

REPUBLIQUE DU SENEGAL
UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

Centre de THIES

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

10.0024

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR DE CONCEPTION

Titre :

**MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS TYPE P APPLIQUEE
A L'ELASTICITE BIDIMENSIONNELLE**

Année : 2004/2005

Auteur : **Fodé MANE**
Directeur : **Dr. Moustapha NDIAYE**

Dédicaces

A ma défunte mère et à mon père
A mon maître de primaire. feu Benjamin KANFOM
A toutes les personnes qui me sont chères

Je dédie ce travail

Remerciements

Nous remercions tout d'abord très sincèrement **Dr. Moustapha NDIAYE**, professeur à l'Ecole Supérieure Polytechnique, centre de Thiès, pour avoir consacré beaucoup de son temps à nous encadrer en vue de la réalisation de ce projet.

Nous remercions aussi nos camarades de promotion **Alioune DIOP** et **Boubacar KEITA**, avec qui nous avons travaillé en collaboration durant tout le temps qu'a duré ce projet.

Nos remerciements vont également à l'endroit de tous les enseignants et les élèves de l'Ecole Supérieure Polytechnique, centre de Thiès, pour leur collaboration et leur soutien sans faille ainsi qu'à toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce projet.

Sommaire

Ce travail se rapporte au domaine des milieux continus en deux dimensions dont l'étude est basée sur la théorie de l'élasticité plane. Il s'agit dans cette étude de faire la modélisation par éléments finis en élasticité plane en utilisant les fonctions d'interpolation de type P.

Le choix des fonctions d'interpolation affecte de manière sensible la précision et la performance de la méthode des éléments finis. Les fonctions d'interpolation type P, avec leur propriété d'orthogonalité, permettent d'atteindre ces objectifs. Le choix de ces fonctions est en effet déterminé par un certain nombre de critères qui sont le calcul efficace de la matrice de rigidité, la performance de la procédure de la solution itérative et la minimisation de l'erreur d'interpolation. La formulation hiérarchique utilisée en version P permet à la matrice de rigidité d'être plus creuse.

Cette structure spéciale de la matrice de rigidité crée le besoin d'adopter une méthode de décomposition matricielle fiable, stable et applicable même si la matrice est singulière ou mal conditionnée, en vue de la résolution du système d'équations obtenu après l'assemblage.

Les calculs étant complexes manuellement, les programmes d'éléments finis sur Maple ont été élaborés pour le calcul de la matrice de rigidité et des forces équivalentes aux nœuds d'un élément rectangulaire.

Mots clés : Méthode P, formulation variationnelle, discrétisation, interpolation, polynôme de Legendre, Méthode de résolution algébrique, SVD.

Table des matières

Titres	pages
1. Introduction.....	1
2. Procédure générale de la Méthode des Eléments Finis.....	3
3. Formulation variationnelle.....	5
3.1. Energie potentielle totale.....	5
3.2. Système continu.....	6
3.3. Discrétisation.....	7
4. Formulation variationnelle mixte.....	11
4.1. Relation déformation-déplacement $\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon}$	12
4.2. Relation contrainte-déplacement $\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}$	13
4.3. Relation contrainte-déformation-déplacement $\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}$	13
4.4. Principe de l'anergie complémentaire.....	14
4.5. Formulation mixte.....	15
5. Modèle isoparamétrique.....	17
6. Fonctions d'interpolation.....	21
6.1. Interpolation Type H.....	23
6.1.1. Elément linéique.....	23
• Deux nœuds.....	23
• Trois nœuds.....	24
• Quatre nœuds.....	25
6.1.2. Elément rectangulaire.....	26
• Quatre nœuds.....	26
• Huit nœuds.....	27
• Neuf nœuds.....	28
• Douze nœuds.....	29
6.1.3. Elément triangulaire.....	31
• Trois nœuds.....	31
• Six nœuds.....	32
• Dix nœuds.....	33
6.2. Interpolation Type P.....	35

6.2.1. Élément linéique.....	35
• Aux nœuds externes.....	35
• Aux nœuds internes.....	36
6.2.2. Élément rectangulaire.....	39
6.2.2.1.Fonctions d'interpolation hiérarchiques.....	40
• Aux nœuds des coins.....	35
• Aux nœuds des côtés.....	40
• Côté 1.....	40
• Côté 2.....	40
• Côté 3.....	41
• Côté 4.....	41
• Aux nœuds internes.....	41
6.2.2.2.Fonctions d'interpolation de type conventionnel.....	42
6.2.2.2.1. Élément rectangulaire à quatre nœuds.....	42
6.2.2.2.2. Élément rectangulaire à huit nœuds.....	43
6.2.2.2.3. Élément rectangulaire à neuf nœuds.....	44
6.2.3. Élément triangulaire.....	45
6.2.3.1.Fonctions d'interpolation hiérarchiques.....	46
• Nœuds des coins.....	46
• Nœuds des côtés.....	47
• Côté 1.....	47
• Côté 2.....	47
• Côté 3.....	48
• Nœuds internes.....	48
6.2.3.2.Fonctions d'interpolation de type conventionnel.....	49
6.2.3.2.1. Élément triangulaire trois nœuds.....	49
6.2.3.2.2. Élément triangulaire à six nœuds.....	50
7. Blending functions.....	51
7.1. Forme linéaire.....	51
7.2. Forme paramétrique quadratique.....	52
7.3. Représentation par la méthode des blending functions.....	53
8. Intégration numérique.....	56
8.1. Quadrature de Gauss pour l'intégration d'une fonction à une variable.....	56

