\beta\}$. Ce qui entraîne l'admissibilité de fonctions de classe C^0 , c'est à dire des fonctions continues dans tout le domaine, aussi bien à l'intérieur que sur les frontières pour les approximations de $\{u\}$ et $\{\beta\}$.

La fonctionnelle π s'écrit

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \frac{1}{2} \int_A \left(\{e\}^T ([H_m] \{e\} + [H_{m_f}] \{\chi\}) + \{\chi\}^T ([H_{m_f}] \{e\} + [H_f] \{\chi\}) + \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} \right) dA + \int_A \left(\{e\}^T \{N_0\} + \{\chi\}^T \{M_0\} + \{\gamma\}^T \{Q\} \right) dA \\
 & - \int_A \left(\{u\}^T \{f\} + \{\beta\}^T \{m\} \right) dA - \int_{S_f} \left(\{u\}^T \{f_s\} + \{\beta\}^T \{m_s\} \right) dS + \int_A \left(\{u\}^T \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) + \{\beta\}^T \left(\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) \right) dA
 \end{aligned} \tag{1.8.1.8}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} \right) dV + \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} dV - \int_A \left(\{u\}^T \{f\} + \{\beta\}^T \{m\} \right) dA - \int_{S_f} \left(\{u\}^T \{f_s\} + \{\beta\}^T \{m_s\} \right) dS \\
 & + \int_A \left(\{u\}^T \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) + \{\beta\}^T \left(\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) \right) dA
 \end{aligned} \tag{1.8.1.9}$$

Les forces sur le bord sont données par :

$$\{f_s\} = \begin{Bmatrix} N_{xn} \\ N_{yn} \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} \tag{1.8.1.10}$$

$$\{m_s\} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.8.1.11}$$

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \\ 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_y & n_x & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{xn} \\ N_{yn} \\ Q_n \\ M_{xn} \\ M_{yn} \end{Bmatrix} \tag{1.8.1.12}$$

\bar{t} représente la traction de bord s'exerçant sur Sf de la forme $\bar{t} = [A]^* \{\sigma\}$, avec les conditions suivantes :

$$\{u\} = \{\bar{u}\}, \{\beta\} = \{\bar{\beta}\}, \{\delta\beta\} = \{0\}, \{\delta u\} = \{0\} \text{ sur Su.}$$

Dans le cas ou $[Hmf] = [0]$ et $\rho mf = 0$, c'est à dire s'il n'y a pas de couplage flexion-membrane, alors ces relations ci-dessus conduisent aux deux problèmes suivants:

A- Membrane

$$W_m = \int_A \left\{ e \right\}^T [H_m] \left\{ e \right\} + \left\{ e \right\}^T [N_0] dA - \int_A (u \dot{f}_x + v \dot{f}_y) dA - \int_{S_f} (u \dot{F}_x + v \dot{F}_y) dS - \int_A \rho_m \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) dA \quad (1.8.1.13)$$

B- Flexion-Cisaillement

$$W_f = \int_A \left\{ \chi \right\}^T [H_f] \left\{ \chi \right\} + \left\{ \gamma \right\}^T [H_c] \left\{ \gamma \right\} dA + \int_A \left\{ \chi \right\}^T \left\{ M_0 \right\} + \left\{ \gamma \right\}^T \left\{ Q_0 \right\} dA - \int_A (w \dot{f}_z + \left\{ \beta \right\}^T \left\{ m \right\}) - w \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left\{ \beta \right\}^T \rho_f \frac{\partial^2 \left\{ \beta \right\}}{\partial t^2} dA - \int_{S_f} (w \dot{F}_z + \left\{ \beta \right\}^T \left\{ ms \right\}) dS = 0 \quad (1.8.1.14)$$

Pour le cas d'un matériau homogène et isotrope, la fonctionnelle Π_f s'écrit :

$$\begin{aligned} \Pi_f = & \frac{1}{2} \int_A \frac{Ekh^3}{12(1-\nu^2)} (\beta_{x,x}^2 + \beta_{y,y}^2 + 2\nu\beta_{x,x}\beta_{y,y} + \frac{1-\nu}{2}(\beta_{x,y} + \beta_{y,x})^2) + \frac{Ekh}{2(1+\nu)} ((w_{,x} + \beta_x)^2 + \\ & + (w_{,y} + \beta_y)^2) dA - \int_A (wfz + \beta_x m_x + \beta_y m_y - w\rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left\{ \beta \right\}^T \rho_f \frac{\partial^2 \left\{ \beta \right\}}{\partial t^2}) dA - \\ & - \int_{S_f} (wFz + \left\{ \beta \right\}^T \left\{ ms \right\}) dS + \int_A (\left\{ \chi \right\}^T \left\{ M_0 \right\} + \left\{ \gamma \right\}^T \left\{ Q_0 \right\}) dA = 0 \quad (1.8.1.15) \end{aligned}$$

1.8.2 Formulation mixte à deux champs (σ, u)

Pour construire la forme W , la relation liant les efforts généralisés aux déformations est réécrite, sous forme inverse, de la manière suivante :

$$\{e\} - [C_m] * \{N\} - [C_{mf}] * \{M\} + \{e_0\} = \{0\} \tag{1.8.2.1}$$

$$\{\chi\} - [C_{mf}] * \{N\} - [C_f] * \{M\} + \{\chi_0\} = \{0\} \tag{1.8.2.2}$$

$$\{\gamma\} - [H_c]^{-1} * \{Q\} + \{\gamma_0\} = \{0\} \tag{1.8.2.3}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} [C_m] & [C_{mf}] \\ [C_{mf}] & [C_f] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_m] & [H_{mf}] \\ [H_{mf}] & [H_f] \end{bmatrix}^{-1} \tag{1.8.2.4}$$

Les déformations initiales sont :

$$\{e_0\} = [C_m] * \{N_0\} + [C_{mf}] * \{M_0\} \tag{1.8.2.5}$$

$$\{\chi_0\} = [C_{mf}] * \{N_0\} + [C_f] * \{M_0\} \tag{1.8.2.6}$$

$$\{\gamma_0\} = [H_c]^{-1} * \{Q_0\} \tag{1.8.2.7}$$

La forme générale est obtenue en ajoutant, à l'expression du P.T.V, les relations précédentes pondérées par $\{N^*\}$, $\{M^*\}$ et $\{Q^*\}$, Ce qui donne :

$$\begin{aligned} W = & \int_A \left\{ \{e^*\}^T \{N\} + \{\chi^*\}^T \{M\} + \{\gamma^*\}^T \{Q\} + \{N^*\}^T \{e\} + \{M^*\}^T \{\chi\} + \{Q^*\}^T \{\gamma\} - \{N^*\}^T ([C_m] \{N\} + [C_{mf}] \{M\} - \{e_0\}) - \right. \\ & \left. \{M^*\}^T ([C_{mf}] \{N\} + [C_f] \{M\} - \{\chi_0\}) - \{Q^*\}^T ([H_c]^{-1} \{Q\} - \{\gamma_0\}) \right\} dA - \int_A \left\{ \{u^*\}^T \{f\} + \{\beta^*\}^T \{m\} \right\} dA - \\ & \int_{S_f} \left\{ \{u^*\}^T \{f_s\} + \{\beta^*\}^T \{m_s\} \right\} dS + \int_A \left\{ \{u^*\}^T \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) + \{\beta^*\}^T \left(\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) \right\} dA \end{aligned} \tag{1.8.2.8}$$

Les approximations seront de classe C^0 pour $\{u\}$ et $\{\beta\}$ et de classe C^{-1} pour $\{N\}$, $\{M\}$ et $\{Q\}$.
 Les fonctions de classe C^0 traduisent des fonctions continues sur tout le domaine, aussi bien à l'intérieur que sur la frontière.

Quant aux fonctions de classe C^{-1} , leur continuité n'est assurée qu'à l'intérieur du domaine et non sur la frontière

Et quant à la fonctionnelle Π , notée Π_{HR} par référence à Hellinger et Reissner, elle s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} = & \int_A (\{e\}^T \{N\} + \{\chi\}^T \{M\} + \{\gamma\}^T \{Q\} - \frac{1}{2} \{N\}^T [C_m] \{N\} - \{N\}^T [C_{mf}] \{M\} - \frac{1}{2} \{M\}^T [C_f] \{M\} - \\ & - \frac{1}{2} \{Q\}^T [H_c] \{Q\} + \{N\}^T \{e_0\} + \{M\}^T \{\chi_0\} + \{Q\}^T \{\gamma_0\}) dA - \int_A (\{u\}^T \{f\} + \{\beta\}^T \{m\}) dA - \\ & - \int_{S_i} (\{u\}^T \{f_s\} + \{\beta\}^T \{m_s\}) dS + \int_A (\{u\}^T (\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\}) + \{\beta\}^T (\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\})) dA \end{aligned} \tag{1.8.2.9}$$

Elle est de la forme :

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} = & \int_V (-\frac{1}{2} \{\sigma\}^T [C] \{\sigma\} + \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} + \{\sigma\}^T [C] \{\varepsilon\}) dV - \int_V \{u\}^T \{f\} dV - \int_{S_j} \{u\}^T \{f_s\} dS + \\ & + \int_A (\{u\}^T (\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\}) + \{\beta\}^T (\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\})) dA \end{aligned} \tag{1.8.2.10}$$

avec les conditions suivantes $\{u\} = \{\bar{u}\}$, $\{\beta\} = \{\bar{\beta}\}$ sur S_u

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} = & \int_A (\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\}) dA - \int_A \{u\}^T \{f_v\} dA - \int_{S_i} \{u\}^T \{f_s\} dS + \int_A (\{u\}^T (\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\}) + \\ & + \{\beta\}^T (\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\})) dA \end{aligned} \tag{1.8.2.11}$$

La variation de la fonctionnelle s'exprime

$$\delta \Pi_{HR} = \sum \delta \Pi_{HR}^{(e)} \quad (1.8.2.12)$$

$$\{\varepsilon\} = [L] \{u\} \quad (1.8.2.13)$$

$$\{u_e\} = [N_e] \{d_e\} \quad (1.8.2.14)$$

$$\{\varepsilon_e\} = [L] [N_e] \{d_e\} \quad (1.8.2.15)$$

$$\delta \Pi_{HR}^{(e)} = \int_V \{\delta u\}^T [L]^T [H] [L] \{u\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{f_v\} dV - \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f_s\} dS + \int_A \{\delta u\}^T [\rho] \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \{u\} dA \quad (1.8.2.15)$$

$$\delta \Pi_{HR}^{(e)} = \int_V \{\delta u\}^T [L]^T [H] [L] \{u\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{f_v\} dV - \int_{S_f} \{\delta u\}^T (\{t\} - \{\bar{t}\}) dS + \int_A \{\delta u\}^T [\rho] \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \{u\} dA \quad (1.8.2.16)$$

La condition de stationnarité s'écrit :

$\delta \Pi_{HR}^{(e)} = 0$, d'après le principe suivant : « Parmi toutes les configurations possibles pour déplacer un système, tout en satisfaisant les conditions cinétiques et frontières, les champs de déplacement qui, en plus, vont satisfaire les équations d'équilibre, rendront alors l'énergie potentielle totale stationnaire. Si cette valeur est un minimum, l'équilibre est stable » .

$$[L]^T [H] [L] \{u\} - \{fv\} = [\rho] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad (1.8.2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} & \{t\} = \{\bar{t}\} = \{fs\} \\ & \{u\} = \{\bar{u}\} \text{ sur } S_u \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Conditions naturelles} \\ \text{Condition essentielle} \end{array} \quad (1.8.2.18)$$

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \text{ sur } S_u \quad \text{Condition essentielle} \quad (1.8.2.19)$$

avec :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}$$

$$\{d_e\}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \beta_{x1} \quad \beta_{y1} \quad \dots \quad u_r \quad v_r \quad w_r \quad \beta_{xr} \quad \beta_{yr}]$$

r désigne ici le nombre de nœuds de l'élément considéré.

1.8.3 Formulation mixte à trois champs (u, σ, ε)

La fonctionnelle Π telle que sa variation en u , σ et ε corresponde à w , en identifiant δu à u* et δσ à ε* , est donnée par :

$$\begin{aligned}
\Pi(u, \sigma, \varepsilon) = & \int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\} \{\sigma_0\} \right) dV - \int_A \left(\{u\}^T \{f\} + \{\beta\}^T \{m\} \right) dA - \int_{S_f} \left(\{u\}^T \{f_s\} + \{\beta\}^T \{m_s\} \right) dS - \\
& - \int_A \left(N_x(e_x - u_{,x}) + N_y(e_y - v_{,y}) + N_{xy}(e_{xy} - u_{,y} - v_{,x}) + M_x(\chi_x - \beta_{x,x}) + M_y(\chi_y - \beta_{y,y}) + \right. \\
& \left. + M_{xy}(\gamma_{xy} - \beta_{x,y} - \beta_{y,x}) + Q_x(\gamma_x - \beta_x - w_{,x}) + Q_y(\gamma_y - \beta_y - w_{,y}) \right) dA - \int_A \{\sigma(n)\}^T (\{u\} - \{\bar{u}\}) dS + \\
& + \int_A \left(\{u\}^T \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) + \{\beta\}^T \left(\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) \right) dA \quad (1.8.3.1)
\end{aligned}$$

Cette fonctionnelle s'écrit sans conditions.

La condition de stationnarité de Π est :

$$W = \delta(\Pi) = 0 \quad (1.8.3.2)$$

1.8.4 Modèle contraintes

Dans le modèle contraintes, on a la fonctionnelle Π qui s'écrit:

$$\begin{aligned}
\Pi(\sigma) = & - \int_V \left(\frac{1}{2} \{\sigma\}^T [C] \{\sigma\} - \{\sigma\}^T [C] \{\sigma_0\} \right) dV + \int_{S_u} \{\sigma(n)\}^T \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{\beta}\} \end{Bmatrix} dS + \int_A \left(\{u\}^T \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) + \right. \\
& \left. + \{\beta\}^T \left(\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) \right) dS \quad (1.8.4.1)
\end{aligned}$$

Ici, la fonctionnelle Π est définie négative et donc la solution du problème correspond à un maximum de Π . Cette expression de Π s'accompagne de la condition $\{\sigma(n)\} = \{f_s\}$ sur SU

$$(1.8.4.2)$$

Cette relation représente l'état de contrainte sur le contours SU de normale extérieure, \bar{n} .

