

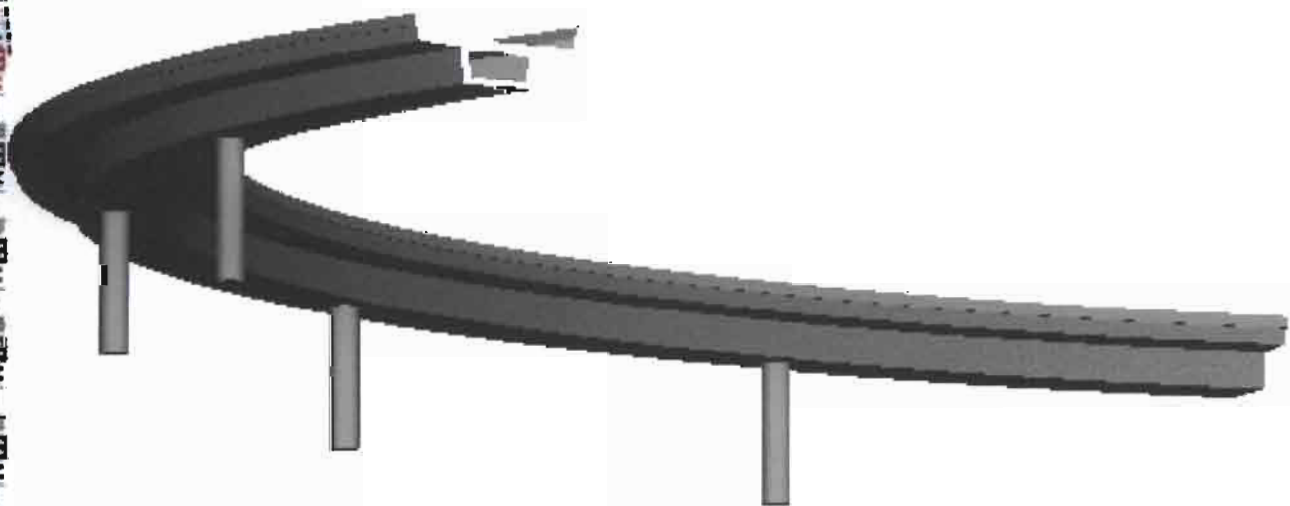
REPUBLIQUE DU SENEGAL
ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES



GC.0549

PROJET DE FIN D'ETUDES
EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME D'INGENIEUR DE CONCEPTION

TITRE:
**MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS
DES POUTRES COURBES**



AUTEUR: IBRAHIMA POUYE

DIRECTEUR: DR, MOUSTAPHA NDIAYE, PROF

ANNEE UNIVERSITAIRE: 2008/2009

DEDICACES

Ce projet est dédié à mes parents qui n'ont cessé de me soutenir tout au long de mes études et qui m'ont accordé toute leur confiance, à mes frères et sœurs, à mes amis et à toute ma famille.

REMERCIEMENTS

J'adresse mes profonds remerciements au Professeur Moustapha Ndiaye pour son encadrement. En effet il a fait preuve d'une grande disponibilité.

Mes remerciements sont également pour l'ensemble du corps professoral de l'Ecole polytechnique de Thiès pour le savoir qu'ils m'ont transmis tout au long de ma formation.

SOMMAIRE

Ce projet a pour intitulé : Modélisation par éléments finis des poutres courbes.

Dans le cas bidimensionnel le problème est déjà résolu. Nous nous intéresserons donc au cas tridimensionnel pour le cas des poutres droites, circulaires, hélicoïdales et clothoïdales.

Nous allons combiner l'effet de deux types de torsion : la torsion uniforme de St Venant et la torsion gênée de Vlassov.

Le type de modélisation éléments finis utilisé sera la méthode P réputé pour sa précision.

L'objectif est d'arriver à construire notre propre code de calcul éléments finis types P de ces types de poutres. Le langage de programmation utilisé est le langage C.

Table des matières

Liste des symboles et abréviations	vi
Liste des figures	ix
INTRODUCTION.....	1
I- Quelques notions sur les poutres	2
1-1- Définition.....	2
1-2- Géométrie de la poutre	3
1-3- Hypothèses fondamentales de la théorie des poutres	3
1-3-1- Hypothèses sur la géométrie	3
1-3-2- Hypothèses sur le matériau	3
1-4- Etude de la torsion.....	4
II- Grandeurs locales et globales des paramètres géométriques.....	5
2-1- Paramétrisation géométrique	5
2-2- Matrices de transformation de coordonnées	8
2-3- Courbures et Torsions	12
III- Résolution du problème par la méthode des éléments finis.....	13
3-1- Présentation de la méthode des éléments finis.....	13
3-1-1- Intérêts et limitations de la méthode des éléments finis	14
3-1-2- Méthode directe de formulation des éléments	15
3-1-3- Méthodes variationnelles de formulation des éléments.....	15
3-2- Equations de la mécanique	19
3-3- Outil de programmation : le langage C	22
3-4- La méthode P	22
3-4-1- Avantages de la méthode P	23
3-4-2- Inconvénients de la méthode P	24
3-4-3- Discrétisation de la géométrie.....	24
3-4-4- Approximation nodale.....	28
3-5- Intégrations numériques	34
3-5-1- Calcul de la matrice de rigidité	35
3-5-2- Calcul des forces équivalentes aux nœuds.....	35
3-6- Assemblage et résolution des systèmes hiérarchiques	37
3-6-1- Assemblage.....	37

3-6-2- Résolution des systèmes hiérarchiques	38
3-6-3- Méthode numérique pour la résolution.....	40
CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS	43
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	45
ANNEXE :	46

Liste des symboles et abréviations

A	: aire de la section droite de la poutre
I_y	: moment d'inertie principale par rapport à y
I_z	: moment d'inertie principale par rapport à z
$I_{\omega y}$: produit d'inertie de gauchissement suivant l'axe y
$I_{\omega z}$: produit d'inertie de gauchissement suivant l'axe z
E	: module de Young(ou module d'élasticité) du matériau de la poutre
G	: module de cisaillement
J	: inertie torsionnelle
L	: opérateur matricielle
Ds	: opérateur différentiel égale à : $\frac{\partial}{\partial s}$
K_x, K_y et K_z	: les coordonnées du vecteur courbure torsion local K
ξ	: paramètre de variation de l'abscisse curviligne s
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: vecteur de base du repère global
R_α	: matrice de rotation d'angle α
R_β	: matrice de rotation d'angle β
R_γ	: matrice de rotation d'angle γ
LG	: matrice de transformation repère local repère global
GL	: matrice de transformation repère global repère local

θ	: paramètre angulaire
R_g	: rayon de courbure géométrique
N	: matrice des fonctions d'interpolation
p	: degré des polynômes d'interpolation
σ	: champ des contraintes
ε	: champ des déformations
U	: champ des déplacements
D	: vecteur déplacements aux nœuds
k_e	: matrice de rigidité élémentaire
K	: matrice de rigidité global
f_e	: forces équivalentes aux nœuds
F	: vecteur force équivalente aux nœuds
q	: densité de force uniformément répartie
ddl	: degré de liberté
Σ	: aire d'une surface plane
a	: plus grande dimension transversale de la section droite de la poutre
b	: plus grande direction transversale de la section droite de la poutre
L	: longueur de la poutre
σ_{yy}, σ_{zz} et σ_{yz}	: coordonnées du tenseur des contraintes
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: vecteur normés de la base de Fresnet
X, Y, Z	: axes du repère global
σ_R	: vecteur des efforts résultants ou champ de contraintes
ε_R	: vecteur des déformations résultantes ou champ de déformation

N^*	: matrice des fonctions d'interpolation évaluée à une abscisse donnée
T_{sv}	: torsion de Saint Venant
T_{ω}	: torsion de Vlassov
$\gamma_{sv}, \gamma_{sy}, \gamma_{sz}, \gamma_w$: composantes de la déformation résultante
$u_g(s), v_g(s), w_g(s)$: translations suivants les trois directions x, y, z
$\theta_x(s), \theta_y(s), \theta_z(s)$: rotations suivants les trois directions x, y, z
$\Psi(s)$: rotation libre due au bi-moment (gauchissement des sections)
x_i, y_i, z_i	: coordonnées d'un point sur la courbe réelle
Modtan	: module tangent

Liste des figures

Figure 1.1 : Représentation d'une poutre.....	2
Figure 1.2 : Gauchissement de St-Venant de quelques sections	4
Figure 1.3 : Moment uniformément réparti sur une poutre.....	5
Figure 2.1 : Repère local et Repère global.....	6
Figure 2.2 : Rotations axiales pour une poutre droite spatiale.....	10
Figure 2.3 : Illustration d'un pont courbe.....	13
Figure 3.1 : Exemple de déplacement admissible sur une structure.....	16
Figure 3.2 : Exemple de déplacement non admissible sur une structure	17
Figure 3.3 : Poutre circulaire	26
Figure 3.4 : Fonctions de forme hiérarchiques.....	32
Figure 3.5 : Dérivées des fonctions de forme hiérarchiques	33
Figure 3.6 : Charge uniformément répartie sur une structure	36
Figure 3.7 : Charge ponctuelle sur une structure	37

INTRODUCTION

Un certain nombre de constructions en génie civil sont constituées d'un assemblage de poutres. Il faut donc bien maîtriser leur fonctionnement mécanique. Plusieurs théories qui permettent d'effectuer leur analyse existe déjà. Parmi ces théories on peut citer :

-Le principe de St Venant

-Le principe de Navier Bernoulli

Les deux problèmes qui se posent dans l'étude des poutres sont :

-La recherche du système de forces extérieures relatif à une section quelconque

-le calcul des contraintes s'exerçant sur une section connaissant le système de forces extérieures.

Pour un problème donné la première étape consiste à écrire ses équations fondamentales qui doivent satisfaire aux conditions d'équilibre, de compatibilité géométrique et de limites.

Cependant bien que le modèle physique choisi pour modéliser le problème fournit des équations et des conditions aux limites, les mathématiques souvent ne peuvent en donner une solution analytique. C'est là qu'intervient la méthode des éléments finis qui permet de trouver une solution approchée de la solution exacte.

Ce projet a pour but d'utiliser la méthode des éléments finis afin de modéliser le comportement des poutres droites, circulaires, clothoïdales, hélicoïdales. Il s'agit ensuite d'établir des programmes de calcul de ces poutres.

Après avoir défini la poutre nous allons en décrire la géométrie. Nous présenterons ensuite la méthode des éléments finis afin de mieux en comprendre les principes. Après avoir bien saisi la méthode nous l'appliquerons à la poutre.