8.2. Quadrature de Gauss pour l'intégration d'une fonction à deux variables.....	57
9. Résolution numérique de systèmes d'équations.....	58
9.1. Décomposition en valeur singulière.....	58
10. Conclusion.....	60
Bibliographie.....	61
Annexes.....	62
Annexe A : Algorithme de Householder	63
Annexe B : Représentation graphiques des fonctions d'interpolation d'un élément rectangulaire.....	63

Liste des symboles et abréviations utilisés

h	épaisseur de la plaque
∇	opérateur nabla
w	composante du champ de déplacement suivant l'axe z
P	Charge ponctuelle appliquée à la plaque
D	rigidité de la plaque
\mathbf{f}	système de forces agissant aux nœuds
\mathbf{k}	matrice de rigidité
\mathbf{d}	vecteur déplacements aux noeuds
\mathbf{f}_0	les forces équilibrant toute distribution des charges extérieures sur les frontières et tout effort produit par une déformation initiale
EDP	équation aux dérivées partielles
\mathbf{K}	matrice de rigidité globale après l'assemblage
\mathbf{D}	champ de déplacement après l'assemblage
\mathbf{R}	vecteur des forces équivalentes aux nœuds après l'assemblage
π_p	l'énergie potentielle totale
d_{ll}	degré de liberté
$\{\Delta\}$	vecteur des ddl Δ_i
Ω	domaine occupé par l'élément
$\partial\Omega$	bord du domaine Ω
Γ_t	bord du domaine où les déplacements sont permis
Γ_u	bord du domaine où les déplacements sont empêchés
\mathbf{u}	champ de déplacement à l'intérieur de l'élément
\mathbf{t}	champ de forces surfaciques à l'intérieur de l'élément
$\bar{\mathbf{u}}$	champ de déplacement sur le bord de l'élément
$\bar{\mathbf{t}}$	champ de forces surfaciques sur le bord de l'élément
X, Y	coordonnées globales
$\boldsymbol{\sigma}$	champ de contraintes à l'intérieur de l'élément
$\boldsymbol{\sigma}_0$	champ de contraintes initiales
$\boldsymbol{\varepsilon}$	champ de déformation à l'intérieur de l'élément
$\boldsymbol{\varepsilon}_0$	champ de déformation initiale
\mathbf{E}	matrice de rigidité élastique

$\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$	contraintes en coordonnées globales
$\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}$	déformations en coordonnées globales
U_0	l'énergie de déformation par unité de volume
\int	symbole de l'intégrale
\sum	symbole de la somme
ε'	transposée de ε
\bar{b}	champ des forces de volume
\mathbf{u}'	transposée de \mathbf{u}
$\dot{\mathbf{u}}$	dérivée de \mathbf{u} par rapport à au temps
$\ddot{\mathbf{u}}$	dérivée seconde de \mathbf{u} par rapport au temps
ρ	coefficient des forces d'accélération
\mathbf{c}_f	coefficient des forces de freinage
\mathbf{N}	matrice des fonctions d'interpolation
\mathbf{L}	opérateur de dérivation
\mathbf{B}	matrice déformation –déplacement : elle obtenue par dérivation de \mathbf{N}
\mathbf{d}^T	transposée du vecteur coordonné aux nœuds
\mathbf{N}_e	matrice des fonctions d'interpolation de l'élément (e)
\mathbf{N}_e^T	transposée de \mathbf{N}_e
\mathbf{B}_e	matrice déformation –déplacement de l'élément (e)
\mathbf{d}_e	vecteur déplacements aux noeuds de l'élément (e)
$\dot{\mathbf{d}}_e$	dérivée de \mathbf{d}_e par rapport à au temps
$\ddot{\mathbf{d}}_e$	dérivée de $\dot{\mathbf{d}}_e$ par rapport à au temps
\mathbf{d}_e^T	transposée du vecteur déplacements aux noeuds de l'élément (e)
$\dot{\mathbf{d}}_e^T$	dérivée de \mathbf{d}_e^T par rapport à au temps
$\ddot{\mathbf{d}}_e^T$	dérivée de $\dot{\mathbf{d}}_e^T$ par rapport à au temps
δ	symbole de dérivation par rapport aux coordonnées
\mathbf{k}_e	matrice de rigidité de l'élément (e)
\mathbf{m}_e	vecteur d'accélération de l'élément (e)
\mathbf{c}_e	vecteur de freinage de l'élément (e)
\mathbf{f}_{e0}	système de forces agissant aux nœuds de l'élément (e)

\mathbf{r}_e	vecteur des forces équivalentes aux nœuds de l'élément (e)
\mathbf{A}	matrice de position
\mathbf{B}	matrice de
Π_{IRR}	fonctionnelle de Heillinger-Reissner
\mathbf{G}	vecteur ligne des monôme
Π_{HR}	fonctionnelle de Hu-Washizu
π^*	énergie complémentaire
\mathbf{p}	matrice de position
\mathbf{N}	fonctions d'interpolation des déplacements à l'intérieur de l'élément
$\tilde{\mathbf{N}}$	fonctions d'interpolation des coordonnées globales à l'intérieur de l'élément
$\phi = \phi(\zeta, \eta)$	fonction quelconque de deux variables
\hat{c}	symbole de dérivée partielle par rapport à une variable
ζ, η, ξ	coordonnées locales
\mathbf{c}	vecteur ligne des coordonnées globales
\mathbf{J}	matrice jacobienne
J	jacobien de \mathbf{J} ; déterminant de \mathbf{J}
E	module d'élasticité ou module de Young
ν	coefficient de Poisson
\mathbf{P}	force concentrée appliquée a l'élément
\mathbf{N}_*	matrice obtenue par évaluation de \mathbf{N} aux coordonnées des points où la force concentrée \mathbf{P} est appliquée
\mathbf{G}	champ des polynômes
\mathbf{a}	vecteur des coefficients
\mathbf{C}	matrice des valeurs des coordonnées des nœuds de l'élément
N_i	fonction d'interpolation au nœud i ; $i = 1, 2, 3 \dots$
X_i, Y_i	coordonnées globales au nœud i
$\Delta_i, i > 2$	déplacement en mode bulle au nœud i
p_j	polynôme de Legendre de degré j
ϕ_j	polynôme défini en terme de polynômes de Legendre p_{j-1}
δ_{ij}	symbole de Kronecker
y	polynôme en x

