RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE THIÈS

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME D'INGÉNIEUR DE CONCEPTION

TITRE

CALCUL DE COQUES PAR ELEMENTS FINIS

AUTEUR : YVES HABIB FRANCIS KONATE

DIRECTEUR : MOUHAMADOU M. NDIAYE

CO-DIRECTEUR :

DATE : 7 JUIN 1986

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier

— Monsieur Mouhamadou Moustapha NDIAYE, professeur, pour avoir accepté la direction du projet

— l'équipe de techniciens et techniciennes du Centre de Calcul

— Monsieur Abdoul Aziz Gueye pour sa collaboration

SOMMAIRE

Ce ouvrage est le rapport d'un travail éffectué dans le but d'élaborer un logiciel de calcul de coques et de plaques par la méthode des éléments finis.

Apres une introduction qui donne les raisons du choix du sujet comme projet de fin d'étude, nous avons procédé à la présentation des différents thèmes relatifs à la réalisation du logiciel, en insistant sur le coté pratique de leurs applications; c'est ainsi que nous décrivons d'abord la méthode des éléments finis, en évitant de nous attarder sur son aspect mathématique; il s'agit ensuite de la théorie des coques et des plaques dans laquelle on introduit juste les équations dont nous aurons besoin dans le troisième thème; ce dernier développe les formules nécessaires à l'élaboration du logiciel.

L'élément utilisé est le type le plus simple qui existe un élément triangulaire à trois nœuds repartis à ses sommets

L'analyse des résultats fait ressortir les limites du logiciel et les dispositions relatives à son exploitation; mais auparavant, on a décrit le fonctionnement du logiciel, de même que les noms des variables qui y sont utilisées.

INTRODUCTION

CHAPITRE I

PRESENTATION DE
LA
METHODE DES ELEMENTS
FINIS

Depuis quelques années déjà, des travaux ont été entrepris à l'école polytechnique de Thies pour développer la conception assistée par ordinateur (C.A.O.), dans le domaine de l'analyse des structures. C'est ainsi que deux logiciels ont été réalisés :

- l'un pour l'analyse automatique des cadres rigides linéaires, et
- l'autre pour l'analyse des murs par élément fini.

Cette année, on se propose de confectionner un logiciel qui permettra d'analyser les plaques et les voiles minces en flexion.

La forme et les conditions d'appuis des plaques rencontrées dans la majorité des problèmes pratiques rendent difficiles l'utilisation des méthodes classiques: la méthode des séries doubles de Navier et celle des séries simples de Lévy sont limitées aux plaques rectangulaires, tandis que la méthode des différences finies connait des difficultés lors de la représentation des conditions aux limites; ce sont là les raisons du choix de la méthode des éléments finis : elle est la seule méthode susceptible de résoudre sans grosses difficultés les problèmes de plaques et de coques de formes quelconques.

Dans notre étude, nous appliquerons la théorie des plaques minces; les déflexions sont faibles et on néglige la distorsion de la section droite sous l'influence des efforts tranchants. Ces suppositions forment aussi les bases de la théorie des voiles minces; la différence supplémentaire réside dans le comportement des plaques et des coques sous l'effet des charges exterieures; alors que l'équilibre statique d'une plaque subissant des charges latérales est possible grace à l'action des moments de torsion et de flexion, ainsi que des forces de cisaillement, les coques en général sont capables de transmettre les charges de surface par le biais des contraintes membranaires qui agissent parallèlement au plan tangent à un point donné de la surface médiane.

Une étude sur la théorie des membranes et de celle des plaques en flexion faira suite à une présentation de la théorie des éléments finis; c'est alors que nous procèderons à l'élaboration du logiciel; le langage utilisé sera le FORTRAN 77.

Nous supposerons que le materiau utilisé est homogène, isotrope et élastique linéaire; nous ne tiendrons pas non plus compte des contraintes génerées par les variations de température, ni de celles dues à d'éventuelles déformations initiales.

1.1 HISTORIQUE

Cent ans après l'établissement des bases de l'analyse structurale et la consolidation des théories sur la flexion et la torsion des poutres durant la période de 1850 à 1860, le champ d'application de l'analyse des structures se limitait toujours à l'etude des systemes unidimensionnels constitués d'éléments poutres et treillis ; Toutefois en 1909, RITZ avait trouvé une méthode puissante de résolution approchée des problèmes de la mécanique des milieux continus ; cette methode consistait à minimiser un fonctionnelle, c'est-à-dire une fonction de fonctions par rapport aux inconnues ; les fonctions prises à l'essai etaient des inconnues et devaient verifier les conditions frontieres du probleme ; c'est en ce point que résidait la difficulté de la méthode de Ritz. En 1943, COURANT la contourna en choisissant plusieurs fonctions linéaires qui se devaient de verifier les conditions frontières en un nombre fini de points situés sur la frontière ; mais le grand nombre d'équations à traiter devais arrêter le developpement de cette méthode à l'époque.

En 1950, avec l'avènement de l'industrie de l'aéronautique, on developpa un élément structural à deux dimensions afin d'améliorer la rigidité des éléments à fine membrane qu'on reliait aux traditionnels elements unidimensionnels.

En 1960, CLOUGH utilisa pour la premiere fois le terme element fini, dans son mémoire intitulé " The finite élément method in plane stress analysis". La méthode connu un grand succès lié au développement des ordinateurs qui permettaient le traitement numérique d'un grand nombre d'opérations.

De nos jours, la méthode des éléments finis est utilisée dans beaucoup d'autres domaines que celui de l'analyse structural : chaleur, mécanique des fluides, mécanique des sols, hydrologie, etc...

1.2 LA STRUCTURE, SYSTEME PHYSIQUE A RESOUDRE

Dans la construction, le rôle principal de l'ingenieur est de procéder à l'analyse des structures en vu de leur dimensionnement; les structures constituent des systèmes physiques dont l'analyse n'est pas toujours facile; or, un système physique est caractérisé par un ensemble de variables qui dependent des coordonnées spatiales et du temps; dans le cas où ces variables ne dependent pas du temps, le systeme est dit <u>stationnaire</u>.

Certaines variables sont connues à priori; il s'agit des propriétés physiques, des dimensions du système, des sollicitations des conditions aux limites, etc..; d'autres variables U par contre sont inconnues : déplacements, contraintes, etc..; il apparaît immédiatement que le problème revient à construire à l'aide des lois physiques, un modèle mathematique reliant le champ inconnu au champ connu et dont la résolution donnera la valeur du champ inconnu.

Le <u>nombre de degrés de liberté</u> d'un système physique est le nombre de paramètres nécessaires pour définir le champ u à un instant t donné ; le système est <u>discret</u> s'il possède un nombre fini de degrés de liberté ; dans le cas contraire, il est dit <u>continu</u> : une structure est un système continu car il possède un nombre infini de points où on peut définir les champs des forces, les champs des contraintes, des déplacements et des déformations.

Alors que le comportement d'un système discret est décrit par un système d'<u>équations algébriques</u>, dont la résolution peut être faite avec les méthodes numériques, le comportement d'un système continu est décrit par un système d'<u>équations aux dérivées partielles</u> associées aux conditions aux limites ; compte tenu de la complexité de ces conditions, ces équations ne peuvent pas toujours être résolues directement ; il est nécessaire de les discrétiser c'est-à-dire de les remplacer par des équations algébriques ; la solution d'un problème de structure peut être mise sous <u>forme variationnelle</u>, c'est-à-dire qu'on peut exprimer à l'aide des méthodes énergétiques de la mécanique des matériaux qu'une fonctionnelle prend une valeur stationnaire ; la méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution approchée des problèmes de champ qui peuvent s'exprimer sous forme variationnelle ;

1. 3 <u>INTERPRETATION PHYSIQUE</u>

La méthode des éléments finis est basée sur le principe général bien connu désigné par l'expression « going from part to whole »; elle consiste physiquement à considérer le milieu physique comme un assemblage de plusieurs petites parties : les éléments finis. La structure est subdivisée en un nombre fini de tels éléments, liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments, les nœuds. Ces conditions stipulent l'égalité des paramètres des divers champs aux noeuds communs.

On s'interresse au comportement d'un seul élément que l'on voudrait exprimer en fonction de sa géométrie et de ses propriétés physiques ; en présumant un champ de déplacements dans un élément, il est possible en utilisant les théoremes énergétiques d'en tirer une matrice reliant les forces nodales aux déplacements nodaux de l'élément ; il en ressort une relation matricielle générale applicable à n'importe quel élément de la structure entiere. La matrice des éléments assemblés est générée en appliquant une technique d'assemblage.

La représentation d'un milieu continu par des éléments structuraux assemblés n'est pas nouvelle ; elle a déjà été utilisée dans la méthode des déplacements pour les structures dont les éléments ont un caractere unidimensionnel : structures formées de barres. Par contre, l'idée nouvelle est l'élément fini à deux ou trois dimensions qui permet de reproduire de façon plus exacte les propriétés physiques du continu qu'il divise.

1.4 PROCEDURE D'UN CALCUL PAR ELEMENTS FINIS

elle comporte les étapes suivantes :

- idéalisation et discrétisation de la structure
- évaluation des propriétés des éléments
- résolution de la structure discrétisée

1.4.1. Idéalisation et discrétisation d'une structure

C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle mathématique de calcul représentant au mieux la structure réelle ; elles portent sur les deux aspects principaux du problème pratique : la topologie (géométrie et charges) et la rhéologie (le matériau)

L'idéalisation consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des matériaux : choix de la théorie et des équations constitutives décrivant le matériau ; au point de vu topologique, il faut :

- ramener la structure à sa geometrie en choisissant des plans (parois ou plaques) ou des surfaces courbes (coques)
- choisir la théorie la plus appropriée à cette geométrie
- définir les conditions d'appui et les charges.

Au point de vu rhéologique, il faut :

- choisir les lois constitutives des matériaux et
- déterminer les constantes qui définissent ces lois.

La discrétisation est l'ensemble des opérations préparatoires à la résolution effective de la structure primairement idéalisée ; elle consiste d'une part à découper fictivement la structure en éléments simples et d'autre part choisir le type de ces éléments; pratiquement, cette étape est guidée par la topologie.

Il importe de noter que l'idéalisation et les théories proposées sont généralement imparfaites, si bien que les résultats ne sont corrects que dans le cadre de ces idéalisations.

1.4.2 Evaluation des propriétés des éléments

la discrétisation effectuée, il convient de se rappeler que les éléments finis sont limités entre eux par des lignes (pour les éléments bidimensionnels) ou par des plans (pour les éléments tridimensionnels); étant entendu que l'assemblage des éléments doit reconstituer la structure réelle tout entière et son comportement, certaines précautions doivent être prise dans le choix des propriétés de l'élément fini; c'est pourquoi, on doit s'efforcer de respecter les conditions suivantes :

— on doit exprimer la compatibilité des déplacements ou l'équilibre des forces tout le long des frontières séparant les éléments, et non pas en quelques points des frontières ou nœuds uniquement; le fait de faillir à cette exigence se traduirait par des concentrations de contraintes aux nœuds et des discontinuités de déplacements et contraintes entre les nœuds.

— les fonctions décrivant les champs de déplacements ou de contraintes dans les éléments finis n'étant pas connues à priori, on doit faire des hypothèses sur ces fonctions;

Tout champ s'exprime en fonction d'un certain nombre de paramètres qui eux-même sont fonctions des inconnues nodales; le champ est choisi de façon à respecter au mieu les conditions de compatibilité ou d'équilibre le long des frontières liant les nœuds; les fonctions décrivant un champ inconnu sont normalement des fonctions polynomes de degré infini; toute fois, on ne peut utiliser que des fonctions polynôme de degré fini; il apparait que cette troncature affecte la précision des résultats; c'est pourquoi, ces fonctions doivent satisfaire à divers critères, assurant la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

Suivant la grandeur sur laquelle on fait le choix d'un champ et suivant les conditions que ce champ respecte, tant à l'intérieur que sur la frontière de l'élément, on peut creer différents modèles d'éléments finis; ainsi, on distingue les éléments déplacement et les éléments équilibre.

Les <u>éléments déplacement</u> sont élaborés à partir d'un champ de déplacements exclusivement; les éléments déplacement purs sont tels que les déplacements sont continus dans l'élément (compatibilité interne) et d'un élément à l'élément voisin (compatibilité à travers la frontière); par contre le champ de contrainte qu'on déduit ne vérifie pas cette compatibilité et les conditions d'équilibre sont violées par ces modèles; si la compatibilité à travers la frontière n'est pas vérifiée, on a un élément déplacement non pur.

Pour les <u>éléments équilibre</u>, ils sont obtenus à partir d'un champ de contraintes exclusivement; les propriétés des déplacements pour les éléments déplacement sont maintenant valables pour les contraintes, et inversement celles des contraintes pour les déplacements.

Dans notre étude, nous utilisons des éléments déplacement; les fonctions, dans ce cas, sont appelées fonction de déplacements; elles sont liées au nombre d'inconnues (déplacements) de l'élément : si un élément possède n déplacements linéairement indépendants, on choisit généralement un ensemble de fonctions ayant au total n paramètres inconnus; les critères de convergence qu'elles doivent vérifier sont:

<u>critère n° 1</u> : la fonction de déplacement choisie doit être telle qu'elle ne permet pas la déformation d'un élément lorsque les déplacements de ses noeuds sont la conséquence d'un mouvement de corps rigide:

en effet, la fonction de déplacement devant représenter le champ réel aussi fidèlement que possible, il ne fau drait pas qu'elle permette la déformation d'un élément alors qu'il est soumis à un déplacement de corps rigide.

critère n° 2: la forme de la fonction de déplacement doit être choisie telle que, si les déplacements nodaux sont compatibles avec un état de déformation constante, on obtienne réellement ces déformations constantes dans tout l'élément: ce deuxième critère est issu des exigences du prêmier; lorsque la taille des éléments décroît, il y règne des conditions de déformation constante; il faudrait donc éviter de prendre des fonctions satisfaisant au premier critère, mais qui en même temps nécessitent une variation des déformations dans l'élément alors que ses déplacements nodaux sont compatibles avec un état de déformation constante; à propos de ce critère, on parle aussi de critère de constance des dérivées premières

critère n° 3: entre les éléments, on doit avoir la continuité des inconnues uniquement (i.e que la continuité des pentes n'est pas nécessaire); autrement dit, les fonctions de déplacement doivent être choisies de telle manière que les déformations aux interfaces des éléments soient finies (bien qu'indéterminées); c'est la condition de compatibilité pure de l'élément

1.4.3 Résolution de la structure discrétisée

La méthode de résolution employée est celle des déplacements; elle découle du principe de variation des déplacements. Le système d'équations obtenu par l'application de ce principe exprime physiquement en chacun des nœuds, l'égalité des composantes de deux types de forces nodales, résultantes énergétiques

— des forces intérieures produites dans la structure par sa déformation, et

— des forces produites par les sollicitations extérieures;

Les équations obtenues traduisent l'équilibre des nœuds; l'énergie étant quadratique, elles sont linéaires et la matrice de leurs coéfficients s'appelle la matrice de rigidité de la structure; elle est symétrique et elle exprime les forces en fonction des déplacements.

Les opérations principales de l'analyse par la méthode des déplacements sont les suivantes:

a) déterminer la matrice de rigidité de chaque élément dans un système d'axe propre à l'élément (local)

b) transformer la matrice du système local au système d'axes global relatif à la structure complète

c) superposer les matrices individuelles pour obtenir, par assemblage, la matrice de rigidité de la structure complète : $[\bar{K}]$

d) Resoudre l'équation $\{\bar{F}\} - [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\} = \{0\}$

e) à partir des solutions trouvées $\bar{\Delta}$ (déplacements aux nœuds), calculer les contraintes aux points désirés.

Nous allons maintenant voir, comment on détermine la matrice de rigidité à partir du principe variationnel.

1.5 FORMULATION DE LA RIGIDITE PAR ELEMENT FINI

1.5.1 Principe de l'energie potentielle minimale

Le "potentiel total" est fonction des déplacements; Lorsqu'il est derivé (ou minimisé) par rapport aux déplacements, on obtient des équations d'équilibre; le principe de l'energie potentiel minimale sert à deriver les équations d'équilibre; on l'appelle également principe de variation des déplacements, et il s'énonce comme suit :

« Parmi toutes les configurations possibles pour déplacer un système tout en satisfaisant les conditions cinétiques et les conditions frontieres, les champs de déplacements qui en plus vont satisfaire les équations d'équilibre, rendront alors l'énergie potentielle totale stationnaire. Si cette valeur est un minimum, l'équilibre est stable ».

Si on désigne par Π_{pe} cette energie, ce principe s'écrit :

$$\delta \Pi_{pe} = 0 \qquad (\text{éq. } 1)$$

Quant à l'énergie totale, elle se compose de l'energie interne, ou energie de déformation U_e, et de l'énergie externe, ou energie potentielle des forces exterieures, W :

$$\Pi_{P_e} = U_e + W \qquad (\text{éq. } 2)$$

1.5.2 Formulation générale de l'energie potentielle

1.5.2.1 Energie interne

L'expression de l'énergie interne au niveau d'un élément est :

$$U_e = \int_V U_0 \, dv \qquad (\text{eq. } 3)$$

où U_0 est la densité d'énergie de déformation.

Considérons un corps de volume unité, avec propriétés élastique où les contraintes sont liées aux déformations par les lois constitutives (type Hooke) :

$$\{\sigma\} = [E]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}\right) = [E]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \qquad (\text{éq. } 4)$$

si à cause d'un déplacement infinitésimal, l'énergie interne U_0 est augmenté de δU_0, on a :

$$\delta U_0 = \{\sigma\}^t \{\delta\varepsilon\} \qquad (\text{eq. } 5)$$

$$\Rightarrow \quad \delta U_0 = \sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \cdots$$
$$= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x}\delta\varepsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y}\delta\varepsilon_y + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y}, \quad \cdots$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\left\{\frac{\partial U_o}{\partial \varepsilon}\right\} = \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} + \{\sigma_o\}$$

l'intégration de cette équation donne :

$$\boxed{U_o = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^t[E]\{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^t\{\sigma_o\}} \qquad \text{(eq. 6)}$$

Dans cette équation, $[E]$ est la matrice d'élasticité ; elle montre bien que U_o est une forme quadratique.

1.5.2.2 Energie externe

Parmi les forces exterieures, on distingue :

— les forces de surfaces $\{P_s\}$

— les forces de volume $\{P_v\}$

— les forces concentrées en des points particuliers $\{P\}$.

Si $\{u\}$ est le champ de déplacements, on a :

$$\boxed{W = -\int_V \{u\}^t\{P_v\}\,dv - \int_S \{u\}^t\{P_s\}\,ds - \{\Delta\}^t\{P\}} \qquad \text{(éq. 7)}$$

$\{\Delta\}$ est la configuration des déplacements des points d'application de $\{P\}$; le signe moins $(-)$ de l'équation 7 y est à cause du fait que les charges exterieures perdent de leur capacité à effectuer du travail

1.5.2.3 Energie potentielle totale

Des equations 2, 3, 6 et 7, on a :

$$\Pi_{Pe} = \int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^t [E] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\} \{\sigma_o\} \right) dv - \int_V \{u\}^t \{P_v\} dv - \int_S \{u\}^t \{P_s\} ds$$

$$- \{\Delta\}^t \{P\} \qquad (eq. 8)$$

si le polynôme choisi ~~choisi~~ pour décrire le champ $\{u\}$ satisfait aux conditions frontières, la méthode de l'énergie potentielle minimale de la structure devient la méthode de Rayleigh-Ritz.

1.5.3 Formulation par élément fini

Elle consiste à appliquer la méthode de Ritz, à la seule différence que:

— au lieu de minimiser Π_p au niveau entier de la structure, on le fait au niveau des éléments seulement.

— au lieu de minimiser Π_{Pe} par rapport à des constantes, on le fait par rapport à des degrés de liberté aux nœuds, et ce toujours dans le cadre d'un seul élément.

Supposons que le champ de déplacement $\{u\}$ soit donné en fonction d'un polynôme :

$$\{u\} = [G] \{\alpha\} \qquad (\text{ég. } 9)$$

où $\{\alpha\}$ est un vecteur de constante.

On peut par différentiation de $\{u\}$, évaluer les déformations unitaires:

$$\{\varepsilon\} = [B_o] \{\alpha\} \qquad (\text{ég. } 10)$$

si on substitue (9) et (10) dans (8), on a :

$$\Pi_{Pe} = \frac{1}{2} \{\alpha\}^t \int_V [B_o]^t [E] [B_o] dv \{\alpha\} - \{\alpha\}^t \int_V [G]^t \{P_v\} dv - \{\alpha\}^t \int_S [G] \{P_s\} ds - \{\Delta\}^t \{P\} \quad (eq. 11)$$

comme déjà dit, au lieu d'appliquer la méthode de Ritz ($\frac{\partial \Pi_p}{\partial a}=0$), on va évaluer les constantes $\{a\}$ en fonction de $\{\Delta\}$:

l'équation (12) donne $\{u\}$ à chaque nœud; par conséquent, on obtient $\{\Delta\}$:

$$\{\Delta\} = [C]\{a\} \qquad \text{(eq. 12)}$$

et

$$\{a\} = [C^{-1}]\{\Delta\} \qquad \text{(eq. 13)}$$

si on substitue (13) dans (11), on a :

$$\Pi_{p_e} = \frac{1}{2}\{\Delta\}^t[C^{-1}]^t\int_V [B_a]^t[E][B_a]\,dv\,[C^{-1}]\{\Delta\} - \{\Delta\}^t[C^{-1}]^t\int_V [G]^t\{P_v\}\,dv$$

$$-\{\Delta\}^t[C^{-1}]^t\int_S [G]^t\{P_s\}\,ds - \{\Delta\}^t\{P\} \qquad \text{(eq. 14)}$$

L'énergie potentielle totale de la structure est la somme des énergies potentielles de chaque élément :

$$\Pi_p = \sum \Pi_{p_e} \qquad \text{(eq. 15)}$$

Si $\{\bar{\Delta}\}$ est le vecteur des déplacements de toute la structure, on peut écrire à partir de (14) et (15) que :

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\{\bar{\Delta}\}^t\sum\Big([C^{-1}]^t\int_V [B_a]^t[E][B_a]\,dv\,[C^{-1}]\Big)\{\bar{\Delta}\} \qquad \text{(eq. 16)}$$

$$-\{\bar{\Delta}\}^t\sum\Big([C^{-1}]^t\int_V [G]^t\{P_v\}\,dv\Big) - \{\bar{\Delta}\}^t\sum\Big([C^{-1}]^t\int_S [G]^t\{P_s\}\,ds\Big) - \{\bar{\Delta}\}^t\{\bar{P}\}$$

les équations d'équilibre sont celles qui vont satisfaire les conditions :

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \bar{\Delta}_1} = 0 \,,\quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial \bar{\Delta}_2} = 0 \,,\quad \dots \,,\quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial \bar{\Delta}_n} = 0 \qquad \text{(eq. 17)}$$

les équations (17), écrites sous forme matricielle donnent l'expression suivante :

$$\left(\sum [C^{-1}]^t \int_v [B_d]^t [E] [B_d]\, dv\, [C^{-1}]\right)\{\bar{\Delta}\} =$$

$$\sum \left([C^{-1}]^t \int_v [G]^t \{P_v\}\, dv + [C^{-1}]^t \int_s [G]^t \{P_s\}\, ds \right) + \{\bar{P}\} \qquad (\text{éq. } 18)$$

le coté gauche de l'équation représente la matrice de rigidité pour chaque élément :

$$[k]^e = [C^{-1}]^t \int_v [B_d]^t [E] [B_d]\, dv\, [C^{-1}] \qquad (\text{eq. } 19)$$

quand aux intégrales au coté droit, elles représentent les forces équivalentes aux noeuds :

$$\{P_{eq}\}^e = [C^{-1}]^t \int_v [G]^t \{P_v\}\, dv + [C^{-1}]^t \int_s [G]^t \{P_s\}\, ds \qquad (\text{eq. } 20)$$

on peut donc écrire pour chaque élément :

$$[k]^e \{\Delta\} = \{P\} + \{P_{eq}\}^e \qquad (\text{eq. } 21)$$

et pour toute la structure, l'équation (21) devient

$$[\bar{K}] \{\bar{\Delta}\} = \{\bar{P}\} + \{\bar{P}_{eq}\} \qquad (\text{eq. } 22)$$

cette équation s'obtient par le processus d'assemblage

CHAPITRE II

PRESENTATION DES COQUES ET PLAQUES

2.1 DEFINITION

L'idéalisation dont on a parlé dans la procédure de calcul en élément fini est une étape nécessaire dans le calcul des constructions de genie civil de toute nature; cela permet d'avoir un meilleur aperçu de l'essentiel de l'état des contraintes des solides à trois dimensions avec lesquels on a toujours affaire.