I- Quelques notions sur les poutres

1-1- Définition

Soit :

- C une courbe orientée
- G son point courant
- S abscisse curviligne mesurée à partir d'un point fixe O sur C

Une *poutre* est un solide engendré par une aire plane Σ dont le centre de gravité G décrit une courbe C . L'aire Σ est appelée *section*, de la poutre. La courbe C est appelée *fibre moyenne* de la poutre.

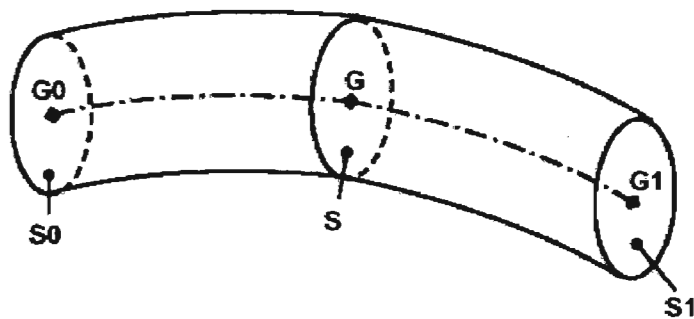


Figure 1.1 : Représentation d'une poutre

Deux hypothèses sont à considérer :

- Les sections droites sont constantes ou lentement variables lorsque G varie.
- Si d est une dimension transversale de la section droite on a en tout point de la poutre $d \ll R$.

Les hypothèses précédentes permettent d'assimiler un tronçon de poutre courbe de longueur dl à un tronçon de poutre droite.

1-2- Géométrie de la poutre

Si la fibre moyenne de la poutre ($G_0 G_1$) est :

- contenue dans un plan \Rightarrow on parle de *poutre plane*,
- une droite \Rightarrow on parle de *poutre droite*,
- une courbe \Rightarrow on parle de *poutre courbe*.

Si le plan ($G_0 G_1$) est un plan de symétrie géométrique et mécanique (la section de la poutre est symétrique par rapport à ce plan et le chargement aussi), on parle de *poutre à plan moyen*.

1-3- Hypothèses fondamentales de la théorie des poutres

1-3-1- Hypothèses sur la géométrie

Trois hypothèses sur la géométrie des poutres :

- le rayon de courbure de la fibre moyenne est grand par rapport aux dimensions des sections droites,
- la longueur de la fibre moyenne est grande devant les dimensions des sections droites (longueur supérieure à 10 fois la plus grande dimension transversale), on parle de *solide élancé*.
- les éventuelles variations de l'aire de la section droite sont faibles et progressives.

1-3-2- Hypothèses sur le matériau

Les matériaux envisagés sont supposés :

- **homogènes** : tous les éléments du matériau, aussi petits soient-ils, ont une structure identique.
- **isotropes** : les propriétés mécaniques sont les mêmes en tous points et dans toutes les directions.

-
- **continus** : les propriétés varient de manière continue d'un point à l'autre.
 - utilisés dans le **domaine élastique** : les relations entre contraintes et déformations sont linéaires = *loi de HOOKE*.

L'anisotropie reste un cas possible à considérer cependant.

1-4- Etude de la torsion

La **torsion** est la sollicitation subie par un corps soumis à l'action d'un couple de forces opposées agissant dans des plans parallèles. Elle s'exprime sous la forme d'un moment de force.

Ce moment tend à faire tourner la section autour d'un axe longitudinal de l'élément poutre, dit « axe de torsion », qui rencontre chaque plan de section en un point appelé « centre de torsion ».

Les composantes du couple équivalent au moment de torsion sont parallèles au plan des sections droites, et la torsion engendre principalement des contraintes de cisaillement dues au glissement par rotation des sections droites les unes sur les autres.

Nous aurons à considérer deux types de torsion :

- La torsion uniforme ou torsion de Saint Venant
- La torsion non uniforme (gênée) ou torsion de Vlassov

La torsion uniforme (St Venant)

C'est l'état de torsion pure d'une barre tel qu'en cours de déformation les sections droites initialement planes, restent planes en tournant autour de l'axe de torsion.

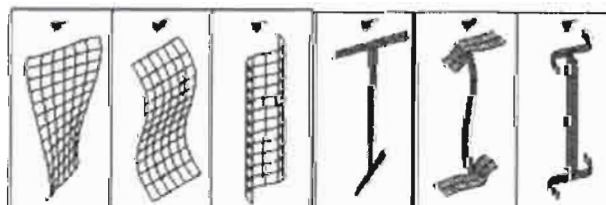


Figure 1.2 : Gauchissement de St-Venant de quelques sections

La torsion non uniforme (torsion de Vlassov)

Les efforts correspondant à ce mode de résistance ne peuvent se développer que si la section transversale, qui aimerait gauchir, voit son gauchissement empêché par des conditions d'appui adéquates.

On dit qu'une section plane gauchit lorsqu'elle ne reste pas plane après déformation sous l'action d'un moment de torsion extérieur.

En cours de déformation, en tournant autour de l'axe de torsion les sections initialement planes subissent une distorsion encore appelée déplanation.

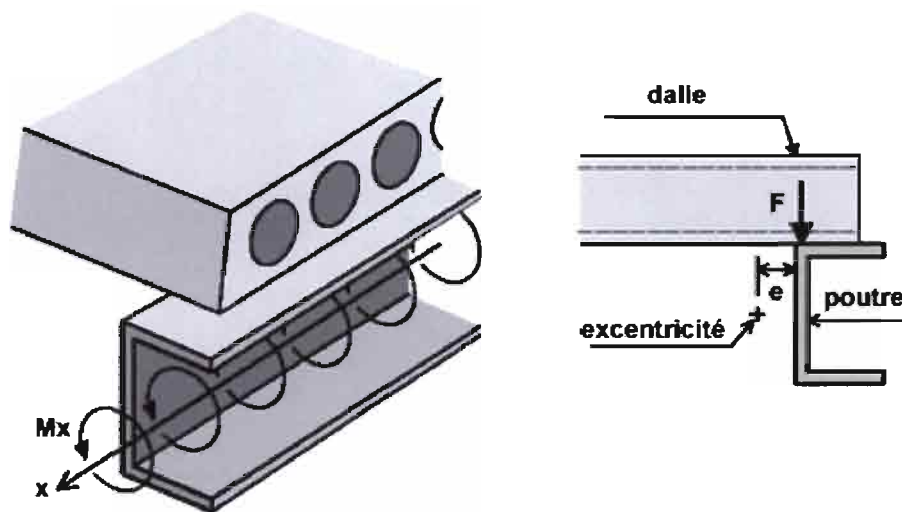


Figure 1.3 : Moment uniformément réparti sur une poutre

II- Grandeurs locales et globales des paramètres géométriques

2-1- Paramétrisation géométrique

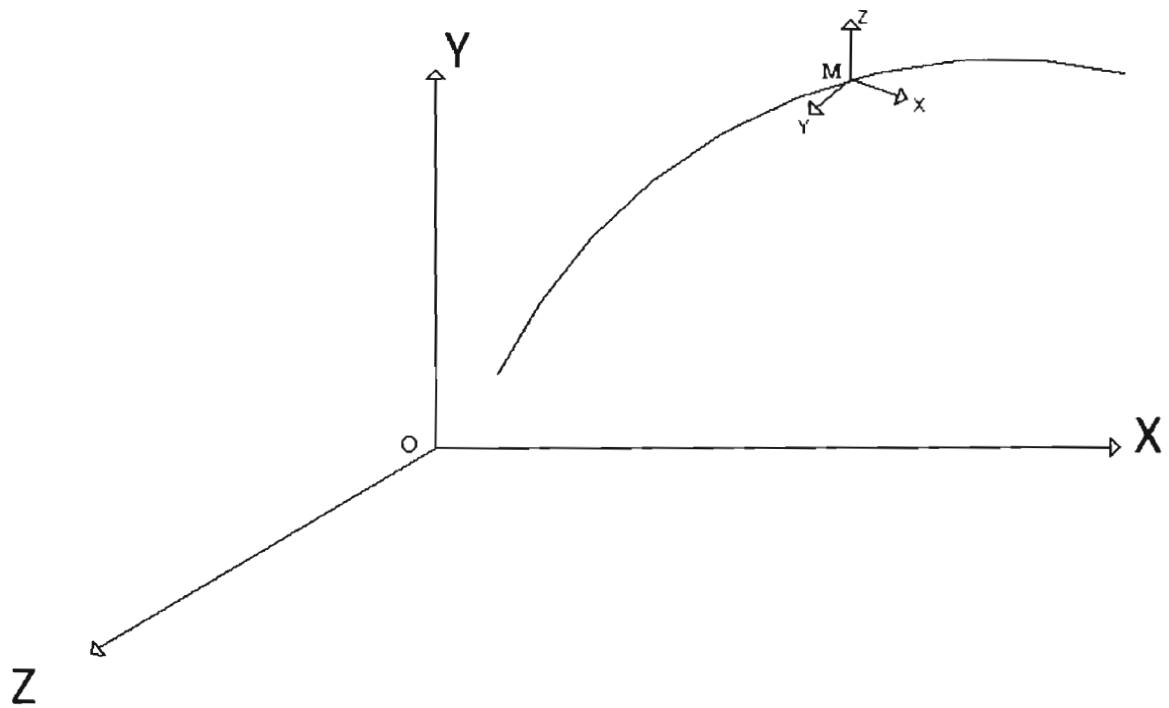


Figure 2.1 : Repère local et Repère global

Vecteur position :

$$\mathbf{OM} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (2.1.a)$$

Paramétrisation : $X=f(t)$ $Y=g(t)$ $Z=h(t)$

t représente le paramètre de variation de l'abscisse curviligne.

Le vecteur position peut donc se réécrire :

$$\mathbf{OM} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} \quad (2.1.b)$$

$$\mathbf{OM} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (2.1.c)$$

Où $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sont les vecteurs de base du repère global.