y'	dérivée première de y
y''	dérivée seconde de y
p'_i	dérivée première du polynôme de Legendre de degré l
p''_i	dérivée seconde du polynôme de Legendre de degré l
(Ω_q)	élément réel
$S^p(\Omega_q)$	espace des polynômes définis sur Ω_q engendré par l'ensemble de tous les monômes $\zeta^i \eta^j$; $i, j = 0, 1, 2, \dots, p$; $i+j = 0, 1, 2, \dots, p$
$S^{p,q}(\Omega_q)$	espace des polynômes définis sur Ω_q engendré par l'ensemble de tous les monômes $\zeta^i \eta^j$; $i=0, 1, 2, \dots, p$; $j=0, 1, 2, \dots, q$
$N_i^{(j)}$	fonction d'interpolation au nœud i du côté j de l'élément $j = 1, 2, 3, 4$
$N_i^{(0)}$	fonction d'interpolation au nœud i du centre de l'élément
p	degré du polynôme
L_i	fonction d'interpolation de l'élément triangulaire aux nœuds des coins $i = 1, 2, 3$
A	matrice carrée
x	vecteur des inconnues
b	vecteur connu
SVD	Décomposition en valeur singulière

Liste des figures

Figure	pages
Figure 3.1 : Solide occupant un secteur Ω délimité par $\partial\Omega$	6
Figure 3.2 : élément (e).....	8
Figure 5-1 : élément isoparamétrique plan.....	18
Figure 6-1 : élément linéique réel à deux nœuds.....	23
Figure 6-2 : élément linéique de référence à deux nœuds	23
Figure 6-3 : élément linéique réel à trois nœuds.....	24
Figure 6-4 : élément linéique de référence à trois nœuds	24
Figure 6-5 : élément linéique réel à quatre nœuds.....	25
Figure 6-6 : élément linéique de référence à quatre nœuds	25
Figure 6-7 : élément rectangulaire réel à quatre nœuds.....	26
Figure 6-8 : élément rectangulaire de référence à quatre nœuds	26
Figure 6-9 : élément rectangulaire réel à huit nœuds.....	27
Figure 6-10 : élément rectangulaire de référence à huit nœuds	27
Figure 6-11 : élément rectangulaire réel à neuf nœuds.....	28
Figure 6-12 : élément rectangulaire de référence à neuf nœuds	28
Figure 6-13 : élément rectangulaire réel à douze nœuds.....	29
Figure 6-14 : élément rectangulaire de référence à douze nœuds	29
Figure 6-15 : élément triangulaire réel à trois nœuds.....	31
Figure 6-16 : élément triangulaire de référence à trois nœuds	31
Figure 6-17 : élément triangulaire réel à six nœuds.....	32
Figure 6-18 : élément triangulaire de référence à six nœuds	32
Figure 6-19 : élément triangulaire réel à dix nœuds.....	33
Figure 6-20 : élément triangulaire de référence à dix nœuds	33
Figure 6-21 : élément linéique réel type P	35
Figure 6-22 : élément linéique de référence type P	35
Figure 6-23 : élément réel (Ω_q).....	39
Figure 6-24 : élément quadrilatère standard.....	39
Figure 6-25 : élément quadrilatère standard à quatre noeuds.....	42
Figure 6-26 : élément quadrilatère standard à huit nœuds.....	43
Figure 6-27 : élément quadrilatère standard à neuf noeuds.....	44

Figure 6-28 : élément triangulaire standard (Ω_t)	45
Figure 6-29 : élément de référence.....	46
Figure 6-30 : élément triangulaire standard à trois nœuds.....	49
Figure 6-31 : élément triangulaire standard à six nœuds.....	50
Figure 7-1 : élément rectangulaire à côté courbé.....	53
Figure B : Représentation graphiques des fonctions d'interpolation d'un élément rectangulaire.....	63

Liste des tableaux

Tableau		pages
Tableau 8-1	points et poids de gauss.....	56

1. Introduction

Une plaque mince est un solide limité par deux plans parallèles voisins d'équation

$$z = \pm \frac{1}{2} h \quad (1-1)$$

Les équations qui régissent son comportement s'écrivent comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad (1-2a,b)$$

avec les conditions limites suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u \\ \mathbf{t} &= \bar{\mathbf{t}} \quad \text{sur } \Gamma_t \end{aligned} \quad (1-3a,b)$$

La solution exacte de ces équations est obtenue par application du principe des travaux virtuels en considérant les conditions aux limites. Cette solution s'écrit

$$\mathbf{u}_{\text{Ex}} = \bar{\mathbf{u}}^* + \mathbf{u}_0 \quad (1-4)$$

où \mathbf{u}_0 est un champ de déplacements cinématiquement admissibles ($\mathbf{u}_0 \in E^0(\Omega)$, avec $E^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions dont l'énergie de déformation est finie, Ω le domaine du milieu continu) et $\bar{\mathbf{u}}^*$ est un champ de déplacements cinématiquement admissibles arbitraire fixé [F]. Dans beaucoup de cas \mathbf{u}_0 est déterminé par approximation et pour trouver cette valeur approchée de \mathbf{u}_0 , un ensemble de fonctions sont déterminées par subdivision du domaine Ω en un certain nombre d'éléments fins. Cette procédure s'appelle la formulation équivalente du problème. Elle est appelée également formulation variationnelle et consiste à transformer le problème en un problème équivalent. Dans cette formulation, le problème est posé dans un espace de dimension finie.