C'est ainsi que l'idéalisation d'un certain groupe d'éléments de construction conduit à la notion de coques; on dit aussi voile mince.

En effet, le désir de representer de la meilleure façon possible le jeu des forces qui interviennent dans les parois des structures telles que les reservoirs, les ballons, les conduites, les coupoles, etc... nous emmène à l'idéalisation par solides continus à deux dimensions; ce sont des surfaces porteuses qui se divisent en deux catégories : les surfaces porteuses horizontales ou plaques, et les surfaces porteuses courbes ou coques.

Une coque est limitée par deux surfaces courbes, ses parois; leur écart h, épaisseur de la membrane est variable, mais reste faible par rapport aux autres dimensions; la surface située entre les deux parois, et qui partage en deux l'épaisseur de la coque, est appelée surface médiane; une coque est géométriquement décrite par sa surface médiane et son épaisseur (figure 1); la courbure de la surface médiane est continue.

De cette définition des coques, on peut dire aussi qu'une coque est une structure qui peut être obtenue à partir d'une plaque mince, en transformant le plan moyen en une surface à simple ou double courbure; il s'en suit que les hypothèses de distribution des contraintes et des déformations des plaques sont valables pour les coques; en effet, alors que les plaques travaillent essentiellement en flexion, les coques de part leur courbure transmettent également des efforts dans leur plan : effet membrane (figure 2); les résultantes des

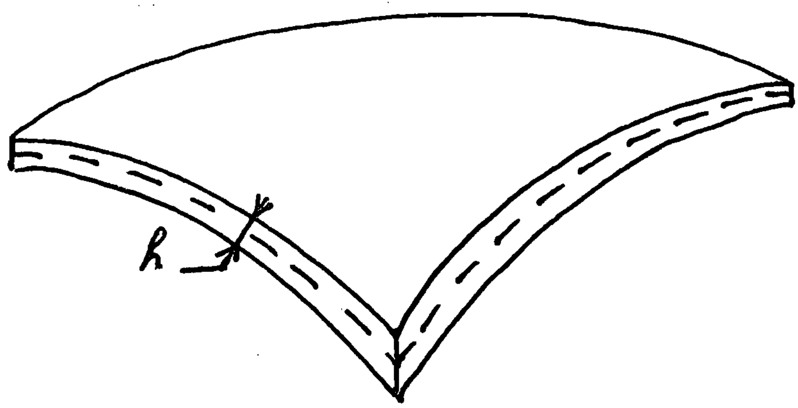
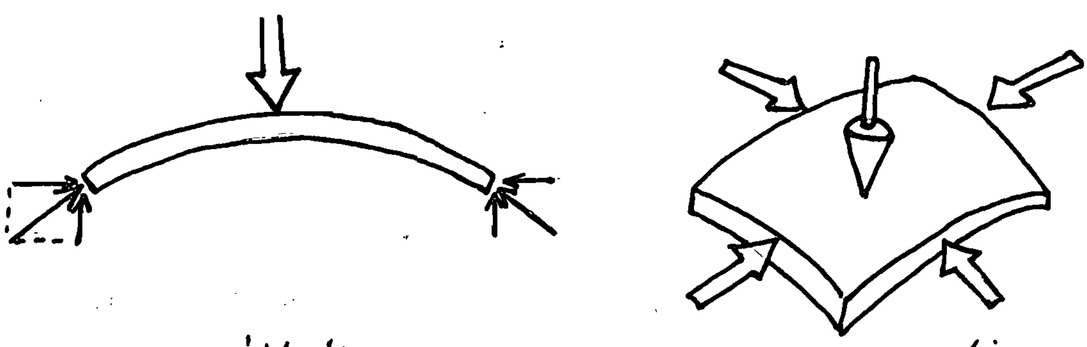


figure 1 : élément de coque



vue en élévation — vue en perspective

figure 2 : schéma arrondu libre d'un élément de coque

contraintes agissant parallèlement au plan moyen de la coque ont des composantes normales à la surface et supportent de ce fait la plus grande partie de la charge (raison économique de ce type de structure).

En élément fini, les difficultés inhérentes au traitement des coques ~~sont~~ contournées en faisant l'approximation qui consiste à supposer que le comportement d'une surface à courbure continue peut être convenablement représenté par celui d'une surface formée de petits éléments plats; on constate que l'approximation est d'autant meilleure que la taille des éléments décroît (figure 3).

Nous aurons donc à traiter des éléments plats subissant non seulement de la flexion, mais également des forces dans leur plan.

2.2 L'ETAT PLAN DE CONTRAINTE

Quand des forces sont appliquées à une plaque mince dans son propre plan, l'état de contrainte et de déformation à l'intérieur de la plaque est appelé « état plan de contrainte »; cet état est caractérisé par des conditions de très petites dimentions dans la direction z (fig. 4).

Aucune force n'étant appliquée suivant z sur la surface de la plaque, les composantes de contrainte τ_{xz} et τ_{yz} sur la surface et σ_z à travers l'épaisseur de la plaque s'annulent; il ne reste plus que les

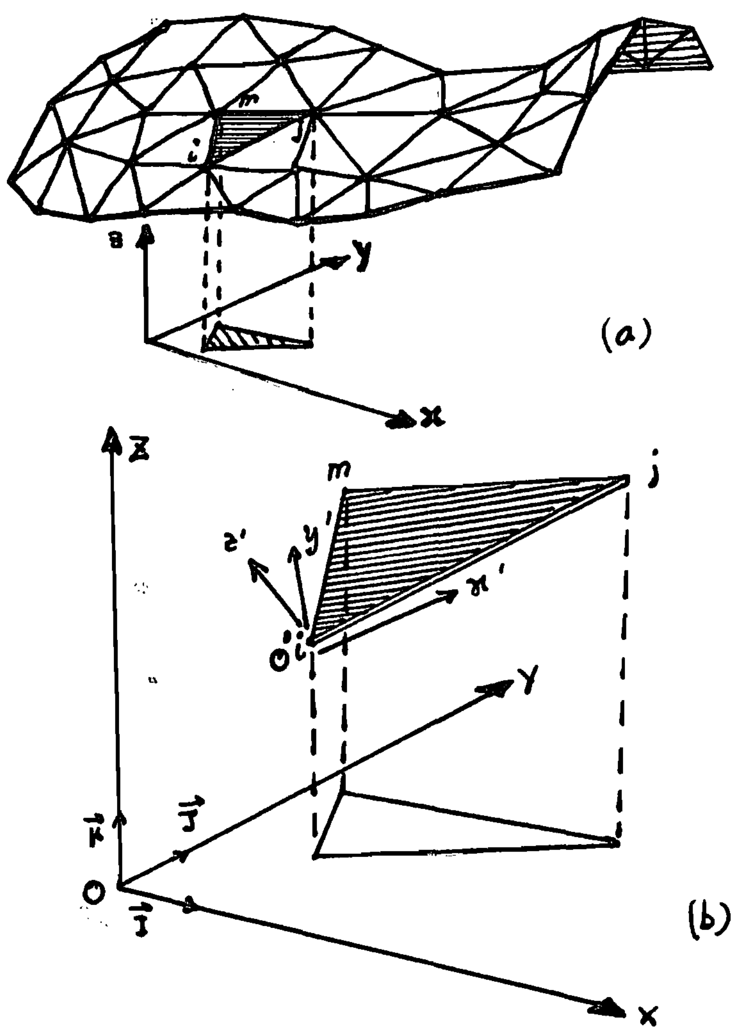


Fig. 3 (a) Assemblage d'éléments triangulaires représentant une coque de forme arbitraire. (b) Coordonnées locales et coordonnées globales pour un élément triangulaire contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy}.

Considérons l'état de contrainte montrée à la figure 5; σ_x et σ_y sont les contraintes normales agissant suivant x et y respectivement; τ_{xy} et τ_{yx} sont les contraintes de cisaillement qui agissent sur les bords x et y respectivement, et dans les directions y et x respectivement :

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^t$$

Ces contraintes correspondent aux déformations $\{\varepsilon\}$ générées à la suite des déplacement u et v dans les directions x et y (voir figure 6).

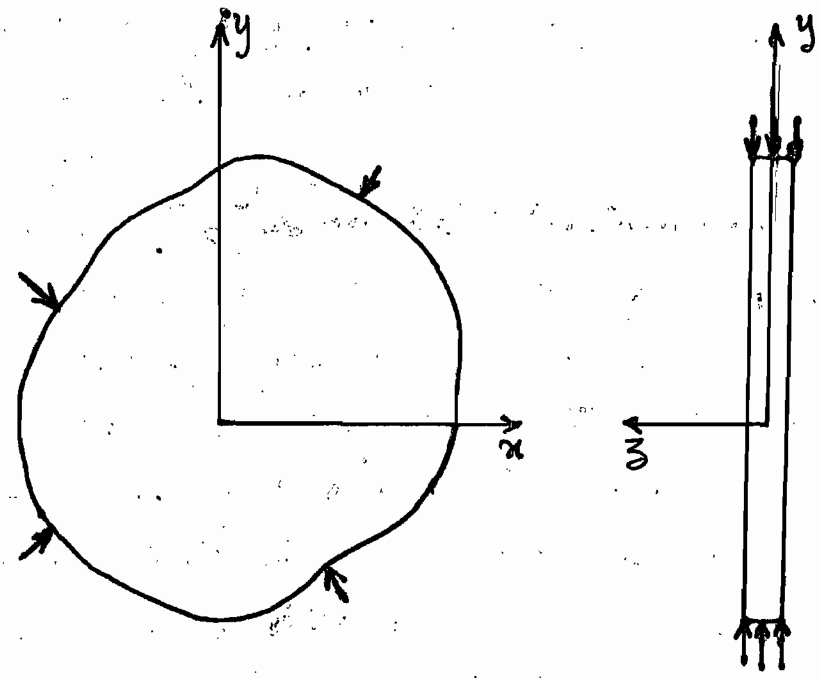


Figure 4 : Contraintes planes; plaque mince chargée dans son plan

On a : $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ (éq. 23)

et $\quad \{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^t$

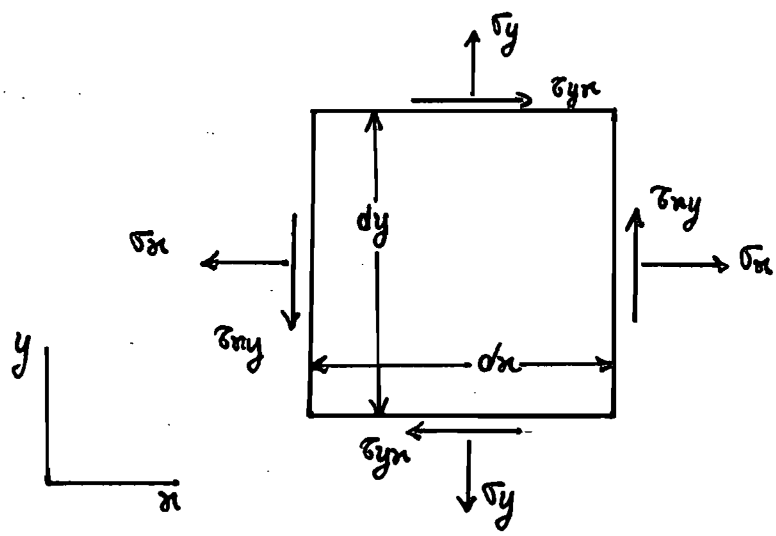


Fig 5: Contraintes dans le plan

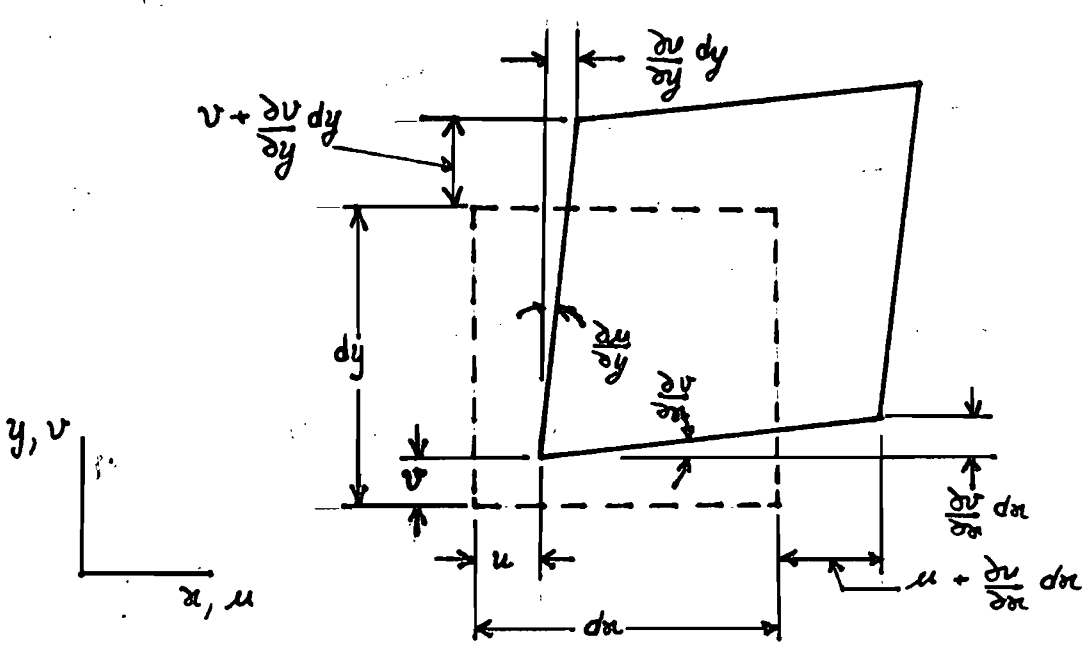


Fig 6 : déformations dans le plan

Comme $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, d'après la loi de Hooke, on a alors :

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y)$$
$$\varepsilon_z \neq 0$$

si $\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$, alors

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \quad \text{(éq. 24)}$$

c'est la relation contrainte-déformation en état plan de contrainte ; $[E]$ est la matrice d'élasticité correspondante ; $\{\sigma\}$ est constant sur l'épaisseur de la plaque

2.3 LES PLAQUES EN FLEXION

2.3.1 Flexion simple des plaques minces

Par opposition aux parois chargées dans leur plan, les plaques sont maintenant chargées perpendiculairement à leur plan moyen. Afin d'arriver à une formulation suffisamment simple de ce problème, on admet certaines hypothèses simplificatrices

Hypothèses (Kirchhoff)

— les plaques sont minces par rapport aux dimensions horizontales

— les matériaux sont linéaires

— les contraintes et déformations sont dues à l'effet de flexion seulement : $u = v = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ à $z=0$

— les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur : w est petit suivant z

— les effets secondaires dus au cisaillement sont ignorés

— Les points se trouvant sur une normale au feuillet moyen avant la déformation s'y trouvent toujours après la déformation

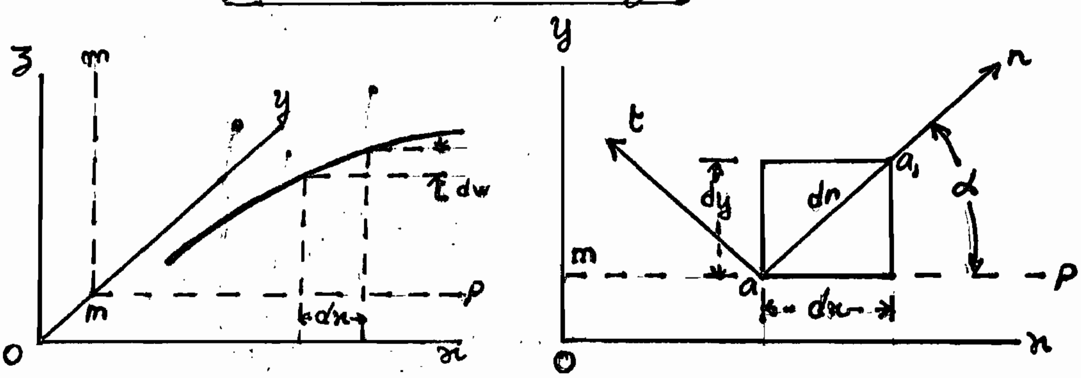
Avec ces hypothèses, la plaque se comporte comme un empilage de feuillets d'épaisseur infinitésimale dz, qui se trouvent chacun en état plan de contrainte. Pour rendre possible l'équilibre selon z, on admettra par la suite également, l'existence des contraintes tangentielles transversales τ_{xz} et τ_{yz}, mais on considère negligeables les déformations correspondantes, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

Déformations et déplacements

Considérons la surface médiane d'une plaque et supposons qu'elle coincide avec le plan xy, avant que ne se produise la flexion due aux moments que nous appli-

quons comme montré sur la figure 8; durant la flexion, les particules qui étaient dans le plan xy subissent de petits déplacements w perpendiculaires au plan xy (fig. 7); considérons une section normale à la plaque et parallèle au plan xz (fig. 7.a); la pente de la surface médiane dans la direction x est $i_x = \frac{\partial w}{\partial x}$;
par le même raisonnement, celle dans la direction y est $i_y = \frac{\partial w}{\partial y}$

$$\boxed{i_x = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad i_y = \frac{\partial w}{\partial y}} \qquad \text{(eq. 25)}$$



(a) (b)

Fig 7 : Pentes et courbures d'une plaque mince fléchie

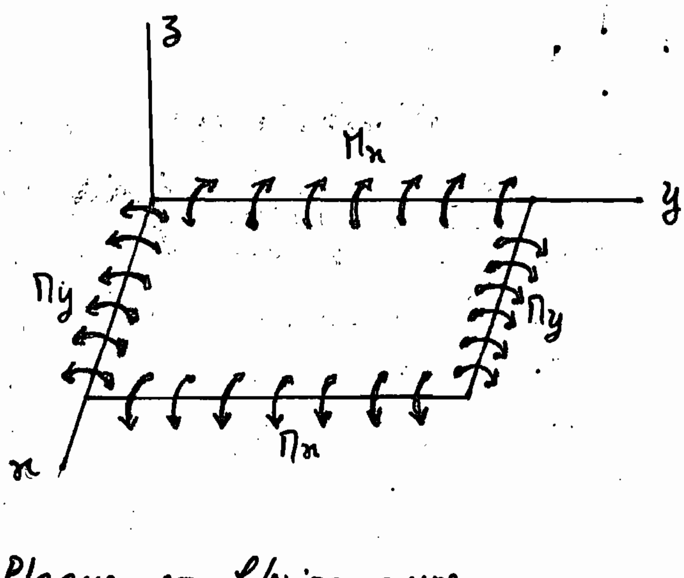


Fig. 8 : Plaque en flexion pure

si on considère maintenant une direction quelconque a-n dans le plan xy (fig 7.b), la différence des déflexions des deux points adjacents a et a_1 est :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy$$

et la pente correspondante est

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dn} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\alpha$$

Pour déterminer les courbures de la surface médiane de la plaque, on se rappelle que les déflexions w sont petites ; dans un tel cas, la pente de la surface dans une quelconque direction peut être supposée égale à l'angle que fait la tangente à la surface dans cette direction avec le plan xy ; ainsi, suivant la direction x, si r_x est le rayon de courbure, alors la longueur de l'arc de cercle d'angle $d\beta$ est $r_x \cdot d\beta$ (fig. 9)

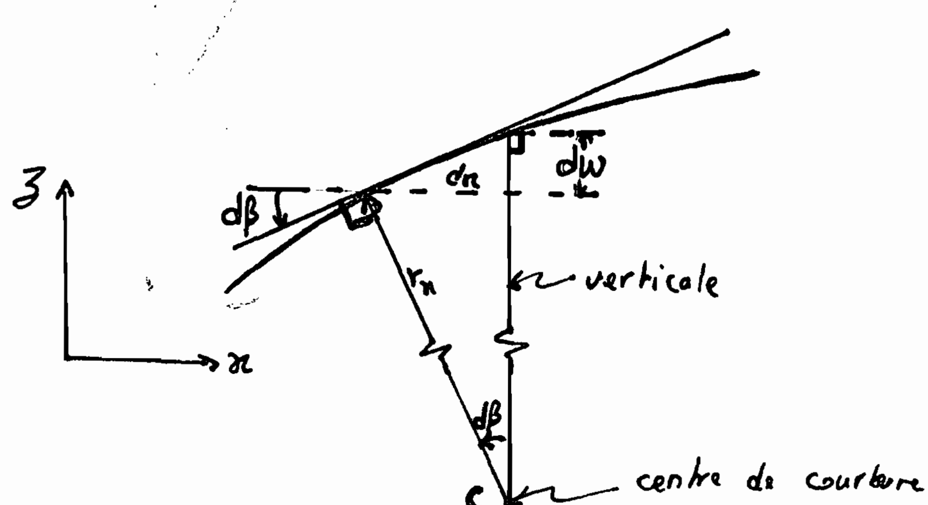


Fig 9 : figure 7-(a) détaillée

or la longueur de l'arc de cercle est assimilable à

$$\sqrt{\partial x^2 + \partial w^2} = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \simeq \partial x$$

donc $\rho_x = \dfrac{1}{r_x} = \dfrac{\partial \beta}{\partial x} \simeq \dfrac{\partial (tg\beta)}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial x}$

on fait le même raisonnement suivant la direction y et on a:

$$\boxed{\rho_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad \rho_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \qquad (26)$$

le signe (-) moins apparait car quand x augmente de dx, la pente $\frac{\partial w}{\partial x}$ diminue.

Supposons que les moments M_x et M_y soient uniformément répartis sur les bords de la plaque; par analogie avec l'hypothèse de Bernouilli sur la flexion pure des barres prismatiques, la dernière hypothèse mentionnée de Kirchhoff permet de dire que la surface mediane ne subit pas de déformation et que les déformations du feuillet abcd (fig.10) situé à la distance z de l'axe neutre sont:

$$\boxed{\varepsilon_x = z\rho_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad et \quad \varepsilon_y = z\rho_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \qquad (27.a)$$

des équations (23), on déduit que

$$\boxed{\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} \qquad (27.b)$$

nous verrons par la suite, comment apparaissent ces grandeurs contraintes

les contraintes qui correspondent aux déformations $\{\varepsilon\}$ des feuillets sont les contraintes qu'on avait en état plan de contrainte; en effet la plaque est mince, et les feuillets sont libres de se déformer dans les directions planes; la relation contrainte-déformation est donc celle de l'état plan de contrainte (équation 24); E est le module d'élasticité et ν le coefficient de Poisson.