Construction de la base du repère de Fresnet

$$\mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{OM}(t)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}(t) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$$

Avec :

T: vecteur tangent

N: vecteur normal

B: vecteur binormal

Les vecteurs de la base de Fresnet peuvent s'écrire en fonction des paramètres $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ soit :

$$\mathbf{T} = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N} = f''(\xi)\mathbf{i} + g''(\xi)\mathbf{j} + h''(\xi)\mathbf{k} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{T} = \begin{cases} Tx = f' \\ Ty = g' \\ Tz = h' \end{cases} \quad \mathbf{N} = \begin{cases} Nx = f'' \\ Ny = g'' \\ Nz = h'' \end{cases} \quad \mathbf{B} = \begin{cases} Bx = TyNz - TzNy \\ By = TzNx - TxNz \\ Bz = TxNy - TyNx \end{cases} \quad (2.4)$$

On définit les normes quadratiques des vecteurs :

$$\alpha = \text{norm}(\mathbf{T}, 2) \quad \beta = \text{norm}(\mathbf{N}, 2) \quad \gamma = \text{norm}(\mathbf{B}, 2) \quad (2.5)$$

A partir de là on construit les vecteurs de la base du repère local $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ avec :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{T}{\alpha} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{N}{\beta} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{B}{\gamma} \quad (2.6)$$

2-2- Matrices de transformation de coordonnées

Pour former la matrice de transformation Repère local –Repère global il suffit d'exprimer les vecteurs de la base du repère local $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ en fonction des vecteurs de la base du repère global $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

On obtient :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Tx}{\alpha} & \frac{Ty}{\alpha} & \frac{Tz}{\alpha} \\ \frac{Nx}{\beta} & \frac{Ny}{\beta} & \frac{Nz}{\beta} \\ \frac{Bx}{\gamma} & \frac{By}{\gamma} & \frac{Bz}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

On en déduit la matrice LG de transformation Repère local-Repère global.

$$LG = \begin{bmatrix} \frac{Tx}{\alpha} & \frac{Ty}{\alpha} & \frac{Tz}{\alpha} \\ \frac{Nx}{\beta} & \frac{Ny}{\beta} & \frac{Nz}{\beta} \\ \frac{Bx}{\gamma} & \frac{By}{\gamma} & \frac{Bz}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

La transposée de la matrice LG nous donne la matrice de transformation Repère global-Repère local.

$$GL = \begin{bmatrix} \frac{Tx}{\alpha} & \frac{Nx}{\beta} & \frac{Bx}{\gamma} \\ \frac{Ty}{\alpha} & \frac{Ny}{\beta} & \frac{By}{\gamma} \\ \frac{Tz}{\alpha} & \frac{Nz}{\beta} & \frac{Bz}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Cas circulaire et hélicoïdal

Pour les cas poutres circulaires et hélicoïdales nous nous placerons dans l'hypothèse d'une rotation α des sections autour de l'axe géométrique dans le plan (y,z).

On considère en plus une matrice de rotation :

$$R_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Ce qui donne comme matrice de transformation Repère local-Repère global :

$$LG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{Tx}{\alpha} & \frac{Ty}{\alpha} & \frac{Tz}{\alpha} \\ \frac{Nx}{\beta} & \frac{Ny}{\beta} & \frac{Nz}{\beta} \\ \frac{Bx}{\gamma} & \frac{By}{\gamma} & \frac{Bz}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Cas droit

Pour ce cas précis la formulation de la matrice de transformation sera faite avec les cosinus directeurs des angles.

Avec la paramétrisation :

$$X=at+x_0, \quad Y=bt+y_0, \quad Z=ct+z_0, \quad (2.12)$$

On pose :

$$L = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (2.13)$$

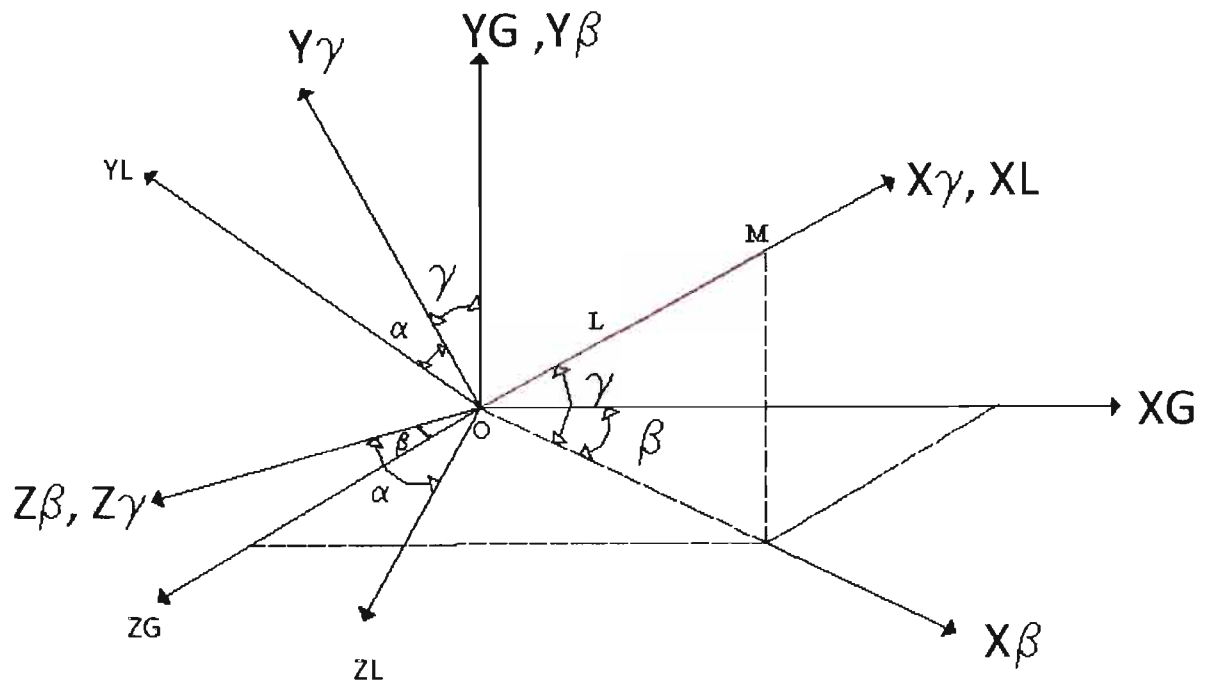


Figure 2.2 : Rotations axiales pour une poutre droite spatiale

Cosinus directeurs :

$$C_x = \frac{a}{L} \quad C_y = \frac{b}{L} \quad C_z = \frac{c}{L} \quad (2.14)$$

On définit :

$$\cos(\beta) = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad \sin(\beta) = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad (2.15)$$

Soit la matrice de rotation :

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\cos(\gamma) &= \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \\ \sin(\gamma) &= C_z\end{aligned}\quad (2.17)$$

Soit la matrice de rotation :

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

En prenant en compte la rotation d'angle α avec la matrice de rotation R_α , nous obtenons pour la matrice de transformation totale repère Local-Repère Global :

$$LG = R_\alpha R_\gamma R_\beta \quad (2.19)$$

Soit :

$$LG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Abscisse curviligne :

En géométrie différentielle, l'**abscisse curviligne** est une sorte de variante algébrique de la longueur d'un arc.

Son expression différentielle s'écrit comme suit :

$$ds = (f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2)^{1/2} d\xi = \left| \frac{d\mathbf{OM}(t)}{dt} \right| dt \quad (2.21)$$

Ce qui donne :

$$S = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{OM}(t)}{dt} \right| dt \quad (2.22)$$

2-3- Courbures et Torsions

Le vecteur courbure torsion dans le repère global sera donné par l'expression :

$$\mathbf{K}_g = \frac{\frac{\delta T(t)}{\delta t}}{\frac{ds}{dt}} \quad (2.23)$$

C'est-à-dire

$$\mathbf{K}_g = \frac{1}{\alpha} [f'', g'', h''] \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

On peut donc écrire :

$$\mathbf{K}_g = \begin{cases} K_x = \frac{f''}{\alpha} \\ K_y = \frac{g''}{\alpha} \\ K_z = \frac{h''}{\alpha} \end{cases} \quad (2.25)$$

On peut obtenir l'expression du vecteur courbure torsion dans la base locale en faisant intervenir la matrice de transformation GL. On obtient alors :

$$\mathbf{K}_l = \frac{1}{\alpha} [f'', g'', h''] [GL] \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$



Figure 2.3 : Illustration d'un pont courbe

III- Résolution du problème par la méthode des éléments finis

3-1- Présentation de la méthode des éléments finis

Dans les problèmes relevant de la mécanique des structures, l'ingénieur recherche la répartition, ou champ de contraintes qui régneront dans la structure étudiée. A l'occasion, il est nécessaire de calculer les déplacements en quelques points particuliers afin de s'assurer que les spécifications de flèche sont bien respectées. Dans certains cas c'est dans son ensemble qu'il faut déterminer la distribution ou champ des déplacements.

La méthode des éléments finis constitue un outil puissant pour atteindre ces objectifs permettant de trouver la solution approchée du problème. Cependant on peut toujours ajuster la précision de la solution.

3-1-1- Intérêts et limitations de la méthode des éléments finis

La méthode permet d'aborder la quasi totalité des phénomènes et particularités de la mécanique du solide :

- les phénomènes de comportement statique en petites et grandes transformations, c'est à dire grandes déformations et/ou grands déplacements,
- les différentes classes de lois de comportement existantes, des lois simples linéaires, aux lois pouvant être fortement non-linéaires comme l'élasto-visco-plasticité,
- les phénomènes thermiques et/ou thermomécanique couples,
- les phénomènes d'instabilité de flambage,
- les phénomènes transitoires et/ou dynamiques qui regroupent les cas d'impacts lents (crash) ou rapides dans le domaine militaire, les cas de vibrations de structures ou même vibrations acoustiques, etc.

Au rang des performances de la méthode, remarquons aussi qu'elle n'est pas limitée par une géométrie particulière, il est possible d'étudier des pièces de taille et de forme quelconque.

Dans le cas où ces données sont complexes, elles n'entraînent qu'un surcoût de temps de calcul. Ainsi le calcul est seulement borné par la puissance de l'ordinateur utilisé.

En termes de précision des résultats, celle-ci n'est en général limitée que par la précision interne de stockage de l'ordinateur et par le temps que l'on désire consacrer à la résolution, temps dépendant également de la puissance du calculateur. Cette diversité montre la versatilité de la méthode.

Concernant les limitations de la méthode, il faut noter une assez grande complexité de mise en œuvre, d'autant plus importante que l'on aborde des phénomènes et/ou géométries et/ou comportements matériels complexes. Par exemple il est possible de simuler une opération complète de mise en forme par emboutissage, ou un phénomène de crash d'automobile, ou encore le comportement d'un implant osseux, mais ces possibilités ne sont réellement accessibles qu'à un public spécialisé.

Néanmoins dans le cas de structures et de sollicitations assez simples qui était naguère étudiées essentiellement via les techniques de la résistance des matériaux, les logiciels de calcul moderne fondés sur les éléments finis apportent un gain de performance non négligeable tout en pouvant rester simples d'utilisation.

3-1-2- Méthode directe de formulation des éléments

Dans la méthode directe on formule les éléments en combinant directement les trois systèmes d'équations élastiques à savoir les conditions d'équilibre, les relations déformations-déplacements et les lois constitutives. Cette méthode est particulièrement utile pour préciser les rapports fondamentaux existant entre l'approximation par éléments finis et la structure réelle.