Le théorème du maximum de l'énergie potentielle totale stipule que « Parmi tous les champs de contraintes statiquement admissibles, celui qui est solution du problème correspond à un maximum de l'énergie potentielle totale complémentaire ».

Chapitre 2 : TOPOLOGIE DE DIFFERENTS ELEMENTS

2.1 Elément linéique

2.1.1 Types H

Suivant le nombre de nœuds dont dispose l'élément, on a deux types d'interpolation :

2.1.1.1 Interpolation linéaire (iso paramétrique)

L'élément considéré est ici linéaire et à deux nœuds.

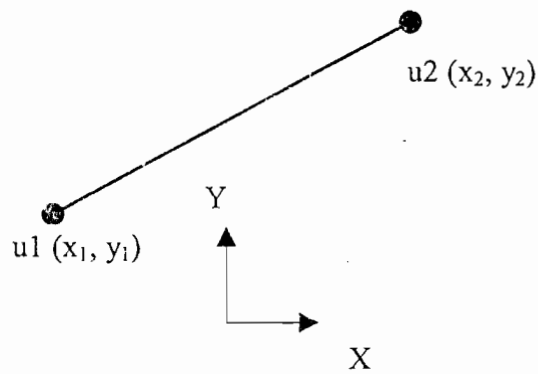


Fig.2.1 : Elément réel à deux nœuds

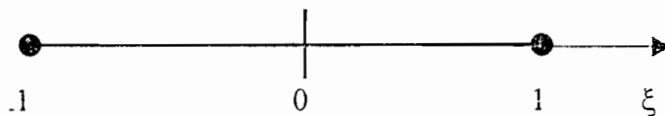


Fig.2.2 : Elément de référence

La position x d'un point quelconque de l'élément de référence est définie par :

$$x(\xi) = \bar{N}_1 * x_1 + \bar{N}_2 * x_2 \quad (2.1.1.1.1)$$

$$x(\xi) = [\bar{N}] * \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad y(\xi) = [\bar{N}] * \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (2.1.1.1.2)$$

avec :

$$[\bar{N}] = [\bar{N}_1 \quad \bar{N}_2] \quad (2.1.1.1.3)$$

On a aussi :

$$[G] = [1 \quad \xi] \quad \text{et} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.1.4)$$

Par suite,

$$[\bar{N}] = \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \quad \frac{1}{2}(1+\xi) \right] \quad (2.1.1.1.5)$$

$$\bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 1 \quad \text{pour} \quad \forall \xi \in [-1 \quad 1],$$

La matrice $[B]$ sera donnée par :

$$[B] = [L] * [N] \quad (2.1.1.1.6)$$

2.1.1.2 Interpolation quadratique

Elément à 3 nœuds.

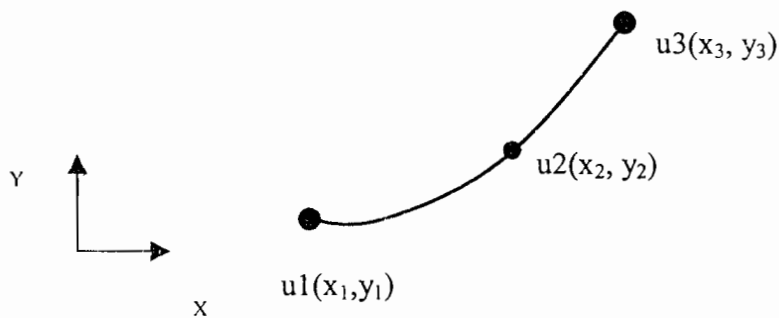


Fig.2.3 : Élément réel

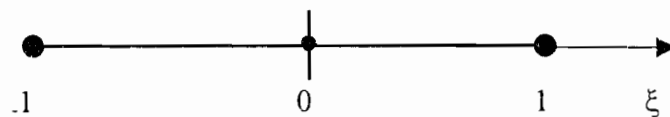


Fig.2.4 : Élément de référence

On a:
$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.1.1.2.1)$$

$$[N] = [G][C]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2}(1-\xi) & 1-\xi^2 & \frac{1}{2}(1+\xi)\xi \end{bmatrix} \quad (2.1.1.2.2)$$

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3], \quad (2.1.1.2.3)$$

avec :

$$N_1 = -\frac{\xi}{2}(1-\xi) \quad ; \quad N_2 = 1-\xi^2 \quad \text{et} \quad N_3 = \frac{1}{2}(1+\xi)\xi \quad \xi \in [-1 \ 1] \quad (2.1.1.2.4)$$

Ce qui peut se résumer par le tableau ci-après:

i	N _i	N _{i,ξ} = $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$
1	$N_1 = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)$	$\frac{1}{2}(2\xi-1)$
2	$N_2 = 1-\xi^2$	-2ξ
3	$N_3 = \frac{1}{2}(1+\xi)\xi$	$\frac{1}{2}(2\xi+1)$

Tableau 2 : Fonctions d'interpolation de type H de l'élément linéaire à trois nœuds

$$x(\xi) = [N] * \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad y(\xi) = [N] * \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad (2.1.1.2.5)$$

La matrice [B] sera donnée par :

$$[B] = [L] * [N] \quad (2.1.1.2.6)$$

2.1.2 Type P

On considère que l'élément à une dimension est ici à nœud central a degré de liberté variable.

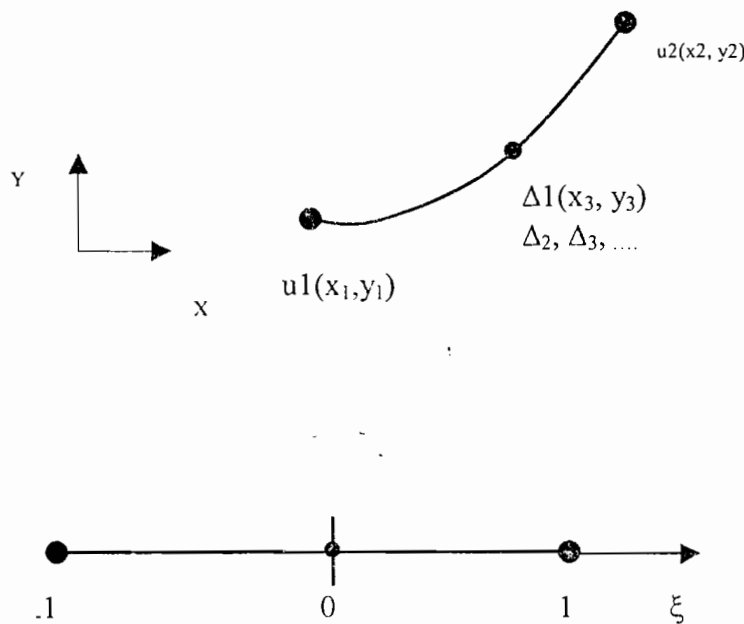


Fig.2.5 : Elément linéaire à trois nœuds (Type P)

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \text{et} \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (2.1.2.1)$$

$$N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, p+1. \quad (2.1.2.2)$$

$$\phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, p+1 ; \quad (2.1.2.3)$$

P_{j-1} est un polynôme de Legendre, solution de l'équation différentielle:

$$(1-x^2) * y'' - 2 * x * y' + n * (n+1) * y = 0 \tag{2.1.2.4}$$

Certaines de ces solutions sont ici données pour différentes valeurs de n

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_3(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

$$\tag{2.1.2.5}$$

2.2 Elément triangulaire

2.2.1 Elément triangulaire à trois nœuds

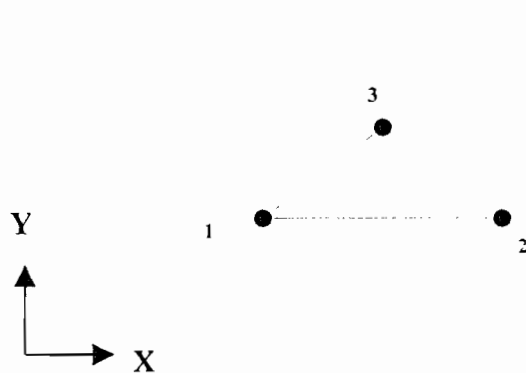


Fig.2.6 :Elément réel

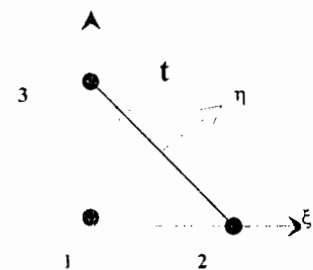


Fig.2.7 ; Elément de référence

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.1.1}$$

$$[N] = [1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta] \tag{2.2.1.2}$$

Considérant les degrés de liberté u et v au niveau de chaque nœud (cas membranaire), on a les déformations dans le plan xy qui s'écrivent :

$$\{\mathcal{E}\} = \begin{Bmatrix} u,x \\ v,y \\ u,y+v,x \end{Bmatrix} = [B_e] \{u_n\} \tag{2.2.1.3}$$

Avec

$$\{u_n\} = \begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \end{Bmatrix} \quad [B_e] = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y3 - y2 & 0 & y1 - y3 & 0 & y2 - y1 & 0 \\ 0 & x2 - x3 & 0 & x3 - x1 & 0 & x1 - x2 \\ x2 - x3 & y3 - y2 & x3 - x1 & y1 - y3 & x1 - x2 & y2 - y1 \end{bmatrix} \tag{2.2.1.4}$$

Ou le jacobien $|J| = (y1-y3)(x1-x2) - (x1-x3)(y1-y2)$ (2.2.1.5)

La matrice de raideur est :

$$[k_e] = [B_e]^T \left(\int_0^1 \int_0^{1-\xi} [H_m] d\eta d\xi \right) [B_e] |J| \tag{2.2.1.6}$$

Et la matrice masse

$$m = \rho_m * \frac{|J|}{24} * \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.2.1.7}$$

2.2.2 Elément triangulaire à six nœuds

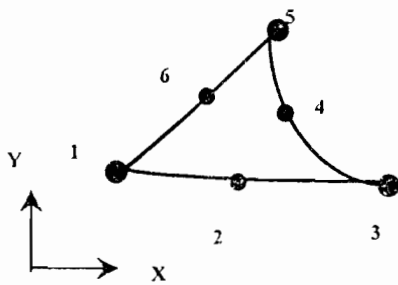


Fig.2.8 : Elément réel

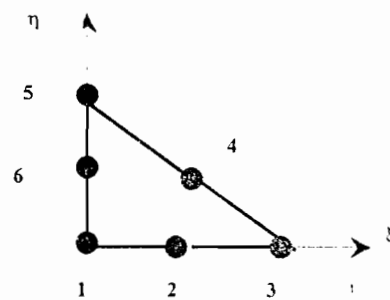


Fig.2.9 : Elément de référence

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{2.2.2.1}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) & N_3 &= \xi(2\xi-1) & N_5 &= \eta(2\eta-1) \\ N_2 &= 4\xi(1-\xi-\eta) & N_4 &= 4\xi\eta & N_6 &= 4\eta(1-\xi-\eta) \end{aligned} \tag{2.2.2.3}$$

2.2.3 Elément triangulaire à dix nœuds

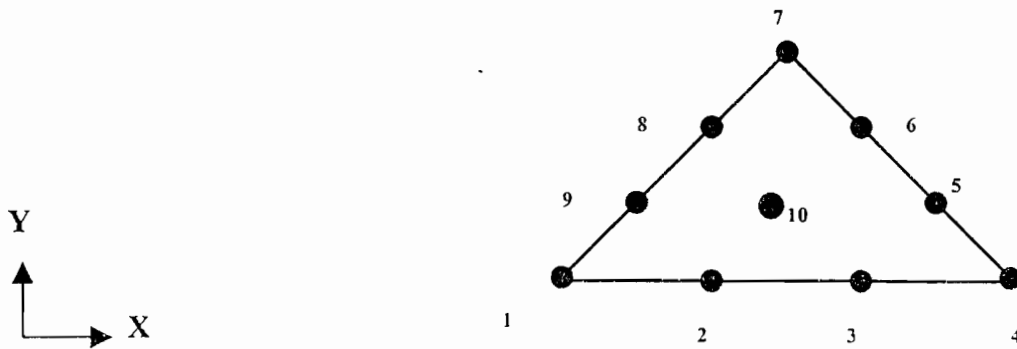


Fig.2.10 : Elément de référence

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 \end{bmatrix} \tag{2.2.3.1}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix} \tag{2.2.3.2}$$

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi-\eta)(2-3\xi-3\eta)(1-3\xi-3\eta)$$

$$N_6 = \frac{9}{2}\xi\eta(3\eta-1)$$

$$N_2 = \frac{9\xi}{2}(1-\xi-\eta)(2-3\xi-3\eta)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}\eta(9\eta^2-9\eta+2)$$

$$\begin{aligned}
 N_3 &= \frac{9\xi}{2}(1-\xi-\eta)(3\xi-1) & N_8 &= \frac{9}{2}\eta(1-\xi-\eta)(3\eta-1) \\
 N_4 &= \frac{\xi}{2}(3\xi-1)(3\xi-2) & N_9 &= \frac{9}{2}\eta(1-\xi-\eta)(2-3\xi-3\eta) \\
 N_5 &= \frac{9}{2}\xi\eta(3\xi-1) & N_{10} &= 27\xi\eta(1-\xi-\eta)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.3.3}$$

2.3 Elément rectangulaire

2.3.1 Types H

2.3.1.1 Elément rectangulaire à quatre nœuds - interpolation linéaire

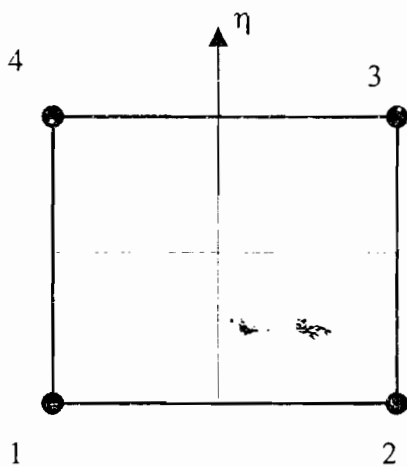


Fig.2.11 : Elément de référence

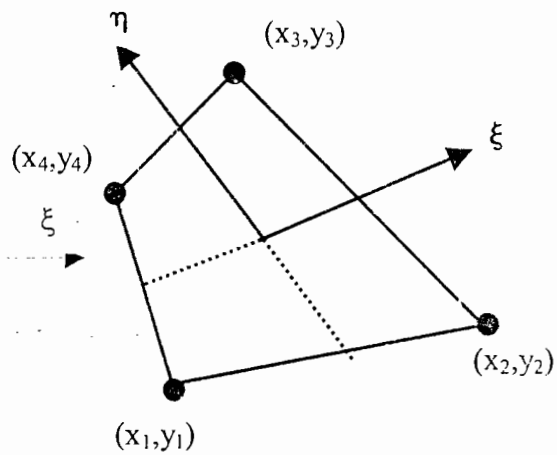


Fig.2.12 : Elément réel

$$[N] = \left[\begin{array}{cccc} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{array} \right]
 \tag{2.3.1.1.1}$$

$$[N] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \times \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.3.1.1.2)$$

e t donc

$$[C] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.3.1.1.2)$$

La matrice $[B_e]$ est donnée par

$$[B_e] = [L] * [N_e] \quad (2.3.1.1.3)$$

Avec

$$[N_e] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), 0, 0, 0, 0 \\ 0, \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \quad (2.3.1.1.4)$$

$[L]$ est ici fonction de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, alors que $N1$, $N2$, $N3$ et $N4$ sont fonctions de

ξ et η . Donc, la définition d'une matrice dite jacobienne s'impose.