La méthode des éléments fins consiste donc à poser un problème analogue en dimension finie, à partir d'un maillage du domaine Ω où sont définies les EDP. Ce qui nécessite la définition des fonctions de base dont le choix est tel que la matrice de rigidité (ou de discrétisation) soit la plus creuse possible. Cette méthode, utilisée pour la première fois par Ray Clough dans son mémoire intitulé « The finite element method in plane stress analysis »

a connu un grand succès avec l'avènement des ordinateurs qui permettent le traitement numérique d'un grand nombre d'opérations.

Le projet consiste donc à modéliser une plaque mince par la méthode des éléments finis en utilisant les fonctions d'interpolation type P.

Dans ce projet nous allons adopter la démarche suivante :

Dans un premier temps, nous allons procéder à la discrétisation de la plaque en transformant le problème en un problème équivalent via une formulation variationnelle. Ensuite les fonctions d'interpolation, qui constituent le point de départ de la méthode des éléments finis, seront établies. Enfin les techniques d'intégration numérique et de résolution numérique du système d'équations seront développées. Mais avant tout cela, il importe de connaître la procédure générale de la méthode des éléments finis.

2. Procédure générale de la Méthode des Eléments Finis

La méthode des éléments finis, qui est une méthode d'approximation de solution des équations aux dérivées partielles (EDP) construite à partir d'une formulation variationnelle du problème à résoudre, respecte une procédure dont les principales étapes ont les suivantes :

- Le milieu continu est subdivisé par des lignes ou des surfaces fictives en un certain nombre d'éléments finis.
- Les éléments sont reliés entre eux par un nombre fini de points appelés nœuds et de lignes définissant leur géométrie et leur délimitation. Les déplacements de ces points nodaux sont considérés comme les inconnues de base du problème à résoudre dans le cas d'un modèle de déplacement.
- On choisit une ou plusieurs fonctions permettant de définir de manière unique le champ de déplacement à l'intérieur de chaque élément en fonction des déplacements des nœuds.
- Les fonctions de déplacement définissent donc sans ambiguïté l'état de déformation à l'intérieur d'un élément en fonction de ses déplacements nodaux. Ces déformations et d'éventuelles déformations initiales, compte tenu des propriétés élastiques ou autres du matériau, définissent l'état de contrainte en tout point de l'élément et par conséquent aux frontières de celui-ci.
- On détermine un système de forces concentrées aux nœuds qui équilibre les contraintes agissant aux frontières et d'éventuelles forces réparties. Il en résulte la réaction de rigidité

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{d} + \mathbf{f}_0 \quad (2-1)$$

où

\mathbf{f} est le système de forces agissant aux nœuds

\mathbf{k} la matrice de raideur

\mathbf{d} les déplacements aux nœuds et

\mathbf{f}_0 les forces équilibrant toute distribution des charges extérieures sur les frontières et tout effort produit par une déformation initiale.

- Les forces équivalentes aux nœuds qui assurent l'équilibre étant connues en fonction des déplacements nodaux, on écrit alors les conditions d'équilibre des forces nodales de toute la structure en assemblant tous les éléments. Il en résulte un système d'équations linéaires

dont les inconnues sont les déplacements. La résolution de ce système en tenant compte des conditions aux limites donne les déplacements.

- On détermine enfin les réactions d'appui et les contraintes dans les éléments à partir des relations établies a priori en fonction des déplacements nodaux.

3. Formulation variationnelle

La formulation variationnelle est basée essentiellement sur le principe de l'énergie potentielle totale.

3.1. Energie potentielle totale

L'énergie potentielle totale d'une structure ou d'un système est désignée par π_p et est exprimée comme une fonction de déplacements. La minimisation de l'énergie potentielle totale par rapport aux déplacements correspond aux équations d'équilibre du système et donc à l'état d'équilibre de la structure

$$\mathbf{KD} = \mathbf{R} \quad (3-1)$$

Cette équation exprime l'équilibre entre les forces internes et les forces externes. Le système considéré est la structure ainsi que les efforts qui agissent sur elle. Les n quantités indépendantes permettant de définir l'état d'équilibre du système correspondent aux n ddl de la structure. L'énergie potentielle totale est donc fonction des ddl que nous désignons par Δ_i .

Symboliquement

$$\pi_p = \pi_p(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \quad (3-1)$$

La différentielle totale s'écrit alors :

$$d\pi_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi_p}{\partial \Delta_i} d\Delta_i = \left\{ \frac{\partial \pi_p}{\partial \Delta} \right\}^T \{d\Delta\} \quad (3-2)$$

où

$$\{\Delta\} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$$

et donc

$$d\pi_p = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi_p}{\partial \Delta_i} d\Delta_i = 0 \quad (3-3)$$