La méthode directe de formulation des équations de rigidité d'un élément se compose des étapes suivantes :

- 1) On exprime le champ des déplacements Δ de l'élément en un nombre fini de variables de préférence les degrés de liberté $\{\Delta\}$ aux nœuds de l'élément.
- 2) On exprime le champ ϵ des déformations de l'élément en fonction des degrés de liberté $\{\Delta\}$ en dérivant le champ des déplacements conformément aux équations déformations déplacements de l'élasticité.
- 3) On introduit la loi intrinsèque du matériau pour établir la relation entre le champ σ et les degrés de liberté $\{\Delta\}$.
- 4) On introduit les équations décrivant les forces $\{F\}$ aux nœuds de l'élément comme fonctions de σ en les définissant comme les équivalents statiques des contraintes agissant sur les frontières de l'élément. Puisque nous disposons d'équations donnant σ en fonction de $\{\Delta\}$, il est possible de relier $\{F\}$ et $\{\Delta\}$ on obtient ce qui constitue par définition les équations de rigidité de l'élément.

3-1-3- Méthodes variationnelles de formulation des éléments

Les formulations variationnelles, ou de l'énergie, constituent en mécanique des structures une approche puissante, et qui est très utilisée pour formuler les équations des éléments. L'analyse des structures a durant plus d'un siècle utilisé des formes rudimentaires de ces méthodes ; certaines formes plus élaborées sont aussi récentes que l'analyse par éléments finis elle-même, et dans certains cas ses besoins de fondements nouveaux ont pu les susciter.

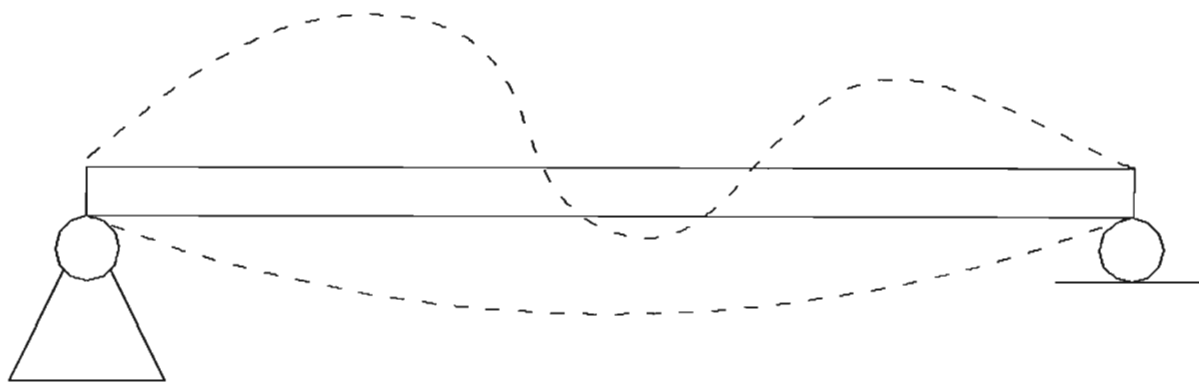
Quoi qu'il en soit, nous disposons actuellement en mécanique des structures d'un ensemble complet et bien délimité de principes variationnels aux domaines d'application et aux limites bien connus.

Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels constitue le fondement des principes variationnels qui seront exposés par la suite.

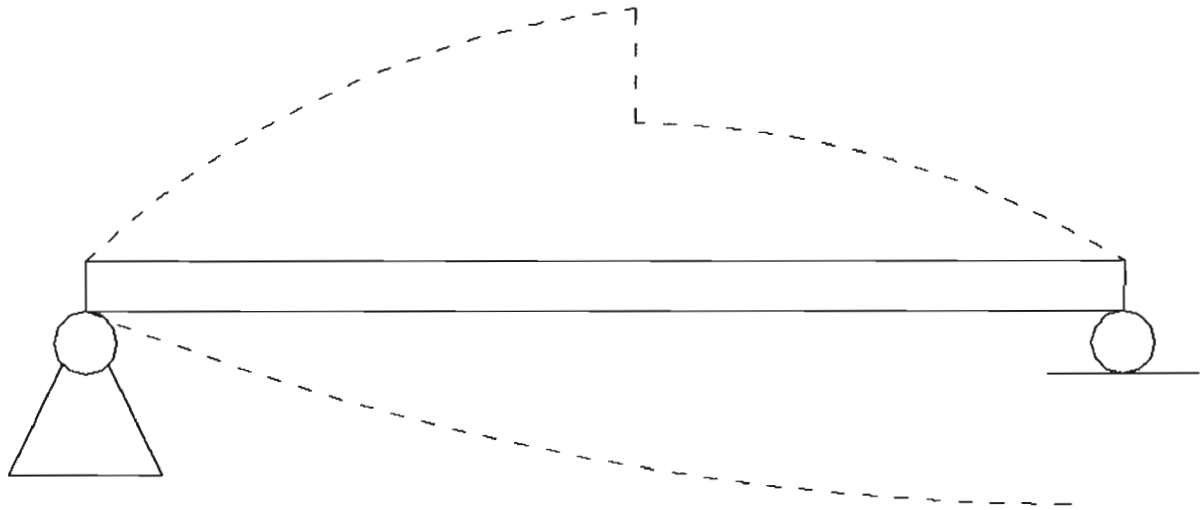
Dans la forme des déplacements virtuels on considère un corps en équilibre sous des forces de volume et des forces extérieures, et qui subit un déplacement virtuel fictif dont le champ peut être décrit par des composantes δu , δv et δw en chaque point ; ce déplacement devra être cinématiquement admissible, c'est-à-dire exprimable par des fonctions continues des coordonnées de l'espace, et qui satisfont aux conditions cinématiques de frontière là où de tels conditions existent. Le principe des déplacements virtuels stipule que dans un déplacement virtuel $\delta\Delta$, la somme de la variation de potentiel δV des forces appliquées et de la variation δU de l'énergie de déformation interne est égale à zéro :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (3.1)$$



Déplacement admissible

Figure 3.1 : Exemple de déplacement admissible sur une structure



Déplacement non admissible

Figure 3.2 : Exemple de déplacement non admissible sur une structure

Minimum de l'énergie potentielle

Le principe du minimum de l'énergie potentielle constitue un fondement variationnel de la formulation directe des équations de rigidité des éléments.

L'énergie potentielle Π_p d'une structure est donnée par la somme de l'énergie de déformation U et du potentiel des charges appliquées V :

$$\Pi_p = U + V \tag{3.2}$$

Et le principe peut s'annoncer comme suit ; Parmi tous les déplacements de formes admissible, ceux qui satisfont aux conditions d'équilibre donnent à l'énergie potentielle une valeur stationnaire ; c'est à dire que

$$\delta \Pi_p = \delta U + \delta V = 0 \tag{3.3}$$

Minimum de l'énergie complémentaire

Le principe du minimum de l'énergie complémentaire constitue une base variationnelle de la formulation directe des souplesses des éléments, c'est-à-dire de l'expression des déplacements des éléments en fonction des forces.

L'énergie complémentaire Π_c d'une structure est donnée par la somme de l'énergie complémentaire de déformation U^* et du potentiel V^* des forces de frontière agissant dans les déplacements imposés ; c'est-à-dire que l'on a :

$$\Pi_c = U^* + V^* \quad (3.4)$$

On peut énoncer le principe comme suit : Parmi tous les états de contraintes qui satisfont aux conditions d'équilibre à l'intérieur du corps d'une part et aux conditions de contraintes aux frontières d'autre part, l'état de contraintes qui satisfait également aux équations contraintes-déplacements à l'intérieur et à tous les déplacements imposés aux frontières donne à l'énergie complémentaire une valeur stationnaire. Soit :

$$\delta \Pi_c = \delta U^* + \delta V^* = 0 \quad (3.5)$$

L'énergie complémentaire s'écrit encore sous la forme :

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{vol} \sigma [E]^{-1} \sigma d(vol) - \int_{S_u} t \cdot \bar{u} \quad (3.6)$$

Où la première intégrale est U^* et la deuxième $-V^*$.

La frontière S_u est la frontière sur laquelle les déplacements sont imposés, et T représente les tractions de frontière correspondantes.

Formulation mixte

Les méthodes en déplacement sont précises pour trouver $u(x)$, mais moins précises pour trouver les contraintes. Les méthodes en contraintes sont très séduisantes car précises en contrainte donc en déplacement, mais elles sont quasiment impossibles à mettre en œuvre.

D'où l'idée de mettre en place une fonctionnelle en (u, σ) , pour cela il suffit d'introduire des multiplicateurs de Lagrange.

Il existe plus d'une fonctionnelle à deux champs. Cependant celle qui a sans doute suscité le plus d'intérêt jusqu'à présent en analyse par éléments finis est la fonctionnelle de Hellinger-Reissner Π_{HR} . Elle est donnée par :

$$\Pi_{HR} = \int_V -\frac{1}{2} \sigma^T C \sigma + \sigma^T \varepsilon) dv - \int_V u^t f_v dv - \int_{S_f} u^T f_s ds \quad (3.7)$$

3-2- Equations de la mécanique

Le comportement d'une structure est régi par le système des trois équations suivantes dont la résolution se fera de manière successive.

$$\begin{cases} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}_R - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{c}_f \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_R = \mathbf{L} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\sigma}_R = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_R \end{cases} \quad (3.8. a)$$

La matrice \mathbf{D} qui est symétrique représente le tenseur d'élasticité spatiale de la poutre.