Elle est donnée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{2.3.1.1.5}$$

avec :

$$x_{,\xi} = J_{11} = [N_{,\xi}]^T \{x_n\} \quad ; \quad x_{,\eta} = J_{21} = [N_{,\eta}]^T \{x_n\} \tag{2.3.1.1.6}$$

$$y_{,\xi} = J_{12} = [N_{,\xi}]^T \{y_n\} \quad ; \quad y_{,\eta} = J_{22} = [N_{,\eta}]^T \{y_n\} \tag{2.3.1.1.7}$$

$$J_{11} = \frac{(\eta-1)}{4}x_1 + \frac{(1-\eta)}{4}x_2 + \frac{(1+\eta)}{4}x_3 - \frac{(1+\eta)}{4}x_4 \quad ; \quad J_{12} = \frac{(\eta-1)}{4}y_1 + \frac{(1-\eta)}{4}y_2 + \frac{(1+\eta)}{4}y_3 - \frac{(1+\eta)}{4}y_4$$

$$J_{21} = \frac{(\xi-1)}{4}x_1 - \frac{(1+\xi)}{4}x_2 + \frac{(1+\xi)}{4}x_3 - \frac{(1-\xi)}{4}x_4 \quad ; \quad J_{22} = \frac{1}{4}(\xi-1)y_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)y_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)y_3 - \frac{1}{4}(1-\xi)y_4$$

(2.3.1.1.8)

La matrice jacobienne est alors :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\eta-1)x_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)x_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)x_4 & \frac{1}{4}(\eta-1)y_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)y_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)y_4 \\ \frac{1}{4}(\xi-1)x_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)x_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)x_3 - \frac{1}{4}(1-\xi)x_4 & \frac{1}{4}(\xi-1)y_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)y_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)y_3 - \frac{1}{4}(1-\xi)y_4 \end{bmatrix}$$

(2.3.1.1.9)

$$[J] = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} \eta-1 & 1-\eta & 1+\eta & -1-\eta \\ \xi-1 & -1-\xi & 1+\xi & \xi-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \\ x3 & y3 \\ x4 & y4 \end{bmatrix} \tag{2.3.1.1.10}$$

$$|J| = -\frac{1}{8}x_3\eta y_1 - \frac{1}{8}x_4 y_3 \xi + \frac{1}{8}x_4 \eta y_1 + \frac{1}{8}x_2 y_3 \xi + \frac{1}{8}x_2 \eta y_1 + \frac{1}{8}x_3 y_1 \xi - \frac{1}{8}x_3 y_2 \xi - \frac{1}{8}x_1 \eta y_4 - \frac{1}{8}x_1 \eta y_2$$

$$+ \frac{1}{8}x_3 y_4 \xi + \frac{1}{8}x_1 \eta y_3 - \frac{1}{8}x_1 y_3 \xi + \frac{1}{8}x_1 \eta y_4 \xi - \frac{1}{8}x_2 \eta y_4 \xi + \frac{1}{8}x_3 \eta y_4 \xi - \frac{1}{8}x_4 \eta y_1 \xi$$

$$+ \frac{1}{8}x_4 \eta y_2 \xi - \frac{1}{8}x_4 \eta y_3 \xi + \frac{1}{8}x_1 y_2 - \frac{1}{8}x_2 y_1 + \frac{1}{8}x_2 y_3 - \frac{1}{8}x_2 y_4 - \frac{1}{8}x_3 y_2 + \frac{1}{8}x_4 y_2$$

(2.3.1.1.11)

$$\begin{aligned}
 [J]^{-1} = & [-2(y/\xi - y/1 - y/2 - y/2\xi + y/3 + y/3\xi - y/4 + y/4\xi)(-x/2\eta y/1 - x/3y/4\xi - x/2y/3\xi + x/1y/3\xi - x/1\eta y/3 \\
 & - x/3y/1\xi + x/3y/2\xi + x/4y/3\xi - x/4\eta y/1 + x/1\eta y/4 + x/3\eta y/1 + x/1\eta y/2 - x/1y/2 + x/2y/1 - x/2y/3 + x/2y/4 \\
 & + x/3y/2 - x/4y/2 - x/1\eta y/4\xi + x/2\eta y/4\xi - x/3\eta y/4\xi + x/4\eta y/1\xi - x/4\eta y/2\xi + x/4\eta y/3\xi), 2(\\
 & y/1\eta - y/1 + y/2 - y/2\eta + y/3 + y/3\eta - y/4 - y/4\eta)(-x/2\eta y/1 - x/3y/4\xi - x/2y/3\xi + x/1y/3\xi - x/1\eta y/3 \\
 & - x/3y/1\xi + x/3y/2\xi + x/4y/3\xi - x/4\eta y/1 + x/1\eta y/4 + x/3\eta y/1 + x/1\eta y/2 - x/1y/2 + x/2y/1 - x/2y/3 + x/2y/4 \\
 & + x/3y/2 - x/4y/2 - x/1\eta y/4\xi + x/2\eta y/4\xi - x/3\eta y/4\xi + x/4\eta y/1\xi - x/4\eta y/2\xi + x/4\eta y/3\xi)] \\
 & [2(x/\xi - x/1 - x/2 - x/2\xi + x/3 + x/3\xi - x/4 + x/4\xi)(-x/2\eta y/1 - x/3y/4\xi - x/2y/3\xi + x/1y/3\xi - x/1\eta y/3 \\
 & - x/3y/1\xi + x/3y/2\xi + x/4y/3\xi - x/4\eta y/1 + x/1\eta y/4 + x/3\eta y/1 + x/1\eta y/2 - x/1y/2 + x/2y/1 - x/2y/3 + x/2y/4 \\
 & + x/3y/2 - x/4y/2 - x/1\eta y/4\xi + x/2\eta y/4\xi - x/3\eta y/4\xi + x/4\eta y/1\xi - x/4\eta y/2\xi + x/4\eta y/3\xi), -2(\\
 & x/1\eta - x/1 + x/2 - x/2\eta + x/3 + x/3\eta - x/4 - x/4\eta)(-x/2\eta y/1 - x/3y/4\xi - x/2y/3\xi + x/1y/3\xi - x/1\eta y/3 \\
 & - x/3y/1\xi + x/3y/2\xi + x/4y/3\xi - x/4\eta y/1 + x/1\eta y/4 + x/3\eta y/1 + x/1\eta y/2 - x/1y/2 + x/2y/1 - x/2y/3 + x/2y/4 \\
 & + x/3y/2 - x/4y/2 - x/1\eta y/4\xi + x/2\eta y/4\xi - x/3\eta y/4\xi + x/4\eta y/1\xi - x/4\eta y/2\xi + x/4\eta y/3\xi)]
 \end{aligned}$$

(2.3.1.1.12)

{x_n} et {y_n} sont respectivement les vecteurs abscisses et ordonnées des nœuds.

On a

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

(2.3.1.1.13)

On peut ainsi effectuer le calcul de [B_e]

$$[B_e] = [A] \begin{bmatrix} \eta - 1 & 0 & 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 & -1 - \eta & 0 \\ \xi - 1 & 0 & -1 - \xi & 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi & 0 \\ 0 & \eta - 1 & 0 & 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 & -1 - \eta \\ 0 & \xi - 1 & 0 & -1 - \xi & 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi \end{bmatrix}$$

(2.3.1.1.14)

avec

$$\begin{aligned}
 [A] = & \left[\frac{1}{4}(\eta - 1)x/1 + \frac{1}{4}(1 - \eta)x/2 + \frac{1}{4}(1 + \eta)x/3 - \frac{1}{4}(1 + \eta)x/4, \frac{1}{4}(\eta - 1)y/1 + \frac{1}{4}(1 - \eta)y/2 + \frac{1}{4}(1 + \eta)y/3 - \frac{1}{4}(1 + \eta)y/4, 0, 0 \right] \\
 & \left[0, 0, \frac{1}{4}(\xi - 1)x/1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)x/2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)x/3 - \frac{1}{4}(1 - \xi)x/4, \frac{1}{4}(\xi - 1)y/1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)y/2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)y/3 - \frac{1}{4}(1 - \xi)y/4 \right] \\
 & \left[\frac{1}{4}(\xi - 1)x/1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)x/2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)x/3 - \frac{1}{4}(1 - \xi)x/4, \frac{1}{4}(\xi - 1)y/1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)y/2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)y/3 - \frac{1}{4}(1 - \xi)y/4, \right. \\
 & \left. \frac{1}{4}(\eta - 1)x/1 + \frac{1}{4}(1 - \eta)x/2 + \frac{1}{4}(1 + \eta)x/3 - \frac{1}{4}(1 + \eta)x/4, \frac{1}{4}(\eta - 1)y/1 + \frac{1}{4}(1 - \eta)y/2 + \frac{1}{4}(1 + \eta)y/3 - \frac{1}{4}(1 + \eta)y/4 \right]
 \end{aligned}$$

(2.3.1.1.15)

2.3.1.2 Élément rectangulaire à huit nœuds: interpolation quadratique

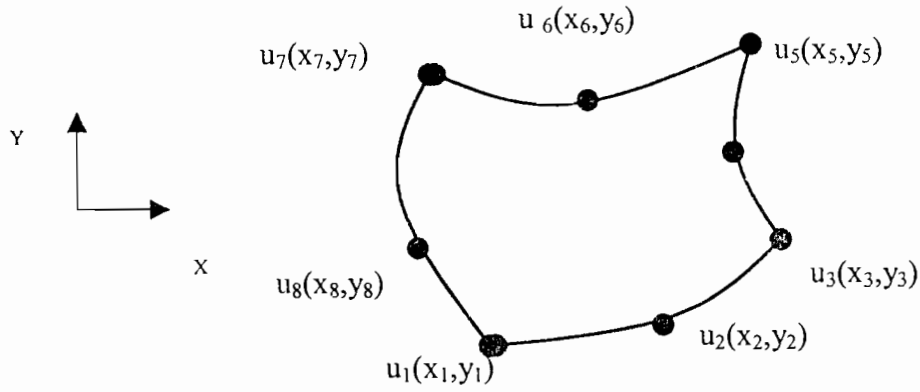


Fig.2.13 : Élément réel

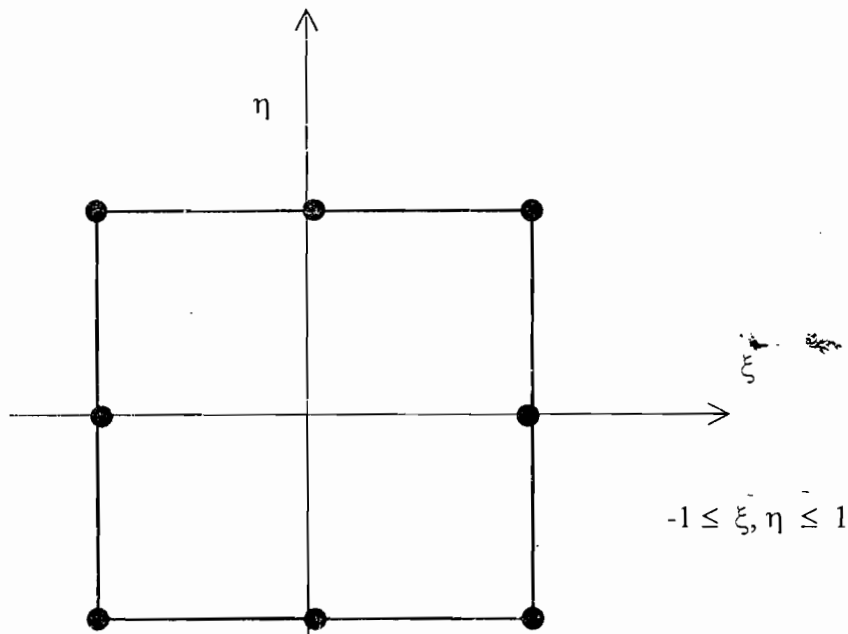


Fig.2.14 : Élément de référence

$$N_1 = \frac{1}{4}(-1-\xi-\eta)(1-\eta)(1-\xi) \quad N_5 = \frac{1}{4}(-1+\xi+\eta)(1+\eta)(1+\xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$\begin{aligned}
 N_3 &= \frac{1}{4}(-1+\xi-\eta)(1-\eta)(1+\xi) & N_7 &= \frac{1}{4}(-1-\xi+\eta)(1+\eta)(1-\xi) \\
 N_4 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.1.2.1}$$

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8]
 \tag{2.3.1.2.2}$$

$$[N] = [1 \ \xi \ \eta \ \xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2 \ \xi^2\eta \ \xi\eta^2] [C]^{-1}
 \tag{2.3.1.2.3}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -1 & \frac{-4}{3} & 1 & 1 & \frac{4}{3} & -1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{-4}{3} & 1 & -1 & \frac{4}{3} & -1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 1 & \frac{4}{3} & 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 1 & -1 & \frac{4}{3} & 1 & -1 \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{-1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{2.3.1.2.4}$$

2.3.1.3 Elément rectangulaire à neuf nœuds: interpolation quadratique

A- Justification du choix de l'élément et études préliminaires

Il a été prouvé, lors de recherches récentes, que les éléments les plus efficaces pour traiter le problème des plaques sont les éléments Q9 et Q16 (interpolations quadratique et cubique complète). Cependant, il faut noter que, même s'ils donnent d'assez bons résultats, ces derniers se détériorent dès qu'il y'a introduction d'une distorsion dans les maillages [2] où lorsque les nœuds internes sont légèrement décalés de leur position de référence [3].