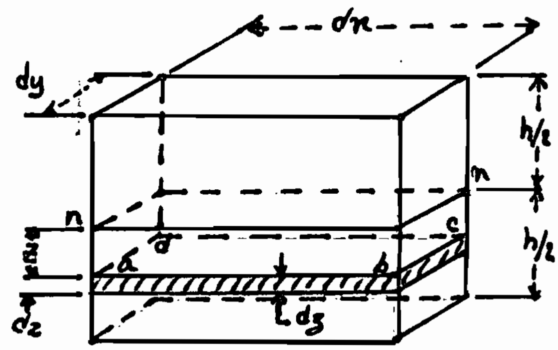


Fig. 10 : coupe d'un élément de plaque

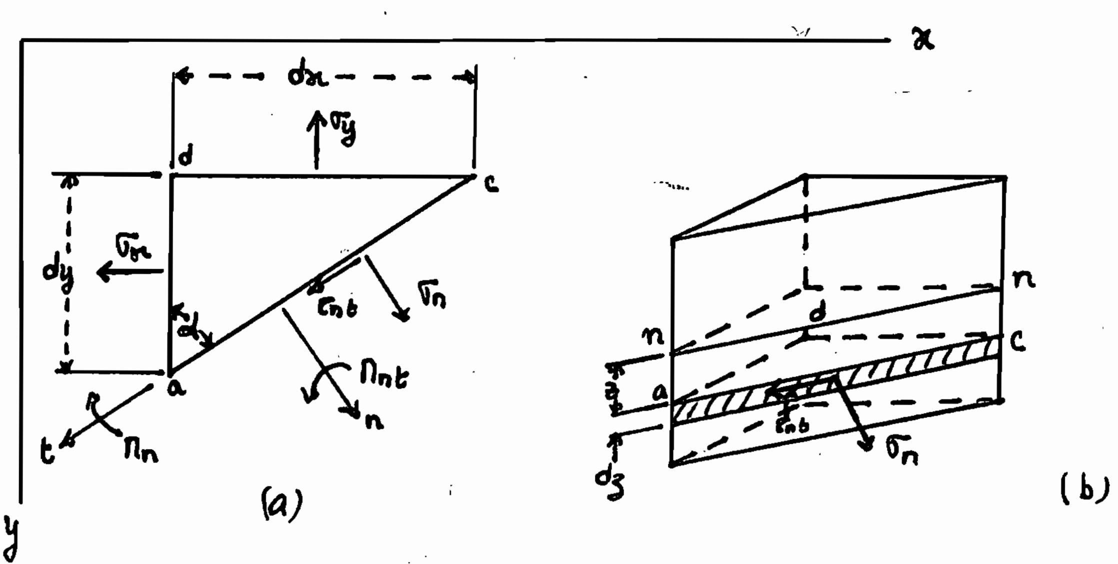


Fig 11 : contraintes d'un feuillet d'élément de plaque

En substituant (27-a) dans (24), on a:

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\rho_x + \nu\rho_y\right)$$
$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\rho_y + \nu\rho_x\right) \qquad \text{(eq. 28)}$$

les tensions normales de chaque feuillet, reparties sur les faces laterales de l'élément de la figure 10 peuvent être reduites à des couples qui doivent être égaux aux moments exterieurs uniformément distribués (fig. 8); ainsi:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z\, dy\, dz = M_x dy \quad \text{et} \quad \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z\, dx\, dz = M_y dx \qquad \text{(eq. 29)}$$

si on remplace σ_x et σ_y de l'équation (28) dans (29), on a:

$$M_x = D\left(\rho_x + \nu\rho_y\right) \quad \text{et} \quad M_y = D\left(\rho_y + \nu\rho_x\right) \qquad \text{(eq. 30)}$$

avec

$$\boxed{D = \frac{E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}} \qquad \text{(eq. 31)}$$

D est la <u>rigidité à la flexion de la plaque</u>

Considerons maintenant le cas d'une plaque fléchie, lorsque les tensions agissent sur une section parallèle à l'axe z et inclinée par rapport aux axes x et y; si acd (fig. 11) represente une partie du feuillet mince abcd (fig. 10) découpé par la section considérée, on peut déterminer la tension agissant sur la face ac au moyen des équations de la statique; si l'on décompose cette tension en une composante normale σ_n et une composante de cisaillement τ_{nt}, la valeur de ces composantes est donnée par les équations

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha$$
$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\alpha$$

dans lesquelles α est l'angle que fait la normale n avec l'axe des x (fig. 11-a); l'angle α est considéré positif s'il est mesuré dans le sens horaire.

Considérant tous les feuillets analogues à acd sur toute l'épaisseur de la plaque (fig. 11.b), les tensions normales σ_n donnent le moment fléchissant agissant sur la section ac de la plaque, dont la valeur par unité de longueur de ac est

$$\boxed{M_n = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_n \cdot z \cdot dz} \qquad \text{(éq. 32-a)}$$

τ_{nt} donne le moment de torsion agissant sur la section ac de la plaque, dont la valeur par unité de longueur de ac est

$$\boxed{M_{nt} = -\int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{nt} \cdot z \cdot dz} \qquad \text{(éq. 32-b)}$$

Leurs signes sont choisis de façon à ce que les valeurs positives de ces moments soient représentées par des vecteurs dans les directions positives des n et t, si l'on emploie la règle des trois doigts de la main droite (fig. 11-a).

par suite des hypothèses que les faces de l'élément restent planes durant la flexion de la plaque et ne peuvent tourner qu'autour des axes neutres n-n, en restant normales à la surface élastique, il résulte que les déformations des fibres parallèles aux n et aux t (fig. 11-a) situées à la distance z du plan médian s'expriment par :

$$\varepsilon_n = z\rho_n \text{ et } \varepsilon_t = z\rho_t$$

où ρ_n et ρ_t sont les courbures de la surface élastique dans les plans nz et tz.

En combinant ces expressions avec la loi de Hooke et en les portant dans (32-a), on a :

$$\boxed{M_n = D\left(\rho_n + \nu\rho_t\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)} \qquad \text{(éq. 33-a)}$$

Pour obtenir une expression du moment de torsion M_{nt}, considérons la torsion d'un feuillet mince abcd dont les cotés ab et ad sont parallèles aux directions n et t, et qui se trouve à la distance z du plan médian

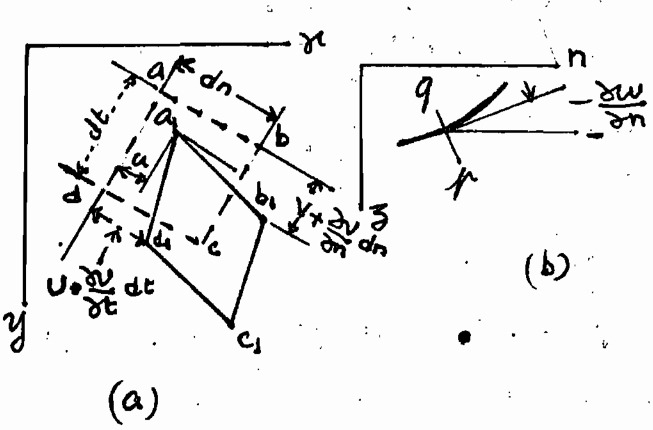


Fig 12 : déformations du feuillet suivant n et t

Pendant la flexion de la plaque (fig 12-a), les points a, b, c, d se déplacent en petites quantités ; soient u et v les composantes des déplacements du point a ; le déplacement du point adjacent d dans la direction des n est $u + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dt$ et celui de b dans la direction des t est $v + \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) dn$; par suite de ces déplacements, il se produit une déformation par torsion :

$$\gamma_{nt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n}$$

la tension de cisaillement correspondante sera

$$\tau_{nt} = G\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n}\right)$$

Par la figure 12-b qui représente la section de la surface élastique par un plan vertical passant par l'axe des n, on voit que l'angle de rotation d'un élément pq initialement perpendiculaire au plan ny est égal à $-\frac{\partial w}{\partial n}$; par suite, un élément situé à la distance z du plan médian subit un déplacement dans la direction n, égal à :

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial n}$$

un raisonnement analogue conduit au déplacement du même élément dans la direction t, égal à :

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial t}$$

de ces valeurs, on déduit

$$\gamma_{nt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}$$

et $\tau_{nt} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}$;

ainsi $\boxed{M_{nt} = \frac{Gh^3}{6}\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}}$ (éq. 33-b)

2.3.2 Cas général de flexion des plaques

l'étude précédente concerne le cas de la flexion simple des plaques rectangulaires aux bords desquelles agissent des moments fléchissants uniformément répartis ; pour passer au cas général, on supposera un chargement quelconque et une forme quelconque pour la plaque ; ainsi, en prenant des axes x et y perpendiculaires, on peut dire que pour un élément quelconque isolé dans la plaque, les conditions précédentes restent inchangées, pourvu que les moments de flexion et de torsion, dont les valeurs sont données par les équations (32-a) et (32-b), soient répartis le long de la périphérie de l'élément ; on prendra les directions n et t, égales à x et y et on aura (fig. 13) les expressions suivantes :

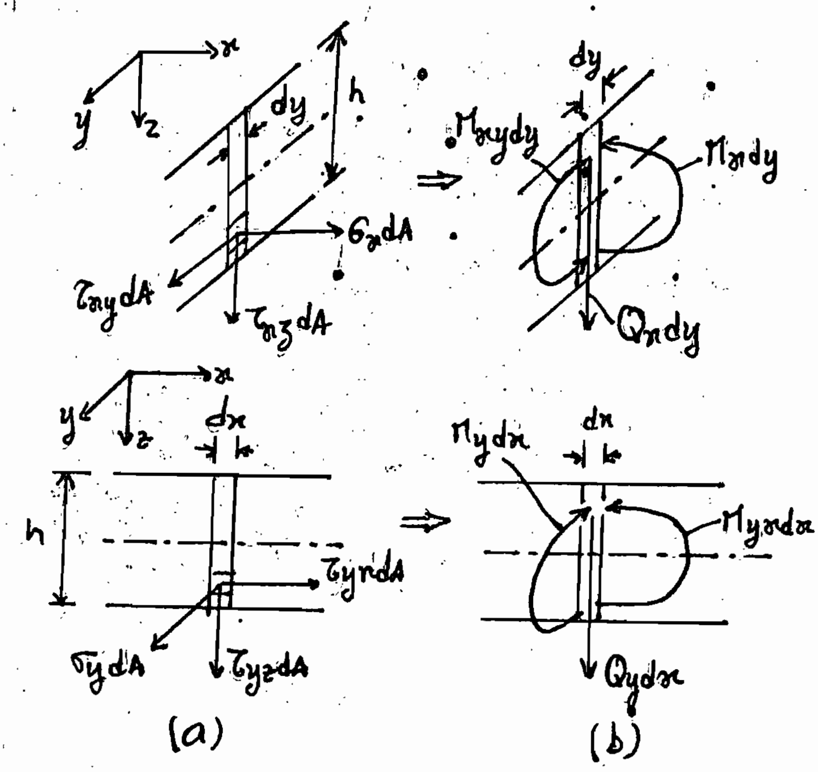


Fig 13 : Efforts internes dans les coupes x = const et y = const d'une plaque

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \cdot z\, dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \cdot z\, dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad \text{(éq. 34.a)}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -\int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \cdot z\, dz = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Supposons maintenant qu'une charge repartie agissant perpendiculairement au plan médian de la plaque; soit q sont intensité qui, dans le cas general peut varier linéairement en fonction de x et y; en découpant un element de la plaque par deux paires de plans parallèles aux plans xz et yz (fig. 13 et 14), on déduit de part la statique qu'en raison de l'action de q, il se produira sur les faces laterales de cet element, non seulement des moments de flexion et de torsion, mais aussi des efforts tranchants suivant z, dont les valeurs par unité de longueur seront définies par :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz}\, dz \quad , \quad Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz}\, dz$$

On peut negliger les variations de τ_{xz} et τ_{yz} le long des distances infinitésimales dx et dy, et supposer que les efforts tranchants resultants $Q_x dy$ et $Q_y dx$ passent par les centres de gravité des faces des éléments.

Si Q_x, M_x et M_{xy} sont les efforts pour la face gauche de l'element de la figure 15, les quantités correspondants

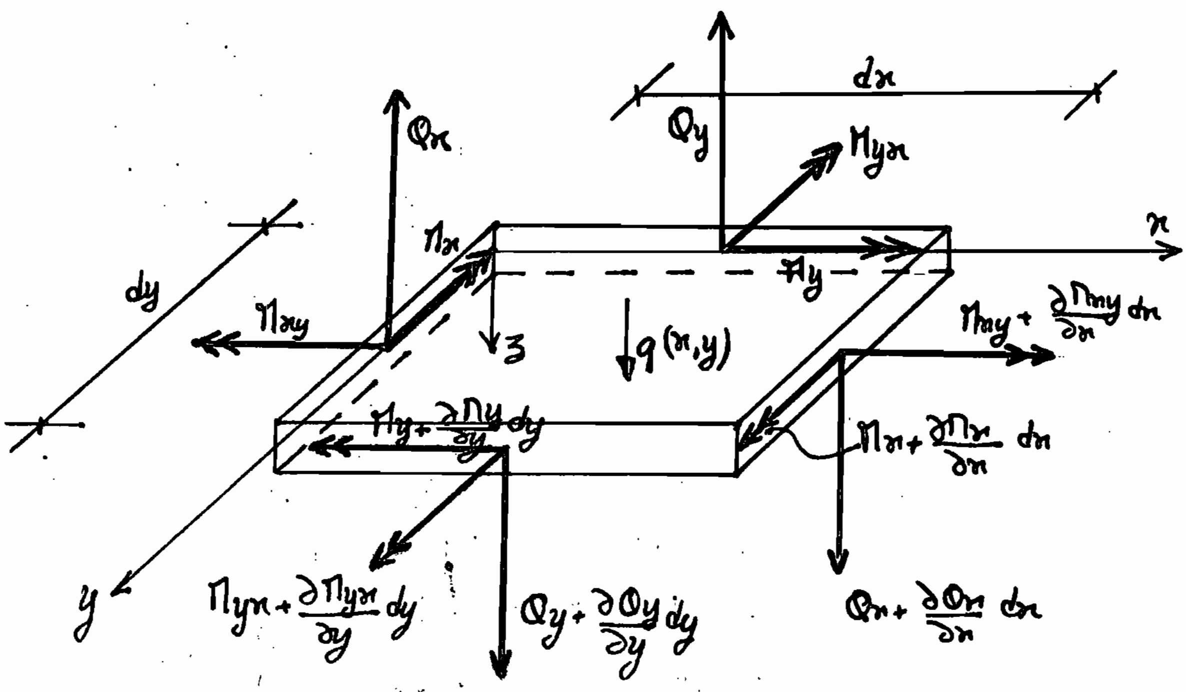


Fig. 14 : éléments de reduction

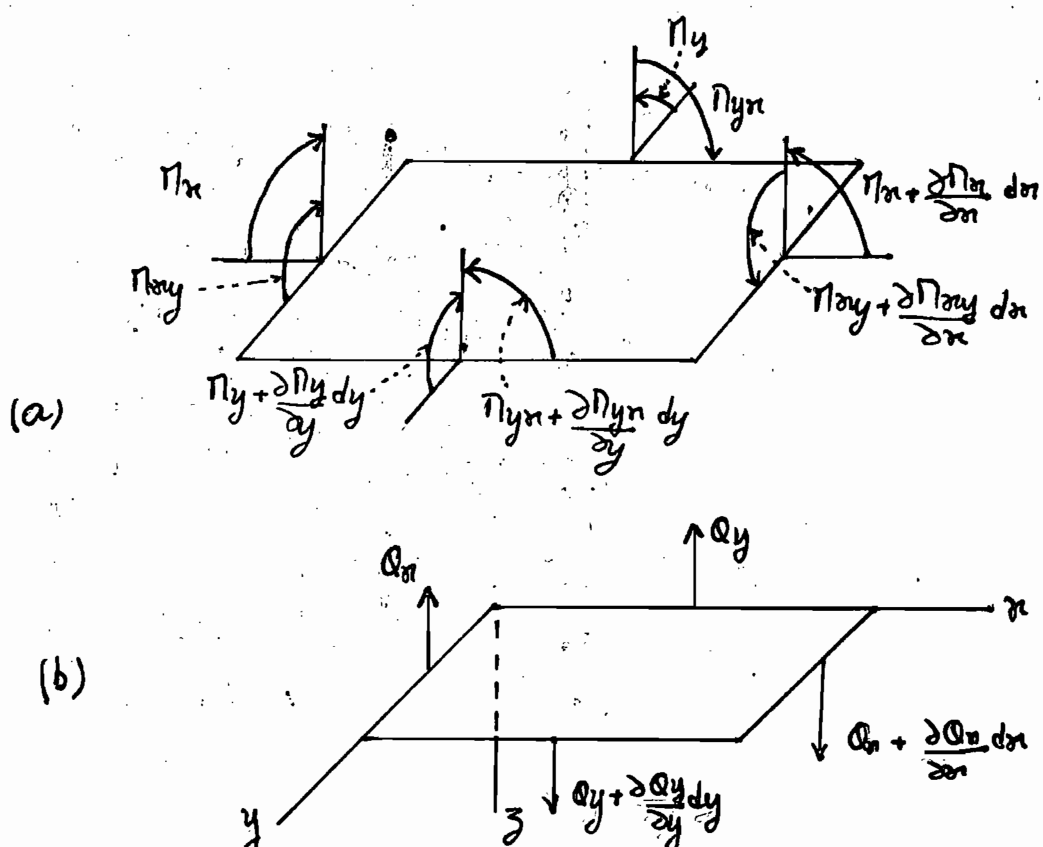


Fig. 15 : détails de la figure 14

pour la face droite, distante de dx de la face gauche seront :

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \ , \quad M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx, \quad M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$$

il en sera de même pour les plans parallèles au plan xz; en supposant que la charge q est positive dans la direction z, l'équilibre de l'élément permet d'écrire :

$$\sum F_z = 0 \implies \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\, dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\, dx + q\, dx\, dy = 0$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

$$\sum \text{Moments/axe } x = 0 \implies \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\, dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\, dx + Q_y\, dx\, dy = 0$$

dans cette équation, on a négligé le moment de la charge q et celui dû à la variation de Q_y (infiniments petits d'ordre supérieur) ; ainsi

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0$$

de m $\sum$ Moments/axe $y \longrightarrow \quad \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0$;

du fait même de la faible épaisseur des plaques par rapport aux autres dimensions, on peut negliger l'effet de Q_x et Q_y sur les courbures de la plaque, si bien que M_x, M_y et M_{xy} gardent leur expression des équations (34-a) ; en notant que $M_{xy} = -M_{yx}$, on déduit les valeurs de Q_x et Q_y en fonction de la déflexion w :

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \end{aligned}} \qquad \text{(éq. 34-b)}$$

durant l'analyse, il est en général pratique de remplacer l'effet statique des contraintes sur l'épaisseur de la plaque par les efforts internes appropriés (moments de flexion moments de torsion et efforts tranchants par unité de la coupe) selon la figure 13.

On peut alors calculer les valeurs maximales des contraintes de tension, de torsion et de cisaillement : en effet, le rapport des équations (28) et (34-a) donne:

$$\frac{\sigma_x}{M_x} = \left[\frac{Ez}{1-\nu^2}(\rho_x+\nu\rho_y)\right] \Big/ \left[D(\rho_x+\nu\rho_y)\right] = \frac{12z}{h^3}$$

de même $\frac{\sigma_y}{M_y} = \frac{12z}{h^3}$; si $z = h/2$, alors

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12z}{h^3}\cdot M_x = \frac{6M_x}{h^2} \\ \sigma_y &= \frac{12z}{h^3} M_y = \frac{6M_y}{h^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{12z}{h^3} M_{xy} = \frac{6M_{xy}}{h^2} \end{aligned}} \qquad \text{(équation 35-a)}$$

τ_{xy} se calcule aussi de la même manière. En supposant une répartition parabolique de τ_{xz} et τ_{yz}, on déduit de l'équation (34-b) que :

$$\boxed{\tau_{xz_{max}} = \frac{3Q_x}{2h} \quad \text{et} \quad \tau_{yz_{max}} = \frac{3Q_y}{2h}} \qquad \text{(éq. 35-b)}$$

2.4 PLAQUES SUBISSANT L'ACTION COMBINEE DE LA FLEXION ET DES FORCES DANS SON PLAN

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la plaque fléchit sous l'action d'une charge latérale et que les flèches produites étaient si faibles que la flexion subit par le plan moyen de la plaque pouvait être négligée ; si de plus, il existe des forces agissant dans le plan moyen de la plaque, elles déterminent une déformation du plan ; toutefois, on supposera qu'elles engendront des tensions qui sont faibles par rapport aux tensions critiques ; ainsi, on peut négliger l'effet qu'elles produisent sur la flexion de la plaque et admettre que les tension totales s'obtiennent avec une approximation suffisante en superposant les tensions dues à la déformation du plan moyen, et celles produites par la charge latérale.

Les expressions ~~des~~ ~~expressions~~ des forces pour les plaques subinants des forces dans leur plan et celles pour les plaques en flexion, ayant été établies de façon indépendante, on pourra établir aussi les modèles d'élément fini pour chacun des cas de façon separée, et les superposer par la suite.

CHAPITRE III

FORMULATION DES MODELES PAR ELEMENTS FINIS

3.1 CHOIX DU CHAMP DE DEPLACEMENT ET DE L'ELEMENT

L'état d'un corps est entierement défini par la connaissance d'un nombre défini des composantes du champ de ses deplacements, à l'intérieur du corps d'une part, et sur ses frontiere d'autre part ; le champ doit remplir la double exigence d'être dérivable (condition de compatibilité ou continuité interne de la matiere) et de satisfaire aux conditions limites.

On a vu que le champ s'exprimait en fonction d'un certain nombre de valeurs discrètes, les déplacements choisis en certains noeuds situés sur la frontière de l'élément ; l'exigence la plus difficile à remplir lors de la mise au point d'un modèle deplacement pur est le fait d'assurer la continuité des déplacements le long de tous les points situés sur les frontières rien qu'à partir de l'identification des déplacements nodaux aux seuls noeuds communs des éléments c'est le critere n° 3 déjà cité ;

Le champ de deplacement devrait d'autre part satisfaire aux conditions supplementaires que sont les critere 1 et 2 ; il suffit que ces deux critères soient remplis pour que la solution converge vers la solution exacte.

En conclusion, la solution approchée fournie par la méthode des éléments finis tend vers la solution exacte quand on subdivise toujours plus finement la structure étudiée ; si les conditions suivantes sont remplies lors du choix du champs de déplacement:

a) le champ est continu dans le domaine (dérivable)
b) le champ satisfait les conditions aux limites (continuité le long des frontières des éléments)
c) le champ contient les modes rigides
d) le champ contient les modes homogènes ou mode de déformation constante

Pour les éléments qui ne satisfont pas exactement à b) ci-dessus, il existe le critère du « patch-test » qui s'il est satisfait, assure la convergence

En générale, les fonctions choisies pour décrire le champ en question sont des polynômes de la forme

$$f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \cdots + \alpha_n x^{n-1}$$

$$f(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \cdots + \alpha_{(n+1).(n+2)/2} \cdot y^n$$

de sorte que la première condition est toujours remplie;
Par ailleur, il faut éviter de choisir des polynômes incomplets, i.e dont certains termes (modes de déplacement) de degré inférieur manquent; ainsi, les fonctions doivent avoir tous les termes de degré inférieur et égal à l'ordre le plus élevé des dérivées avec lequel elles interviennent dans les intégrales.