\mathbf{U} est le champ de déplacements

$\boldsymbol{\varepsilon}_R$: vecteur conjugué des déformations (déformations resultantes)

$\boldsymbol{\sigma}_R$: vecteur conjugué des contraintes (efforts resultants)

\mathbf{L} est l'opérateur différentiel

En négligeant les effets dynamiques dans l'équation, notre système devient :

$$\begin{cases} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}_R + \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_R = \mathbf{L} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\sigma}_R = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_R \end{cases} \quad (3.8. b)$$

On a :

$$L = \begin{bmatrix} Ds & kz & -ky & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -kz & Ds & kx & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ky & -kx & Ds & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -kz & Ds & kx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ky & -kx & Ds & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ds \\ 0 & 0 & 0 & Ds & kz & -ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ds & kz & -ky & -Ds \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

On parvient à isoler une première expression de la matrice D qui s'écrit :

$$D = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & -ESw & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 & 0 & 0 & 0 & Gzc A & 0 \\ 0 & 0 & GA & 0 & 0 & 0 & -Gyc A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E I_y & -E I_{yz} & -E I_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E I_{yz} & E I_z & E I_{wy} & 0 & 0 \\ -ES & 0 & 0 & -E I_{wz} & E I_{wy} & E I_w & 0 & 0 \\ 0 & Gzc A & -Gyc A & 0 & 0 & 0 & GJ & -G(J - I_p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G(I_p - J) & G(J - I_p) \end{bmatrix} \quad (3.10.a)$$

$$A = \int_A dA : \text{aire de la section de la poutre avec } dA = dydz$$

$$I_y = \int_A z^2 dA : \text{moment d'inertie principal par rapport à } y$$

$$I_z = \int_A y^2 dA : \text{moment d'inertie principal par rapport à } z$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA : \text{produit d'inertie relativement aux axes } y \text{ et } z$$

$$I_p = I_y + I_z : \text{moment d'inertie polaire ou quadratique}$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA : \text{moment d'inertie de gauchissement ou sectoriel}$$

$$S_\omega = \int_A \omega(y,z) dA : \text{premier moment sectoriel}$$

$$I_{\omega y} = \int_A \omega y \, dA \quad : \text{produit d'inertie de gauchissement}$$

$$I_{\omega z} = \int_A \omega z \, dA \quad : \text{produit d'inertie de gauchissement}$$

$$J = \int_A \left[(y_b(c) - \omega_{,z})^2 + (z_b(c) - \omega_{,y})^2 \right] dA \quad : \text{Inertie torsionnelle}$$

Nous pouvons simplifier l'expression précédente en considérant deux hypothèses :

-le choix du repère local central d'inertie

-La normalisation de la coordonnée sectorielle $\omega(y,z)$ sur toute la section

$$S_\omega = \iint_A \omega(y,z) \, dydz = 0$$

Avec ces deux considérations il apparait que le centre de torsion coïncide avec le centre géométrique.

On obtient alors comme nouvelle expression :

$$D = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GJ & -G(J - I_p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G(I_p - J) & G(J - I_p) \end{bmatrix} \quad (3.10.b)$$

Avec les hypothèses sur la section dépendant du choix du repère local central principal d'inertie :

$$\int_A z \, dA = \int_A y \, dA = 0$$

$$\int_A y_b(c)dA = -y_c$$

$$\int_A z_b(c)dA = -z_c$$

C (y_c, z_c) le centre de courbure torsion.

3-3- Outil de programmation : le langage C

Le langage C a été créé en 1972 par Denis Ritchie avec un objectif relativement limité : écrire un système d'exploitation (UNIX). Mais ces qualités opérationnelles l'ont très vite fait adopter par une large communauté de programmeurs.

En effet, c'est un langage structuré, avec toutes les possibilités des autres langages structurés. Mais il permet également (avec son extension C++) de gérer des objets. A l'inverse, il permet également une programmation proche du langage machine, ce qui est nécessaire pour accéder aux interfaces entre l'ordinateur et son extérieur. Mais son principal avantage est que ces trois types de programmation peuvent être combinés dans un même programme, tout en restant portable sur tous les ordinateurs existants. Le langage C a néanmoins deux inconvénients majeurs, c'est d'être un peu plus complexe d'utilisation (mais uniquement du fait de ses nombreuses possibilités), et d'être séquentiel, ce qui ne lui permettra pas d'être le langage optimal pour les machines massivement parallèles (mais aujourd'hui il n'existe pas encore de langage universel pour ce type de machines qui puisse combiner efficacement des calculs procéduraux et du déclaratif).

3-4- La méthode P

La méthode-p désigne une stratégie de contrôle de l'erreur qui consiste à faire varier le degré d'interpolation des éléments tout en conservant leur taille. Elle s'oppose à la méthode-h qui consiste à faire varier la taille des éléments tout en conservant leur degré d'interpolation. On parle également de version-h ou -p de la méthode des éléments finis.

3-4-1- Avantages de la méthode P

La méthode-p présente de nombreux attraits. Premièrement, elle est *plus précise* et sa convergence est *plus rapide* que celle de la méthode-h. En effet, pour différentes catégories de problèmes, on observe les caractéristiques suivantes. Lorsque la solution exacte est partout analytique, le taux de convergence est *exponentiel*, alors que celui de la méthode-h n'est qu'algébrique. Pour des problèmes dont la solution exacte contient un nombre fini de points singuliers (problèmes de *Catégorie B*), le taux de convergence est algébrique, mais il est *deux fois plus élevé que celui de la méthode-h* lorsque ces points singuliers sont aussi des nœuds-sommets du maillage. Notons que la plupart des problèmes de statique linéaire rencontrés dans la pratique appartiennent à cette catégorie.

La qualité des solutions est *peu sensible aux distorsions des éléments*, ce qui permet l'utilisation d'éléments aplatis ou de grand rapport de côtés sans trop pénaliser la précision. Aucun verrouillage numérique dû à la quasi *incompressibilité* de certains matériaux n'est observé. Cependant, lorsque le coefficient de Poisson est plus proche de 0.5, la convergence asymptotique de la méthode-p s'obtient à partir d'un degré plus élevé.

Deuxièmement, comme une formulation hiérarchique est adoptée pour la représentation des déplacements, la matrice de raideur relative à un degré donné imbrique celles de degrés inférieurs. Ceci permet d'obtenir de manière économique *une séquence de solutions* au lieu d'une seule solution comme c'est le cas de la méthode-h. Il est donc possible d'utiliser des techniques d'extrapolation pour le contrôle de la qualité des analyses : les solutions convergent de manière strictement monotone, ce qui permet d'estimer l'énergie potentielle totale exacte du problème à partir de trois solutions consécutives en utilisant une procédure *d'extrapolation de Richardson*. L'erreur globale peut ainsi être estimée.

Il est également possible d'observer la *convergence de toute grandeur physique* autre que l'énergie, ce qui permet d'évaluer la qualité locale des solutions obtenues et d'éventuellement détecter certaines *erreurs liées aux données de modélisation* en vérifiant si les solutions convergent ou non.

La *géométrie* peut être représentée de manière exacte, ce qui évite les erreurs liées à sa modélisation.

Troisièmement, la *tâche de modélisation* est réduite car le maillage contient *peu d'éléments* et peut être directement obtenu par division des volumes, définis par les outils de la C.A.O., en macro-éléments (maillages structurés).

3-4-2- Inconvénients de la méthode P

La méthode-p présente toutefois certaines limitations.

Tout d'abord, la méthode-p convient bien pour une *analyse détaillée des composantes* d'une structure complexe. En effet, dans ce cas le nombre de points singuliers est souvent réduit et l'on bénéficie pleinement de la vitesse de convergence élevée de la méthode. Un champ de contrainte de qualité supérieure est obtenu avec peu de degrés de liberté, ce qui permet une analyse locale précise. Par contre, la méthode-h semble plus adéquate pour obtenir une solution globale car le maillage structuré d'une pièce mécanique comportant plusieurs niveaux de détails est très difficile à réaliser et aboutit souvent à un grand nombre d'éléments. Ensuite, pour des problèmes dont la solution contient un nombre infini de points singuliers, la méthode-p n'est pas meilleure que la méthode-h du point de vue de la convergence. A noter que les structures composées de plusieurs matériaux et les structures en régime élastoplastique font partie des problèmes de la Catégorie C.

Pour un même nombre de degrés de liberté, la matrice de raideur relative à la méthode-p est plus dense. Ceci signifie que, pour le même nombre de degrés de liberté, les demandes en mémoire centrale et en temps de calcul seront plus importantes. Mais en choisissant des méthodes de résolution appropriées, le gain de précision l'emporte sur l'augmentation du temps de calcul.

Enfin, la méthode-p n'est pas facile à intégrer dans un code existant parce que celui-ci ne prévoit généralement pas d'*outils de pré- et post-traitement* pour des éléments de degré élevé.

3-4-3- Discrétisation de la géométrie

La définition géométrique des éléments constitue un des points clés de l'implantation d'un code-p.

Types d'interpolation classique utilisée pour un élément à une dimension

Interpolation linéaire (à 2 nœuds)

Ce type d'interpolation convient bien pour le cas de la poutre droite. Les fonctions correspondantes sont les suivantes :

$$N_1 = \frac{(1 - \xi)}{2} \quad , \quad N_2 = \frac{(1 + \xi)}{2} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} X(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2} x_1 + \frac{(1+\xi)}{2} x_2 \\ Y(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2} y_1 + \frac{(1+\xi)}{2} y_2 \\ Z(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2} z_1 + \frac{(1+\xi)}{2} z_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{\delta X(\xi)}{\delta \xi}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y(\xi)}{\delta \xi}\right)^2 + \left(\frac{\delta Z(\xi)}{\delta \xi}\right)^2} = \frac{L}{2} \quad (3.13)$$

m = module tangent

Interpolation quadratique (à 3 nœuds)

Elle est très adaptée pour approximer la géométrie de la poutre dans le cas **hélicoïdale** ainsi que dans le cas **clothoïdale**.

Les fonctions sont définies par :

$$N_1 = \frac{-\xi(1-\xi)}{2} \quad , \quad N_2 = \frac{\xi(1+\xi)}{2} \quad , \quad N_3 = (1 - \xi^2) \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} X(\xi) = \frac{-\xi(1-\xi)}{2}x_1 + \frac{\xi(1+\xi)}{2}x_2 + (1-\xi^2)x_3 \\ Y(\xi) = \frac{-\xi(1-\xi)}{2}y_1 + \frac{\xi(1+\xi)}{2}y_2 + (1-\xi^2)y_3 \\ Z(\xi) = \frac{-\xi(1-\xi)}{2}z_1 + \frac{\xi(1+\xi)}{2}z_2 + (1-\xi^2)z_3 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{\delta X(\xi)}{\delta \xi}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y(\xi)}{\delta \xi}\right)^2 + \left(\frac{\delta Z(\xi)}{\delta \xi}\right)^2} \quad (3.16)$$

m = module tangent

Cas circulaire

L'interpolation de la géométrie d'une poutre circulaire n'est pas chose aisée. C'est pourquoi l'on s'appuie sur une autre approche pour transformer les coordonnées de l'élément réel.