D'ou l'intérêt , si toutefois on veut s'attendre à de bons résultats de la part de ces éléments, de veiller à ce qu' aucune distorsion ne soit présente dans le maillage. C'est là, une condition nécessaire pour éviter le phénomène du verrouillage numérique (ou blocage en cisaillement transversal).

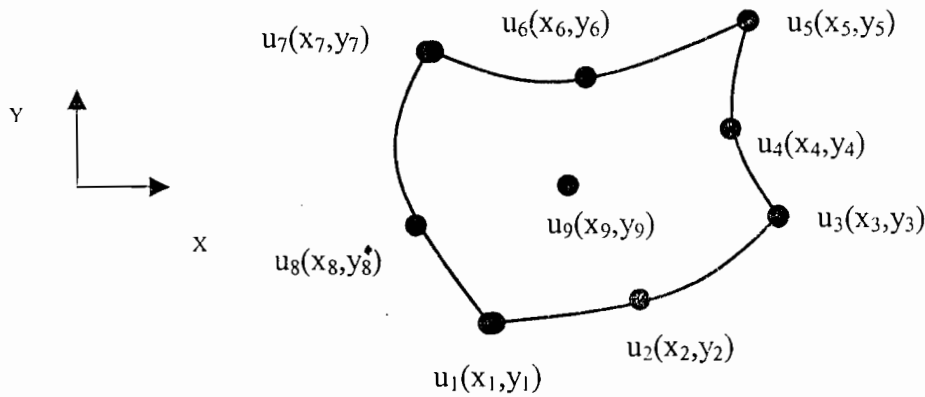


Fig.2.15 : Elément réel

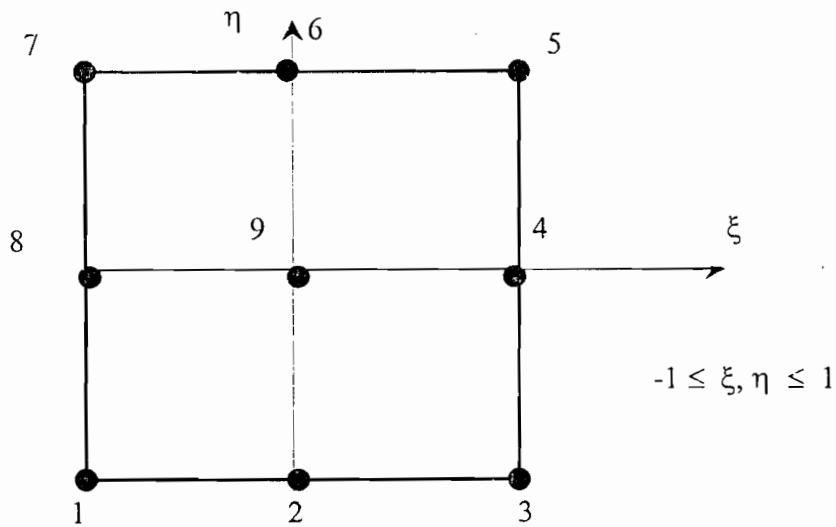


Fig.2.16 :Elément de référence

Les fonctions d'interpolation de l'élément sont données en annexe .

$$[N] = [G] * [C]^{-1}$$

$$[G] = [1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \zeta\eta \quad \eta^2 \quad \zeta^2\eta \quad \zeta\eta^2 \quad \zeta^2\eta^2] \tag{2.3.1.3.1}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.1.3.2}$$

Les nombreuses expériences menées jusqu'ici ont permis de se rendre compte de l'adaptation de cet élément aux éventuels problèmes de distorsion et de verrouillage qui pourraient survenir lors du développement [2]. D'où l'intérêt de son étude.

La relation force_ déplacement est exprimée par :

$$\{r_e\} = [k_e] \{d_e\} + \{r_e\} \tag{2.3.1.3.3}$$

avec la matrice de raideur donnée par :

$$[k_e] = \int_A [B_e]^T [H] [B_e] dA \tag{2.3.1.3.4}$$

$$\{d_e\}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \beta_{x1} \quad \beta_{y1} \quad . \quad . \quad . \quad \beta_{x9} \quad \beta_{y9}] \tag{2.3.1.3.5}$$

$\{d_e\}$ est le vecteur des déplacements nodaux

B- Matrice de transformation géométrique

Elle est donnée par :

$$[L] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad [6] \quad (2.3.1.3.6)$$

avec λ , matrice 3x3 donnée par :

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yr} & \lambda_{yz} \\ 0 & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3.1.3.7)$$

En posant

$$l = \sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

$$\lambda_{yr} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$$

$$\lambda_{zz} = -\frac{z_j - z_i}{l}$$

$$\lambda_{zy} = \frac{z_j - z_i}{l}$$

$$\lambda_{zz} = \frac{y_j - y_i}{l}$$

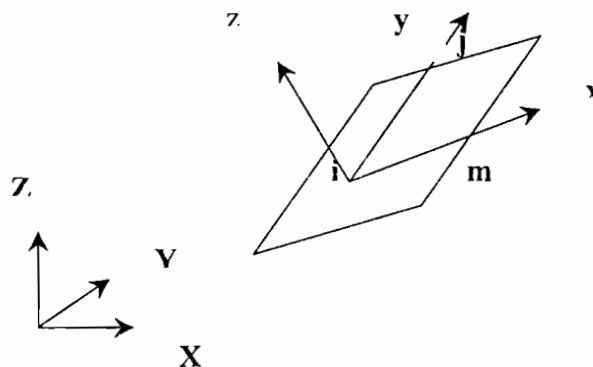


Fig.2.17 : Transformation de coordonnées

C- Forces équivalentes aux nœuds

Elles sont données par :

$$\{f_e\} = \int_A [N_e]^T \{f_v\} dA + \int_{S_i} [N_e]^T \{\bar{t}\} dS - \int_A [N_e]^T [\rho] \frac{\partial^2 ([N_e] \{d_e\})}{\partial t^2} dA \quad [1] \quad (2.3.1.3.8)$$

$\{f_e\}$ représente le vecteur des forces équivalentes élémentaires dues aux forces de volume, $\{f_v\}$ et de surface, $\{f_s\} = \{\bar{t}\}$.

$$\{f_e\} = \int_A [N_e]^T \{f_v\} dA + \int_{S_i} [N_e]^T \{\bar{t}\} dS - \frac{\partial^2 (\{d_e\})}{\partial t^2} \int_A [N_e]^T [\rho] [N_e] dA$$

Cette expression est justifiée à l'annexe A.

$$\{f_e\} = \int_A [N_e]^T \{f_v\} dA + \int_{S_i} [N_e]^T \{\bar{t}\} dS - \frac{\partial^2 (\{d_e\})}{\partial t^2} [m] \quad (2.3.1.3.9)$$

$$\text{avec } [m] = \int_A [N_e]^T [\rho] [N_e] dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_e]^T [\rho] [N_e] J d\xi d\eta \quad (2.3.1.3.10)$$

$[m]$ désigne la matrice de masse .

$\{f_\sigma\}$ = vecteur des forces équivalentes dues aux contraintes initiales et contraintes thermiques.

$$\{f_\sigma\} = - \int_A [B_e]^T \{\sigma_0\} dA \quad [1] \quad (2.3.1.3.11)$$

Pour un matériau orthotrope,

$$\{\sigma_0\} = - [T]^T [H_L] \begin{Bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.1.3.12)$$

Avec $[T]$ donné par (1.4.2.6) et $[H_L]$ par (1.4.2.1)

α_L et α_T sont les coefficients de dilatation thermique dans les directions d'orthotropie, L et T ; ΔT représente la variation de température

Pour un matériau homogène et isotrope, on a $\{\sigma_0\} = \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ (2.3.1.3.13)

C-1 Chargement plan constant

On considère une charge surfacique constante, P agissant dans le plan de l'élément. P peut être décomposé en deux composantes, Px et Py .

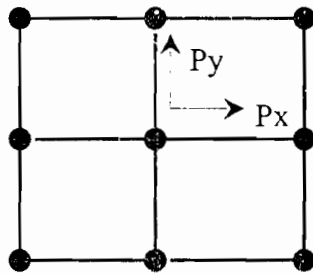


Fig.2.18: Élément soumis à une charge surfacique constante, P .

Le vecteur des forces équivalentes aux nœuds est donné par :

$$\{f_{s_x}\}_{eq} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_e]^T P_x |J| d\xi d\eta = C_1 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_e]^T |J| d\xi d\eta$$

$$\{f_{s_y}\}_{eq} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_e]^T P_y |J| d\xi d\eta = C_2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_e]^T |J| d\xi d\eta \tag{2.3.1.3.14}$$

avec : $P_x = C_1$ et $P_y = C_2$

soit $\{f_{s_x}\}_{eq} = C_1 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9]^T |J| d\xi d\eta$

$$\{f_{s_y}\}_{eq} = C_2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9]^T |J| d\xi d\eta \tag{2.3.1.3.15}$$

C-2 Chargement vertical constant

On suppose l'élément soumis à une charge surfacique verticale, P_w .

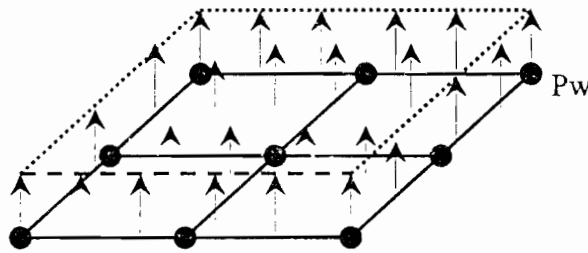


Fig.2.19 : Elément soumis à une charge surfacique uniforme. P_w .

Le vecteur des forces équivalentes aux nœuds devient :

$$\{f_s\}_{eq} = P_w \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9] |J| d\xi d\eta \quad (2.3.1.3.16)$$

Pour étudier cet élément quadrilatéral à neuf nœuds, on considère un découplage membrane-flexion.

C-3 Chargement linéaire surfacique

La charge surfacique considérée, P est décomposable en trois charges, P_x , P_y et P_w respectivement suivant les directions x , y et z .

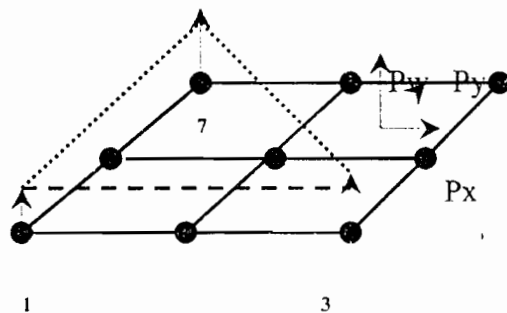


Fig.2.20 : Elément soumis à un chargement linéaire quelconque

Ce qui permet de définir le vecteur des forces équivalentes aux nœuds par :

$$\begin{aligned}
 \{f_{s_x}\}_{eq} &= P_x \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9]^T |J| d\xi d\eta \\
 \{f_{s_y}\}_{eq} &= P_y \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9]^T |J| d\xi d\eta \\
 \{f_{s_w}\}_{eq} &= P_w \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9]^T |J| d\xi d\eta
 \end{aligned}
 \tag{2.3.1.3.17}$$

$$\{f_s\}_{eq} = \begin{Bmatrix} \{f_{s_x}\}_{eq} \\ \{f_{s_y}\}_{eq} \\ \{f_{s_w}\}_{eq} \end{Bmatrix} ; \quad \{P(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_w \end{Bmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta
 \tag{2.3.1.3.18}$$

$$\{P(-1, -1)\} = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = P_1$$

$$\{P(+1, -1)\} = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = P_3$$

$$\{P(-1, +1)\} = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = P_7$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_7 \end{Bmatrix}$$

et donc, on a :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P_3+P_7}{2} \\ \frac{P_3-P_7}{2} \\ \frac{P_7-P_3}{2} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{P(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_w \end{Bmatrix} = \frac{P_3+P_7}{2} + \frac{P_3-P_7}{2}\xi + \frac{P_7-P_3}{2}\eta \quad (2.3.1.3.19)$$

C-4 Chargement volumique

La charge à considérer est la charge volumique, γ due au poids.

Ainsi, le vecteur des charges équivalentes aux nœuds a pour expression :

$$\{f\}_{\text{éq}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho g [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9]^T |J| d\xi d\eta h \quad (2.3.1.3.20)$$

D- Les différents cas d'étude

D-1 Cas membrane

L'élément compte deux degrés de liberté par nœud, qui sont u et v .

$$[L] = \begin{bmatrix} Dx & 0 \\ 0 & Dy \\ Dy & Dx \end{bmatrix} \quad (2.3.1.3.21)$$

$$[B] = [L][N] = [B_m],$$

matrice de 3×18 : (9 nœuds de 2 ddl chacun)

avec $[N]$ donnée par les expressions ci-dessous :

$$N_{1,1} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta$$

$$N_{1,3} = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta$$

$$N_{1,5} = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta$$

$$N_{1,7} = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$N_{1,9} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta$$

$$N_{1,11} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta$$

$$N_{1,13} = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta$$

$$N_{1,15} = -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$N_{1,17} = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

$$N_{2,2} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta$$

$$N_{2,4} = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta$$

$$N_{2,6} = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta$$

$$N_{2,8} = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$N_{2,10} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta$$

$$N_{2,12} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta$$

$$N_{2,14} = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta$$

$$N_{2,16} = -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$N_{2,18} = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

Tous les autres termes de la matrice sont nuls

La matrice de raideur est $[km]$, donnée par :

$$[km] = [B_m]^T \left(\int_{-l-l}^{l+l} [H_m] d\eta d\xi \right) [B_m] |J| \quad (2.3.1.3.22)$$

D-2 Cas flexion avec cisaillement transversal

Dans ce cas, l'élément dispose de trois degrés de liberté par nœuds, à savoir : w , β_x et β_y .