En ce qui concerne l'idéalisation structurel pour les plaques, il est évident que l'on doit utiliser des éléments liés entre eux par des lignes continues; l'élément triangulaire semble le mieux désigné pour une structure quelconque bidimentionnelle; mais la difficulté majeur réside dans l'interprétation physique des forces des éléments; d'abord les déplacements des noeuds sont supposés être les <u>déplacements réels</u> des points correspondants de la structure; ensuite, le champ variable des contraintes dans l'élément doit être remplacé par des <u>charges équivalentes aux noeuds</u>; ces charges équivalentes ne correspondent en fait à rien au niveau des points correspondants de la structure réelle et sont donc fictives.

Nous supposerons au niveau de notre élément que l'épaisseur h est constante et que son système d'axe local est tel que l'axe y coincide avec le coté reliant les noeuds j_1 et j_2 de l'élément (voir fig. 16).

3.2 ELEMENT TRIANGULAIRE EN ETAT PLAN DE CONTRAINTE

3.2.1 Choix de la fonction de déplacement

En état plan de contrainte, le champ de déplacement est constitué par les déplacements plan u et v :

$$\{u\} = [u, v]^t$$

Pour les trois noeuds de l'élément triangulaire, on aura :

$$\{\Delta\} = [u_1 \; v_1 \; u_2 \; v_2 \; u_3 \; v_3]^t$$

supposons les fonctions de déplacement suivantes, linéaires en x et y :

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \qquad (36\text{-}a)$$

ou encore, sous forme matricielle, on peut écrire

$$\{u\} = [G]\{\alpha\} \qquad (36\text{-}b)$$

avec $[G] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$

et $\{\alpha\} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6]^t$

3.2.2 Vérification des critères

a) $\{u\}$ est continu dans le domaine : c'est une fonction polynôme

b) les déplacements u et v sont linéaires le long de chaque coté, donc continus ; les déplacement de chacun des points des frontières de l'élément sont déterminés par la seule connaissance des six déplacements locaux aux trois sommets du domaine ; enfin, la continuité des déplacements est assurée par identification des déplacements nodaux

c) si dans le champ, on pose successivement : – $\alpha_i = 0$ sauf α_1, alors $u =$ constante, $v = 0$: translation parallèle à x

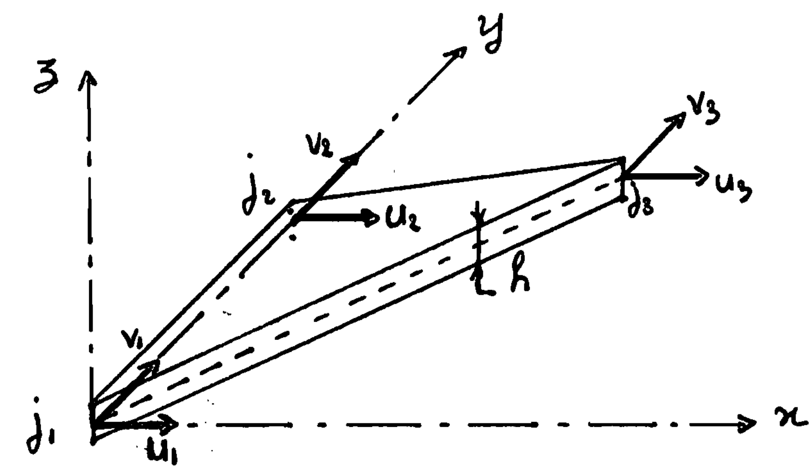
– $\alpha_i = 0$ sauf α_4 ; alors $v =$ constante, $u = 0$; translation parallèle à y

— $d_i = 0$ sauf $d_5 = -d_3 = w$; alors $u = -wy$ et $v = wx$: rotation autour de l'origine local.

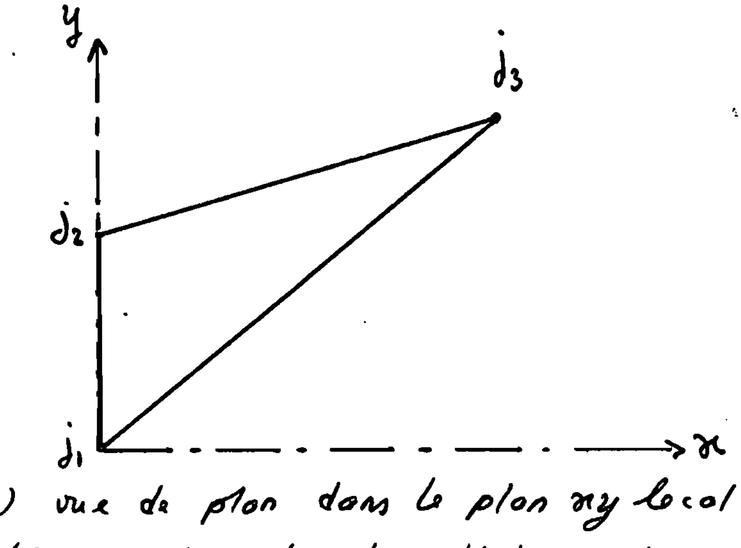
ainsi les 3 modes rigides possibles de cet élément dans son plan sont contenus dans le champ de déplacements

d) les déformations sont toutes constantes :

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = d_2 \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = d_6 \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = d_3 + d_5$; le critère de mode homogène est donc respecté.



(a) vue en perspective



(b) vue de plan dans le plan xy local

Fig. 16 : état plan de contrainte ; déplacements nodaux

Cet élément est donc de type déplacement pur et satisfait à toutes les exigences de convergence vers la solution exacte.

3.2.3. Matrice de rigidité

(éq. 12) $\Longrightarrow$ $\{\Delta\} = [C]\{\alpha\}$

$$\Longrightarrow \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_{j2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_{j2} \\ 1 & x_{j3} & y_{j3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{j3} & y_{j3} \end{bmatrix} \qquad \text{(éq. 12-a)}$$

x_{ji} et y_{ji} étant les coordonnées des noeuds ji;

$[C]$ est la matrice de transformation des déplacements;

(eq. 10) $\longrightarrow$ $\{\varepsilon\} = [B_\alpha]\{\alpha\}$

$$\Longrightarrow \quad [B_\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(éq. 10-a)}$$

(éq. 13) $\longrightarrow$ $\{\alpha\} = [C^{-1}]\{\Delta\}$

$$\Longrightarrow \{\varepsilon\} = [B_\alpha][C^{-1}]\{\Delta\}$$

Alors $[K_\alpha] = \int_V [B_\alpha]^t [E]\,[B_\alpha]\, dv$; par calcul, on a :

$$[B_\alpha]^t [E]\,[B_\alpha] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on integre alors pour obtenir $[K_\alpha]$; on notera $I(x^n, y^m)$ l'intégrale suivante : $\iint x^n y^m \, dx\, dy$; le calcul des intégrales est donné en appendice; on a:

$$\boxed{[K_\alpha] = \frac{h \cdot x_3 y_2}{2} \cdot [B_\alpha]^t [E] [B_\alpha]} \qquad (37\text{-}a)$$

et $$[K] = [C^{-1}]^t [K_\alpha] [C^{-1}] \qquad (37\text{-}b)$$

3.2.4 Charges équivalentes

on considère comme charges :

— les charges volumetriques $\{P_v\} = [P_{vx}, P_{vy}]^t$: ce sont les composantes du poids volumique qui agissent suivant x et y

— les charges de surface $\{P_s\} = [b_x, b_y]^t$: ce sont des charges reparties ($[kN/m]$) qui agissent sur les cotés de l'élément suivant x et y.

l'équation (20) donne l'effet équivalent de ces charges:

$$[C^{-1}]^t \int_V [G]^t \{P_v\} dv = [C^{-1}]^t \int_V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \\ y & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{vx} \\ P_{vy} \end{bmatrix} dx\,dy\,dz = h\,[C^{-1}]^t \begin{bmatrix} P_{vx} \cdot I(x^0, y^0) \\ P_{vx} \cdot I(x^1, y^0) \\ P_{vx} \cdot I(x^0, y^1) \\ P_{vy} \cdot I(x^0, y^0) \\ P_{vy} \cdot I(x^1, y^0) \\ P_{vy} \cdot I(x^0, y^1) \end{bmatrix}$$

le cas de la charge latérale est un peu plus complexe, car il faut faire une intégration sur la longueur du coté chargé; on suppose qu'on a une charge liniaire b_x telle que

$bx = a_1 + b_1 X$

On choisit les cotés tels que leur numéro soit celui du noeud opposé; ainsi le coté 1 relie les noeuds j_2 et j_3, le coté 2 relie les noeuds j_1 et j_3 et le coté 3 relie les noeuds j_1 et j_2; on suppose que bx varie du noeud i_1 dont l'indice est le plus petit à l'autre noeud i_2; considérons par exemple le coté 2 (fig 17); prenons la nouvelle origine en C milieu du coté

soit bx_{i_1} et bx_{i_2} les valeurs aux noeuds extremes du coté;

alors $x_c = \dfrac{x_{i_1} + x_{i_2}}{2}$; dans notre cas $i_1 = j_1$ et $i_2 = j_3$

$y_c = \dfrac{y_{i_1} + y_{i_2}}{2}$

alors $x = X + x_c$ et $y = Y + y_c$

soit L la longueur sur laquelle on intègre : $L = x_{i_2} - x_{i_1}$

la pente du coté vérifie $Y = pX \Rightarrow p = \dfrac{Y_{i_2} - Y_{i_1}}{X_{i_2} - X_{i_1}}$

en remplaçant successivement X par $-\frac{L}{2}$ et $+\frac{L}{2}$, on trouve les valeurs de a_1 et b_1; le même raisonnement donnerait les valeurs a_2 et b_2 pour une charge dirigée suivant y s'exprimant par $by = a_2 + b_2 X$; ainsi, les expressions des coefficients sont :

cote	i_1	i_2
1	j_2	j_3
2	j_1	j_3
3	j_1	j_2

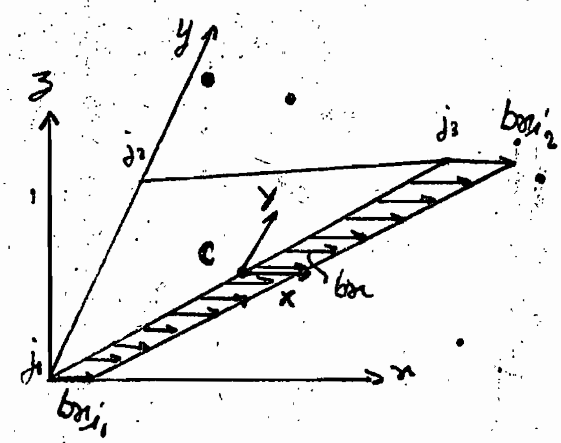


Fig 17 : charge latérale bx sur le coté 2 de l'élément

$b_1 = (bx_{i_2} - bx_i)/L \quad ; \quad b_2 = (by_{i_2} - by_{i_1})/L$

$a_1 = (bx_{i_2} + bx_{i_1})/2. \quad ; \quad a_2 = (by_{i_2} + by_{i_1})/2.$

la force equivalente est donnée par :

$$\{P_b\} = [C^{-1}]^t \int_S [G]^t \{P_s\} \, ds = [C^{-1}]^t \int_L [G]^t \{b\} \, dL$$

les valeurs des integrales linéaires sont données en annexe sachant que $\{b\} = [bx, by]^t$, on effectue les calculs en veillant à remplacer x et y dans $[G]$ par leurs expressions en fonction de X et Y, puis Y par son expression en fonction de X ; cela permet de garder des integrales suivant ~~X~~ seulement car $dL = dX$; on a apres tous les calculs la valeur suivante :

$$\{P_b\} = [C^{-1}]^t \times \begin{bmatrix} a_1 \cdot L \\ a_1 x_c L + b_1 L^3/12 \\ a_1 y_c L + p b_1 L^3/12 \\ a_2 L \\ a_2 x_c L + b_2 L^3/12 \\ a_2 y_c L + p b_2 L^3/12 \end{bmatrix}$$

le même calcul est fait trois fois ~~quand~~ on tient compte des trois cotés.

3.3 ELEMENT TRIANGULAIRE EN FLEXION

3.3.1 Choix de la fonction de déplacement

D'après les relations établies dans la section 2.3, on peut dire que :

— la flèche w définit entièrement l'état de la plaque à l'intérieur du domaine

— les conditions de continuité entre éléments doivent être imposées non seulement à cette quantité, mais aussi à la pente normale $\frac{\partial w}{\partial n}$, ceci est nécessaire pour que la plaque reste continue et ne fasse pas de « plis » ; dans les expressions des travaux virtuels, les dérivées des plus haut rang sont les déformations dues aux déplacements ; ces déformations sont définies par des dérivées d'ordre 2 ; alors la continuité aux interfaces doit être d'ordre 1, c'est à dire que $\frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial y}$ doivent y être continues ; par conséquent le nombre de paramètres à un noeud est trois : w, $\frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial y}$; on prendra $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ et $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$

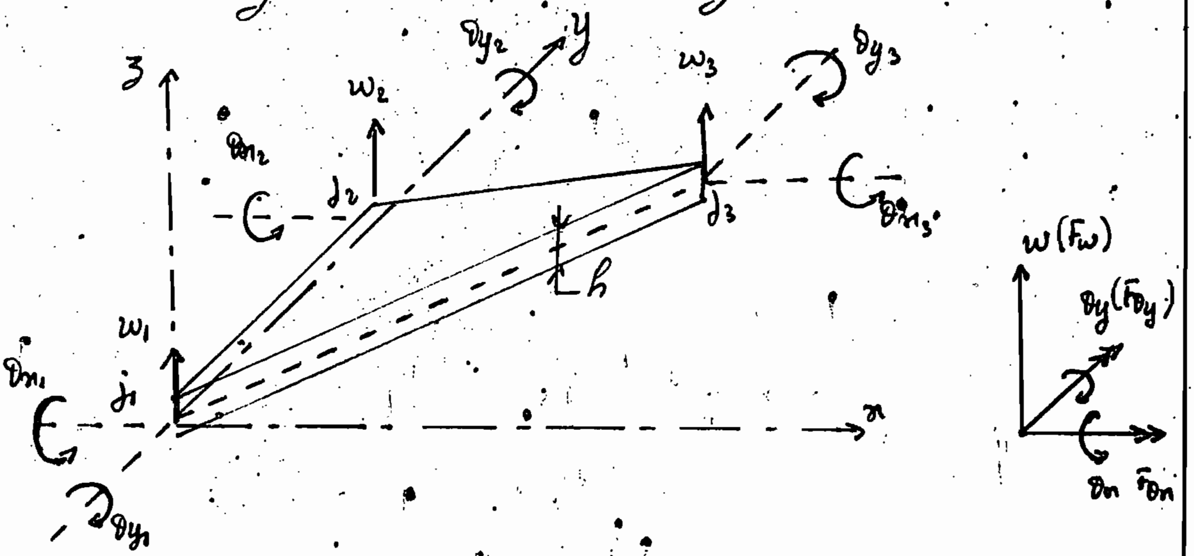


Fig 18 : élément triangulaire en flexion : déplacements nodaux pour les 3 noeuds de l'élément, on aura neuf degrés de liberté en tout : $\{\delta_i\} = [w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi}]^t$ et

$$\{\delta\} = [w_1 \ \theta_{x_1} \ \theta_{y_1} \ w_2 \ \theta_{x_2} \ \theta_{y_2} \ w_3 \ \theta_{x_3} \ \theta_{y_3}]^t$$

Par conséquent, il faudra 9 paramètres ou coordonnées généralisées dans la fonction de déplacement; toutefois, un polynôme cubique complet contient dix termes et toute suppression d'un terme du polynôme ne peut être que arbitraire; Gallagher (1962) a proposé la fonction suivante :

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 y^3$$

cette fonction ne possède pas une isométrie géométrique par contre : le terme $x^2 y$ est absent.

Les « forces » nodales correspondantes à $\{\delta_i\}$ peuvent être interprétées comme composées d'une force et de deux moments : $\{F_i\} = [F_{w_i} \ F_{\theta_{xi}} \ F_{\theta_{yi}}]^t$

Les « déformations » et les « contraintes » généralisées doivent être maintenant définies de telle sorte que leur produit scalaire s'identifie au travail intérieur; c'est pourquoi on donnera de la « déformation » la définition suivante :

$$\{H\} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] = \left[\rho_x \ \ \rho_y \ \ 2\rho_{xy}\right]$$

Les « contraintes » correspondantes sont, en fait, les classiques moments de flexion et de torsion par unité de longueur dans les directions x et y ; le calcul de l'énergie de déformation est donné en appendice.

la loi de Hooke s'écrit alors,

$$\{M\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [D]\{\rho\} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ 2\rho_{xy} \end{bmatrix}$$

les éléments de réduction sont montrés à la figure 14.

3.3.2 Vérification des critères

a) le champ est continu dans le domaine : c'est une fonction polynôme.

b) le champ ne satisfait pas les conditions de compatibilité des déplacements aux frontières : en effet, considérons le coté 1-2 pour lequel $x = 0$; il est parallèle à l'axe y ; il aurait fallu que w et la pente normale $\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x}$ soient continue :

$$w = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_9 y^3$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_8 y^2$$

nous avons sept inconnues α_i et on dispose de six équations : six paramètres nodaux aux noeuds 1 et 2 : w_1, θ_{x_1}, θ_{y_1}, w_2, θ_{x_2}, θ_{y_2} ; les degrés de liberté ne suffiront pas à la définition complète de la pente ; elle est donc discontinue et l'élément n'est pas conforme (non codiformable).

c) l'élément contient les modes rigides :

$w = \alpha_1 \longrightarrow$ translation le long de l'axe z

$w = \alpha_2 x \longrightarrow$ rotation autour de l'axe y

$w = \alpha_3 y \longrightarrow$ rotation autour de l'axe x

d) l'élément contient des modes homogènes pour $\alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$:

$$\rho_x = 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x$$
$$\rho_y = 2\alpha_6 + 2\alpha_8 x + 6\alpha_9 y$$
$$\rho_{xy} = \alpha_5 + 2\alpha_8 y$$

l'élément satisfait à toutes les exigences sauf au critère b); il sera bon par la suite de faire le «patch-test».

3.3.3. Matrice de rigidité

(éq. 12) $\Rightarrow \{\Delta\} = [C]\{\alpha\}$

$$\Rightarrow [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_2 & 0 & 0 & y_2^2 & 0 & 0 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_2 & 0 & 0 & 3y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 & -y_2^2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^2 & x_3 y_3^2 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -y_3^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(éq 12-b)}$$

$[C]$ est la matrice de transformation des déplacements

(éq. 10) $\Rightarrow \{\varepsilon\} = [B_\alpha]\{\alpha\}$; ici, on aura $\{\rho\} = [B_\alpha]\{\alpha\}$

$$\Rightarrow [B_\alpha] = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4y & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(éq. 10-b)}$$

(éq. 13) $\Longrightarrow \{\alpha\} = [C^{-1}]\{\Delta\} \Rightarrow \{\varphi\} = [B_\alpha][C^{-1}]\{\Delta\}$

(éq. 19) $\longrightarrow \quad [K] = [C^{-1}]^t \int_V [B_\alpha]^t [E][B_\alpha]\, dv\, [C^{-1}]$

la relation moment- courbure tient compte de l'intégration sur l'épaisseur h de la plaque et $[E]$ est remplacé par $[D]$; ainsi, on a :

$$[K] = [C^{-1}]^t \int_A [B_\alpha]^t [D][B_\alpha]\, dA\, [C^{-1}]^t$$

soit $[K_\alpha] = \int_A [B_\alpha]^t [D][B_\alpha]\, dA$; on a

$$[B_\alpha]^t [D][B_\alpha] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4\nu & 12x & 4\nu x & 12\nu y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 & 0 & 4y(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\nu & 0 & 4 & 12\nu x & 4x & 12y \\ 0 & 0 & 0 & 12x & 0 & 12\nu x & 36x^2 & 12\nu x^2 & 36\nu xy \\ 0 & 0 & 0 & 4\nu x & 4y(1-\nu) & 4x & 12\nu x^2 & 4x^2 + 8y^2(1-\nu) & 12xy \\ 0 & 0 & 0 & 12\nu y & 0 & 12y & 36\nu xy & 12xy & 36y^2 \end{bmatrix}$$

on integre cette expression sur la surface elementaire puis on calcule $[K]$

3.3.4 Charges équivalentes

on considère comme charges :

— les charges volumétrique $\{P_v\} = P_{vz}$: c'est la composante suivant z du poids volumique

— les charges de surface $\{P_s\} = p_{sz}$: c'est une force de pression qui agit sur la surface de l'element suivant z et s'exprime en kN/m²

l'équation (20) donne l'effet équivalent de ces charges:

$$[C^{-1}]^t \int_V [G]^t \{P_v\} dv = h \cdot P_{vz} \cdot [C^{-1}]^t \begin{bmatrix} I(x^0, y^0) \\ I(x^1, y^0) \\ I(x^0, y^1) \\ I(x^2, y^0) \\ I(x^1, y^1) \\ I(x^0, y^2) \\ I(x^3, y^0) \\ I(x^1, y^2) \\ I(x^0, y^3) \end{bmatrix}$$

pour la charge de surface, on suppose qu'elle varie linéairement sur la surface en fonction de x et y :

$P_{sz} = a + bx + cy$

Soient P_{sz_1}, P_{sz_2} et P_{sz_3} les cotes extremes de P_{sz} au niveau des noeuds j_1, j_2, j_3 respectivement.

au noeud j_1, $P_{sz_1} = a \Rightarrow a = P_{sz_1}$

au noeud j_2, $P_{sz_2} = a + cy_2 \Rightarrow c = (P_{sz_2} - a)/y_2$

au noeud j_3, $P_{sz_3} = a + bx_3 + cy_3 \Rightarrow b = (P_{sz_3} - a - cy_3)/x_3$

la donnée des P_{sz_i} aux noeuds j_i donne l'expression de P_{sz}, si bien qu'on peut calculer $[C^{-1}]^t \int_S [G]^t \{P_s\} ds$, en fait, on integre sur la surface A de l'element; on a donc :

$$[C^{-1}]^t \int_A [G]^t (a + bx + cy)\, dA =$$

$$[C^{-1}]^t \times \begin{bmatrix} a \cdot I(x^0,y^0) + b \cdot I(x^1,y^0) + c\, I(x^0,y^1) \\ a \cdot I(x^1,y^0) + b \cdot I(x^2,y^0) + c \cdot I(x^1,y^1) \\ a \cdot I(x^0,y^1) + b \cdot I(x^1,y^1) + c \cdot I(x^0,y^2) \\ a \cdot I(x^2,y^0) + b \cdot I(x^3,y^0) + c \cdot I(x^2,y^1) \\ a \cdot I(x^1,y^1) + b \cdot I(x^2,y^1) + c \cdot I(x^1,y^2) \\ a \cdot I(x^0,y^2) + b \cdot I(x^1,y^2) + c \cdot I(x^0,y^3) \\ a \cdot I(x^3,y^0) + b \cdot I(x^4,y^0) + c \cdot I(x^3,y^1) \\ a \cdot I(x^1,y^2) + b \cdot I(x^2,y^2) + c \cdot I(x^1,y^3) \\ a \cdot I(x^0,y^3) + b\, I(x^1,y^3) + c \cdot I(x^0,y^4) \end{bmatrix}$$

3.4 LE VOILE MINCE

Les voiles minces sont des éléments où l'on superpose un élément de contraintes planaires à un élément de plaque en flexion ; chaque nœud a donc cinq degrés de liberté indépendants : deux en contraintes planaires et trois en flexion ; pour faire la superposition, on classe les degrés de libertés dans un ordre tel que la matrice de rigidité soit aisée à utiliser ; étant donné qu'on devra passer du système local de l'élément au système global de la structure où on a six degrés de libertés, on introduit dès maintenant dans le système local, un sixième degré de liberté θ_z qui est la rotation, en réalité fictive, autour de l'axe local z.