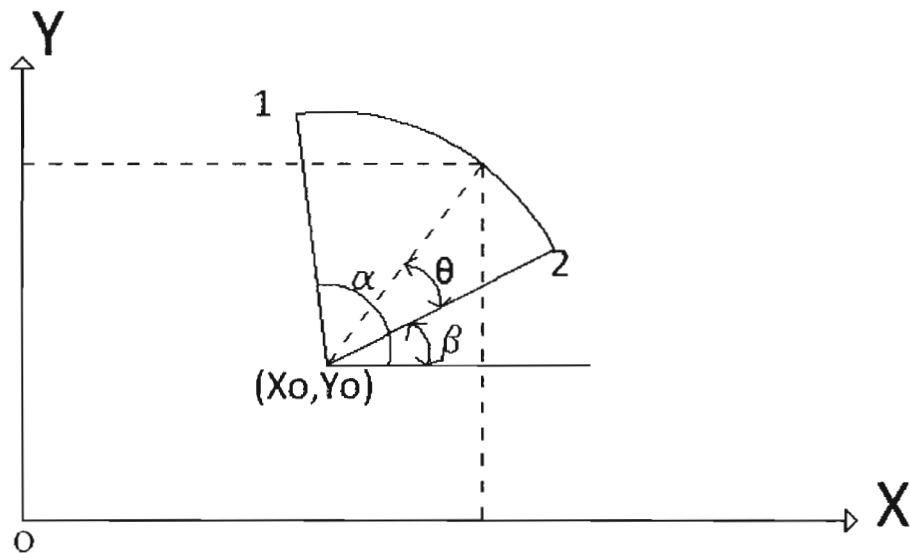


Figure 3.3 : Poutre circulaire

A un point quelconque de la poutre, on a :

$$\begin{cases} X(\xi) = X_o + R_g \cos(\beta + \theta) \\ Y(\xi) = Y_o + R_g \sin(\beta + \theta) \end{cases} \quad (3.17.a)$$

à $\xi = -1$ on a $\theta = \alpha - \beta$

à $\xi = 1$ on a $\theta = 0$

d'où :

$$\theta = \frac{\alpha - \beta}{2} (\xi - 1) \quad (3.18)$$

On obtient par la suite :

$$\begin{cases} X(\xi) = X_o + R_g \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2} \xi + \frac{\beta + \alpha}{2}\right) \\ Y(\xi) = Y_o + R_g \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2} \xi + \frac{\beta + \alpha}{2}\right) \end{cases} \quad (3.17. b)$$

Si l'origine coïncide avec X_o et Y_o c'est-à-dire $X_o=0$ et $Y_o=0$

$$m = \sqrt{\left(\frac{\delta X(\xi)}{\delta \xi}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y(\xi)}{\delta \xi}\right)^2} = R_g \quad (3.19)$$

m = module tangent

Construction de la matrice de transformation

Pour pouvoir passer du repère local au repère global il faut nécessairement construire la matrice de transformation. Précédemment nous avons déjà donné les expressions qui permettent de passer du repère local au repère global.

Le champ de déplacement U s'écrit sous la forme :

$$U = \left(u_g(s), v_g(s), w_g(s), \theta_x(s), \theta_y(s), \theta_z(s), \psi(s) \right) \quad (3.20)$$

Les expressions des trois translations u, v, w au niveau de l'élément doivent être écrites en fonction des trois translations U, V, W du repère global. Il en est de même pour les trois rotations $\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$ qui doivent être écrites en fonction de $\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$ du repère global

Pour le cas de la fonction de gauchissement son expression dans le repère globale sera fonction des trois rotations $\Theta_X, \Theta_Y, \Theta_Z$.

La taille de la matrice de transformation obtenue sera de dimension $(7p+7) \times (6p+6)$ donc dépend fonction du degré p considéré.

On obtient l'expression suivante pour la matrice de transformation λ suivante dans le cas $p=2$.

$$\lambda = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & C_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & C_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & C_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & C_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & C_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & C_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Avec :

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{T_x}{\alpha} & \frac{T_y}{\alpha} & \frac{T_z}{\alpha} \\ \frac{N_x}{\beta} & \frac{N_y}{\beta} & \frac{N_z}{\beta} \\ \frac{B_x}{\gamma} & \frac{B_y}{\gamma} & \frac{B_z}{\gamma} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 = \begin{bmatrix} \frac{T_x}{\alpha} & \frac{T_y}{\alpha} & \frac{T_z}{\alpha} \end{bmatrix}$$

3-4-4- Approximation nodale

L'objectif de la méthode est de déterminer des fonctions inconnues telles que les fonctions déplacements, contraintes ou déformations. On parle de "champs" de déplacement, contraintes ou déformations pour indiquer qu'il y a autant de fonctions inconnues que de points différents. Un champ de fonction regroupe donc une infinité de fonctions inconnues.

Dans le cas courant, l'inconnue principale s'avère être le champ de déplacements U . Les autres inconnues, contraintes et déformations, sont déterminées dans une seconde phase à partir de la fonction déplacements, on parle d'inconnues secondaires.

Supposons que l'on cherche à approcher la valeur d'une fonction $U(x)$ sur un certain domaine réel $[a; b]$. Dans le cadre des éléments finis on recherche une approximation en général à partir de fonctions polynomiales.

Sur chaque élément fini la fonction approchée est définie à partir de ses valeurs en des points particuliers, ici les extrémités de l'élément fini et au centre. Chaque extrémité de l'élément est appelée **un nœud** (d'interpolation).

On écrit alors U sous la forme :

$$U = N d \quad (3.22)$$

U = champ de déplacements

N : matrice contenant les fonctions d'interpolation

d : vecteur déplacements aux nœuds

Pour un modèle cinématiquement admissible, le champ des déplacements doit être continu.

Par conséquent, les fonctions de forme doivent l'être aussi. Pour faciliter les traitements numériques, il faut choisir des fonctions relativement simples, par exemple des polynômes.

De plus, pour réduire l'erreur numérique, il faut que le système d'équations éléments finis soit bien conditionné, et ce surtout pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Toutes ces conditions impliquent le choix des fonctions de forme construites à partir de fonctions polynomiales simples possédant certaines propriétés d'orthogonalité telles que les polynômes de Legendre.

Polynômes de Legendre

Introduisons d'abord les polynômes de Legendre orthogonaux $P_i(x)$ définis entre $[-1, +1]$.

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.23)$$

Ils sont solutions de l'équation différentielle suivante pour $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \quad (3.24)$$

Ces polynômes présentent les propriétés suivantes :

1) *Orthogonalité* :

$$(P_n, P_j) = \int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq j \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = j \end{cases} \quad (3.25)$$

2) *Symétrie*

$$P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x) \quad (3.26)$$

3) *Formule de récurrence*

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27)$$

4) *Normalisation*

$$P_n(1) = 1 \quad (3.28)$$

5) *Encadrement*

$$|P_n(x)| \leq 1 \quad \text{pour } -1 \leq x \leq 1 \quad (3.29)$$

6) *Récurrence pour les dérivées*

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.30)$$

Modes-Bulle

A partir des polynômes de Legendre, il est possible de construire un ensemble de modes bulle définis comme suit :

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^x P_{j-1}(t) dt \quad j = 2, 3, 4, \dots \quad (3.31)$$

Par conséquent :

$$\frac{d\phi_j(x)}{dx} = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} P_{j-1}(x) \quad (3.32)$$

Et :

$$\phi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} [P_j(x) - P_{j-2}(x)] \quad (3.33)$$

Ces modes-bulle ont les propriétés suivantes :

1) *Nullité aux extrémités :*

$$\phi_j(-1) = \phi_j(+1) = 0 \quad j = 2, 3, \dots \quad (3.34)$$

2) *Orthonormalité des dérivées premières :*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.35)$$

3) *Symétrie :*

$$\phi_j(x) = (-1)^j \phi_j(x) \quad (3.36)$$

4) *Nullité des intégrales de degré impair :*

$$\int_{-1}^1 \phi_j(x) dx = 0 \quad j = 3, 5, 7, \dots \quad (3.37)$$

5) *Quasi-orthogonalité :*

$$\int_{-1}^{+1} \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{(2i+1)(2i-3)} & j = i \\ -\frac{1}{(2i-3)\sqrt{(2i-1)(2i-5)}} & j = i - 2 \\ -\frac{1}{(2i+1)\sqrt{(2i-1)(2i+3)}} & j = i + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.38)$$

Fonctions de forme hiérarchiques

La propriété de nullité aux extrémités des modes-bulle permet l'introduction des fonctions de forme hiérarchiques :

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad ; \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.39)$$

$$N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi) \quad i = 3, 4, \dots, p + 1 \quad (3.40)$$

Où N_1 et N_2 sont les fonctions de forme nodales ou externes ou encore modes externes. Les fonctions N_i , $i=3, 4, \dots$ sont des fonctions de forme internes ou modes internes ou encore modes-bulle. Les modes externes permettent de se connecter avec d'autres éléments pour assurer la continuité des déplacements, tandis que les modes internes permettent d'enrichir le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément.

Le terme "hiérarchique" est utilisé car l'ensemble des fonctions de forme de degré p inclut ceux des degrés inférieurs $p-1, p-2, \dots, 1$ comme sous-ensembles. Le champ des déplacements discrétisé à l'intérieur de l'élément est :

$$U = \sum_{j=1}^{p+1} N_j(\xi) d_j \quad (3.41)$$

où d_1 et d_2 sont des déplacements nodaux, tandis que d_3, \dots, d_{p+1} ne représentent pas des déplacements réels mais plutôt des amplitudes des modes internes ou déplacements relatifs (hiérarchiques). Leur nature est différente de celle des éléments définis en formulation totale. Dans ce dernier cas, d_3, \dots, d_{p+1} sont réellement des déplacements aux nœuds internes.

Posons :

$$d_j = \Delta_{j-2} \quad \text{pour } j = 3, 4, \dots, p + 1 \quad (3.42)$$

Il s'agit de différencier les déplacements réels (U_1 et U_2) aux déplacements mode bulle (Δ_{j-2} avec j allant de 3 à $p+1$).

Vu la structure hiérarchique des fonctions de forme, la matrice de raideur élémentaire et le vecteur des forces élémentaires ont aussi une structure hiérarchique.

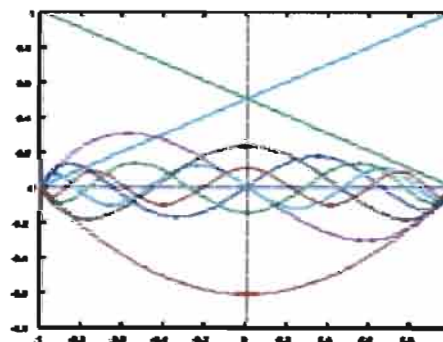


Figure 3.4 : Fonctions de forme hiérarchiques

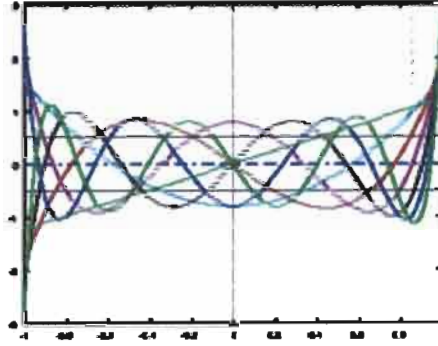


Figure 3.5 : Dérivées des fonctions de forme hiérarchiques

Construction de la matrice N

Puisque les fonctions d'interpolation ont été définies, on peut alors construire notre matrice N. Etant donné que l'on a sept degré de liberté par nœud notre matrice aura sept lignes et un nombre de colonnes qui dépend du degré d'interpolation p. Plus exactement on aura une matrice N de dimensions $(7 \times 7p+7)$.