Les déplacements étant indépendants, on obtient ainsi n équations à n inconnues

La relation matricielle des n équations s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \pi_p}{\partial \Delta} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3-4).$$

avec

$$\{\Delta\} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$$

3.2. Système continu

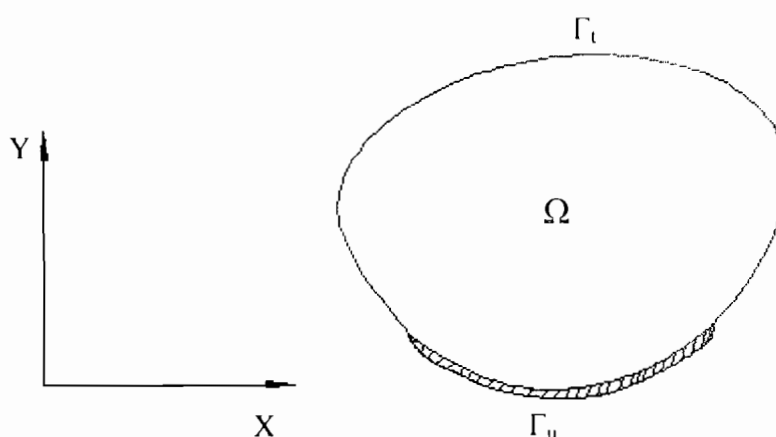


Figure 3.1 : Solide occupant un secteur Ω délimité par $\partial\Omega$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } \Gamma_u$$

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } \Gamma_t$$

$$\Gamma_u \cup \Gamma_t = \partial\Omega$$

Le principe de l'énergie potentielle totale s'énonce comme suit :

« *parmi tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles celui qui rend l'énergie potentielle totale minimum correspond à la solution du problème* ».

La relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3-5)$$

où

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$ et $\boldsymbol{\sigma}_0$ sont respectivement les champs de contrainte et de déformation initiales.

Désignons par U_0 l'énergie de déformation par unité de volume. Elle représente le travail effectué par les efforts internes.

$$dU_0 = \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-6)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x ; \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y ; \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z ; \dots ; \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}} = \gamma_{zx} \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3-8)$$

L'intégrale par rapport aux déformations donne :

$$U_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}] \quad (3-9)$$

L'énergie potentielle totale, compte tenu des effets dynamiques s'écrit :

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \boldsymbol{\rho} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{c}_f \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \sum_{i=1}^p u_i p_i \end{aligned} \quad (3-10)$$

où \mathbf{u} est le champ de déplacement à l'intérieur de l'élément, $\bar{\mathbf{b}}$ le champ des forces de volume et $\bar{\mathbf{t}}$ le vecteur des forces de surface et u_i le déplacement des forces concentrées p_i .

3.3. Discrétisation

La structure à analyser comporte des ddl qui sont des déplacements. Les déplacements aux nœuds sont donc pris comme les inconnues principales du problème (d'où le nom de la méthode de déplacements) et donc la fonctionnelle appropriée est π_p .

Les déplacements à l'intérieur de l'élément $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ sont interpolés par les déplacements aux nœuds \mathbf{d} : $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$, où \mathbf{N} est la matrice des fonctions d'interpolation.

Le champ de déformation est exprimé en terme de déplacements aux nœuds par la relation $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}$, où \mathbf{B} dérive de \mathbf{N} par la $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$, avec \mathbf{L} un opérateur de dérivation.

La substitution de $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$ et de $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$ dans la relation (5-4) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{d} \, d\Omega - \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, d\Omega + \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Omega + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{N} \mathbf{d} \, d\Omega + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{c}_f \, d\Omega \\ & - \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega - \mathbf{d}^T \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \sum_{i=1}^p u_i p_i \end{aligned} \quad (3-11)$$

Considérons la structure et subdivisons la maintenant en m éléments (e).

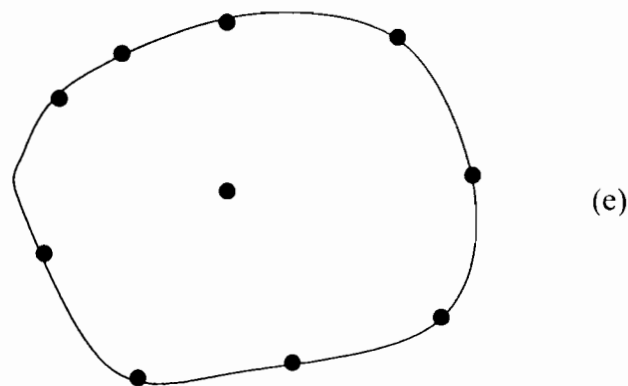


Figure3.2 : élément (e)

L'énergie potentielle totale de la structure reste inchangée et elle est égale à la somme des énergies des éléments pris séparément.

Pour un élément (e), les déplacements \mathbf{d}_e sont constants. Ce qui permet d'obtenir l'expression de π_p sous la forme:

$$\begin{aligned} (\pi_p)_e = & \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e \, d\Omega \right) \mathbf{d}_e - \mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, d\Omega \right) + \mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Omega \right) + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{N}_e \, d\Omega \right) \mathbf{d}_e + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T \mathbf{c}_f \, d\Omega \right) \mathbf{d}_e - \mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega \right) - \mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \right) - \sum_{i=1}^p u_i p_i \end{aligned} \quad (3-12)$$

En dérivant l'énergie, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\delta\pi_p)_e &= \delta\mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e d\Omega \right) \mathbf{d}_e - \delta\mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \right) + \delta\mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega \right) + \delta\mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{N}_e d\Omega \right) \ddot{\mathbf{d}}_e + \\
&\delta\mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T \mathbf{c}_f \mathbf{N}_e d\Omega \right) \dot{\mathbf{d}}_e - \delta\mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega \right) - \delta\mathbf{d}_e^T \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right) - \sum_{i=1}^p \delta u_i p_i, \quad (3-13)
\end{aligned}$$