La matrice $[L]$ est donnée par :

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & Dx & 0 \\ 0 & 0 & Dy \\ 0 & Dy & Dx \\ Dx & 1 & 0 \\ Dy & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.1.3.23)$$

La matrice jacobienne est :

$$\begin{aligned}
 [J] = & \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4} \eta (-1 + \eta) (2 \xi - 1) x^1 - (-1 + \eta) \xi \eta x^2 + \frac{1}{4} \eta (-1 + \eta) (2 \xi + 1) x^3 \\ & - \frac{1}{2} (-1 + \eta) (1 + \eta) (2 \xi + 1) x^4 + \frac{1}{4} \eta (1 + \eta) (2 \xi + 1) x^5 - (1 + \eta) \xi \eta x^6 \\ & + \frac{1}{4} \eta (1 + \eta) (2 \xi - 1) x^7 - \frac{1}{2} (-1 + \eta) (1 + \eta) (2 \xi - 1) x^8 + 2 (-1 + \eta) (1 + \eta) \xi x^9, \\ & \frac{1}{4} \eta (-1 + \eta) (2 \xi - 1) y^1 - (-1 + \eta) \xi \eta y^2 + \frac{1}{4} \eta (-1 + \eta) (2 \xi + 1) y^3 \\ & - \frac{1}{2} (-1 + \eta) (1 + \eta) (2 \xi + 1) y^4 + \frac{1}{4} \eta (1 + \eta) (2 \xi + 1) y^5 - (1 + \eta) \xi \eta y^6 \\ & + \frac{1}{4} \eta (1 + \eta) (2 \xi - 1) y^7 - \frac{1}{2} (-1 + \eta) (1 + \eta) (2 \xi - 1) y^8 + 2 (-1 + \eta) (1 + \eta) \xi y^9 \end{aligned} \right] \\
 & \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4} \xi (2 \eta - 1) (-1 + \xi) x^1 - \frac{1}{2} (-1 + \xi) (1 + \xi) (2 \eta - 1) x^2 + \frac{1}{4} \xi (2 \eta - 1) (1 + \xi) x^3 \\ & - (1 + \xi) \xi \eta x^4 + \frac{1}{4} \xi (2 \eta + 1) (1 + \xi) x^5 - \frac{1}{2} (-1 + \xi) (1 + \xi) (2 \eta + 1) x^6 \\ & + \frac{1}{4} \xi (2 \eta + 1) (-1 + \xi) x^7 - (-1 + \xi) \xi \eta x^8 + 2 (-1 + \xi) (1 + \xi) \eta x^9, \frac{1}{4} \xi (2 \eta - 1) (-1 + \xi) y^1 \\ & - \frac{1}{2} (-1 + \xi) (1 + \xi) (2 \eta - 1) y^2 + \frac{1}{4} \xi (2 \eta - 1) (1 + \xi) y^3 - (1 + \xi) \xi \eta y^4 \\ & + \frac{1}{4} \xi (2 \eta + 1) (1 + \xi) y^5 - \frac{1}{2} (-1 + \xi) (1 + \xi) (2 \eta + 1) y^6 + \frac{1}{4} \xi (2 \eta + 1) (-1 + \xi) y^7 \\ & - (-1 + \xi) \xi \eta y^8 + 2 (-1 + \xi) (1 + \xi) \eta y^9 \end{aligned} \right] \tag{2.3.1.3.24}
 \end{aligned}$$

Ce qui permet d'effectuer les dérivations des fonctions d'interpolation, Ni par rapport aux paramètres ξ et η , et ce, d'après la relation :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} ; \quad [J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{2.3.1.3.25}$$

$$[B] = [L][N],$$

constituée de $[Bc]$ et $[Bf]$ avec

$[N]$ donnée par :

$$N_{1,1} = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \xi \eta$$

$$N_{1,4} = -\frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \eta$$

$$\begin{aligned}
N_{1,7} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta & N_{1,10} &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi \\
N_{1,13} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta & N_{1,16} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta \\
N_{1,19} &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta & N_{1,22} &= -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi \\
N_{1,25} &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) & N_{2,2} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta \\
N_{2,5} &= -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta & N_{2,8} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta \\
N_{2,11} &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi & N_{2,14} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta \\
N_{2,17} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta & N_{2,20} &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta \\
N_{2,23} &= -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi & N_{2,26} &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\
N_{3,3} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta & N_{3,6} &= -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta \\
N_{3,9} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta & N_{3,12} &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi \\
N_{3,15} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta & N_{3,18} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta \\
N_{3,21} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta & N_{3,24} &= -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi \\
N_{3,27} &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) & N_{2,2} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta \\
N_{2,5} &= -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta & &
\end{aligned}
\tag{2.3.1.3.26}$$

Les autres termes de la matrice [N] sont nuls .

Ce qui permet de calculer les matrices de raideur et de masse .

Les raideurs sont données par :

$$[kc] = \left(\int_{-l}^{l} \int_{-l}^{l} [B_c]^T [H_c] d\eta d\xi \right) [Bc] |J|
\tag{2.3.1.3.27}$$

$$[k_f] = \left(\int_{-l}^{+l} \int_{-l}^{+l} [B_f]^T [H_f] d\eta d\xi \right) [B_f] |J| \tag{2.3.1.3.28}$$

et les masses par :

$$[m_w] = \int_{-l}^{+l} \int_{-l}^{+l} \{N\} \rho_m \{N\}^T d\xi d\eta |J|, \text{ liée à la déflexion } w \tag{2.3.1.3.29}$$

$$[m_\beta] = \int_{-l}^{+l} \int_{-l}^{+l} \{N\} \rho_f \{N\}^T d\xi d\eta |J|, \text{ liée aux rotations } \beta_x \text{ et } \beta_y \tag{2.3.1.3.30}$$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} \{N_{,x}\}_{1 \times 9}^T & \{0\}_{1 \times 9}^T \\ \{0\}_{1 \times 9}^T & \{N_{,y}\}_{1 \times 9}^T \\ \{N_{,y}\}_{1 \times 9}^T & \{N_{,x}\}_{1 \times 9}^T \end{bmatrix}_{3 \times 18} \quad [B_c] = \begin{bmatrix} \{N_{,x}\}_{1 \times 9}^T & [N]_{1 \times 9}^T & \{0\}_{1 \times 9}^T \\ \{N_{,y}\}_{1 \times 9}^T & \{0\}_{1 \times 9}^T & [N]_{1 \times 9}^T \end{bmatrix}_{2 \times 27} \tag{2.3.1.3.31}$$

$$\{N_{,x}\}^T = j_{11} \{N_{,\xi}\}^T + j_{12} \{N_{,\eta}\}^T \tag{2.3.1.3.32}$$

$$\{N_{,y}\}^T = j_{21} \{N_{,\xi}\}^T + j_{22} \{N_{,\eta}\}^T$$

E- Détermination des matrices élémentaires de raideur et de masse

E-1 Cas d'un matériau anisotrope

La matrice de raideur, $[k_f]$ liée à la flexion est donnée par :

$$[k_f] = \int_{-l}^{+l} \int_{-l}^{+l} \begin{bmatrix} \{N_{,x}\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{N_{,y}\}^T \\ \{N_{,y}\}^T & \{N_{,x}\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_{f1} & H_{f2} & H_{f3} \\ H_{f1} & H_{f2} & H_{f3} \\ H_{f1} & H_{f2} & H_{f3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_{,x}\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{N_{,y}\}^T \\ \{N_{,y}\}^T & \{N_{,x}\}^T \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \tag{2.3.1.3.33}$$

Celle liée au cisaillement est :

$$[k_c] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \{N_x\}^T & -\{N_y\}^T & \{q\}^T \\ \{N_y\}^T & \{q\}^T & \{N_x\}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{c1} & H_{c2} \\ H_{c2} & H_{c3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_x\}^T & \{N_y\}^T & \{q\}^T \\ \{N_y\}^T & \{q\}^T & \{N_x\}^T \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta ; \tag{2.3.1.3.34}$$

$[k_c]$ est de 27×27 , $[k_f]$ de 18×18 et seront évaluées par intégration numérique

$$[k_m] = [B_m]^T \left(\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} H_{m1} & H_{m2} & H_{m3} \\ H_{m2} & H_{m2} & H_{m3} \\ H_{m3} & H_{m3} & H_{m3} \end{bmatrix} d\eta d\xi \right) [B_m] |J| \tag{2.3.1.3.35}$$

et $[B_m]$ à évaluer numériquement

Les matrices de masse restent les mêmes pour tous les cas de figure

E-2 Cas d'un matériau orthotrope

On a :

$$[k_m] = \left(\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_m]^T \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LL} & 0 \\ H_{LT} & H_{LL} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} d\eta d\xi \right) [B_m] |J| \tag{2.3.1.3.36}$$

$$H_{LL} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT} \times \nu_{TL}} ; \quad H_{LT} = \frac{E_T \times \nu_{LT}}{1 - \nu_{LT} \times \nu_{TL}}$$

$$H_{TT} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT} \times \nu_{TL}} ; \quad H_{TL} = H_{LT} ; \quad G_{LZ} = G_{LT} ;$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$[k_f] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \{N_x\}^T & \{\theta\}^T \\ \{\theta\}^T & \{N_y\}^T \\ \{N_y\}^T & \{N_x\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Hf_1 & Hf_2 & Hf_3 \\ Hf_1 & Hf_2 & Hf_3 \\ Hf_1 & Hf_2 & Hf_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_x\}^T & \{\theta\}^T \\ \{\theta\}^T & \{N_y\}^T \\ \{N_y\}^T & \{N_x\}^T \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (2.3.1.3.37)$$

$$[k_c] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \{N_x\}^T & [N]^T & \{\theta\}^T \\ \{N_y\}^T & \{\theta\}^T & [N]^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Hc_{11} & Hc_{12} \\ Hc_{21} & Hc_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_x\}^T & [N]^T & \{\theta\}^T \\ \{N_y\}^T & \{\theta\}^T & [N]^T \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (2.3.1.3.38)$$

E-3 Cas d'un matériau homogène et isotrope

On a :

$$[k_f] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \{N_x\}^T & \{\theta\}^T \\ \{\theta\}^T & \{N_y\}^T \\ \{N_y\}^T & \{N_x\}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \frac{3}{2} \frac{h E}{1\lambda(1-\nu)} \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_x\}^T & \{\theta\}^T \\ \{\theta\}^T & \{N_y\}^T \\ \{N_y\}^T & \{N_x\}^T \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (2.3.1.3.39)$$

$[k_f]$ est une matrice de 18×18 qu'on évalue par intégration numérique.

$$[k_c] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi h}{\delta} \frac{E}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} \{N_{,x}\}^T & [N]^T & \{\theta\}^T \\ \{N_{,y}\}^T & \{\theta\}^T & [N]^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \{N_{,x}\}^T & [N]^T & \{\theta\}^T \\ \{N_{,y}\}^T & \{\theta\}^T & [N]^T \end{bmatrix} J d\xi d\eta \quad (2.3.1.3.40)$$

$[k_c]$ est une matrice de 27×27 qui sera évaluée par intégration numérique.

La matrice masse s'écrit finalement

$$[m] = \begin{bmatrix} [mw] & [0] & [0] \\ [0] & [m\beta] & [0] \\ [0] & [0] & [m\beta] \end{bmatrix} \quad (2.3.1.3.41)$$

2.3.2 Type P

Considérons l'élément quadrilatère à neuf nœuds :

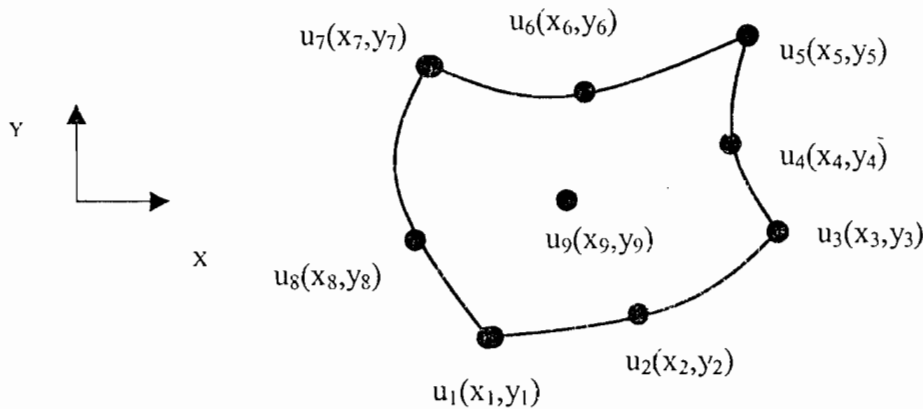


Fig.2.21 : Élément réel

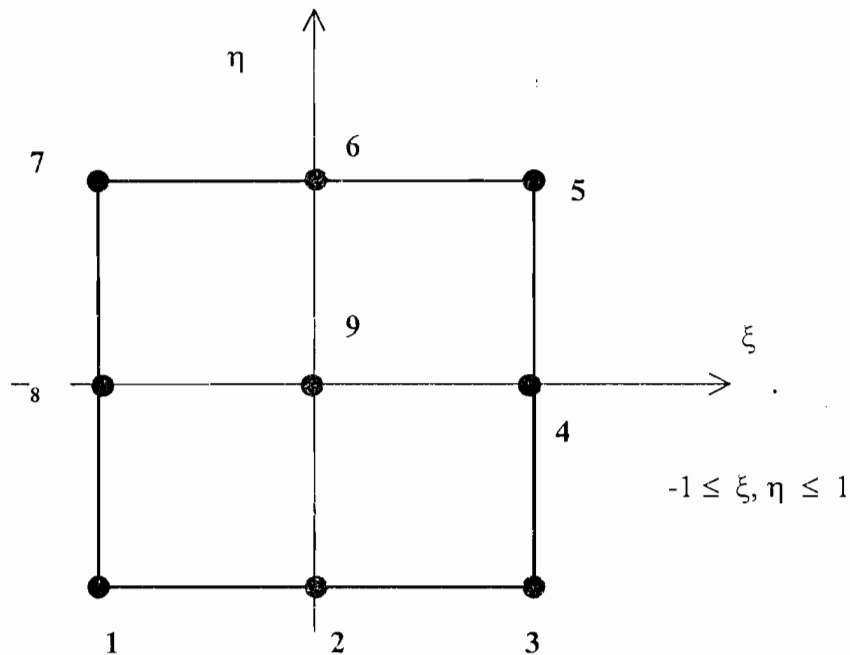


Fig.2.22 : Elément de référence

Au nœuds de coins et au nœud central, le nombre de degré de liberté est variable. Ceci rend possible l'approximation p.