Rappelons que le champ de déplacement U s'écrit sous la forme :

$$U = (u_g(s), v_g(s), w_g(s), \theta_x(s), \theta_y(s), \theta_z(s), \psi(s))$$

Le vecteur déplacement au premier nœud d'extrémité s'écrit :

$$d_1 = (u_1(s), v_1(s), w_1(s), \theta_{x1}(s), \theta_{y1}(s), \theta_{z1}(s), \psi_1(s)) \quad (3.43)$$

Le vecteur déplacement au deuxième nœud d'extrémité s'écrit :

$$d_2 = (u_2(s), v_2(s), w_2(s), \theta_{x2}(s), \theta_{y2}(s), \theta_{z2}(s), \psi_2(s)) \quad (3.44)$$

-Les trois translations suivant les directions x, y et z s'écrivent :

$$\begin{aligned} u &= u_1 N_1 + u_2 N_2 + \sum_{j=2}^p \Delta^u_{j-1} \phi_{j-1} \\ v &= v_1 N_1 + v_2 N_2 + \sum_{j=2}^p \Delta^v_{j-1} \phi_{j-1} \\ w &= w_1 N_1 + w_2 N_2 + \sum_{j=2}^p \Delta^w_{j-1} \phi_{j-1} \end{aligned} \quad (3.45)$$

-Les trois rotations libres suivant les directions x, y et z s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\theta_x &= \theta_{x1}N_1 + \theta_{x2}N_2 + \sum_{j=2}^p \Delta^{\theta_x}_{j-1} \phi_{j-1} \\
\theta_y &= \theta_{y1}N_1 + \theta_{y2}N_2 + \sum_{j=2}^p \Delta^{\theta_y}_{j-1} \phi_{j-1} \\
\theta_z &= \theta_{z1}N_1 + \theta_{z2}N_2 + \sum_{j=2}^p \Delta^{\theta_z}_{j-1} \phi_{j-1}
\end{aligned}
\tag{3.46}$$

-La rotation libre due au bimoment M_{yz} :

$$\psi = \psi_1 N_1 + \psi_2 N_2 + \sum_{j=2}^p \Delta^{\psi}_{j-1} \phi_{j-1}
\tag{3.47}$$

Par exemple pour le cas $p=2$ la matrice N obtenue sera de dimensions (7×21) et aura pour expression :

$$N = \begin{bmatrix}
N_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & N_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & N_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & N_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & N_1 & \dots & \dots & \dots & N_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & N_1 & \dots & \dots & N_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_1 & \dots & N_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{bmatrix}
\tag{3.48}$$

Avec :

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad \text{et} \quad N_3 = \frac{\sqrt{6}(\xi^2-1)}{4}
\tag{3.49}$$

3-5- Intégrations numériques

D'une manière générale nous aurons à intégrer en une dimension relativement à des éléments de référence, des fonctions quelconques qui n'ont pas à priori de primitives explicites.

Soit l'intégration suivante :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi
\tag{3.50}$$

L'idée générale est d'approcher la fonction f par un polynôme que l'on saura parfaitement intégrer par la suite.

Nous utiliserons comme technique d'intégration la méthode de Gauss avec $p+1$ points de Gauss (p étant le degré de l'élément).

Sa formule générale s'écrit :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k) \quad (3.51)$$

Avec :

Les coefficients w_k sont des réels indépendants de f , appelés fonctions poids de Gauss et les x_0, x_1, \dots, x_k des points deux à deux distincts de $[a,b]$, appelés points de Gauss.

3-5-1- Calcul de la matrice de rigidité

Désignons par k_e la matrice de rigidité d'un élément. Par définition :

$$k_e = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (3.52.a)$$

On a :

$$B = L N$$

L : est l'opérateur différentiel

N : matrice des fonctions d'interpolation

D : tenseur d'élasticité spatiale de la poutre

Nous aurons à faire l'intégrale sur l'élément de référence. On aura :

$$k_e = \int_{-1}^1 B^T D B ds \quad (3.52.b)$$

3-5-2- Calcul des forces équivalentes aux nœuds

✓ **Force uniformément répartie**

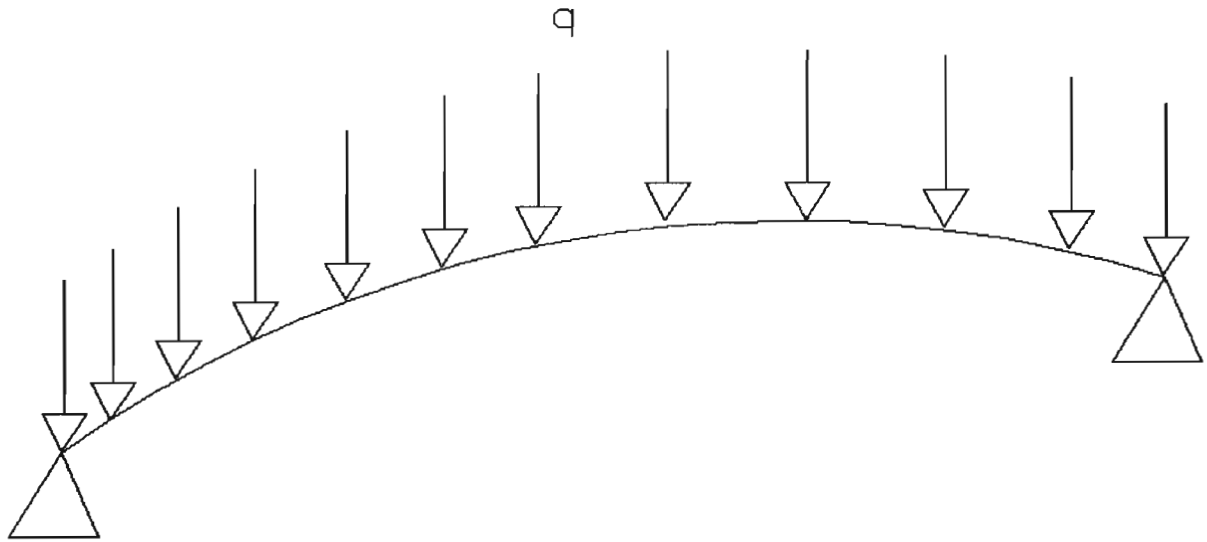


Figure 3.6 : **Charge uniformément répartie sur une structure**

$$f_e = \int_{\Omega} N^T q d\Omega \quad (3.53)$$

De même cette intégration se fera sur l'élément de référence. On obtient :

$$f_e = \int_{-1}^1 N^T q m d\xi \quad (3.54)$$

m est le module tangent de la courbe

✓ **Force ponctuelle**

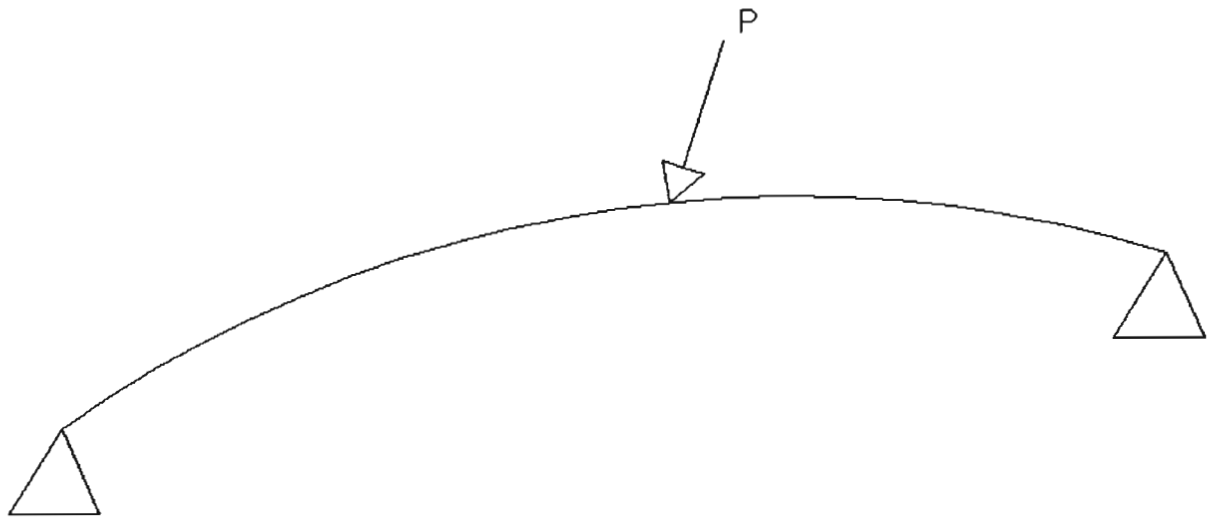


Figure 3.7 : Charge ponctuelle sur une structure

Considérons une force ponctuelle P appliquée à une abscisse donnée et qui a six composantes :

$$\{f_x, f_y, f_z, M_x, M_y, M_z\} \quad (3.55)$$

$$f_e = N_*^T P \quad (3.56)$$

N_* représente la matrice N évaluée à l'abscisse ξ du point où s'applique la charge.

3-6- Assemblage et résolution des systèmes hiérarchiques

3-6-1- Assemblage

Pour obtenir la matrice de rigidité globale de toute la structure, les matrices de rigidité des éléments doivent être transformées pour être à l'échelle de l'ensemble de la structure puis additionnées entre elles. Ce procédé porte le nom d'assemblage.

Pour y parvenir nous construisons la matrice de localisation L . La matrice de rigidité de l'élément à l'échelle de la structure entière sera donnée par la formule :

$$K_i = L^T \times K_e \times L \quad (3.57)$$

Avec K_e la matrice de rigidité globale de l'élément.

Désignons par K_G la matrice de rigidité globale de la structure on a :

$$K_G = \sum K_i \quad (3.58)$$

Il en est de même pour les vecteurs des forces équivalentes appliquées aux nœuds. Ils doivent être ramenés à l'échelle de la structure par la formule :

$$F_i = L^T \times F_e \quad (3.59)$$

Désignons par F_T le vecteur forces équivalentes appliquées à la structure on a :

$$F_T = \sum F_i \quad (3.60)$$

3-6-2- Résolution des systèmes hiérarchiques

Soit Δ_L les déplacements inconnus et $\overline{\Delta_R}$ les déplacements spécifiés.