A l'état d'équilibre stable (état stationnaire), la dérivée de $(\delta\pi_p)_e$ s'annule. Ce qui permet d'écrire la relation force-déplacement (relation (3-13)) sous la forme :

$$\delta\mathbf{d}_e^T \mathbf{r}_e = \delta\mathbf{d}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e + \delta\mathbf{d}_e^T \mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{d}}_e + \delta\mathbf{d}_e^T \mathbf{c}_e \dot{\mathbf{d}}_e + \delta\mathbf{d}_e^T \mathbf{f}_{e0} \quad (3-14a)$$

et après simplification, on obtient

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e + \mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{d}}_e + \mathbf{c}_e \dot{\mathbf{d}}_e + \mathbf{f}_{e0} \quad (3-14b)$$

Des relations (3-13) et (3-14), on tire les expressions de \mathbf{k}_e ; \mathbf{m}_e ; \mathbf{c}_e ; \mathbf{f}_{e0} :

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e d\Omega_e ; \quad \mathbf{m}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{N}_e d\Omega_e ; \quad \mathbf{c}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{c}_f \mathbf{N}_e d\Omega_e$$

$$\mathbf{f}_{e0} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega_e - \int_{\Gamma_{ie}} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_e - \sum_{i=1}^p \mathbf{N}_i p_i \quad (3-14 c, d, e, f, g)$$

$$\mathbf{r}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{ie}} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega_e + \sum_{i=1}^p \mathbf{N}_i p_i$$

L'assemblage des matrices de rigidité élémentaires d'une part et les efforts élémentaire de l'autre conduit à l'équilibre global de la structure :

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{k}_e \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \sum \mathbf{r}_e \quad (3-15)$$

L'équilibre global donne la relation force-déplacement globale qui s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{KD} = \mathbf{R} \quad (3-16)$$

4. Formulation variationnelle mixte

L'ensemble des équations différentielles qui nous permettent de procéder à la discrétisation n'est déterminé que si la formulation est irréductible (méthode des déplacements) ou mixte.

Donc si nous considérons un système d'équations avec plusieurs variables dépendantes \mathbf{u} qui s'écrit sous la forme

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}}) = 0 \text{ dans le domaine } \Omega$$

et (4-1a, b)

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = 0 \text{ sur le bord } \partial\Omega$$

dans lequel aucune des composantes ne peut être éliminée sans changer la définition du problème. la formulation est dite irréductible. Dans le cas contraire, on a une formulation mixte. Jusqu'ici nous n'avons utilisé que la formulation variationnelle irréductible basée sur la méthode des déplacements ; une méthode dont la principale variable est l'inconnue \mathbf{u} .

Le principe des travaux virtuels est utilisé pour établir les conditions d'équilibre qui s'écrivent sous la forme

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (4-2)$$

où $\bar{\mathbf{t}}$ est la force surfacique sur Γ_1 et avec

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4-3)$$

comme la relation constitutive (en omettant bien sûr les contraintes et les déformations initiales).

La déformation est liée au déplacement par l'opérateur matriciel \mathbf{L} tel que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \delta \mathbf{u} \quad (4-4)$$

Etablissons d'abord les formes mixtes des relations, $\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\varepsilon}$ avant de procéder à la formulation mixte.

4.1. Relation déformation-déplacement $\mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}$

La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est interpolée par la relation

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4-5)$$

et satisfait approximativement à la relation constitutive

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{L}\mathbf{u} \quad (4-6)$$

La forme intégrale de cette relation s'écrit alors sous la forme .

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma}' (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (4-7)$$

où l'expression « entre parenthèses » est l'équation (4-6) et $\delta\boldsymbol{\sigma}'$ est introduit comme une fonction de pondération.

Les équations (4-2) et (4-7) qui définissent le problème sont équivalentes aux conditions de stationnarité de la fonctionnelle

$$\Pi_{HR} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}' (\mathbf{L}' \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{u}' (\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma \quad (4-8)$$

où la force surfacique est

$$\mathbf{t} = \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$$

et

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u$$

C'est le principe variationnel de Heillinger-Reissner [D].

4.2. Relation contrainte-déplacement $\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}$

Cette forme est obtenue exactement de la même manière que celle de $\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}$.

Ainsi la déformation est interpolée par la relation

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4-9)$$

et satisfait à la relation constitutive

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (4-10)$$

La forme intégrale de cette relation s'écrit alors sous la forme

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}'^T \mathbf{E}^T (\mathbf{L}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = 0 \quad (4-11)$$

4.3. Relation contrainte-déformation-déplacement $\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}$

La forme mixte appliquée à toutes les variables entrant dans le problème d'élasticité conduit à trois équations :

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}'^T (\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (4-12a)$$

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}'^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = 0 \quad (4-12b)$$

$$\int_{\Omega} \delta (\mathbf{L}\mathbf{u})'^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}'^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (4-12c)$$

Ces équations sont équivalentes aux conditions de stationnarité de la fonctionnelle

$$\Pi_{mix} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}'^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}'^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}'^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} b' (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \quad (4-13)$$

où

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$$

C'est le principe variationnel de Hu-Washizu [D]..

4.4. Principe de l'énergie complémentaire

Nous supposons que les conditions d'équilibre sont satisfaites dans le domaine Ω et sur le bord Γ_t . Ainsi on a

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{dans le domaine } \Omega$$

et

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{sur le bord } \Gamma_t$$

Seules les conditions aux limites des relations constitutives et des déplacements restent à vérifier, c'est-à-dire

$$\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{dans le domaine } \Omega$$

et

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur le bord } \Gamma_u$$

La forme intégrale des équations (4-15) s'écrit

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}' (\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\alpha}' (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0$$

En utilisant le théorème de Green (4-15) devient

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma}' \mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}' \delta\boldsymbol{\sigma})' \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\alpha}' \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{u} d\Gamma = 0$$

En supposant que les fonctions tests vérifient l'équation d'équilibre homogène, c'est-à-dire

$$\mathbf{L}' \delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{dans le domaine } \Omega$$

et

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad \text{sur le bord } \Gamma_t$$

on obtient

$$\delta\pi = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma}' \mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\alpha}' \bar{\mathbf{u}} d\Gamma = 0$$

Le principe variationnel de l'énergie complémentaire s'écrit alors [D].

$$\pi = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (4-19)$$

4.5. Formulation mixte

La formulation mixte est basée sur le principe de l'énergie complémentaire.