Au niveau des coins

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Aux nœuds des côtés

$$N_i^{(1)} = \frac{1}{2}(1-\eta) \phi_i(\xi) \text{ au nœud 1}$$

$$N_i^{(2)} = \frac{1}{2}(1+\xi) \phi_i(\eta) \text{ au nœud 2}$$

$$N_i^{(3)} = \frac{1}{2}(1+\eta) \phi_i(\xi) \quad \text{au nœud 3}$$

$$N_i^{(4)} = \frac{1}{2}(1-\xi) \phi_i(\eta) \quad \text{au nœud 4}$$

Au nœud central

$$\begin{aligned} N_1^{(0)} &= \phi_2(\xi) \phi_2(\eta) & N_4^{(0)} &= \phi_4(\xi) \phi_2(\eta) \\ N_2^{(0)} &= \phi_3(\xi) \phi_2(\eta) & N_5^{(0)} &= \phi_3(\xi) \phi_3(\eta) \\ N_3^{(0)} &= \phi_2(\xi) \phi_3(\eta) & N_6^{(0)} &= \phi_2(\xi) \phi_4(\eta) \end{aligned} \quad (2.3.2.1)$$

et ceci, pour i variant de 1 à p . Les fonctions ϕ_i sont définies comme :

$$\phi_i(\xi) = \sqrt{\frac{2i-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} p_{i-1}(t) dt \quad (2.3.2.2)$$

Chapitre 3 : Assemblage, test de validation et performance des éléments

3.1 Assemblage

Après l'étude de chaque élément pris à part, il s'avère nécessaire, pour décrire le comportement global de la structure, de procéder à un assemblage des éléments (contribution de chaque élément pour l'équilibre global), la prise en compte des conditions aux limites ainsi que la résolution éventuelle des équations dont on dispose.

Dans la méthode des éléments finis, l'expression du travail W sur le domaine pris en entier est la somme des contributions élémentaires W_e c'est à dire que ($W = \sum W_e$). Ainsi, l'assemblage consiste en une construction de la matrice globale de rigidité $[K]$ et du vecteur sollicitation global $\{F\}$, et ce, à partir des matrices et vecteurs élémentaires $[k]$ et $\{f_n\}$.

Si on désigne par $\{U\}$, l'ensemble des variables nodales, $\{u_n\}$ les variables nodales appartenant à l'élément e , $\{U^*\}$ et $\{u_n^*\}$ les variables virtuelles correspondantes, on a $\{U\}$ qui a un nombre de composantes égal au nombre total de degrés de liberté de l'ensemble. $\{u_n\}$ est de dimension $NDLE \times 1$, ou $NDLE$ représente le nombre de degrés de liberté de l'élément.

Dans la phase de calcul dit élémentaire, on évalue, sur chaque élément, la quantité W , notée W_e d'après la formule :

$$W_e = \{u_n\}^T ([k] \{u_n\} - \{f_n\}) \quad [1]$$

W_e peut aussi s'exprimer par :

$$W_e = \{U^*\}^T ([K_e] \{U\} - \{F_e\})$$

avec $[K_e]$ désignant la matrice de raideur élémentaire étendue de dimension $NDLT \times NDLT$ ($NDLT =$ nombre de degrés de liberté total). Cette matrice contient des lignes et colonnes de zéros relatives aux variables de $\{U^*\}$ et $\{U\}$ mais n'appartenant pas à l'élément e . Les termes non nuls occupant les positions i et j dans $[K_e]$ correspondent aux composantes de $[k]$. Il en est de même de $\{F_e\}$. C'est un vecteur de dimension $NDLT$ contenant des zéros relatifs aux composantes n'appartenant pas à l'élément e . Les termes de position i dans $\{F_e\}$ correspondent aux composantes $\{f_n\}$.

La matrice de rigidité globale $[K]$ est alors donnée par.:

$$[K] = \sum [K_e]$$

Finalement, l'équation à résoudre est :

$$[K] \{U\} - \{F\} = 0,$$

avec les conditions aux limites requises.

Bien que la constitution de la matrice $[K]$ et des vecteurs $\{U\}$ et $\{F\}$ ait l'air aisé, il convient de noter qu'il n'en est souvent pas toujours de même quant à la résolution de l'équation précédemment définie. Parfois même, la matrice $[K]$ ne peut être obtenue que numériquement. Ce qui fait qu'on a souvent recours à des modèles numériques pour l'évaluation de certaines quantités en éléments finis. L'utilisation de méthodes numériques sous entend l'existence d'écarts entre les valeurs obtenues par approximation numérique et celles que fournirait un calcul exact sans oublier les questions de convergence. C'est dans ce cadre qu'il a été jugé nécessaire de procéder à une étude de la performance des éléments pour l'obtention de résultats acceptables.

3.2 Tests de validation et performances des éléments

Nombreux sont les tests numériques pouvant être effectués en vue de la vérification de la formulation théorique et de l'évaluation des caractéristiques de convergence, d'efficacité, mais aussi de précision. Ces tests sont également importants pour la vérification de la bonne mise en œuvre informatique des modèles.

Les tests qu'a à satisfaire un seul élément sont nécessaires mais non suffisants pour l'établissement de la convergence : il faut, en plus, procéder à l'étude du comportement d'un assemblage d'éléments (patch-test). Ces patch-tests, s'ils sont relatifs à la représentation de l'état de déformations constantes, sont aussi nécessaires pour s'assurer de la convergence des modèles (non conformes ou non standards). Et si un minimum de conditions aux limites sont introduits, la vérification des patch-tests constitue une condition suffisante de convergence.

Pour évaluer les caractéristiques de convergence et l'influence de la distorsion des éléments, par comparaison des résultats obtenus à des solutions théoriques (de plaque ou tridimensionnelle) ou à des résultats expérimentaux, plusieurs problèmes-tests sont disponibles dans la littérature [4]

Il s'avère aussi utile d'étudier, et l'influence des conditions aux limites, et celle de la distorsion géométrique.

3.2.1 Influence des conditions aux limites

Suivant le type de conditions aux limites, des gradients très importants de certains efforts au voisinage des bords peuvent être observés, et cela, pour n'importe quelle valeur de l'élanement de la plaque. Cependant, il faut aussi noter que cet effet est d'autant plus localisé que h/L est petit.

3.2.2 Influence de la distorsion géométrique

Il est utile de connaître le comportement d'un élément réel présentant une distorsion géométrique importante par rapport à l'élément de référence. Ceci se traduit par une différence considérable entre les résultats fournis par un maillage régulier et ceux d'un maillage irrégulier. En d'autres termes, il y'a distorsion lorsque la matrice jacobienne, $[J]$ n'est pas diagonale et n'est pas indépendante de ξ et η . Ceci est dû au fait que les bases polynomiales utilisées pour définir un élément ne sont pas nécessairement complètes pour un ordre donné, ou que les approximations des variables sont différentes suivant une direction donnée.

Il faut aussi noter que les tests impliquent un assemblage d'éléments afin de pouvoir vérifier :

- la représentation des états de déformations constantes (et nulles) indépendamment de la distorsion , ce qui correspond à une condition nécessaire pour garantir la convergence du modèle

- la représentation de modes supérieurs pour estimer la précision , l'influence de la distorsion et la vitesse de convergence du modèle.

- On choisit un maillage qui implique plusieurs éléments disposant d'au moins un nœud à l'intérieur du domaine.

Par souci de simplicité, le choix porte souvent sur un domaine simple(carré ou rectangle).

Une fois l'assemblage effectué, des conditions cinématiques sont imposées sur les nœuds du contours, puis on calcule les charges équivalentes dans le cas des modes tests qui le nécessitent. La solution numérique obtenue (variables aux nœuds internes) est ensuite comparée à la solution théorique du mode test. Pour les éléments finis de type Mindlin, une condition nécessaire est de s'assurer, non seulement qu'un élément fini est capable de bien représenter les situations extrêmes de plaques minces, à savoir des courbures constantes et des

déformations de CT nulles , mais aussi de plaques épaisses (courbures nulles et déformations de CT constantes).

Dans cet exemple simple, chaque face du réservoir de même que la dalle peuvent être considérées comme des plaques épaisses de type Mindlin auxquelles on applique la théorie précédemment développée, après idéalisation.

Les sollicitations à prendre en compte sont :

-le poids propre

la pression hydrostatique

-la poussée des terres

-les sous pressions éventuelles en dessous de l'ouvrage.

Bien que la condition la plus défavorable soit celle qui considère l'ouvrage à vide (la pression hydrostatique nulle), l'idée serait de traiter du cas général .

Certaines conditions aux limites devront aussi être tenues en compte dont l'encastrement de certaines parties de l'ouvrage qui ne sont rien d'autre que les parties enterrées.

Le maillage est effectué au moyen de l'élément Q9. Le calcul d'un programme éléments finis fournit les contraintes et moments maximaux à travers toute la structure. Ce qui peut servir de données utiles pour le dimensionnement.

Cependant, la précision des résultats escomptés dépendant de la taille des éléments, il va de soit que, pour espérer des résultats fiables, l'on est appelé à effectuer un maillage des plus fins. Ce qui a pour conséquence, certes un gain en précision, mais aussi une perte en temps de calcul. C'est ainsi que, le nombre d'éléments fournis par un maillage adéquat étant de l'ordre de milliers, la plupart des calculs éléments finis sont effectués par, soit des programmes bien formulés et bien testés, soit par des logiciels adaptés (Ex Micro Fet).

Mais, dans le cadre de ce présent projet, vu le temps imparti, le programme en C++ amorcé n'a pu être poursuivi à temps pour ensuite être testé sur des cas expérimentaux avant l'extension. C'est ainsi que nous avons eu à nous contenter de résultats fournis par Micro Fet sur des cas d'ouvrages d'assainissement (décanteur secondaire, bassin rectangulaire)

Considérons l'application ci dessous d'un bassin aérobie parallélépipédique.

On définit le plan de repérage comme suit :

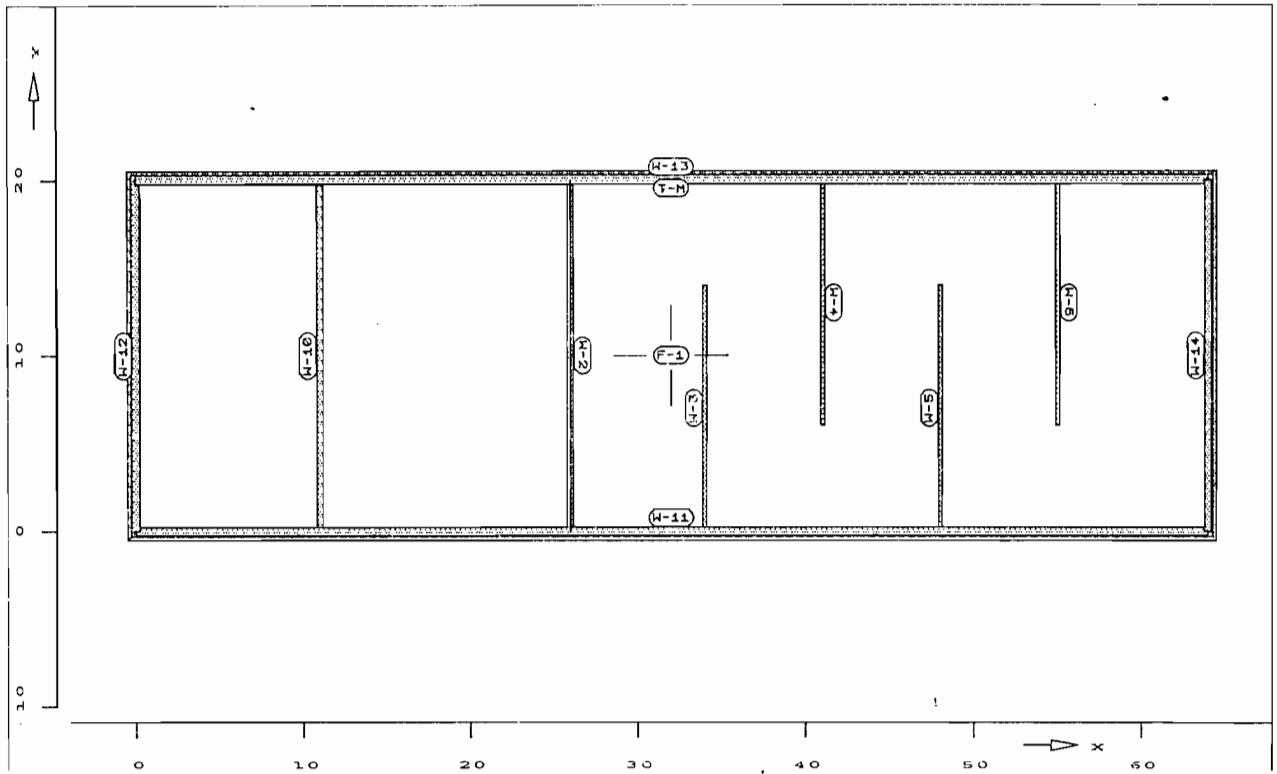


Fig.3.3 : Vue en plan d'un bassin aérobie de 6.25 m de hauteur

Elé D-1 Plancher

Structure x = -0.30 64.30 64.30 -0.30 -0.30 m
 y = -0.30 -0.30 20.30 20.30 -0.30 m
 z = 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 m

Matériau Coque isotrope

- Epais = 100.0 cm
- Poids = 25.00 kN/m³
- Mod E = 3.00e+007 kN/m²
- Mue = 0.20
- Surface = 1330.76 m²

$$\text{Volume} = 1330.76 \text{ m}^3$$

Étage fondation

Elé D-1 Plancher

Structure $x = -0.30 \ 64.30 \ 64.30 \ -0.30 \ -0.30 \text{ m}$

$y = -0.30 \ -0.30 \ 20.30 \ 20.30 \ -0.30 \text{ m}$

$z = 0.00 \ 0.00 \ 0.00 \ 0.00 \ 0.00 \text{ m}$

Matériau Coque isotrope

Epais = 100.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 1330.76 m²

Volume = 1330.76 m³

Étage fondation

Elé W-6 Mur

Structure $x = 55.00 \ 55.00 \text{ m}$

$y = 20.00 \ 6.00 \text{ m}$

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 25.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 94.50 m²

Volume = 23.63 m³

Étage Hauteur_murs

Elé W-5 Mur

Structure x = 48.00 48.00 m

y = 0.00 14.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 25.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 94.50 m²