Pour faciliter sa résolution le système d'équations précédemment établi doit donc être mis sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{RR} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_L \\ \overline{\Delta_R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{F_L} \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

La matrice de rigidité assemblée précédemment et le vecteur forces appliquées au système doivent donc être mis sous la forme matricielle décrite plus haut.

Pour y parvenir nous construirons la matrice de permutation LS.

La nouvelle matrice de rigidité et le nouveau vecteur forces appliquées seront obtenus par les relations :

$$K = LS^T \times K_G \times LS \quad \text{et} \quad F = LS^T \times F_T \quad (3.62)$$

Construction de la matrice LS

On peut construire cette matrice en utilisant les deux critères suivants :

Critère 1 : Les DDL fixés doivent porter un numéro plus élevé que les DDL libres, ceci afin d'éliminer ces DDL fixés et de calculer les réactions.

Critère 2 : Dans chacun des groupes de DDL (fixés ou libres), les DDL relatifs à un degré p doivent porter un numéro plus élevé que ceux relatifs aux degrés $p-1, p-2, \dots, 1$, ceci afin de préserver la structure hiérarchique du système d'équations éléments finis.

A partir de ces deux critères nous avons établis une routine qui nous génère la matrice LS qui dépend des groupes de DDL (fixés ou libres) au niveau de chaque nœud de la structure.

Résolution du système

D'après le système précédent on obtient :

$$K_{LL}\Delta_L + K_{LR}\overline{\Delta}_R = \overline{F}_L \quad (3.63)$$

Et l'on détermine :

$$\Delta_L = K_{LL}^{-1}(\overline{F}_L - K_{LR}\overline{\Delta}_R) \quad (3.64)$$

Si les appuis sont fixes $\overline{\Delta}_R = 0$ on obtient :

$$K_{LL}\Delta_L = \overline{F}_L \quad (3.65)$$

De même on a la relation suivante :

$$K_{RL}\Delta_L + K_{RR}\overline{\Delta}_R = F_R \quad (3.66)$$

Si les appuis sont fixes $\overline{\Delta}_R = 0$ on obtient :

$$K_{RL}\Delta_L = F_R \quad (3.67)$$

F_R contient aussi bien les composantes du vecteur forces équivalentes aux nœuds des appuis issu du chargement en travée des membrures qu'on appellera F' mais également les réactions au niveaux des appuis.

Désignons par R le vecteur réactions d'appui. On a :

$$R = K_{RL} \times \Delta_L - F' \quad (3.68)$$

3-6-3- Méthode numérique pour la résolution

Les codes-p s'accrochent mal de solveurs directs. Il est donc nécessaire de recourir à des méthodes de résolution itératives. De nombreuses expériences numériques ont permis de conclure que, dans le cas de l'analyse des structures, la meilleure méthode itérative est la méthode des gradients conjugués.

La méthode des gradients conjugués

La solution du système condensé est équivalente à la recherche du minimum de l'énergie potentielle totale :

$$\pi = \frac{1}{2} q^T K q - q^T g \quad (3.69)$$

Il est donc possible de partir d'une solution initiale donnée q et de procéder de manière itérative en incrémentant q :

$$q_{i+1} = q_i + \beta_i s_i \quad (3.70)$$

où s_i est le *vecteur des directions de recherche* à l'itération i . β_i est le *pas de recherche*.

Au départ, le vecteur des directions de recherche peut être pris comme le *vecteur des gradients de π* (appelé parfois aussi le *vecteur des résidus d'équilibre*), désigné par r_i et défini comme :

$$r_i = K q_i - g \quad (3.71)$$

Evidemment, lorsque la solution exacte est atteinte, les résidus doivent être nuls. A partir de la deuxième itération, le vecteur de directions de recherche peut être choisi comme une combinaison linéaire du vecteur des gradients et du vecteur des directions de recherche précédentes :

$$s_i = -r_i + \alpha_i s_{i-1} \quad (3.72)$$

où α_i est appelé *coefficient de conjugaison*.

Les paramètres α_i et β_i peuvent être choisis de manière à minimiser la fonctionnelle π relative à l'itération $i+1$:

$$\pi_{i+1} = \frac{1}{2} q_{i+1}^T K q_{i+1} - q_{i+1}^T g \quad (3.73)$$

Ce qui conduit à :

$$\beta_i = -\frac{s_i^T r_i}{s_i^T K s_i} \quad (3.74)$$

Et :

$$\alpha_i = \frac{r_i^T (r_i - r_{i-1})}{r_i^T r_{i-1}} \quad \text{ou} \quad \alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{r_i^T r_{i-1}} \quad (3.75)$$

selon que l'on adopte les simplifications de Polak-Ribière ou de Hestenes-Steifel.

L'algorithme de la méthode est le suivant.

Initialisation ($i=1$)

- a) Choisir une solution de départ q_1 et calculer r_1 par (3.71);
- b) calculer β_1 par (3.74) avec $s_1 = r_1$;
- c) calculer q_2 par (3.70) avec $s_1 = r_1$.

Itérations ($i > 1$)

- a) Calculer r_i par (3.71);

-
- b) calculer α_i par (3.75);
 - c) calculer s_i par (3.72);
 - d) calculer β_i par (3.74);
 - e) calculer q_{i+1} par (3.70), puis revenir à l'étape a).

Le processus est terminé lorsque $\frac{\|r_i\|}{\|g\|}$ est inférieur ou égal à la tolérance τ (en général 10^{-8}).

Le nombre d'itérations requis est proportionnel à la racine carrée du nombre de conditionnement de la matrice de raideur (rapport des valeurs propres extrêmes de la matrice); il peut être fortement réduit en pré-conditionnant le système.

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Nous essaierons dans cette partie de faire une synthèse du travail jusque là accompli.

L'objectif de ce projet est d'utiliser la méthode des éléments finis plus particulièrement la méthode P pour étudier le comportement des poutres droites, circulaires, clothoïdales et hélicoïdales.

En utilisant comme langage de programmation le langage C, nous avons pu générer la matrice des fonctions d'interpolation N.

A partir de cette dernière on construit la matrice $B = LN$. On a pu générer la matrice de rigidité à l'aide d'une routine d'intégration numérique utilisant la méthode de Gauss Legendre. On a :

$$k_e = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega$$

Nous avons ensuite générer les charges équivalentes aux nœuds pour deux cas de chargements :

- ✓ Charge ponctuelle
- ✓ Charge uniformément répartie

Cependant nous n'avons pas totalement résolu le cas chargement ponctuel. En effet il faudrait pouvoir déterminer l'abscisse curviligne du point où s'applique la charge connaissant ses coordonnées.

Des tests numériques doivent également être effectués afin de pouvoir valider les programmes obtenus.

En utilisant la méthode des gradients conjugués on résout le système $K_{LL}\Delta_L = FL$ et on obtient les déplacements à chaque nœud de la structure. On en déduit les réactions d'appui.

Puisque le vecteur déplacement aux nœuds a été obtenu, il faudrait arriver à déterminer :

- ✓ Le champ des déplacements en tout point de la structure avec la relation $U=Nd$
- ✓ Le champ des déformations en tout point de la structure par la relation $\varepsilon=Bd$
- ✓ Le champ des contraintes en tout point de la structure par la relation $\sigma=D \varepsilon$
- ✓ L'effort normal et les efforts tranchants sont donnés par : $Q = \int_A \sigma dA$ soit

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} dA$$

✓ Les moments de flexion M_x , M_y et le Bi-moment M_ω qui sont donnés par :

$$M = \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \\ M_\omega \end{bmatrix} = \int_A \sigma_{xx} \begin{bmatrix} z \\ -y \\ -\omega(y,z) \end{bmatrix} dA$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Richard H.Gallagher**, ` Introduction aux éléments finis, Edition Pluralis ', 1977
- [2] **J.L. Batoz et G. Dhatt**, ` Modélisation des structures par éléments finis ', volume 2, poutres et plaques, Edition Hermès, 1990
- [3] **Boubacar Keita**, ` Modélisation par éléments finis type P des ponts courbes ', projet de fin d'études , Ecole Polytechnique de Thiès, 2005
- [4] **Valdiodio Guirande Diouf**, ` Modélisation par éléments finis appliquée au calcul des ponts courbes ', projet de fin d'études, Ecole Polytechnique de Thiès, 2002
- [5] **O.C.Zienkiewicz**, ` The finite element method ', 3rd edition, Mc Graw-Hill, 1977
- [6] **Robert D. COOK**, ` Concept and applications of Finite Element Analysis ', Second Edition. John Wiley & Sons New York/Chichester/Brisbane/Toronto/Singapore, 1974, 1981
- [7] **SZABO Barna & BABUSKA Ivo**, ` Finite Element Analysis ', John Wiley & Sons 367 pages (1991)

ANNEXE :

ANNEXE 1

Les fonctions d'interpolation hiérarchiques

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{6} \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \sqrt{10} \left(\frac{1}{2} t^3 - \frac{1}{2} t \right)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{2} \sqrt{14} \left(\frac{5}{8} t^4 + \frac{1}{8} - \frac{3}{4} t^2 \right)$$

$$\phi_5 = \frac{3}{2} \sqrt{2} \left(\frac{7}{8} t^5 - \frac{5}{4} t^3 + \frac{3}{8} t \right)$$

$$\phi_6 = \frac{1}{2} \sqrt{22} \left(\frac{21}{16} t^6 - \frac{1}{16} - \frac{35}{16} t^4 + \frac{15}{16} t^2 \right)$$

$$\phi_7 = \frac{1}{2} \sqrt{26} \left(\frac{33}{16} t^7 - \frac{63}{16} t^5 + \frac{35}{16} t^3 - \frac{5}{16} t \right)$$

$$\phi_8 = \frac{1}{2} \sqrt{30} \left(\frac{429}{128} t^8 + \frac{5}{128} - \frac{231}{32} t^6 + \frac{315}{64} t^4 - \frac{35}{32} t^2 \right)$$

$$\phi_9 = \frac{1}{2} \sqrt{34} \left(\frac{715}{128} t^9 - \frac{429}{32} t^7 + \frac{693}{64} t^5 - \frac{105}{32} t^3 + \frac{35}{128} t \right)$$

$$\phi_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{38} \left(\frac{2431}{256} t^{10} - \frac{7}{256} - \frac{6435}{256} t^8 + \frac{3003}{128} t^6 - \frac{1155}{128} t^4 + \frac{315}{256} t^2 \right)$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{42} \left(\frac{4199}{256} t^{11} - \frac{12155}{256} t^9 + \frac{6435}{128} t^7 - \frac{3003}{128} t^5 + \frac{1155}{256} t^3 - \frac{63}{256} t \right)$$