3.4.1 Matrice de rigidité [k] et charges équivalentes

soient $[Kp]$ = matrice de rigidité en contraintes planaires
$\{Peq_p\}$: charges equivalentes en contraintes planaires
$[Kf]$ = matrice de rigidité en etat de flexion
$\{Peq_f\}$ = charges equivalentes en état de flexion
ces matrices et vecteurs charges ont déjà été calculées.
soient $\{\Delta p\}$ = degrés de liberté en contraintes planaires
$\{\Delta f\}$ = degrés de liberté en état de flexion
$\{\Delta \ell\}$ = degrés de liberté du voile mince dans le système d'axe Local
$\{\Delta\}$ = degré de liberté dans le système global de la structure;
on pose $\{\Delta\ell\} = \{\Delta\ell\} = [\{\Delta p\}, \{\Delta f\}, \theta_{z_1}, \theta_{z_2}, \theta_{z_3}]^t$
alors, dans ces conditions,

$$[K_\ell] = \left[\begin{array}{c:c:c} K_p & & \\ \hdashline & K_f & \\ \hdashline & & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\ 6 \text{ lignes} \\ \}\ 9 \text{ lignes} \\ \}\ 3 \text{ lignes} \end{array} \qquad \text{(eq. 38)}$$

avec $[K_\ell]$ = matrice de rigidité local du voile; elle est d'ordre 18 x 18
de même le vecteur charge équivalente du voile dans le système local est

$$\{Peq_\ell\} = [\{Peq_p\}, \{Peq_f\}, 0, 0, 0]^t$$

3.4.2 Assemblage des éléments

l'assemblage consiste à calculer les matrices $[\bar{K}]$, $\{\overline{Peq}\}$ et $\{\bar{P}\}$ exprimées dans l'équation (22) en vu du calcul de $\bar{\Delta}$ par la résolution de cette même équation.

(éq. 18) $\longrightarrow$ $[\bar{K}] = \sum_{j=1}^{m} [Kg]$

$[Kg]$ est la matrice de rigidité élémentaire dans le système d'axe global de la structure; il convient donc de transformer $[k]$ en $[Kg]$, afin de pouvoir faire la sommation. (voir figure 3-6)

Soient (x', y', z') le système d'axe local propre à l'élément et (X, Y, Z) le système d'axe global de la structure

soit $[\lambda]$ la matrice des cosinus directeurs des axes locaux par rapport aux axes globaux.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'X} & \lambda_{x'Y} & \lambda_{x'Z} \\ \lambda_{y'X} & \lambda_{y'Y} & \lambda_{y'Z} \\ \lambda_{z'X} & \lambda_{z'Y} & \lambda_{z'Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}$$

où $\lambda_{x'X} = \lambda_{11}$ = cosinus directeur de l'axe x par rapport à X

le système d'axe local est tel que le côté $j_1 j_2$ est parallèle à l'axe y' et le nœud j_1 est l'origine (fig. 16 et 18)

Soit (X_i, Y_i, Z_i) les coordonnées globales du nœud local j_i;

le côté j_1-j_2 est défini par le vecteur V_{12} par:

$$V_{12} = \begin{Bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{Bmatrix} \doteq \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix}$$

Sa longueur est $\ell_{12} = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2}$

les cosinus directeurs de l'axe local y' sont alors donnés par les coordonnées du vecteur unitaire $V_{y'} = V_{12}/\ell_{12}$;

en utilisant les propriétés du produit vectoriel et du vecteur unitaire, on trouve également les valeurs des cosinus directeurs des autres axes locaux; la démonstration est donnée en appendice et on a:

$$\lambda_{21} = X_{21}/l_{12} \qquad \lambda_{22} = Y_{21}/l_{12} \qquad \lambda_{23} = Z_{21}/l_{12}$$

$$\lambda_{31} = (Y_{31} Z_{21} - Y_{21} Z_{31}) / l_3'$$

$$\lambda_{32} = (Z_{31} X_{21} - Z_{21} X_{31}) / l_3'$$

$$\lambda_{33} = (X_{31} Y_{21} - X_{21} Y_{31}) / l_3'$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{32}\lambda_{23} \; ; \; \lambda_{12} = \lambda_{23}\lambda_{31} - \lambda_{33}\lambda_{21}$$

$$\lambda_{13} = \lambda_{21}\lambda_{32} - \lambda_{31}\lambda_{22}$$

l_3' est la longueur du vecteur $V_3' = V_{13} \times V_{12}$

Les cosinus directeurs connus, on peut calculer les coordonnées des noeuds de l'élément par rapport au système local; ces coordonnées, on les avait avait supposées connus, alors qu'à priori, seules les coordonnées X_i, Y_i et Z_i le sont; la démonstration de ce calcul est aussi donnée en appendice.

Soit $\{\Delta\} = [\{\Delta_1\}, \{\Delta_2\}, \{\Delta_3\}]^t$

avec $\{\Delta_i\} = [dx_i, dy_i, dz_i, Rx_i, Ry_i, Rz_i]^t$

dx_i, dy_i, dz_i sont les déplacements suivant X, Y et Z
Rx_i, Ry_i, Rz_i sont les rotations autour de X, Y et Z.

Soit $[Tg]$ la matrice définie par:

$$\{\delta e\} = [Tg]\{\Delta\} \qquad (\text{eq. } 38)$$

$[Tg]$ est la matrice de transformation géométrique;
De l'équation (38), on déduit l'expression de $[Tg]$:

69

$$[T_g]=\begin{bmatrix}
\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\
\lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\
0 & 0 & 0 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33}
\end{bmatrix}$$

soit $\{F\}$ l'expression des forces dans le système global
$\{F\} = [\{F_1\}, \{F_2\}, \{F_3\}]^t$ avec $\{F_i\} = [F_{xi}\ F_{yi}\ F_{zi}\ m_{xi}\ m_{yi}\ m_{zi}]^t$
quelque soit le système, les forces effectuent le même travail, compte tenu des déplacements correspondants.

$$\{F\}^t\{\Delta\} = \{Fe\}^t\{\Delta e\}$$

(38) $\longrightarrow$ $\{\Delta e\} = [T_g]\{\Delta_g\}$ et $\{Fe\} = [T_g]\{F\}$

alors $\{F\}^t\{\Delta\} = ([T_g]\{F\})^t([T_g]\{\Delta\}) = \{F\}^t[T_g]^t[T_g]\{\Delta\}$

$\Longrightarrow$

$$[T_g]^t = [T_g^{-1}] : [T_g] \text{ est une matrice orthogonale}$$

$\{Fe\} = [Ke]\{\Delta e\} \longrightarrow [T_g]\{F\} = [Ke][T_g]\{\Delta\}$

$\longrightarrow [T_g^{-1}][T_g]\{F\} = [T_g^{-1}][Ke][T_g]\{\Delta\}$

$\longrightarrow \{F\} = [T_g^{-1}][Ke][T_g]\{\Delta\}$

comme $\{F\} = [K]\{\Delta\}$, alors

$$\boxed{[K] = [T_g]^t[Ke][T_g]} \qquad (\text{éq. } 40)$$

l'équation (38) montre que $[Ke]$ est singulier; pour l'éviter, on remplace la sous matrice nulle $[0]$ de dimension 3×3 par la matrice suivante définie par :

$$\begin{Bmatrix} F_{\theta_{z1}} \\ F_{\theta_{z2}} \\ F_{\theta_{z3}} \end{Bmatrix} = \alpha E h \Delta \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ & 1 & -0{,}5 \\ \text{sym.} & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}$$

où Δ est la surface de l'élément triangulaire et α est un coéfficient qui reste à déterminer; ceci est une solution proposée par O. Zienkiewicz; cette raideur supplémentaire intervient en fait sur les resultats, car elle affecte les noeuds où les elements ne sont pas coplanaires; ce procédé ne donne que des resultats approchés; il propose de prendre α aussi voisin que possible de zero et recommande que $\alpha \leq 0,03$

3.5· RESOLUTION DES EQUATIONS ET CALCUL DES CONTRAINTES

il s'agit de trouver les solutions $\{\Delta\}$ de l'équation matricielle (22); la resolution se fait par des procédés numeriques.

$\{\Delta\}$ représente les deplacements à tous les noeuds de la structure; la méthode utilisée est basée sur l'élimination de GAUSS.

les déplacements connus, on peut alors calculer les éléments de réductions de chaque élément triangulaire, aux trois noeuds; ces forces ou contraintes sont données dans le système local de chaque élément; pour cela, on reconsidère les deux cas de contraintes planaires puis de flexion indépendamment.

En état plan de contrainte, la relation contrainte déplacement $\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$ et l'équation (13) donnent, avec l'équation (10):

$$\{\sigma\} = [E][B_\alpha]\{\alpha\} = [E][B_\alpha][C^{-1}]\{\Delta\}$$

où $\{\sigma\}$ est défini par $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^t$;

en multipliant $\{\sigma\}$ par l'épaisseur de la plaque, on obtient les forces par unité de longueur $\{N\} = [N_x, N_y, N_{xy}]^t$.

$$\{N\} = h \cdot \{\sigma\} = h \cdot [E][B_a][C^{-1}]\{\Delta\} ;$$

en flexion, les équations dérivées des équations (10) et (13) et la relation $\{M\} = [D]\{\rho\}$ donnent :

$$\{M\} = [D][B_d][C^{-1}]\{\Delta\}$$

dans cette équation, $\{M\}$ est défini comme dans l'équation (34), et correspondent donc à des moments par unité de longueur.

Pour la résolution, on tient compte des appuis de la structure; on considère une très grande rigidité pour les noeuds qui se trouvent au niveau des appuis si les déplacements en ces points sont connus d'avance et sont nuls; on peut donc déduire la valeur des réactions en ces points en multipliant l'opposé des déplacements par la rigidité supposée; on ne considérera donc que les noeuds restreints.

CHAPITRE IV

PRESENTATION DU LOGICIEL

Pour chaque problème à traiter, il faut créer un fichier dans lequel on mettra toutes les données qui lui sont relatives; c'est le fichier des données que le programme lira au cours de son exécution; il est également nécessaire de donner un nom au fichier des résultats que le programme créera automatiquement, et dans lequel il mettra le résultat des calculs; nous allons présenter les différentes phases de l'exécution du programme.

4.1 LECTURE DES DONNÉES

4.1.1 Données générales

après avoir lu en mode interactif les noms des fichiers de données et des résultats, le programme procède à la lecture des données générales qui sont, dans l'ordre de lecture :

- nel : nombre d'éléments de la structure discrétisée
- nod : nombre total de nœuds de la structure
- ndl : nombre de degré de liberté par nœud
- em : le module d'élasticité du matériau en kN/m^2
- pc : le coefficient de Poisson ν.
- nnr : le nombre de nœuds restreints

gama: le poids volumique du matériau en kN/m^3; si l'axe vertical z du système global est dirigé vers le bas, il sera entré positivement; dans le cas contraire, donner une valeur négative pour le poids volumique.

- alfa : coefficient qui tient compte du sixième degré de liberté θ_z au niveau local; il varie entre 0,03 et 0.

Pour un problème de plaque, alfa est non nul.

Le programme calcule alors :

— nk = nombre de degrés de liberté par element

— nn = nombre total de degrés de liberté

— nr = nn + 1

4.1.2 Données des noeuds et connectivité des elements

la lecture se poursuit avec celle de :

k : numero du noeud spécifié

tx(k) : abscisse du noeud k dans le système global

ty(k) = ordonnée du noeud k " "

tz(k) = cote du noeud k " "

les restreintes des noeuds sont lues et stockées dans le tableau ires :

ires (i, 7) = numero du ieme noeud restreint

ires (i, j) = restreinte suivant j du ieme noeud restreint.

j varie de 1 à 6, pour les 6 degrés de liberté

ires (i, j) = 0 si le mouvement est permis

ires (i, j) = 1 si le mouvement est empeché.

Pour la connectivité des elements, on a :

ji (j, k) = noeud j de l'element k, j variant de 1 à 3.

on lit en même temps l'épaisseur t(k) de l'élément, dont l'unité est en m.

4.2 CALCUL DE L'ADRESSE DES DIAGONALES

on évalue le vecteur moxa, correspondant aux adresses des diagonales; il permet d'effectuer l'assemblage, la triple décomposi tion, et détermine l'espace requis pour la matrice de rigidité cette valeur de l'espace est nwk ; on procède alors à l'initialisation de la matrice de rigidité gsk.

4.3 BOUCLE DE CALCUL DES DONNEES DES ELEMENTS

cette partie fait appel à plusieurs sous routine; successivement, on fait appel à :

— coordloc : cette sous routine calcule les cosinus directeurs des axes locaux $al(i,j) = \lambda ij$, puis les coordonnées des noeuds du triangle dans le système local; ainsi : $x(i,k)$ est l'abscisse locale du noeud i de l'élément k

$y(i,k)$ = ordonnée du noeud i de l'élément k

$z(i,k)$ = cote du noeud i de l'élément k

— xintegr :

à partir des coordonnées locales x, y et z, on calcule les integrales $aint(i,j) = I(x^{i-1}, y^{j-1}) = \int x^{i-1} y^{j-1} dx\,dy$.

— coplag :

elle calcule la matrice de rigidité de l'élément en contraintes planes dans son système local; cette sous routine fait appel à d'autres sous routines qui sont.

* trandem: qui calcule la matrice de transformation des déplacements en état membrane [cp] et son inverse grace à la sous routine dminv; l'inverse est stocké dans [cp]

* produit: qui fait la triple multiplication $[c^{-1}]^t [K_0] [c^{-1}]$;

à la sortie de coplag, la matrice de rigidité est rcp.

— cofleg : calcule la rigidité rcf de l'élément en flexion ; elle fait aussi appel à trandef pour le calcul de la matrice de transformation des déplacements dans le cas de la flexion, puis à produit

— transfo :

cette sous routine calcule la matrice de transformation géométrique [tg] de l'élément ;

— rigel :

elle calcule la rigidité de l'élément en tenant compte des états plan (rcp) et de flexion (rcf), puis transforme cette rigidité appelée stif du système local au système global et devient la rigidité amat

— adress :

elle calcule le vecteur d'adresses iad des rangées et colonne de la rigidité de l'élément traité, dans la rigidité globale grk

— assemb :

elle procède à l'assemblage des rigidités amat dans le grk ; c'est là que prend fin la boucle des éléments.

4.4 TRAITEMENT DES RESTREINTES ET DECOMPOSITION

ce traitement consiste à choisir dans le grk, les rigidités qui correspondent aux degrés de liberté restreints et à y mettre un très gros chiffre pour simuler la rigidité infinie.

Le programme fait appel à la sous routine tripld qui procède à la décomposition de Gauss ; cela revient

à réduire
les coéfficients de grk en une matrice triangulaire supérieure indépendamment du vecteur des charges; en fait tripld décompose grk en un produit de trois matrices : une matrice triangulaire inferieure, une matrice diagonale unité, et une matrice triangulaire superieure, transposée de la matrice triangulaire inferieur; c'est à cette étape que l'on voit si grk est définie positive ou non; elle devrait l'être.

4.5 BOUCLE DES CAS DE CHARGEMENT

On procède à la lecture des charges dans le fichier des données:

- nnch: nombre de noeuds chargés directement; il est recommandé de mettre un noeud aux lieu des points où des charges concentrées sont appliquées
- ve : vecteur des charges; on y met les charges concentrées et l'effet équivalent des autres charges sur les éléments.
- nelcrs : nombre d'éléments avec charges réparties en surface
- psz(j,k) : cote de la charge repartie en surface de l'élément k, au niveau de son noeud j
- nelcrc : nombre d'éléments avec charges réparties sur le coté
- bx, by : charges reparties sur les cotés, et agissant suivant les directions x et y respectivement
- Les charges introduites, on calcule leur effet équivalent

aux noeuds grace aux sous routines chegplo pour les forces agissant dans le plan et cheflex pour les forces causant la flexion, les étapes suivantes sont:

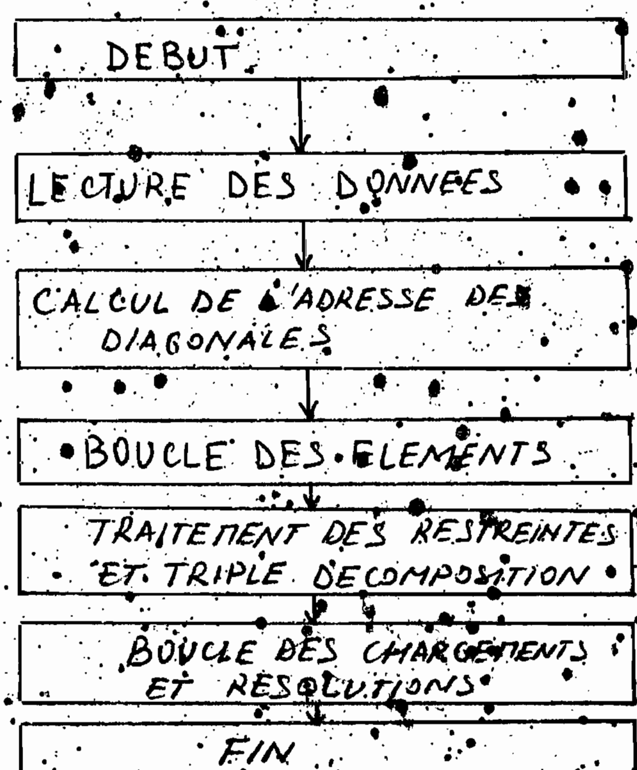
— calcul des déplacements par la sous routine resolv; les déplacements sont stockés dans vc, à la place des charges.

— calcul des contraintes grace aux sous routines sigmap et sigmaf respectivement pour les états plan et de flexion; s est le vecteur des contraintes

— calcul des réactions r aux appuis ou noeuds restreints;

— Fin de la boucle des chargements et du programme. Un listing du programme et des sous routines est donné en appendice.

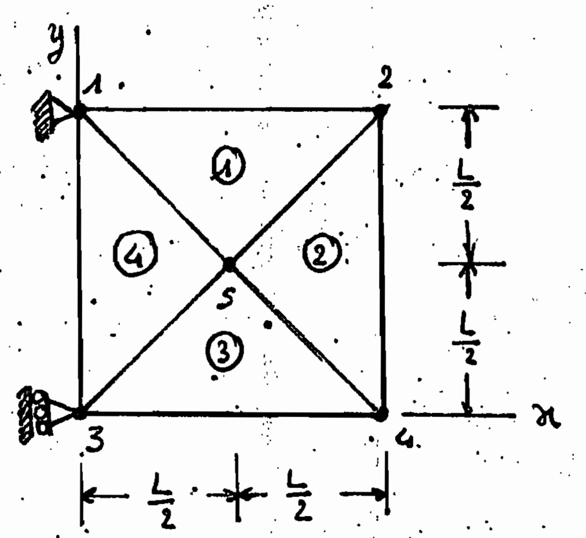
4.6 ALGORITHME DU PROGRAMME PRINCIPAL



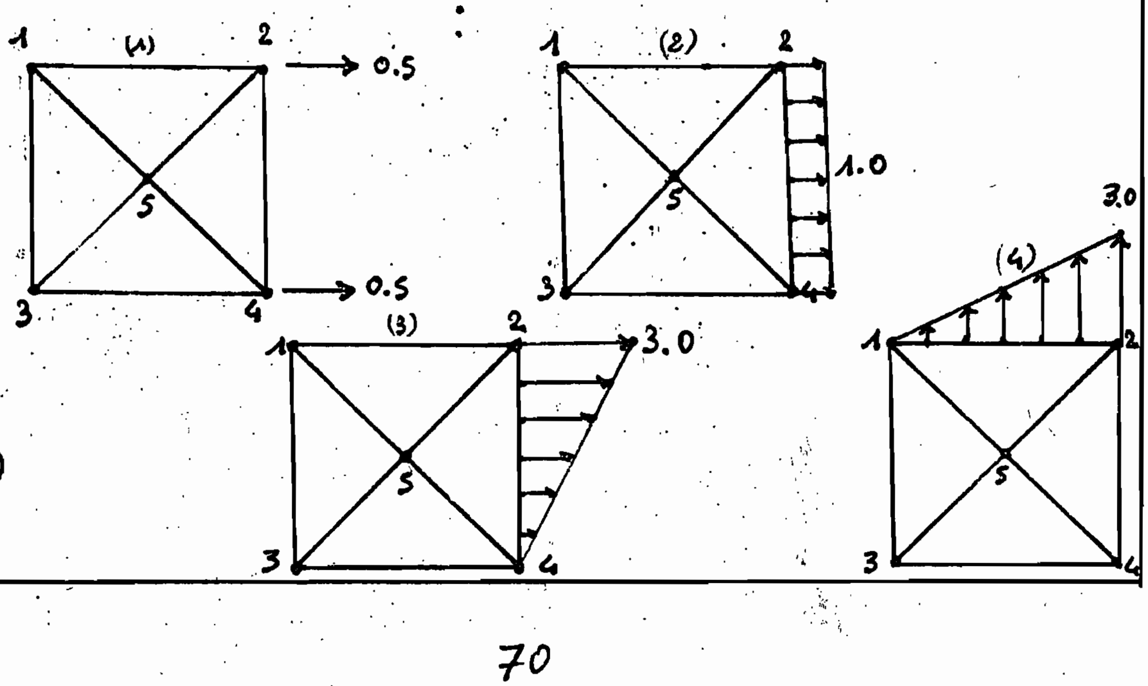
La validité d'un programme d'ordinateur ne peut être connue qu'après avoir effectué des essais sur des cas particuliers dont on connait les solutions exactes; la référence 8 donne des exemples résolues que nous allons traiter, afin de comparer nos résultats

Le premier cas est celui d'une plaque carrée subissant des forces dans son plan; les valeurs des paramètres sont :

$E = 1$; $\nu = 0.3$; épaisseur $h = 0.1$; $L = 1$



(a)



(b)

On utilise le même maillage que celui utilisé dans la référence 8, de même que des éléments identiques; seule la connectivité des éléments n'est pas la même; les résultats obtenus sont identiques; remarquons que pour les quatre cas de chargement analysés, seule la partie de la matrice de rigidité pour l'état plan de contrainte est prise en compte; il se trouve que l'élément dans ce cas est conforme; par ailleurs, lors du traitement des restreintes, on doit empêcher la rotation autour de l'axe z, perpendiculaire au plan en un noeud; ici, on a pris le noeud 1; cela permet d'éviter la singularité de la rigidité; il y a aussi d pris égal à 1. Bien que nous pensons qu'il serait bien de faire d'autres tests sur des cas réels, nous donnons dans les quatre pages qui suivent, l'impression de nos résultats.