Volume = 23.63 m³

Étage Hauteur_murs

Elé W-4 Mur

Structure x = 41.00 41.00 m

y = 20.00 6.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 25.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 94.50 m²

Volume = 23.63 m³

Étage Hauteur_murs

Elé W-3 Mur

Structure x = 34.00 34.00 m

y = 0.00 14.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 25.0 cm
 Poids = 25.00 kN/m³
 Mod E = 3.00e+007 kN/m²
 Mue = 0.20
 Surface = 94.50 m²
 Volume = 23.63 m³

Étage Hauteur_murs

Elé W-2 Mur

Structure x = 26.00 26.00 m

y = 20.00 0.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 40.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 103.67 m²

Volume = 41.47 m³

Étage Hauteur_murs

Elé W-1 Mur

Structure x = -0.30 64.30 64.30 -0.30 -0.30 m

y = -0.30 -0.30 20.30 20.30 -0.30 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 45.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 1150.20 m²

Volume = 517.59 m³

Étage Hauteur_murs

Elé W-1 Mur

Structure x = -0.30 64.30 64.30 -0.30 -0.30 m

y = -0.30 -0.30 20.30 20.30 -0.30 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 45.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 1150.20 m²

Volume = 517.59 m³

Étage Hauteur_murs

Elé W-2 **Mur**

Structure x = 26.00 26.00 m

y = 20.00 0.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 40.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 103.67 m²

Volume = 41.47 m³

Étage Hauteur_murs

Elé W-3 **Mur**

Structure x = 34.00 34.00 m

 y = 0.00 14.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 25.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 94.50 m²

Volume = 23.63 m³

Étage Hauteur_murs

Elé W-10 Mur

Structure x = 11.00 11.00 m

 y = 0.00 20.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 5.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 40.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 115.00 m²

Volume = 46.00 m³

Étage NivEauMax

Elé W-11 Mur

Structure x = 0.00 64.00 m

 y = 0.00 0.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 45.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 432.00 m²

Volume = 194.40 m³

Étage déversoir

Elé W-12 Mur

Structure x = 0.00 0.00 m

 y = 0.00 20.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 45.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 135.00 m²

Volume = 60.75 m³

Étage deversoire

Elé W-13 **Mur**

Structure x = 0.00 64.00 m

y = 20.00 20.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 45.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 432.00 m²

Volume = 194.40 m³

Étage déversoir

Elé W-14 Mur

Structure x = 64.00 64.00 m

y = 0.00 20.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 6.75 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 40.0 cm

Poids = 25.00 kN/m³

Mod E = 3.00e+007 kN/m²

Mue = 0.20

Surface = 135.00 m²

Volume = 54.00 m³

Étage déversoir

Elé F-1 App surfacique

Structure x = -0.30 -0.30 64.30 64.30 -0.30 m

y = 20.30 -0.30 -0.30 20.30 20.30 m

-Niveau = 0.0 m

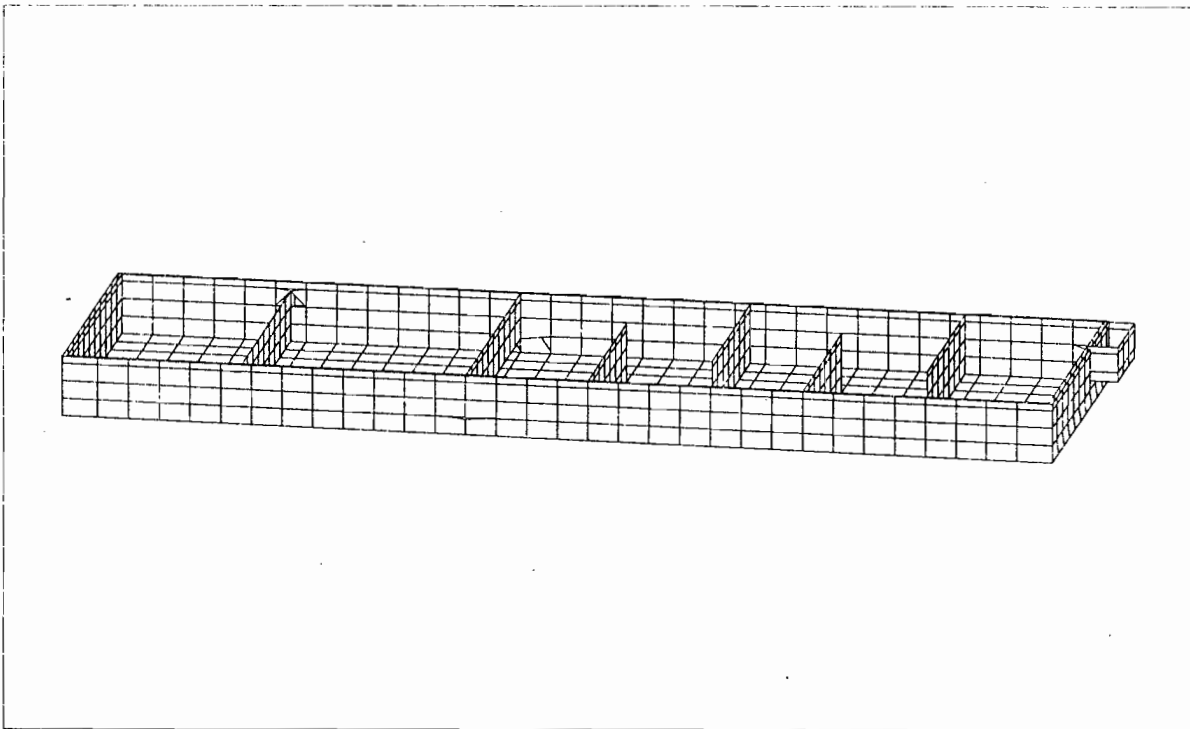
Appui Appui Compr/Trac Trans suivant axe x = $2.00e+004$ kN/m³

Appui Compr/Trac Trans suivant axe y = $2.00e+004$ kN/m³

Appui Compr Trans suivant axe z = $2.00e+005$ kN/m³

Étage fondation

L'étude de cet ouvrage d'assainissement par la méthode des éléments finis nécessite, comme évoqué plus loin, un maillage préalable. Ce qui s'illustre à travers la figure suivante :



Maillage de l'ouvrage

Faces visibles, toutes les surfaces

Micro Fet fournit les résultats qui sont consignés à l'annexe B .

Remarques

Il convient de remarquer que, pour apprécier la qualité des résultats fournis par Micro Fet, il n'est pas inutile de procéder à une estimation des erreurs pour les éléments de plaque. Ceci permettrait de voir si le logiciel en question a un contrôle automatique de la qualité des résultats. L'erreur estimée est d'autant moins importante que les performances de l'élément sont élevées. Ces performances sont classiquement évaluées en comparant les solutions numériques obtenues par éléments finis à des solutions théoriques de référence ou à des résultats expérimentaux lorsque ceux-ci sont disponibles. Les quantités comparées peuvent être :

- une flèche au centre ou une rotation maximum
- une norme en déplacement
- des efforts résultants en des points particuliers
- etc....

Les caractéristiques de convergence et de performances des quantités ci dessus sont évaluées en fonction du nombre d'éléments, du nombre total de degrés de liberté et de la taille des éléments.

Les solutions théoriques de référence sont extraites de la littérature sur les plaques et coques [5] .

Vu la tendance actuelle du marché, la grande innovation serait, peut être, de définir un type de maillage qui est fonction d'une erreur fixée au préalable.

Conclusion et recommandations

Au cours de projet, l'étude des plaques épaisses de type Mindlin a permis la génération des équations aux dérivées partielles fondamentales, plus particulièrement, pour le cas isotrope. Ces équations permettent de décrire le comportement global de la structure de par leur résolution éventuelle. En effet, la connaissance de leurs solutions permet de déduire les efforts généralisés $\{N\}$, $\{M\}$ et $\{Q\}$ auxquels la structure est soumise ainsi que les déformations qui leur sont rattachées. La détermination de tels paramètres constitue un résultat capital pour le dimensionnement.

Cependant, bien que la résolution des EDPF ne fût pas faite, une tentative serait bien utile.

Ceci pourrait faire l'objet de PFE futurs avec le développement de certaines notions mathématiques liées à la topologie dans des espaces normés de type Banach ou de Hilbert pour l'estimation d'erreurs.

La formulation d'un programme d'éléments finis a déjà été amorcée dans l'optique de comparer ses résultats à ceux de cas expérimentaux de référence disponibles dans la littérature. Mais, vu le temps imparti, ce programme n'a pu être achevé à temps.

Il convient aussi de dire qu'il serait intéressant de procéder à une comparaison des résultats que fournirait ce programme à ceux du logiciel MicroFet. Laquelle comparaison permet, en effet, d'avoir une idée de l'ordre de grandeur des erreurs et par conséquent du degré de validité des résultats obtenus avant de passer à leur extension à des cas pratiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] : Goury DHATT, Jean Louis BATOZ. Modélisation des structures par éléments finis ; Solides élastiques, vol.1, 1990.
- [2] : Goury DHATT, Jean Louis BATOZ. Modélisation des structures par éléments finis ; Poutres et plaques, vol.1, 1990.
- [3] : Bathe, K.J, HO, some results in the analysis of thin shell, structures, in Nonlinear F.E. Analysis, in structural Mechanics, Springer-Verlag, p.122-150, 1980.
- [4] : Mac NEAL R., HARDER RC, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, Finite element Analysis and Design., vol.1, p.3-20, 1985.
- [5] : Kaneto, T., on the TIMOSHENKO' s correction for shear in vibrating beams, J.Phys.D: Phys., vol.8, p.1927-1936, 1975.
- [6] : ZIENKIEWICZ and TAYLOR. The finite element method. Fourth edition .vol.1, 1971.
- [7] : Hueber THORNTON Byrom. The finite element method for Engeneers., Third edition 1995.
- [8] : Thomas J.R. HUGHES, The finite element method. Linear Static and Dynamic finite element analysis, 1987.

Liste des annexes

Annexe A : Justification de l'expression des forces équivalentes aux nœuds

Annexe B : Fonctions d'interpolation de l'élément Q9 .

Annexe C : Exemple de bassin rectangulaire

Annexe D : Résultats de l'application .

ANNEXE A : Justification de l'expression des forces équivalentes aux nœuds

Partant de l'expression de la fonctionnelle Π_{HR} ,

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} = & \int_V \left(-\frac{1}{2} \{\sigma\}^T [C] \{\sigma\} + \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} + \{\sigma\}^T [C] \{\sigma_0\} \right) dV - \int_V \{u\}^T \{f\} dV - \int_{S_f} \{u\}^T \{f_s\} dS + \\ & + \int_A \left(\{u\}^T \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) + \{\beta\}^T \left(\rho_{mf} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\beta\} \right) \right) dA \end{aligned}$$

(1.8.2.10)

dont la variation élémentaire peut s'écrire, sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HR}^{(e)} = & \int_V (\delta \{d_e\}^T [N_e]^T [L]^T [H] [L] [N_e] \{d_e\}) dV - \int_V \delta \{d_e\}^T [N_e]^T \{f_V\} dV - \\ & \int_{S_i} \delta \{d_e\}^T [N_e] \{\bar{t}\} dS + \int_A (\delta \{d_e\}^T [N_e]^T [\rho] \frac{\partial^2}{\partial t^2} [N_e] \{d_e\}) dA \end{aligned}$$

on a, en posant :

$$\{\sigma\} = [H][L]\{d\} = [H][L][N_e]\{d_e\},$$

$$\delta \{d_e\}^T \{r_e\} = \int_V (\delta \{d_e\}^T [N_e]^T [L]^T [H] [L] [N_e] \{d_e\}) dV - \int_V \delta \{d_e\}^T [N_e]^T \{f_V\} dV -$$

$$\int_{S_i} \delta \{d_e\}^T [N_e] \{\bar{t}\} dS + \int_A (\delta \{d_e\}^T [N_e]^T [\rho] \frac{\partial^2}{\partial t^2} [N_e] \{d_e\}) dA$$

avec

$$\{r_e\} = \int_V [N_e]^T [L]^T [H] [L] [N_e] \{d_e\} dV - \int_V [N_e]^T \{f_V\} dV - \int_{S_i} [N_e]^T \{\bar{t}\} dS + \int_A [N_e]^T [\rho] \frac{\partial^2}{\partial t^2} ([N_e] \{d_e\}) dA$$

$$\{r_e\} = \int_V [B_e]^T [H] [B_e] \{d_e\} dV - \int_V [N_e]^T \{f_V\} dV - \int_{S_i} [N_e]^T \{t\} dS + \int_A [N_e]^T [\rho] \frac{\partial^2}{\partial t^2} ([N_e] \{d_e\}) dA$$

On pose $[B_e] = [L][N_e]$

Donc

$$\{r_e\} = [K_e] \{d_e\} + \{r_0\} \quad ; \quad \text{la matrice de rigidité élémentaire est } [K_e] = \int_V [B_e]^T [H] [B_e] dV, \text{ matrice}$$

(5r×5r), r désigne ici le nombre de nœuds de l'élément.

$$\{r_0\} = - \int_V [N_e]^T \{f_V\} dV - \int_{S_i} [N_e]^T \{t\} dS + \int_A [N_e]^T [\rho] \frac{\partial^2}{\partial t^2} ([N_e] \{d_e\}) dA$$

ANNEXE B : Fonctions d'interpolation de l'élément Q9 et résultats de l'application pratique

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1-\xi)(-1+\eta)\eta}{2}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(-1+\eta)\xi\eta}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$$