« La minimisation de l'énergie π qui donne la solution exacte $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ est équivalente à la minimisation de la fonctionnelle π^* »

En effet, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{dans le domaine } \Omega$$

et

(4-20a, b)

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} \quad \text{sur le bord } \Gamma_t$$

Nous allons maintenant vérifier les relation constitutive et les conditions aux limites, c'est à dire

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{dans le domaine } \Omega$$

et

(4-21)

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{sur le bord } \Gamma_u$$

Ecrivons ces relations sous forme intégrale, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{t}^T (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (4-22)$$

En appliquant le théorème de Grenn à la relation (4-22), nous obtenons

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{L}^T \delta \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{t}^T \tilde{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{t}^T \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (4-23)$$

En supposant que les fonctions tests vérifient les équations d'équilibre

$$\mathbf{L}^T \delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{dans le domaine } \Omega$$

et

(4-24a,b)

$$\delta \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad \text{sur le bord } \Gamma_t$$

La relation (4-23) devient alors

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{u}} d\Gamma = \mathbf{0} \quad (4-25)$$

L'énergie correspondante s'écrit

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}^T \tilde{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (4-26)$$

avec

$$\pi^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (4-27)$$

$$\pi = \pi^* + \text{constante} \quad (4-29)$$

[D].

5. Modèle isoparamétrique

La modèle isoparamétrique permet de représenter les éléments quadrilatères en des formes non rectangulaires. C'est une technique utilisée dans le passé qui s'applique aux éléments plaques et coques. Pour ces éléments, on interpole les champs de déplacement et la géométrie de l'élément par des fonctions d'interpolation de degrés différents ou non. Le champ de déplacement à l'intérieur de l'élément est exprimé en fonction des déplacements aux nœuds appelés degrés de liberté (ddl) et des fonctions d'interpolation \mathbf{N} . De manière analogue, les coordonnées globales à l'intérieur de l'élément sont exprimées en fonction des coordonnées nodales et des fonctions d'interpolation $\tilde{\mathbf{N}}$.

Symboliquement :

- Le champ de déplacement à l'intérieur d'un élément est défini par la relation

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (5-1)$$

où \mathbf{d} est le vecteur déplacement aux nœuds

- Les coordonnées globales à l'intérieur de l'élément sont définies par la relation

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{c} \quad (5-2)$$

où \mathbf{c} est le vecteur coordonnées aux nœuds

Les fonctions d'interpolation \mathbf{N} et $\tilde{\mathbf{N}}$ sont exprimées en fonction de ζ , η et ξ en 3D et ζ , η en 2D.

Un élément est dit isoparamétrique si les fonctions d'interpolation \mathbf{N} et $\tilde{\mathbf{N}}$ sont identiques. Dans la suite, nous allons considérer un élément isoparamétrique plan illustré par la figure (5-1).

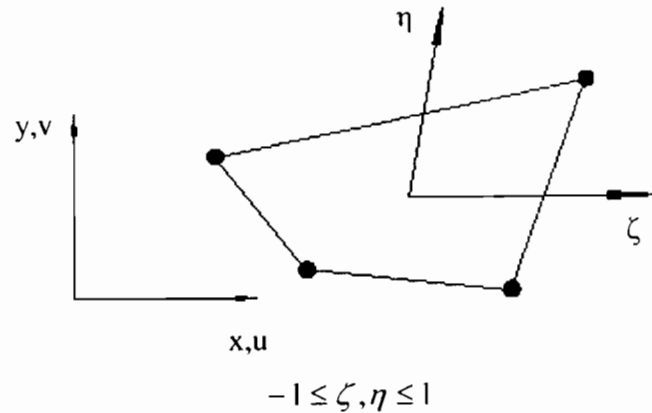


Figure 5-1 : élément isoparamétrique plan

L'élément étant isoparamétrique les mêmes fonctions seront utilisées pour interpoler les coordonnées et les déplacements d'un point à l'intérieur de l'élément.

Ainsi, nous avons

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_i N_i x_i \\ \sum_i N_i y_i \end{Bmatrix} = \mathbf{Nc} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_i N_i u_i \\ \sum_i N_i v_i \end{Bmatrix} = \mathbf{Nd} \quad (5-3a,b)$$

où

$$\mathbf{c} = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad \text{etc}\}^T$$

$$\mathbf{d} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad \text{etc}\}^T \quad (5-4a, b, c)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & \text{etc} \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & \text{etc} \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$ est également exprimée en fonction de ζ et de η . Il s'en suit alors une transformation des coordonnées locales (ζ, η) en coordonnées globales (x, y). Cette matrice de transformation est appelée la matrice jacobienne dont le déterminant est le jacobien.