CONCLUSION

Donnees generales
****

nombre d elements_____________: 4
nombre de noeuds _____________: 5
nombre de degres de libertes_: 6
module d elasticite___________: 1.0
coefficient de Poisson _______: .3000
nombre de noeuds restreints _: 2
poids volumique_______________: .0000
Alfa ________________________: 1.000000

****
Donnees des noeuds
****

noeud	coordx	coordy	coordz
1	.000	1.000	.000
2	1.000	1.000	.000
3	.000	.000	.000
4	1.000	.000	.000
5	.500	.500	.000

****
restreintes aux noeuds
****

noeud	dx	dy	dz	rota.x	rota.y	rota.z
1	1	1	1	0	0	1
3	1	0	1	0	0	0

****
connectivite des elements
****

elmt	noeud 1	noeud 2	noeud 3	epaisseur
1	5	1	2	.1000
2	5	2	4	.1000
3	5	4	3	.1000
4	5	3	1	.1000

nombre d equations = 30

espace requis = 429

****
CAS DE CHARGEMENT NO 1
****

charges aux noeuds
****

nombre de noeuds charges = 2

noeud	fx	fy	fz	Mx	My	Mz
2	.500	.000	.000	.000	.000	.000
4	.500	.000	.000	.000	.000	.000

****
Deplacements
****

noeud	dx	dy	dz	rota.x	rota.y	rota.z
1	0.0000	0.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	10.0000	0.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	0.0000	3.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	10.0000	3.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	5.0000	1.5000	.0000	.0000	.0000	.0000

****
elements de reduction
****

elem.	noeuds	Nx	Ny	Nxy	Mx	My	Mxy
1	1	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
1	2	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
1	3	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
2	1	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
2	2	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
2	3	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
3	1	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
3	2	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
3	3	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
4	1	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
4	2	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
4	3	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000

****
reactions aux appuis
****

noeud	rx	ry	rz	Mx	My	Mz
1	-.500	0.000	.000	.000	.000	.000
3	-.500	.000	.000	.000	.000	.000

****
CAS DE CHARGEMENT NO 2
****

**charges laterales **

****

nombre d elements charges 1

elem.	cote	bx1	bx2	by1	by2
2	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

****

Deplacements

****

noeud	dx	dy	dz	rota.x	rota.y	rota.z
1	0.0000	0.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	10.0000	0.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	0.0000	3.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	10.0000	3.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	5.0000	1.5000	.0000	.0000	.0000	.0000

****

elements de reduction

****

elem.	noeuds	Nx	Ny	Nxy	Mx	My	Mxy
1	1	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
1	2	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
1	3	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
2	1	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
2	2	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
2	3	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
3	1	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
3	2	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
3	3	.5000	.5000	-.5000	.0000	.0000	.0000
4	1	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
4	2	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000
4	3	.5000	.5000	.5000	.0000	.0000	.0000

****

reactions aux appuis

****

noeud	rx	ry	rz	Mx	My	Mz
1	-.500	0.000	.000	.000	.000	.000
3	-.500	.000	.000	.000	.000	.000

****

CAS DE CHARGEMENT NO 3

****

charges laterales

****

nombre d elements charges 1

elem.	cote	bx1	bx2	by1	by2
2	1	3.0000	.0000	3.0000	.0000

****

Deplacements

****

noeud	dx	dy	dz	rota.x	rota.y	rota.z
1	0.0000	0.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	23.7750	-8.7750	.0000	.0000	.0000	.0000
3	0.0000	4.5000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	6.2250	-4.2750	.0000	.0000	.0000	.0000
5	7.5000	-.0250	.0000	.0000	.0000	.0000

****

elements de reduction

****

elem.	noeuds	Nx	Ny	Nxy	Mx	My	Mxy
1	1	1.0750	1.0750	-1.2500	.0000	.0000	.0000
1	2	1.0750	1.0750	-1.2500	.0000	.0000	.0000
1	3	1.0750	1.0750	-1.2500	.0000	.0000	.0000
2	1	.5750	.9250	.7500	.0000	.0000	.0000
2	2	.5750	.9250	.7500	.0000	.0000	.0000
2	3	.5750	.9250	.7500	.0000	.0000	.0000
3	1	.4250	.4250	-.2500	.0000	.0000	.0000
3	2	.4250	.4250	-.2500	.0000	.0000	.0000
3	3	.4250	.4250	-.2500	.0000	.0000	.0000
4	1	.9250	.5750	.7500	.0000	.0000	.0000
4	2	.9250	.5750	.7500	.0000	.0000	.0000
4	3	.9250	.5750	.7500	.0000	.0000	.0000

****

reactions aux appuis

****

noeud	rx	ry	rz	Mx	My	Mz
1	-1.000	0.000	.000	.000	.000	.000
3	-.500	.000	.000	.000	.000	.000

****

CAS DE CHARGEMENT NO 4

****

**charges laterales **

****

nombre d elements charges 1

elem.	cote	bx1	bx2	by1	by2
1	1	.0000	3.0000	.0000	3.0000

****

Deplacements

****

noeud	dx	dy	dz	rota.x	rota.y	rota.z
1	0.0000	0.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	-17.5500	61.1000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	0.0000	17.5500	.0000	.0000	.0000	.0000
4	17.5500	43.5500	.0000	.0000	.0000	.0000
5	4.2250	26.3250	.0000	.0000	.0000	.0000

****

elements de reduction

****

elem.	noeuds	Nx	Ny	Nxy	Mx	My	Mxy
1	1	.7000	-2.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
1	2	.7000	-2.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
1	3	.7000	-2.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
2	1	0.0000	1.3000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
2	2	0.0000	1.3000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
2	3	0.0000	1.3000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
3	1	1.3000	0.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
3	2	1.3000	0.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
3	3	1.3000	0.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000
4	1	-2.0000	.7000	1.0000	.0000	.0000	.0000
4	2	-2.0000	.7000	1.0000	.0000	.0000	.0000
4	3	-2.0000	.7000	1.0000	.0000	.0000	.0000

****

reactions aux appuis

****

noeud	rx	ry	rz	Mx	My	Mz
1	1.000	-1.500	.000	.000	.000	.000
3	-1.000	.000	.000	.000	.000	.000

La méthode à envisager quand on veut faire un maillage n'est pas évidente; dans le premier cas que nous venons de traiter le maillage nous était donné. En effet, on a traité le cas d'une plaque carrée travaillant en flexion sous des charges perpendiculaires à son plan, comme le montre la figure 19; la référence 8 a traité ce même cas avec un élément plutôt carré; on se devait donc d'effectuer un maillage et de voir comment la structure se comporte; si l'on se base sur les résultats des déflexions des points A, B, C suivant z, on constate que la précision de nos résultats varie avec le maillage, le type d'élément choisi, le nombre d'éléments envisagé.

Nous avons essayé des cas de maillage symétrique, puis quelconque, des éléments élancés puis trapus (triangle isocèle); nous n'avons toutefois pas pu décider du type de maillage à effectuer afin d'obtenir la solution la plus précise possible.

Si on trace la courbe des variations des déflexions des points A, B et C en fonction des maillages, on constate que :

— les déflexions sont grandes pour des éléments élancés (allongés); on pourrait penser que ce fait est normal car les éléments sont dans ce cas flexibles

— les déflexions sont petites pour des éléments courts ; éléments plus rigides (maillage 5: 32 elements)

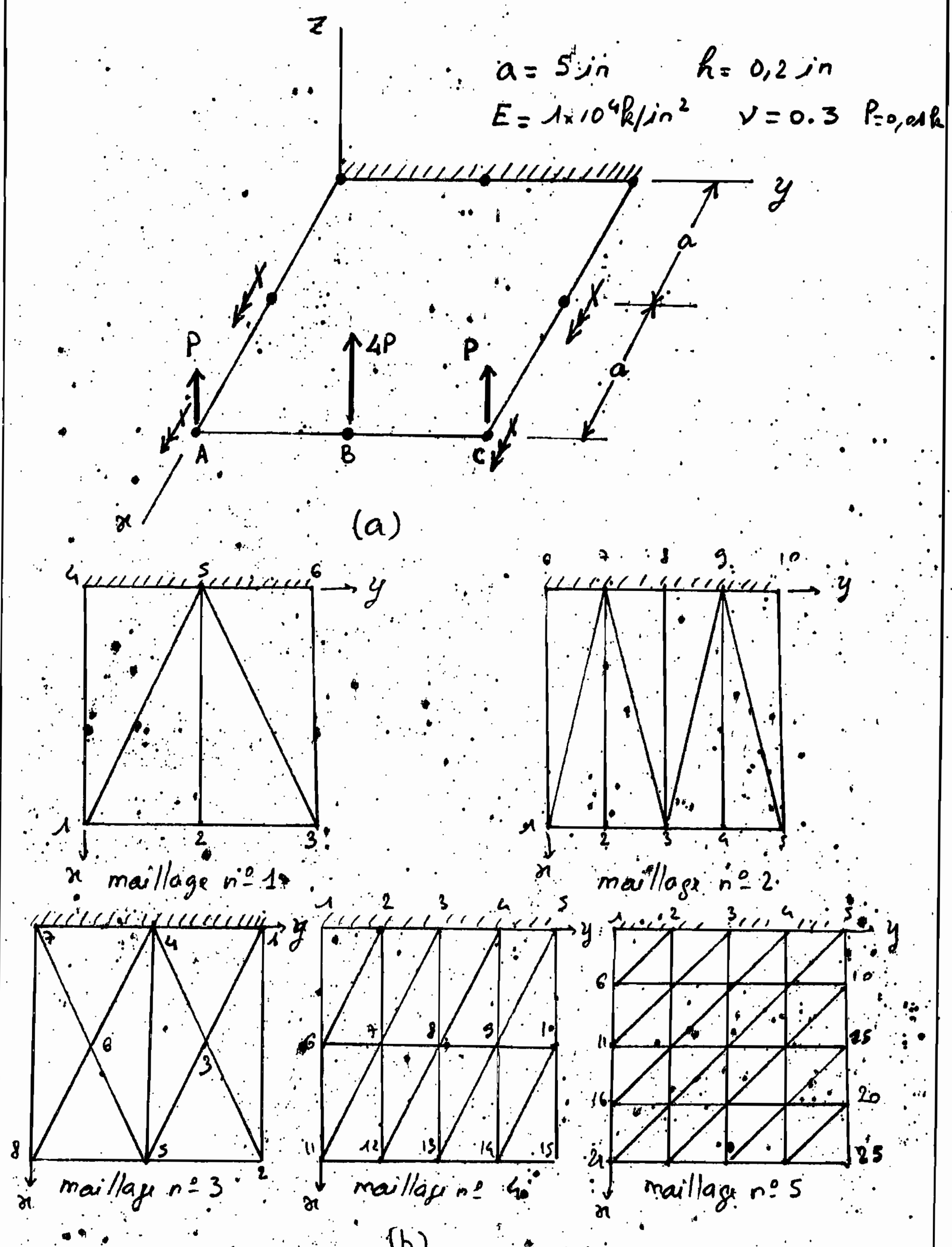


Fig 19 : (a) plaque encastrée à un bord et restreint en θ_x sur deux bords, (b) différents maillages testés

— le premier maillage grossier donne des déflexions plus précises que celles des maillage de 8 éléments; toutefois, on revient vers la précision avec un maillage de 16 élém

Ces quelques points ne nous permettent pas de nous prononcer de façon claire sur l'efficacité du programme; il faut se rappeler que l'élément triangulaire dans un tel cas de chargement n'est pas conforme; ce qui veut dire que la convergence des solutions n'est pas forcément monotone;

Nous n'avons pas eu le temps de contrôler le comportement des autres variables, mais l'imprécision de ces résultats devrait être semblable; il est donc souhaitable de se pencher encore sur le programme pour l'améliorer sur ce plan; le maillage de 16 élément donne des résultats avec 2% d'erreur (voir annexe)

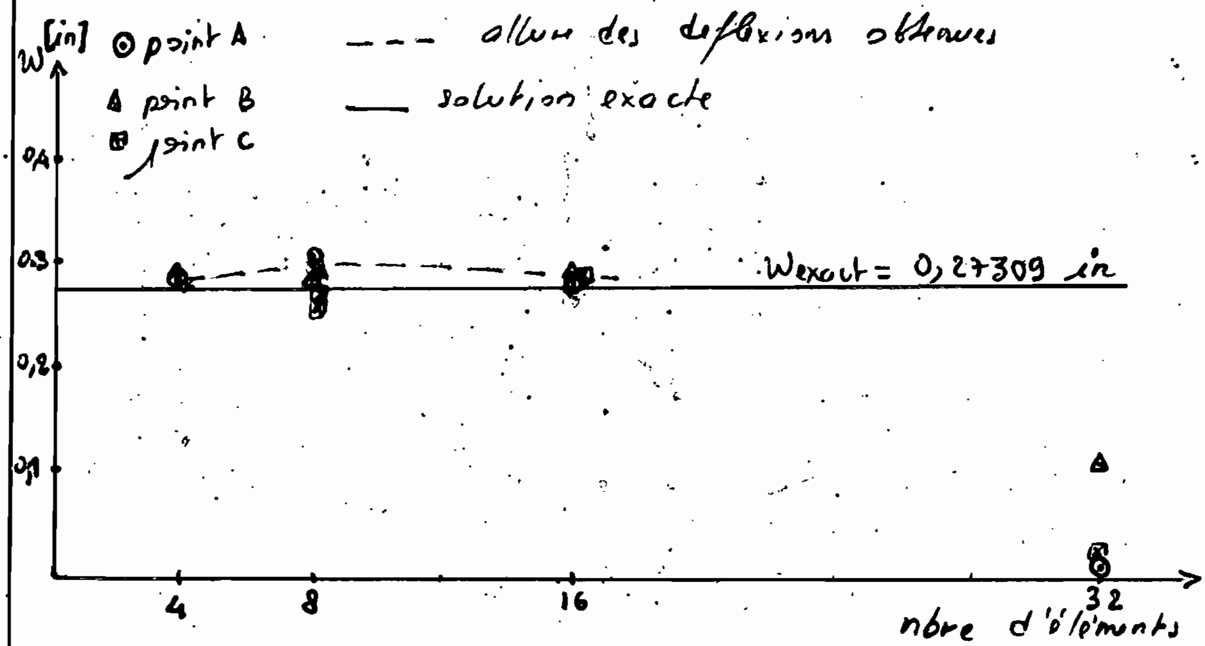


Fig 20 : allure des déflexions des points A, B et C versus maillage

REFERENCES

APPENDICE

A-1 ENERGIE DE DEFORMATION PRODUITE PAR LA FLEXION D'UNE PLAQUE

A-1.1 Flexion simple

Lorsqu'une plaque est fléchie par des moments fléchissants M_x et M_y uniformément distribué (fig. 8), on calcule l'énergie de déformation accumulée dans un élément tel que celui montré à la figure 10 en déterminant le travail effectué par les moments $M_x\,dy$ et $M_y\,dx$ sur l'élément pendant la flexion de la plaque.

Puisque les cotés restent plans, le travail effectué par les moments $M_x dy$ s'obtient en prenant la moitié du produit du moment et de l'angle que font entre eux les cotés correspondants de l'élément après flexion; comme $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ représente approximativement la courbure de la plaque dans le plan des xz, l'angle correspondant à ces moments $M_x dy$ est $\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) dx$ et le travail effectué par ces moments est

$$-\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\, dx\, dy.$$

on arrive à une équation analogue pour le travail effectué par les moments $M_y dx$.

Le travail total égal à l'énergie potentielle de l'élément est $dU = -\frac{1}{2}\left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dx\, dy$. (éq. a)

or l'équation 3 donne $U_e = \int_V U_0\, dv$

$\Rightarrow$ $U_e = U$ = énergie au niveau de l'élément l'équation (6) donne U_0 ; on déduit l'expression de U :

$$U = \int_V \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^t[E]\{\varepsilon\}\, dV \qquad \text{(éq. 6)}$$

poursuivant le calcul de U_1 pour la plaque fléchie, si on remplace les moments par leurs expressions (éq. 34-a), l'énergie de déformation sera représentée par

$$dU = \frac{1}{2} D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dx\, dy$$

l'énergie totale s'obtiendra en intégrant cette expression

1-1-2 Flexion d'une plaque sous l'action d'une charge latérale

Si on néglige dans un tel cas l'énergie de déformation due aux efforts tranchants Q_x et Q_y, on trouve que l'énergie de déformation de l'élément est égale au travail effectué sur l'élément par les moments fléchissants $M_x\, dy$ et $M_y\, dx$ et par les moments de torsion $M_{xy} dy$ et $M_{yx} dx$; comme on néglige l'effet des efforts tranchants verticaux sur la courbure de la surface élastique, l'énergie de déformation due aux moments fléchissants sera représentée par l'expression précédente intégrée dans le cas de la flexion simple.

Pour exprimer l'énergie de déformation due aux moments de torsion $M_{xy} dy$, on remarquera que l'angle de torsion correspondant est $(\partial^2 w/\partial x \partial y)\, dx$, cette énergie est donc

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx\, dy = \frac{1}{2} D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 dx\, dy$$

la même quantité d'énergie sera produite par les couples $M_{xy}\cdot dx$, de sorte que l'énergie due aux couples de torsion est

$$D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 dx\,dy$$

Puisque la torsion n'affecte pas le travail produit par les moments fléchissants, l'énergie totale de déformation d'un élément de plaque s'obtient en additionnant l'énergie de flexion et celle de torsion :

$$dU = \frac{1}{2} D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dx\,dy \; +$$

$$+ \; D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 dx\,dy. \qquad (\text{éq. c})$$

on constate que l'équation (c) peut s'écrire sous forme matricielle par :

$$dU = \frac{1}{2}\{\rho\}^t [D] \{\rho\}\, dx\,dy$$

$$\text{et} \qquad U = \int \frac{1}{2}\{\rho\}^t [D] \{\rho\}\, dx\,dy \qquad (\text{éq. d})$$

cette équation est analogue à l'équation (b) et on voit que les déformations généralisées sont les courbures.

A.2 INTEGRALES DE SURFACE ET LINEAIRES

A.2.1 Integrales de surface

il s'agit d'évaluer les expression des intégrales du genre

$$I(x^m, y^n) = \iint x^m y^n \, dx \, dy \qquad \text{(éq. a)}$$

on utilise les coordonnées triangulaire, ξ et η :

$$x = \xi (1-\eta) x_3$$

$$y = \xi \left[(1-\eta) y_3 + \eta y_2 \right]$$

le jacobien de la transformation est $J(x,y) = \xi x_3 y_2$

donc $$I(x^m, y^n) = \int_0^1 \int_0^1 x^m y^n \left| J(x,y) \right| d\xi \, d\eta \qquad \text{(éq. b)}$$

en remplaçant x et y par leurs expressions, on a, tous calculs faits :

$$I(x^m, y^n) = \frac{x_3^{m+1} y_2}{m+n+2} \int_0^1 (1-\eta)^m \left[(1-\eta) y_3 + \eta y_2 \right]^n d\eta \qquad \text{(éq. c)}$$

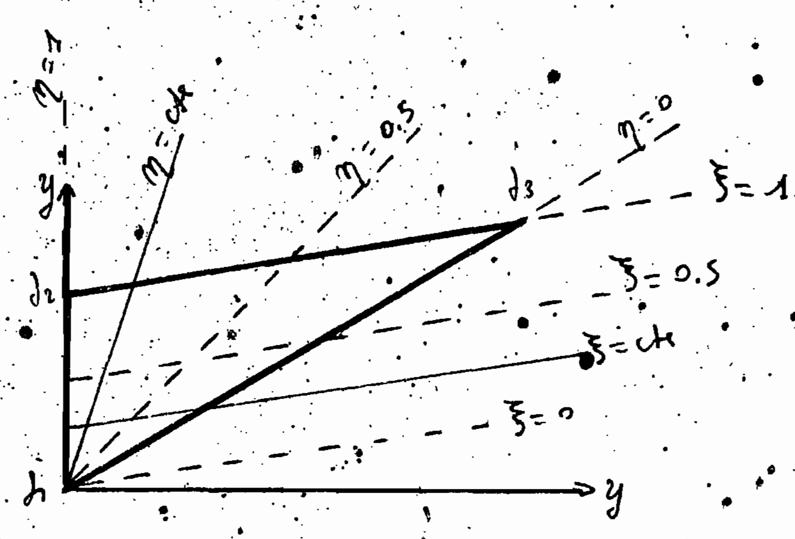


Fig A.1 coordonnées triangulaires

en posant $\boxed{I(m,n) = \int_0^1 (1-\eta)^m \left[(1-\eta)y_3 + \eta y_2\right]^n d\eta}$ (eq. d)

on a $\boxed{J(x^m, y^n) = \dfrac{x_3^{m+1}\, y_2}{m+n+2} \cdot J(m,n)}$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} \Longrightarrow$

$$\left[(1-\eta)y_3 + \eta y_2\right]^n = \sum_{k=0}^{n} \left((1-\eta)y_3\right)^k (\eta y_2)^{n-k} \cdot C_n^k$$

$$\Longrightarrow J(m,n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, y_3^k\, y_2^{n-k} \int_0^1 (1-\eta)^{m+k}\, \eta^{n-k}\, d\eta$$

on pose $\boxed{J(k,n) = \int_0^1 (1-\eta)^{m+k}\, \eta^{n-k}\, d\eta}$ (eq. f)

alors, après des intégrations par partie, on a :

$$J(k,n) = \frac{n-k}{m+k+1} \int_0^1 (1-\eta)^{m+(k+1)} \eta^{n-(k+1)} d\eta = \frac{n-k}{m+k+1} J(k+1,n)$$

$\Longrightarrow \boxed{J(k+1,n) = \dfrac{m+k+1}{n-k} J(k,n)}$ (eq. g)

en utilisant l'équation (f), on a :

$J(0,0) = \dfrac{1}{m+1}$; $J(0,1) = \dfrac{1}{m+1} \cdot \dfrac{1}{m+2}$

$J(0,2) = \dfrac{2 \times 1}{(m+1)(m+2)(m+3)}$; $J(0,3) = \dfrac{3 \times 2 \times 1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$

on déduit une récurrence

$J(0,0) = \dfrac{1}{m+1}$; $J(0,1) = \dfrac{1}{m+1+1} \cdot J(0,0)$; $J(0,2) = \dfrac{2}{m+1+2} J(0,1)$

$J(0,3) = \dfrac{3}{m+1+3} J(0,2)$ ....

$\boxed{J(0,k) = \dfrac{k}{m+1+k} J(0,k-1)}$

en résumé, on a, pour un m donné :

$$J(0,m) = \frac{m}{m+n+1} \; J(0, m-1)$$

et $$J(0,0) = \frac{1}{m+1}$$

la connaissance de $J(0,m)$ donne les $J(k,n)$ par l'équation (g) ;

$$J(k+1,n) = \frac{m+k+1}{n-k} \; J(k,n)$$

on calcule tous les $J(k,n)$, avec k variant de 0 à n ; alors on obtient

$$I(m,n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, y_3^k \, y_2^{n-k} \; J(k,n)$$

et enfin $$I(x^m, y^n) = \frac{x_3^{m+1} \; y_2}{m+n+2} \cdot J(m,n)$$

on a donc

$$I(x^0,y^0) = \int dx\,dy = \frac{x_3 y_2}{2}$$

$$I(x^0,y^1) = \int y\,dx\,dy = x_3 y_2 (y_2 + y_3)/6$$

$$I(x^0,y^2) = \int y^2\,dx\,dy = x_3 y_2 (y_2^2 + y_3 y_2 + y_3^2)/12$$

$$I(x^0,y^3) = \int y^3\,dx\,dy = x_3 y_2 (y_2^3 + y_3 y_2^2 + y_3^2 y_2 + y_3^3)/20$$

$$I(x^1,y^0) = x_3^2 y_2/6$$

$$I(x^1,y^1) = \int xy\,dx\,dy = x_3^2 y_2 (y_2 + 2y_3)/24$$

$$I(x^1,y^2) = \int xy^2\,dx\,dy = x_3^2 y_2 (y_2^2 + 2y_2 y_3 + 3y_3^2)/60$$

etc ...