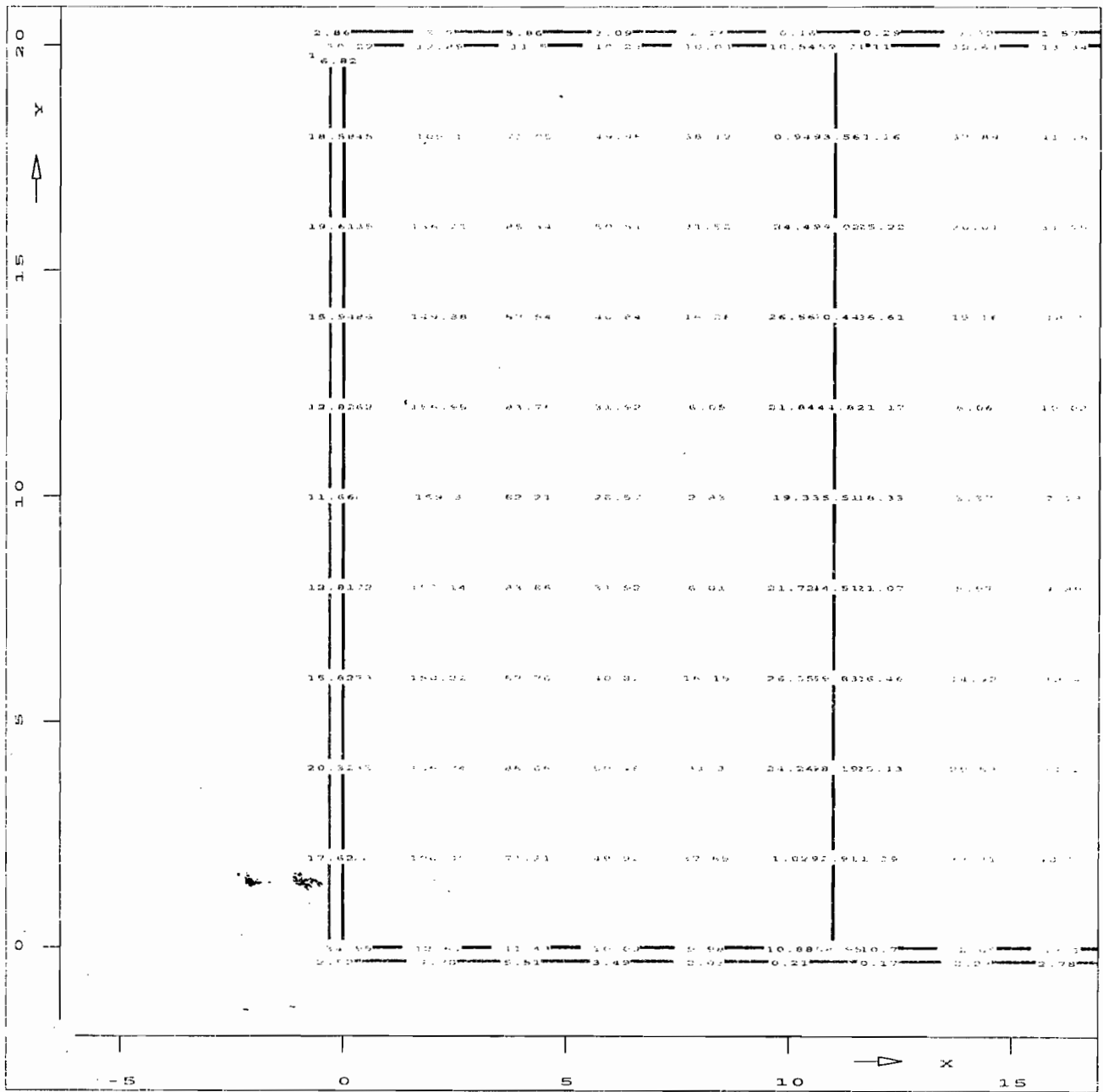
$$N_5 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta}{4}$$

$$N_6 = \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)\eta}{2}$$

$$N_7 = \frac{(-1+\xi)(1+\eta)\xi\eta}{4}$$

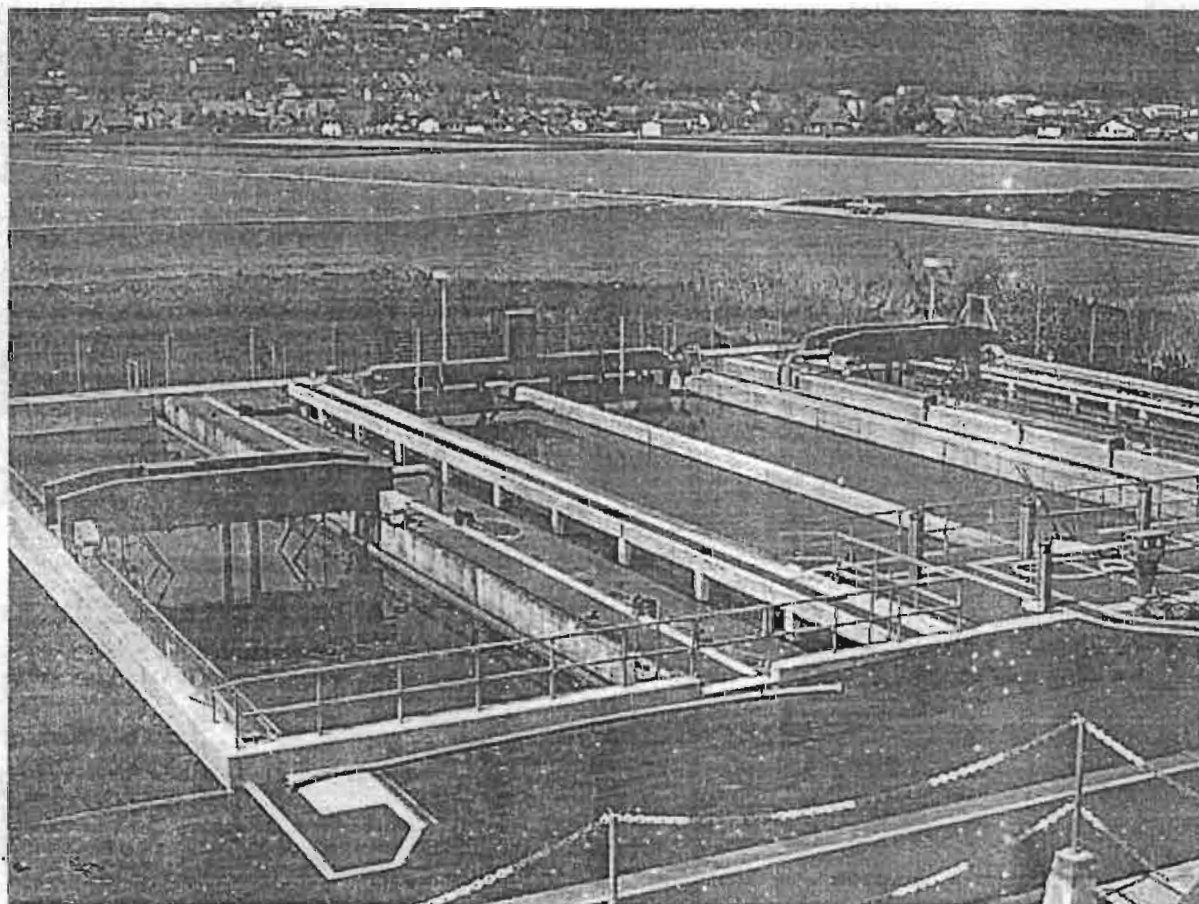
$$N_8 = \frac{(-1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$$

$$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$



Armatures de la dalle de fond

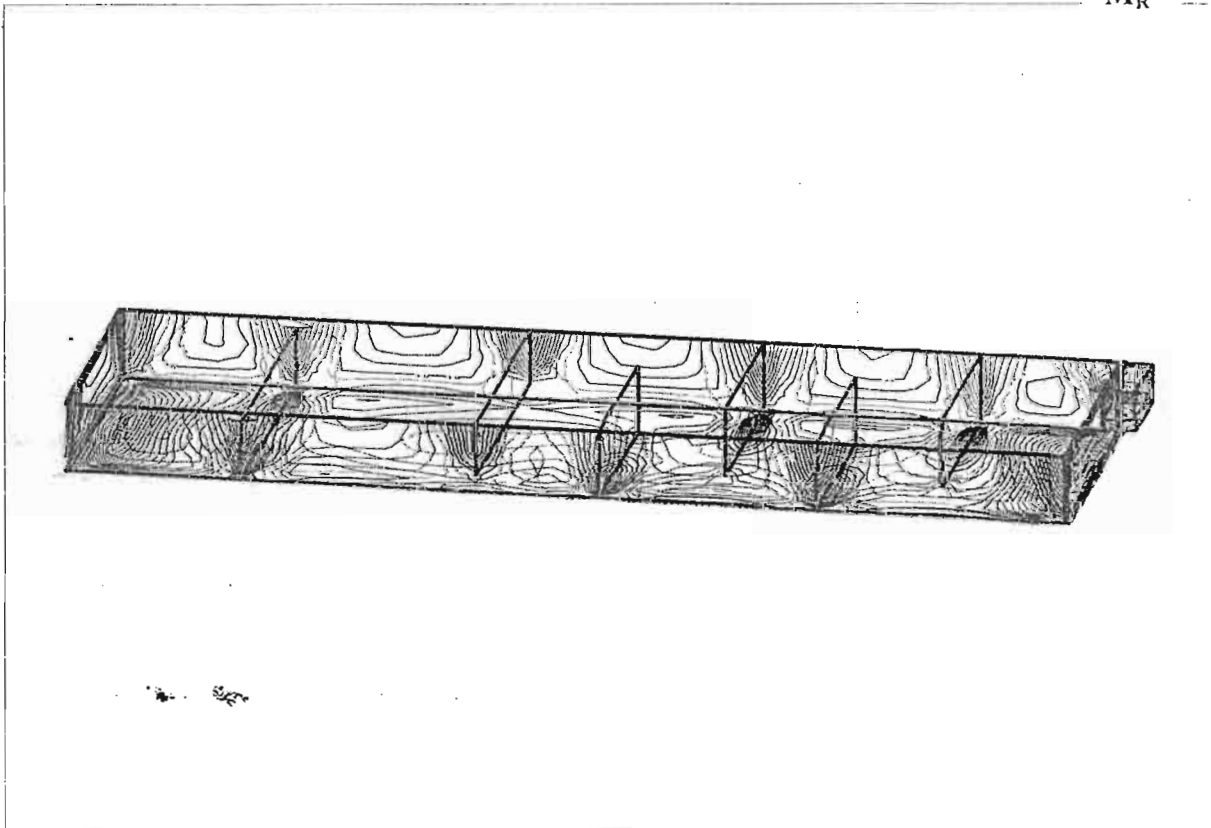
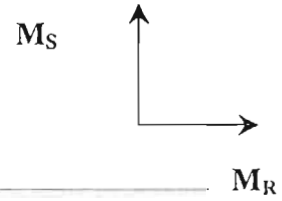
ANNEXE C : Exemple de bassin rectangulaire

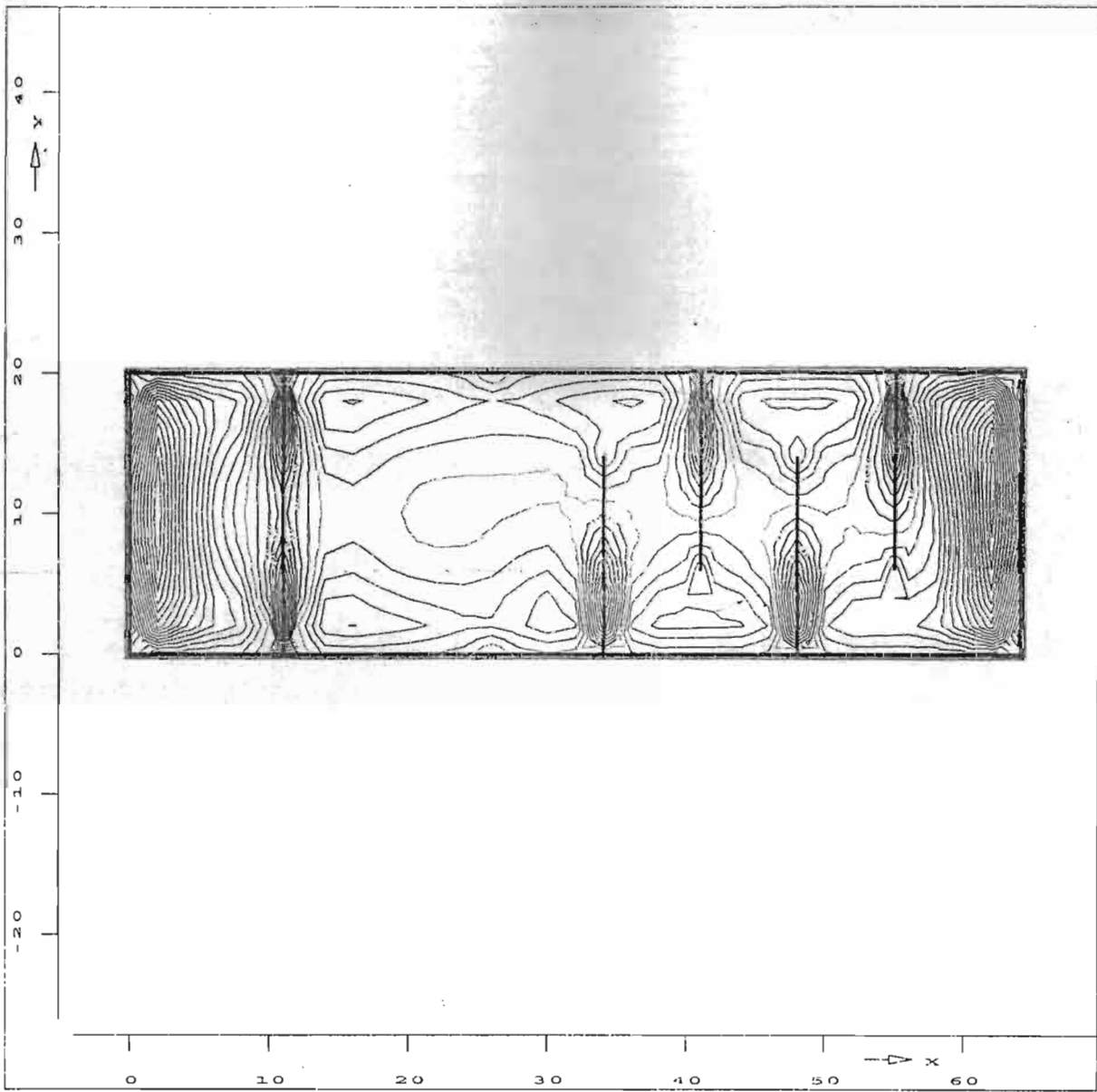


Bassin rectangulaire

ANNEXE D : Résultats de l'application

Distribution des moments, M_R et M_S à travers l'ouvrage





Vue en plan des moments, M_R et M_S

$$M_{\min} = -167.03 \text{ kNm/m}$$

$$M_{\max} = 99.02 \text{ kNm/m}$$