A-2-2 Intégrales linéaires

on prend l'origine au point C (fig. A-2)

soit ξ_1 l'abscisse du nœud 1

soit ξ_2 l'abscisse du point 2

l'abscisse de C est $\xi_c = 0$

on a $\xi_1 + \xi_2 = 0$ si C est le milieu du segment [1-2]

soit L la longueur du segment ; alors $\xi_2 - \xi_1 = L$

on a alors :

$$\int_L d\xi = L \qquad \int_L \xi \, d\xi = 0 \qquad \int_L \xi^2 d\xi = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\frac{L}{6} = \frac{L^3}{12}$$

$$\int_L \xi^3 d\xi = 0 \qquad \int_L \xi^4 dL = \left(\xi_1^4 + \xi_2^4\right)\frac{L}{10} = \frac{L^5}{80}$$

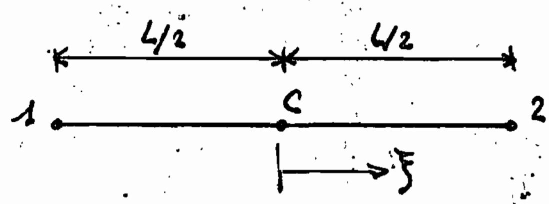
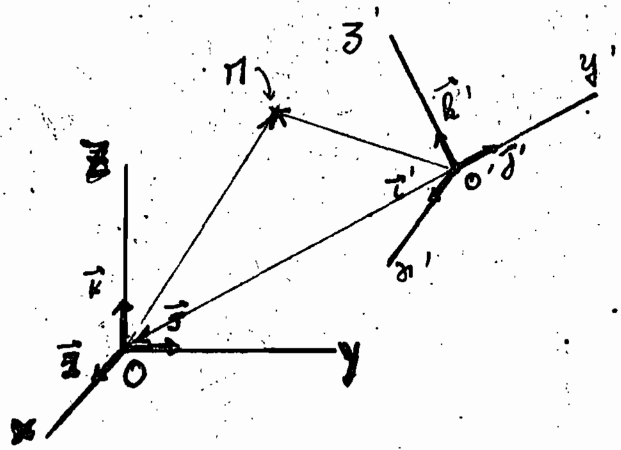


Fig. A-2 : Repere algébrique

A-3 COSINUS DIRECTEURS ET COORDONNEES LOCALES



	x	y	z
x'	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}
y'	λ_{21}	λ_{22}	λ_{23}
z'	λ_{31}	λ_{32}	λ_{33}

Fig A.3 : Reperes cartésiens xyz et $x'y'z'$; table des cosinus directeurs

soit $x'y'z'$ un système d'axes dit local
soit xyz un autre système d'axes dit global
soit $[\lambda]$ la matrice des cosinus directeurs des axes locaux par rapport aux axes globaux

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}$$

$\lambda_{x'x} = \lambda_{11}$ est le cosinus directeur de l'axe x' par rapport à l'axe x;

prenons la figure 3 puis la figure 13; le système d'axe local est tel que le coté J_1-J_2 du triangle élémentaire soit parallèle à l'axe y'

Soit (x_i, y_i, z_i) les coordonnées dans le système global d'un point J_i; le coté J_1-J_2 est donc défini par le vecteur V_{12} en fonction des coordonnées globales des points J_1 et J_2 par:

$$V_{12} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix}$$

sa norme ou longueur est $\ell_{12} = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2}$

les cosinus directeurs de l'axe y' sont donnés par les coordonnées du vecteur unitaire vy':

$$vy' = \begin{Bmatrix} \lambda_{y'x} \\ \lambda_{y'y} \\ \lambda_{y'z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{23} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell_{12}} \cdot V_{12}$$

l'axe z' est normal au plan de l'élément triangulaire soit V_{13} un vecteur parallèle au coté j_1-j_3

alors $V_z' = V_{13} \times V_{12}$ est un vecteur normal au plan de l'élément

si $V_{13} = \begin{bmatrix} x_{31} \\ y_{31} \\ z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix}$, alors

$$V_z' = \begin{bmatrix} x_{31} \\ y_{31} \\ z_{31} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{31} z_{21} - y_{21} z_{31} \\ z_{31} x_{21} - z_{21} x_{31} \\ x_{31} y_{21} - x_{21} y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_z' \\ Y_z' \\ Z_z' \end{bmatrix}$$

sa norme est $l_z' = \sqrt{X_z'^2 + Y_z'^2 + Z_z'^2}$; les cosinus directeurs de l'axe z' sont les coordonnées du vecteur unitaire dirigé suivant z' :

$$v_z' = \begin{bmatrix} \lambda_{z'x} \\ \lambda_{z'y} \\ \lambda_{z'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \\ \lambda_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_{z'}} \begin{bmatrix} X_{z'} \\ Y_{z'} \\ Z_{z'} \end{bmatrix}$$

enfin, les cosinus directeurs de l'axe x' s'obtiennent directement comme coordonnées du vecteur à la fois perpendiculaire aux vecteurs normés v_y' et v_z' ; donc

$$v_x' = v_y' \times v_z' = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ \lambda_{x'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \\ \lambda_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_x' = \begin{bmatrix} \lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{32}\lambda_{23} \\ \lambda_{23}\lambda_{31} - \lambda_{33}\lambda_{21} \\ \lambda_{21}\lambda_{32} - \lambda_{31}\lambda_{22} \end{bmatrix}$$

soit le point M de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans les repères cartésiens $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ respectivement soit O' de coordonnées $(X_{o'}, Y_{o'}, Z_{o'})$ dans $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

d'après la figure 3 et la figure A-3, on a :

$$\vec{O'M} = \vec{O'O} + \vec{OM}$$

$$\vec{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$$

$$\vec{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

$$\vec{OO'} = X_{o'}\vec{I} + Y_{o'}\vec{J} + Z_{o'}\vec{K}$$

alors :

$$x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} = (X - X_{o'})\vec{I} + (Y - Y_{o'})\vec{J} + (Z - Z_{o'})\vec{K}$$

par ailleurs

$$\begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i'} \\ \vec{j'} \\ \vec{k'} \end{Bmatrix}$$

en remplaçant $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ par leurs expressions en fonction de $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ et $\vec{k'}$, puis après tous les calculs, on obtient.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_{o'} \\ Y - Y_{o'} \\ Z - Z_{o'} \end{bmatrix}$$

```
c       ***********************************************************
c       *                  ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES           *
c       *                  DEPARTEMENT DU GENIE CIVIL             *
c       *                                                         *
c       *                  PROJET  DE  FIN  D  ETUDES             *
c       *                                                         *
c       *         CALCUL  DE COQUES  PAR  ELEMENTS  FINIS         *
c       *                     (analyse elastique)                 *
c       *                                                         *
c       *        auteur  : Yves habib francis KONATE              *
c       *     directeur  :Mouhamadou Moustapha NDIAYE             *
c       *                                                         *
c       ***********************************************************
c
c       Pour executer ,creer un fichier de donnees d abord
c       Si le fichier des resultats existe deja ,s assurer
c       qu il est vide
c
        implicit real*8(a-h,o-z)
        character*6 stdon,strat
        dimension rcf(9,9),ccf(9,9),pint(5,5),ccp(6,6),rcp(6,6),
     1  al(3,3),ires(50,7),tx(50),ty(50),tz(50),ji(3,50),ih(300),
     2  t(50),tg(18,18),grk(6000),mass(6000),ebcp(3,6),ebcf(3,9)
        dimension psz(3,50),vc(6000),fg(18),x(3,50),y(3,50),
     1  amat(18,18),bx(2,3,50),by(2,3,50),fl(18),py(3),
     2  iad(18),z(3,50),react(6),s(6)
c
        print 500
500     format(1x,'fichier de donnees ?',$)
        read1,stdon
1       format(a6)
        print 505
505     format(1x,'fichier de resultat ?',$)
        read1,strat
        open(unit=5,file=stdon)
        open(unit=6,file=strat)
        rewind(5)
        rewind(6)
c
c       DONNEES GENERALES
c
        print 100
        read*,nel,nod,ndl,em,pc,nnr,gama,alfa,ncc
        print 105,nel,nod,ndl,em,pc,nnr,gama,alfa

        nk=3*ndl
        nn=ndl*nod
        nx=nn+1
c
        do 2 i=1,nnr
        do 2 j=1,7
2       ires(i,j)=0
c
c       coordonnees des noeuds
        print 110
        do 3 i=1,nod
```

```
      read*,k,tx(k),ty(k),tz(k)
3     print 115,k,tx(k),ty(k),tz(k)
c
c     restreintes aux noeuds
      print 120
      do 14 i=1,nnr
      read *,k,(ires(i,j),j=1,ndl)
      ires(i,7)=k
14    print 125,k,(ires(i,j),j=1,ndl)
c
c     connectivite des elements
      print 130
      do 4 i=1,nel
      read*,k,t(k),(ji(j,k),j=1,3)
4     print 135,k,(ji(j,k),j=1,3),t(k)
c
c     calcul de l adresse des diagonales
c
      do 5 i=1,nn
5     ih(i)=0
c
      do 6 k=1,nel
      call adres(ji,ndl,nk,iad,nel,k)
      mi=iad(1)
c
      do 7 i=1,nk
7     if (iad(i).lt.mi) mi=iad(i)
      do 8 i=1,nk
      ii=iad(i)
      iht=ii-mi
      ihii=ih(ii)
      if (iht.gt.ihii) ih(ii)=iht
8     continue
6     continue
      maxa(1)=1
      maxa(2)=2
      do 9 i=2,nn
9     maxa(i+1)=maxa(i)+ih(i)+1
      nwk=maxa(nn+1)-1
      print 205,nn
      print 200,nwk
c
c     DONNEES DES ELEMENTS :RIGIDITE,ASSEMBLAGE
c
      do 10 i=1,nwk
10    grk(i)=0.d0
      do 11 k=1,nel
      h=t(k)
      call coordloc(x,y,z,al,k,tx,ty,tz,ji,nod,nel)
      xk3=x(3,k)
      yk3=y(3,k)
      yk2=y(2,k)
c
c     calcul des integrales
      call xintegr(aint,xk3,yk3,yk2)
c
```

```
c       rigidite des elements et assemblage
        call coplag(rcp,6,em,pc,h,xk3,yk3,yk2)
        call cofleg(rcf,9,em,pc,h,aint,xk3,yk3,yk2)
        call transfo(tg,al)
        call rigel(amat,18,6,9,rcp,rcf,tg,alfa,em,h,xk3,yk2)
        call adres(ji,ndl,nk,iad,nel,k)
        call assemb(iad,nk,amat,grk,nwk,maxa,nx,nn)
c
11      continue
c
c       introduction des restreintes
        do 21 i=1,nnr
        k=ires(i,7)
        do 21 j=1,ndl
        if(ires(i,j).eq.1) then
        kk=maxa(ndl*(k-1)+j)
        grk(kk)=grk(kk)+1.d60
        endif
21      continue
c
        call tripld(grk,maxa,nn,nwk,nx)

c       DONNEES DES CHARGES
c
        do 12 ncck=1,ncc
        print 165,ncck
        do 13 i=1,nel
        do 13 ic=1,3
        psz(ic,i)=0.d0
        do 13 ii=1,2
        bx(ii,ic,i)=0.d0
13      by(ii,ic,i)=0.d0
        do 20 i=1,nn
20      vc(i)=0.d0
        do 50 i=1,18
        fl(i)=0.d0
50      fg(i)=0.d0
c
        read*,nnch
        if(nnch.eq.0)goto 23
        print 140
        print 145,nnch
        print 160
        do 15 i=1,nnch
        read*,k,(vc((k-1)*ndl+j),j=1,ndl)
15      print 175,k,(vc((k-1)*ndl+j),j=1,ndl)
c
23      read*,nelcrs
        if (nelcrs.eq.0)goto 24
        print 170
        print 180,nelcrs
        print 185
        do 16 i=1,nelcrs
        read*,k,(psz(j,k),j=1,3)
16      print 190,k,(psz(j,k),j=1,3)
c
```

```
24      read*,nelcrc
        if(nelcrc.eq.0)goto 25
        print 195
        print 180,nelcrc
        print 210
        do 19 i=1,nelcrc
        read*,k,nccek
        do 19 j=1,nccek
        read*,ic,(bx(ii,ic,k),ii=1,2)
        read*,(by(ii,ic,k),ii=1,2)
19      print 235,k,ic,(bx(ii,ic,k),ii=1,2),(by(ii,ic,k),ii=1,2)
c
c       calcul des charges equivalentes aux noeuds
c
25      do 26 k=1,nel
        call coordloc(x,y,z,al,k,tx,ty,tz,ji,nod,nel)
        h=t(k)
        x3=x(3,k)
        y3=y(3,k)
        y2=y(2,k)
        call xintegr(aint,x3,y3,y2)
        call trandem(ccp,x3,y3,y2,6)
        call trandef(ccf,x3,y3,y2,9)
        call transfo(tg,al)
        do 55 i=1,3
55      pv(i)=gama*al(i,3)
c
        call cheqpla(fl,pv,aint,h,bx,by,x,y,nel,k,ccp)
        call cheflex(fl,pv,aint,h,psz,x,y,nel,k,ccf)
c
        do 35 i=1,18
        fg(i)=0.d0
        do 35 j=1,18
35      fg(i)=tg(j,i)*fl(j)+fg(i)
        call adres(ji,ndl,nk,iad,nel,k)
        do 17 j=1,18
17      vc(iad(j))=vc(iad(j))+fg(j)
c
26      continue
c
c       calcul des deplacements par resolution des equations
c
        call resolv(grk,vc,maxa,nn,nwk,nx)
        print 150
        do 22 i=1,nod
        print 155,i,(vc(ndl*(i-1)+j),j=1,ndl)
22      continue
c
c       calcul des contraintes
c
        print 230
        do 30 k=1,nel
        call coordloc(x,y,z,al,k,tx,ty,tz,ji,nod,nel)
        h=t(k)
        x3=x(3,k)
        y2=y(2,k)
```

```
      y3=y(3,k)
      call trandem(ccp,x3,y3,y2,6)
      call trandef(ccf,x3,y3,y2,9)
      call transfo(tg,al)
      call adres(ji,ndl,nk,iad,nel,k)
      do 40 i=1,18
      fl(i)=0.d0
      do 40 j=1,18
40    fl(i)=fl(i)+tg(i,j)*vc(iad(j))
      call sigmap(ebcp,em,pc,ccp)
      do 45 i=1,3
      s(i)=0.d0
      do 45 j=1,6
45    s(i)=s(i)+ebcp(i,j)*fl(j)*h
      do 60 i=1,3
      xi=x(i,k)
      yi=y(i,k)
      call sigmaf(ebcf,em,pc,h,xi,yi,ccf)
      do 65 ii=1,3
      s(ii+3)=0.d0
      do 70 j=1,9
70    s(ii+3)=s(ii+3)+ebcf(ii,j)*fl(j+6)
65    continue
      print 235,k,i,(s(j),j=1,6)
60    continue
30    continue
c
c     calcul des reactions
c
      print 240
      do 85 i=1,nnr
      k=ires(i,7)
      do 90 j=1,ndl
      react(j)=0.d0
      if(ires(i,j).eq.1) then
      react(j)=-vc((k-1)*ndl+j)*1.d60
      endif
90    continue
      print 175,k,(react(j),j=1,ndl)
85    continue
12    continue
100   format(' ',t10,'Donnees generales'/' 't8,21('*'))
105   format(' ',t10,'nombre d elements____________:',t40,i5/
     1          ' ',t10,'nombre de noeuds ____________:',t40,i5/
     2          ' ',t10,'nombre de degres de libertes_:',t40,i5/
     3          ' ',t10,'module d elasticite__________:',t40,f12.1/
     4          ' ',t10,'coefficient de Poisson ______:',t40,f12.4/
     5          ' ',t10,'nombre de noeuds restreints _:',t40,i5/
     6          ' ',t10,'poids volumique______________:',t40,f12.4/
     7          ' ',t10,'Alfa ________________________:',t40,f12.6/)
110   format(//' ',t8,22('*'),/' ',t10,'Donnees des noeuds'/' ',t8
     1 ,22('*')//' ',t8,'noeud',t17,'coordx',t27,'coordy',t38,'coordz')
115   format(' ',5x,i5,3(x,f10.3))
120   format(///' ',t8,25('*')/t10,'restreintes aux noeuds'/' ',
     1 t8,25('*')/t10,'noeud',2x,'   dx',3x,'   dy',4x,' dz  ',1x,
     2 'rota.x',1x,'rota.y',1x,'rota.z')
```

```
125    format(' ',t7,7(1x,i6))
130    format(///' ',t8,29('*')/t10,'connectivite des elements'/' ',
     1 t8,29('*')//' ',t8,'elmt',t18,'noeud 1',t28,'noeud 2',t38,
     2 'noeud 3',t48,'epaisseur')
135    format(' ',t8,i5,3(5x,i5),t48,f9.4)
140    format(/' ',t20,22('*'),' ',t22,'charges aux noeuds',/' ',
     1  t20,22('*')/)
145    format(/' ',t8,'nombre de noeuds charges = ',i5/)
150    format(/' ',t20,16('*')/' ',t22,'Deplacements'/' ',t20,16('*')/
     1 /' ',t8,'noeud',t18,'dx',t28,'dy',t38,'dz',t46,'rota.x',t56,
     2 'rota.y',t66,'rota.z')
155    format(' ',t8,i3,t12,6(f10.4))
160    format(' ',t8,'noeud',t18,'fx',t29,'fy',t40,'fz',t51,'Mx',t62,
     1  'My',t73,'Mz')
165    format(////' ',t8,26('*')/t10,'CAS DE CHARGEMENT NO',t31,
     1  t31,i2/t9,25('*'))
170    format(/' ',t20,24('*'),' ',t22,'charges de surface ',/' ',
     1  t20,24('*')/)
175    format(' ',5x,i5,6(1x,f10.3))
180    format(' ',t8,'nombre d elements charges',i5/)
185    format(' ',t8,'element',t28,'psz1',t48,'psz2',t68,'psz3')
190    format(' ',5x,i7,3(10x,d10.3))
195    format(/' ',t20,22('*'),' ',t22,'charges laterales '
     1  /' ',t20,22('*')/)
200    format(/' ',t8,'espace requis =',i4)
205    format(/' ',t8,'nombre d equations =',i4)
210    format(' ',t7,'elem.',t13,'  cote',t20,'   bx1',t32,'   bx2',
     1  t44,'   by1',t56,'   by2')
215    format(' ',5x,i7,10x,4(10x,d10.3))
230    format(/' ',t20,25('*')/t22,'elements de reduction '
     1  /' ',t20,25('*')//' ',t7,'elem.',t13,'noeuds',t20,'    Nx',t32,
     2  '    Ny',t44,'   Nxy',t58,' Mx',t71,' My',t83,'Mxy')
235    format(' ',6x,i4,1x,i6,6(f11.4))
240    format(/' ',t8,24('*')/' ',t10,'reactions aux appuis '/' ',
     1  t8,24('*')//' ',t8,'noeud',t20,'rx',t30,'ry',t40,'rz',t48,
     2  '    Mx',t57,'    My',t69,'    Mz'/)
c
       close(unit=5)
       close(unit=6)
       stop
       end
```

```
      subroutine coordloc(x,y,z,al,k,tx,ty,tz,ji,nod,nel)
c
c     ***************************************************
c     *    la sous-routine calcule :                    *
c     *      _ les cosinus directeurs des axes locaux :al*
c     *      _ les coordonnees du systeme local x,y,z   *
c     * de l element k ,connaissant :                   *
c     *      _les coordonnees dans le systeme global: tx,*
c     *        ty,tz                                    *
c     * ji: vecteur connectivite                        *
c     * nod :nombre de noeuds                           *
c     * nel :nombre d elements                          *
c     ***************************************************
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension xj(3),yj(3),zj(3),tx(nod),ty(nod),tz(nod)
     1 ,ji(3,nel),x(3,nel),y(3,nel),z(3,nel),al(3,3)
      do 12 i=1,3
      xj(i)=tx(ji(i,k))
      yj(i)=ty(ji(i,k))
12    zj(i)=tz(ji(i,k))
      x21=xj(2)-xj(1)
      y21=yj(2)-yj(1)
      z21=zj(2)-zj(1)
      d12=(x21**2.d0+y21**2.d0+z21**2.d0)**.5d0
      al(2,1)=x21/d12
      al(2,2)=y21/d12
      al(2,3)=z21/d12
      x31=xj(3)-xj(1)
      y31=yj(3)-yj(1)
      z31=zj(3)-zj(1)
      xVz=y31*z21-y21*z31
      yVz=z31*x21-z21*x31
      zVz=x31*y21-x21*y31
      dVz=(xVz**2.d0+yVz**2.d0+zVz**2.d0)**.5d0
      al(3,1)=xVz/dVz
      al(3,2)=yVz/dVz
      al(3,3)=zVz/dVz
      al(1,1)=al(2,2)*al(3,3)-al(3,2)*al(2,3)
      al(1,2)=al(2,3)*al(3,1)-al(3,3)*al(2,1)
      al(1,3)=al(2,1)*al(3,2)-al(3,1)*al(2,2)
c
c     coordonnees locales
c
      x(1,k)=0.d0
      y(1,k)=0.d0
      x(2,k)=x21*al(1,1)+y21*al(1,2)+z21*al(1,3)
      x(3,k)=x31*al(1,1)+y31*al(1,2)+z31*al(1,3)
      y(2,k)=x21*al(2,1)+y21*al(2,2)+z21*al(2,3)
      y(3,k)=x31*al(2,1)+y31*al(2,2)+z31*al(2,3)
      z(2,k)=x21*al(3,1)+y21*al(3,2)+z21*al(3,3)
      z(3,k)=x31*al(3,1)+y31*al(3,2)+z31*al(3,3)
c
      return
      end
```

```
      subroutine cofleg(rkalfa,n,em,pc,t,aint,x3,y3,y2)
c
c     ************************************************
c     *  la sous-routine calcule la matrice de rigite *
c     * elementaire dans le syst. local pour la plaque*
c     * en flexion.                                   *
c     ************************************************
c
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension rkalfa(9,9),cc(9,9),aint(5,5),temp(9,9)

c     calcul de cc et de cinv
      call trandef(cc,x3,y3,y2,n)
c
c     calcul de rkalfa
      const=em*(t**3)/(12.d0*(1.d0-pc**2))
      do 20 i=1,n
      do 20 j=1,n
20    rkalfa(i,j)=0.d0
      rkalfa(4,4)=4.d0*aint(1,1)
      rkalfa(4,6)=rkalfa(4,4)*pc
      rkalfa(4,7)=12.d0*aint(2,1)
      rkalfa(4,8)=4.d0*aint(2,1)*pc
      rkalfa(4,9)=12.d0*aint(1,2)*pc
      rkalfa(5,5)=2.d0*aint(1,1)*(1.d0-pc)
      rkalfa(5,8)=4.d0*aint(1,2)*(1.d0-pc)
      rkalfa(6,6)=rkalfa(4,4)
      rkalfa(6,7)=rkalfa(4,7)*pc
      rkalfa(6,8)=4.d0*aint(2,1)
      rkalfa(6,9)=12.d0*aint(1,2)
      rkalfa(7,7)=36.d0*aint(3,1)
      rkalfa(7,8)=12.d0*aint(3,1)*pc
      rkalfa(7,9)=36.d0*aint(2,2)*pc
      rkalfa(8,8)=4.d0*aint(3,1)+8.d0*aint(1,3)*(1.d0-pc)
      rkalfa(8,9)=12.d0*aint(2,2)
      rkalfa(9,9)=36.d0*aint(1,3)
      do 30 i=4,n
      do 30 j=i,n
      rkalfa(i,j)=rkalfa(i,j)*const
      rkalfa(j,i)=rkalfa(i,j)
30    continue
c
c     calcul de rcf
      call produit(rkalfa,cc,temp,n)
c
      return
      end
```

```
      subroutine xintegr(aint,x3,y3,y2)
c     ************************************************************
c     *   la sous routine calcule les valeurs des integrales     *
c     ************************************************************
c
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension aint(5,5)
      aint(1,1)=y2*x3/2.
      aint(2,1)=y2*x3**2/6.
      aint(3,1)=y2*x3**3/12
      aint(1,3)=(y2**2+y2*y3+y3**2)*x3*y2/12.
      aint(4,1)=y2*x3**4/20.
      aint(5,1)=y2*x3**5/30.
      aint(1,2)=y2*x3*(y3+y2)/6.
      aint(2,2)=y2*x3**2*(y2+2*y3)/24.
      aint(3,2)=(y2+3*y3)*y2*x3**3/60.
      aint(3,3)=y2*x3**3*(y2**2+3*y2*y3+6*y3**2)/180..
      aint(2,3)=(y2**2+2*y2*y3+3*y3**2)*y2*x3**2/60.
      aint(2,4)=x3**2*y2*(y2**3+2*y2**2*y3+3*y2*y3**2+4*y3**3)/120
      aint(1,4)=(y2**3+y2**2*y3+y2*y3**2+y3**3)*x3*y2/20.
      aint(1,5)=(y2**4+y2**3*y3+y2**2*y3**2+y2*y3**3+y3**4)*x3*y2/30.
      aint(4,2)=x3**4*y2*(y2+4.*y3)/120.
c
      return
      end

        subroutine produit(aa,cc,temp,n)
c
c     ****************************************
c     *  la sous-routine multiplie la trans- *
c     * posee de cc par aa ,puis le resultat *
c     * stocke dans temp est multiplie par cc*
c     *  le produit final est stocke dans aa *
c     ****************************************
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension aa(n,n),cc(n,n),temp(n,n)
c
      do 20 i=1,n
      do 20 j=1,n
      temp(i,j)=0.d0
      do 20 k=1,n
      temp(i,j)=temp(i,j)+cc(k,i)*aa(k,j)
20    continue
      do 30 i=1,n
      do 30 j=1,n
      aa(i,j)=0.d0
      do 30 k=1,n
      aa(i,j)=aa(i,j)+temp(i,k)*cc(k,j)
30    continue
      return
      end
```

```
c
      subroutine cheqpla(fl,pv,aint,h,bx,by,x,y,nel,k,cc)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension pv(3),fl(18),aint(5,5),bx(2,3,nel),by(2,3,nel)
     1 ,x(3,nel),y(3,nel),a(2),b(2),temp(6),cc(6,6)
c     ***********************************************************
c     *   rentree:                                              *
c     *         _ pv(1),pv(2):composantes du poids en x et y    *
c     *         _cc :matrice de transformation des deplacements*
c     *         _x,y:coordonnees locales                        *
c     *         _bx,by:charges reparties                        *
c     *   sortie:                                               *
c     *        - fl(i),i=1 a 6:forces equivalentes planaires    *
c     ***********************************************************
c
      do 35 i=1,6
      fl(i)=0.d0
35    temp(i)=0.d0
c
c     charges equivalentes dues au poids
      do 5 i=1,2
      pv(i)=h*pv(i)
      temp(3*i-2)=pv(i)*aint(1,1)+temp(3*i-2)
      temp(3*i-1)=pv(i)*aint(2,1)+temp(3*i-1)
      temp(3*i)=pv(i)*aint(1,2)+temp(3*i)
5     continue
c
c     charges equivalentes laterales
      do 10 i=1,3
      j1=i+1
      if (j1.lt.4) go to 15
      j1=1
      go to 20
15    if (j1.lt.3) go to 20
      j1=1
      j2=3
      go to 25
20    j2=j1+1
25    xc=(x(j1,k)+x(j2,k))/2.
      yc=(y(j1,k)+y(j2,k))/2.
      xl=x(j2,k)-x(j1,k)
      p=(y(j2,k)-y(j1,k))/xl
      a(1)=(bx(1,i,k)+bx(2,i,k))/2.d0
      a(2)=(by(1,i,k)+by(2,i,k))/2.d0
      b(1)=(bx(2,i,k)-bx(1,i,k))/xl
      b(2)=(by(2,i,k)-by(1,i,k))/xl
      do 30 ii=1,2
      temp(3*ii-2)=temp(3*ii-2)+a(ii)*xl
      temp(3*ii-1)=temp(3*ii-1)+a(ii)*xc*xl+b(ii)*xl**3/12.
      temp(3*ii)=temp(3*ii)+a(ii)*yc*xl+p*b(ii)*xl**3/12.
30    continue
10    continue
      do 40 i=1,6
      do 40 j=1,6
40    fl(i)=fl(i)+cc(j,i)*temp(j)
      return
      end
```

```
      subroutine trandem(cc,x3,y3,y2,n)
c
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension cc(6,6),l(6),m(6)
c     ***************************************
c     *       Calcul de la matrice de trans-*
c     * formation des deplacements en cas de*
c     * forces dans le plan                 *
c     ***************************************
c
      do 10 i=1,n
      do 10 j=1,n
      cc(i,j)=0.d0
10    continue
      cc(1,1)=1.d0
      cc(2,4)=1.d0
      cc(3,1)=1.d0
      cc(3,3)=y2
      cc(4,4)=1.d0
      cc(4,6)=y2
      cc(5,1)=1.d0
      cc(5,2)=x3
      cc(5,3)=y3
      cc(6,4)=1.d0
      cc(6,5)=x3
      cc(6,6)=y3
      nfn=n*n
      call dminv(cc,6,nfn,l,m)
c
      return
      end
```

```
      subroutine transfo(tg,al)
c
c     calcul de la matrice de transformation
c     geometrique
c
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension tg(18,18),al(3,3)
      do 5 i=1,18
      do 5 j=1,18
5     tg(i,j)=0.d0
      do 10 j=1,3
      do 10 k=0,2
      do 20 i=1,2
      tg(i+2*k,j+6*k)=al(i,j)
20    tg(i+3*k+7,j+6*k+3)=al(i,j)
      i=k+1
      tg(3*i+4,6*i+j-6)=al(3,j)
10    tg(i+15,6*i+j-3)=al(3,j)
      return
      end
```

```
      subroutine trandef(cc,x3,y3,y2,n)
c
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension cc(9,9),l(9),m(9)
c     ******************************************
c     *       Calcul de la matrice de transfor- *
c     * mation des deplacements en cas flexion  *
c     ******************************************
c
      do 10 i=1,n
      do 10 j=1,n
      cc(i,j)=0.d0
10    continue
      cc(1,1)=1.d0
      cc(2,3)=1.d0
      cc(3,2)=-1.d0
      cc(4,1)=1.d0
      cc(4,3)=y2
      cc(4,6)=y2**2
      cc(4,9)=y2**3
      cc(5,3)=1.d0
      cc(5,6)=2.d0*y2
      cc(5,9)=3.d0*y2**2
      cc(6,2)=-1.d0
      cc(6,5)=-y2
      cc(6,8)=-1*(y2**2)
      cc(7,1)=1.d0
      cc(7,2)=x3
      cc(7,3)=y3
      cc(7,4)=x3**2
      cc(7,5)=x3*y3
      cc(7,6)=y3**2
      cc(7,7)=x3**3
      cc(7,8)=x3*y3**2
      cc(7,9)=y3**3
      cc(8,3)=1.d0
      cc(8,5)=x3
      cc(8,6)=2.d0*y3
      cc(8,8)=2.d0*x3*y3
      cc(8,9)=3.d0*y3**2
      cc(9,2)=-1.d0
      cc(9,4)=-2.d0*x3
      cc(9,5)=-y3
      cc(9,7)=-3.d0*(x3**2)
      cc(9,8)=-1*(y3**2)
      nfn=n*n
      call dminv(cc,9,nfn,l,m)
c
      return
      end
```

```
   55 continue
c
c        matrix reduction
c
      do 65 i=1,n
      ik=nk+i
      hold=a(ik)
      ij=i-n
      do 65 j=1,n
      ij=ij+n
      if(i-k) 60,65,60
   60 if(j-k) 62,65,62
   62 kj=ij-i+k
      a(ij)=hold*a(kj)+a(ij)
   65 continue
c
c        divide row by pivot
c
      kj=k-n
      do 75 j=1,n
      kj=kj+n
      if(j-k) 70,75,70
   70 a(kj)=a(kj)/biga
   75 continue
c
c        product of pivots
c
      d=d*biga
c
c        replace pivot by reciprocal
c
      a(kk)=1.d0/biga
   80 continue
c
c        final row and column interchange
c
      k=n
  100 k=k-1
      if(k) 150,150,105
  105 i=l(k)
      if(i-k) 120,120,108
  108 jq=n*(k-1)
      jr=n*(i-1)
      do 110 j=1,n
      jk=jq+j
      hold=a(jk)
      ji=jr+j
      a(jk)=-a(ji)
  110 a(ji)=hold
  120 j=m(k)
      if(j-k) 100,100,125
  125 ki=k-n
      do 130 i=1,n
      ki=ki+n
      hold=a(ki)
      ji=ki-k+j
```

```
      a(ki)=-a(ji)
  130 a(ji)=hold
      go to 100
  150                                                   return
      end
```



```
      subroutine rigel(stif,n,np,nf,rcp,rcf,tg,alfa,em,t,x3,y2)
c
c     *****************************************************
c     *  calcul de la matrice de rigidite elementaire dans le *
c     * local ,puis global.on tient compte des effets menbrane*
c     * et de flexion.                                      *
c     *  rcp: rigidite plane                               *
c     *  rcf:  -//-     en flexion                         *
c     *  tg : transformation geometrique                   *
c     *****************************************************
c
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension tg(n,n),temp(18,18), stif(n,n),rcp(np,np),rcf(nf,nf)
      do 10 i=1,n
      do 10 j=1,n
10    stif(i,j)=0.d0
      do 20 i=1,np
      do 20 j=i,np
      stif(i,j)=rcp(i,j)
20    stif(j,i)=stif(i,j)
      do 30 i=1,nf
      do 30 j=i,nf
      stif(i+np,j+np)=rcf(i,j)
30    stif(j+np,i+np)=stif(i+np,j+np)
      const=alfa*em*t*y2*x3/2.d0
      do 40 i=16,18
      do 40 j=i,18
      stif(i,j)=const
      if(i.ne.j) stif(i,j)=stif(i,j)*-0.5d0
40    stif(j,i)=stif(i,j)
      call produit(stif,tg,temp,18)
c
      return
      end
```

```
      subroutine dminv(a,n,nfn,l,m)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension a(nfn),l(n),m(n)
c
      d=1.d0
      nk=-n
      do 80 k=1,n
        nk=nk+n
        l(k)=k
        m(k)=k
        kk=nk+k
        biga=a(kk)
        do 20 j=k,n
         iz=n*(j-1)
          do 20 i=k,n
           ij=iz+i
   10       if(dabs(biga)-dabs(a(ij))) 15,20,20
   15      biga=a(ij)
          l(k)=i
         m(k)=j
   20   continue
c
c       interchange rows
c
      j=l(k)
      if(j-k) 35,35,25
   25 ki=k-n
      do 30 i=1,n
      ki=ki+n
      hold=-a(ki)
      ji=ki-k+j
      a(ki)=a(ji)
   30 a(ji)=hold
c
c       interchange colums
c
   35 i=m(k)
      if(i-k) 45,45,38
   38 jp=n*(i-1)
      do 40 j=1,n
      jk=nk+j
      ji=jp+j
      hold=-a(jk)
      a(jk)=a(ji)
   40 a(ji)=hold
c
c       divide colums by pivot(the pivot element value is
c       contained in biga
c
   45 if(biga) 48,46,48
   46 d=0.d0
                                                  return
   48 do 55 i=1,n
      if(i-k) 50,55,50
   50 ik=nk+i
      a(ik)=a(ik)/(-biga)
```

1

wk,nnm)

eur compacte
jonales de la matrice de raideur

la matrice de raideur
us 1 (nn + 1)

1

/0 , 50

```
      = ku
      do 80 j = 1 , kh
      ic = ic + 1
      klt = klt - 1
      ki = masa(k)
      nd = masa(k+1) - ki - 1
      if(nd) 80 , 80 , 60
60    kk = min (ic,nd)
      c = 0.d0
      do 70 l = 1 , kk
70    c = c + a(ki + l) * a(klt + l)
      a(klt) = a(klt) - c
80    k = k + 1
90    k = n
      b = 0.d0
      do 100 kk = kl , ku
      k = k - 1
      ki = masa(k)
      c = a(kk) / a(ki)
      b = b + c * a(kk)
100   a(kk) = c
      a(kn) = a(kn) - b
110   if(a(kn)) 120 , 120 , 140
120   print 1000 , n
1000  format('0MATRICE SINGULIERE A LA RANGEE ',i5)
      print *,nd,a(kn)
      stop
140   continue
      return
      end
```

```
      subroutine sigmap(ebc,em,pc,cc)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension ebc(3,6),temp(3,6),cc(6,6)
c     ******************************************
c     *   Calcul de la matrice liant les con- *
c     * traintes planes aux deplacements plans*
c     ******************************************
c
      do 5 i=1,6
      do 5 j=1,6
5     temp(i,j)=0.d0
      temp(1,2)=em/(1.d0-pc**2)
      temp(1,6)=pc*temp(1,2)
      temp(2,2)=temp(1,6)
      temp(2,6)=temp(1,2)
      temp(3,3)=temp(1,2)*.5d0*(1.d0-pc)
      temp(3,5)=temp(3,3)
c
      do 10 i=1,3
      do 10 j=1,6
      ebc(i,j)=0.d0
      do 10 k=1,6
      ebc(i,j)=ebc(i,j)+temp(i,k)*cc(k,j)
10    continue
      return
      end
```



```
c
      subroutine assemb(iad,nk,ptk,grk,nwk,maxa,nx,nn)
c
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension iad(nk),ptk(nk,nk),grk(nwk),maxa(nx)
c     ***********************************************
c     *   Assemblage vectoriel des rigidites        *
c     ***********************************************
c
      do 3 i=1,nk
      ii=iad(i)
      do 2 j=1,nk
      jj=iad(j)
      if(jj.lt.ii) go to 2
      k=maxa(jj)+jj-ii
      grk(k)=grk(k)+ptk(i,j)
2     continue
3     continue
      return
      end
```

5 Jun 17:07 1986 coplag.f Page 1

```
      subroutine coplag(rkalfa,n,em,pc,t,x3,y3,y2)
c
c     ******************************************
c     * la sous-routine calcule la matrice de ri-*
c     * gidite elementaire en contraintes planai-*
c     * res dans le syst. locale de l element.   *
c     ******************************************
c
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension rkalfa(n,n),cc(6,6),temp(6,6)
c
c     calcul de cc etde cinv
      call trandem(cc,x3,y3,y2,n)
c
c     calcul de rkalfa
      const=0.5d0*em*t*x3*y2/(1.d0-pc**2)
      do 20 i=1,n
      do 20 j=1,n
20    rkalfa(i,j)=0.d0
      rkalfa(2,2)=const
      rkalfa(2,6)=const*pc
      rkalfa(3,3)=const*(1.d0-pc)*0.5d0
      rkalfa(3,5)=rkalfa(3,3)
      rkalfa(5,3)=rkalfa(3,5)
      rkalfa(5,5)=rkalfa(3,3)
      rkalfa(6,2)=rkalfa(2,6)
      rkalfa(6,6)=const
c
c     calcul de rcp
      call produit(rkalfa,cc,temp,n)
c
      return
      end
```

6 Jun 15:59 1986 adres.f Page 1

```
      subroutine adres(ji,ndl,n,iad,nel,k)
c
c     calcul des adresses des colonnes
c
      dimension ji(3,nel),iad(n)
      do 1 i=1,ndl
      do 1 j=1,3
1     iad(i+(j-1)*ndl)=ndl*(ji(j,k)-1)+i
      return
      end
```

```
      subroutine cheflex(fl,pv,aint,h,psz,x,y,nel,k,cc)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension temp(9),fl(18),pv(3),aint(5,5),psz(3,nel),cc(9,9)
      dimension x(3,nel),y(3,nel)
c     ************************************************
c     *       rentree:                                *
c     *               _pv(3):composante du poids en z *
c     *               _psz  :pression de surface      *
c     *               _x,y  :coordonnees locales      *
c     *               _cc   :matrice transformation   *
c     *                      des deplacements         *
c     *               _aint :integrales de surface    *
c     *       sortie :                                *
c     *               _fl(i):forces equivalentes      *
c     ************************************************
c
      a=psz(1,k)
      c=(psz(2,k)-a)/y(2,k)
      b=(psz(3,k)-a-c*y(3,k))/x(3,k)
c
      a=a+h*pv(3)
      temp(1)=a*aint(1,1)+b*aint(2,1)+c*aint(1,2)
      temp(2)=a*aint(2,1)+b*aint(3,1)+c*aint(2,2)
      temp(3)=a*aint(1,2)+b*aint(2,2)+c*aint(1,3)
      temp(4)=a*aint(3,1)+b*aint(4,1)+c*aint(3,2)
      temp(5)=a*aint(2,2)+b*aint(3,2)+c*aint(2,3)
      temp(6)=a*aint(1,3)+b*aint(2,3)+c*aint(1,4)
      temp(7)=a*aint(4,1)+b*aint(5,1)+c*aint(4,2)
      temp(8)=a*aint(2,3)+b*aint(3,3)+c*aint(2,4)
      temp(9)=a*aint(1,4)+b*aint(2,4)+c*aint(1,5)
      do 5 i=1,9
      fl(i+6)=0.d0
      do 5 j=1,9
      fl(i+6)=fl(i+6)+cc(j,i)*temp(j)
5     continue
      return
      end
```

```
      subroutine resolv(a,v,maxa,nn,nwk,nnm)
c
c     a-matrice decomposee
c     v-vecteur chargement
c
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension a(nwk),maxa(nnm),v(nn)
c
      do 180 n=1,nn
      kl=maxa(n)+1
      ku=maxa(n+1)-1
      if(ku-kl) 180,160,160
160   k=n
      c=0.
      do 170 kk=kl,ku
      k=k-1
170   c=c+a(kk)*v(k)
      v(n)=v(n)-c
180   continue
c
c     substitution a rebours
c
      do 200 n=1,nn
      k=maxa(n)
200   v(n)=v(n)/a(k)
      n=nn
      do 230 l=2,nn
      kl=maxa(n)+1
      ku=maxa(n+1)-1
      if(ku-kl) 230,210,210
210   k=n
      do 220 kk=kl,ku
      k=k-1
220   v(k)=v(k)-a(kk)*v(n)
230   n=n-1
      return
      end
```

```fortran
      subroutine sigmaf(ebc,em,pc,h,x,y,cc)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      dimension ebc(3,9),temp(3,9),cc(9,9)
c     ******************************************
c     *   Calcul de la matrice reliant les con- *
c     * traintes de flexion(moments) aux depla- *
c     * cements                                 *
c     ******************************************
c
      do 5 i=1,9
      do 5 j=1,9
5     temp(i,j)=0.d0
      c=-em*h**3/12.d0/(1.d0-pc**2)
      temp(1,4)=2*c
      temp(1,6)=2*c*pc
      temp(1,7)=6*x*c
      temp(1,8)=2*x*pc*c
      temp(1,9)=6*y*pc*c
      temp(2,4)=2*pc*c
      temp(2,6)=2*c
      temp(2,7)=6*pc*x*c
      temp(2,8)=2*x*c
      temp(2,9)=6*y*c
      temp(3,5)=(pc-1.d0)*c
      temp(3,8)=2*y*(pc-1.d0)*c
c
      do 10 i=1,3
      do 10 j=1,9
      ebc(i,j)=0.d0
      do 10 k=1,9
      ebc(i,j)=ebc(i,j)+temp(i,k)*cc(k,j)
10    continue
c
      return
      end
```

PLAQUE ENCASTRE A UN BORD : RESULTAT DES FLECHES

Donnees generales
****

nombre d elements	:	16
nombre de noeuds	:	15
nombre de degres de libertes	:	6
module d elasticite	:	10000.0
coefficient de Poisson	:	.3000
nombre de noeuds restreints	:	9
poids volumique	:	.0000
Alfa	:	1.000000

****
Donnees des noeuds
****

noeud	coordx	coordy	coordz
1	.000	.000	.000
2	.000	2.500	.000
3	.000	5.000	.000
4	.000	7.500	.000
5	.000	10.000	.000
6	5.000	.000	.000
7	5.000	2.500	.000
8	5.000	5.000	.000
9	5.000	7.500	.000
10	5.000	10.000	.000
11	10.000	.000	.000
12	10.000	2.500	.000
13	10.000	5.000	.000
14	10.000	7.500	.000
15	10.000	10.000	.000

****
restreintes aux noeuds
****

noeud	dx	dy	dz	rota.x	rota.y	rota.z
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	1	0	0
15	0	0	0	1	0	0

****
connectivite des elements
****

elmt	noeud 1	noeud 2	noeud 3	epaisseur
1	6	1	2	.2000
2	2	7	6	.2000
3	7	2	3	.2000
4	3	8	7	.2000
5	8	3	4	.2000
6	4	9	8	.2000
7	9	4	5	.2000
8	5	10	9	.2000
9	11	6	7	.2000
10	7	12	11	.2000
11	12	7	8	.2000
12	8	13	12	.2000
13	13	8	9	.2000
14	9	14	13	.2000
15	14	9	10	.2000
16	10	15	14	.2000

nombre d equations = 90

espace requis =2259

****

CAS DE CHARGEMENT NO 1

****

charges aux noeuds

****

nombre de noeuds charges = 3

noeud	fx	fy	fz	Mx	My	Mz
11	.000	.000	.010	.000	.000	.000
13	.000	.000	.040	.000	.000	.000
15	.000	.000	.010	.000	.000	.000

****

Deplacements

****

noeud	dx	dy	dz	rota.x	rota.y	rota.z
1	.0000	.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.0000
2	.0000	.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.0000
3	.0000	.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.0000
4	.0000	.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.0000
5	.0000	.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0838	0.0000	-.0323	.0000
7	.0000	.0000	.0853	.0003	-.0312	.0000
8	.0000	.0000	.0870	.0002	-.0314	.0000
9	.0000	.0000	.0883	0.0000	-.0314	.0000
10	.0000	.0000	.0893	0.0000	-.0301	.0000
11	.0000	.0000	.2741	0.0000	-.0417	.0000
12	.0000	.0000	.2760	.0007	-.0416	.0000
13	.0000	.0000	.2796	.0007	-.0420	.0000
14	.0000	.0000	.2785	-.0011	-.0415	.0000
15	.0000	.0000	.2788	0.0000	-.0410	.0000

BIBLIOGRAPHIE

1. Przemieniecki, J. S., Théory of Matrix Structural Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1968.

2. Desai, C. S., and Abel, J. F, Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1972.

3. Bathe, K. J, and Wilson, E. L., Numérical Méthods in Finite Elément Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976

4. Zienkiewicz, O. C., La Méthode des Eléments Finis Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Ediscience, Paris, 1973, est traduit de The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Hill, Maidenhead, 1971

5. Cook, R. D., Concepts and Applications of Finite Elément Analysis, 2d ed., Wiley, New York, 1981.

6. Timoshenko, S. P., and Woinowsky-Krieger, S., Théory of Plates and Shells, 2d ed., Mc Graw-Hill Kogakusha, 1970

7. Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., Théory of Elasticity, 3rd éd., Mc Graw-Hill, Singapore, 1982

8. Weaver, W. Jr, and Johnston, P. R., Finite Eléments for Structural Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1984

9. Deprez, G., Fonder, G., Frey, F., Maquoi, R., Rondal, J., Application des Ordinateurs au Calcul des Structures, Notes de cours, Université de Liege, 1976

10. Jirousek, J., Calcul des Structures par Ordinateur, Ecole Polytechnique Féderale de Lausanne, Rédaction provisoire, 1982