Pour déterminer le jacobien, considérons la fonction $\phi = \phi(\zeta, \eta)$. La dérivée de cette fonction par rapport à ζ et par rapport à η nous donne

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{cases} = \mathbf{J} \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (5-5)$$

où \mathbf{J} est la matrice jacobienne,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

La matrice de rigidité élémentaire s'écrit alors

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e h dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e h \mathbf{J} d\zeta d\eta \quad (5-6)$$

où h est l'épaisseur de l'élément et \mathbf{J} le jacobien,

$$\mathbf{J} = \det \mathbf{J} = \mathbf{J}_{11} \mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{12} \mathbf{J}_{21} \quad (5-7)$$

et \mathbf{E} est la matrice de rigidité élastique. Elle est symétrique et vaut :

- Si le problème est un état plan de contrainte, c'est à dire $\sigma_z = 0$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

- Si le problème est un état plan de déformation, c'est à dire $\varepsilon_z = 0$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

où E est le module d'élasticité ou module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Le vecteur des forces équivalentes aux nœuds d'un élément s'écrit alors

$$\mathbf{r}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} h dx dy + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dx dy + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 h dx dy - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 h dx dy + \mathbf{N}^T \mathbf{P} \quad (5-10)$$

où \mathbf{N}_e est obtenue par évaluation de \mathbf{N} aux coordonnées des points où la force concentrée \mathbf{P} est appliquée. Dans le repère local \mathbf{r}_e s'écrit sous la forme

$$\mathbf{r}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} h J d\zeta d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} J d\zeta d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 h J d\zeta d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 h J d\zeta d\eta + \mathbf{N}^T \mathbf{P} \quad (5-11)$$

Pour une plaque uniformément chargée telle que

$$\bar{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$$

\mathbf{r}_e s'écrit

$$\mathbf{r}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} J d\zeta d\eta + \mathbf{N}^T \mathbf{P} \quad (5-12)$$

Déterminons la matrice \mathbf{B} . Nous avons

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{Bmatrix} \quad (5-13)$$

$$\begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u / \partial \zeta \\ \partial u / \partial \eta \\ \partial v / \partial \zeta \\ \partial v / \partial \eta \end{Bmatrix} \quad (5-14)$$

$$\begin{Bmatrix} \partial u / \partial \zeta \\ \partial u / \partial \eta \\ \partial v / \partial \zeta \\ \partial v / \partial \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial \zeta & 0 & \partial N_2 / \partial \zeta & 0 & \partial N_3 / \partial \zeta & etc \\ \partial N_1 / \partial \eta & 0 & \partial N_2 / \partial \eta & 0 & \partial N_3 / \partial \eta & etc \\ 0 & \partial N_1 / \partial \zeta & 0 & \partial N_2 / \partial \zeta & 0 & etc \\ 0 & \partial N_1 / \partial \eta & 0 & \partial N_2 / \partial \eta & 0 & etc \end{bmatrix} \mathbf{x} \mathbf{d} \quad (5-15)$$

La matrice \mathbf{B} est le produit des trois matrices rectangulaires des équations (5-13), (5-13) et (5-15). La matrice $\boldsymbol{\Gamma}$ est l'inverse de la matrice jacobienne \mathbf{J} .

6. Fonctions d'interpolation

Le point de départ de la méthode des éléments finis est le choix d'un champ polynomial \mathbf{G} .

Le champ de déplacements \mathbf{u} à l'intérieur de l'élément est interpolé par le champ de déplacements \mathbf{d} aux nœuds par la relation

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (6-1)$$

où \mathbf{N} est la matrice des fonctions d'interpolation.

Ce champ de déplacements \mathbf{u} doit satisfaire aux critères suivants :

- assurer la compatibilité des déplacements entre éléments adjacents ;
- permettre de reproduire la condition de déformation constante de l'élément.

Le champ de déplacements peut alors être exprimé sous forme d'un polynôme en ζ , η .

Ainsi nous avons

$$\mathbf{u} = \alpha_1 + \alpha_2\zeta + \alpha_3\eta + \alpha_4\zeta^2 + \alpha_5\eta^2 + \alpha_6\zeta\eta + \alpha_7\zeta^3 + \alpha_8\eta^3 + \dots \quad (6-2)$$

Cette relation peut s'écrire sous forme matricielle

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} \quad (6-3)$$

où

$$\mathbf{G} = [1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \eta^2 \quad \zeta\eta \quad \zeta^3 \quad \eta^3 \quad \dots]$$

est un vecteur des polynômes

et

$$\boldsymbol{\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{array} \right\}$$

est un vecteur des coefficients.

Le champ de déplacements aux nœuds s'écrit sous forme d'un système d'équations

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_1 & \eta_1 & \zeta_1^2 & \eta_1^2 & \zeta_1 \eta_1 & \zeta_1^3 & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \zeta_n & \eta_n & \zeta_n^2 & \eta_n^2 & \zeta_n \eta_n & \zeta_n^3 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{Bmatrix}$$

On a donc

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \quad (6-4)$$

d'où

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{d} \quad (6-5)$$

Ce qui nous donne finalement

$$\mathbf{u} = \mathbf{GC}^{-1}\mathbf{d} \quad (6-6)$$

Les relations (6-1) et (6-6) donnent

$$\mathbf{N} = \mathbf{GC}^{-1} \quad (6-7)$$

Nous allons établir dans ce qui suit les fonctions d'interpolation de type H et les fonctions d'interpolation de type P. Dans la suite, seule les fonctions d'interpolation de type P seront utilisées.

6.1. Interpolation Type H

6.1.1. Elément linéique

- Deux nœuds

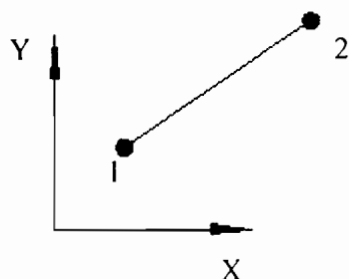


Figure 6-1 : élément réel

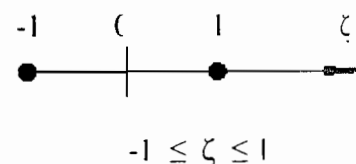


Figure 6-2 : élément de référence

$$x = x(\zeta) = N_1(\zeta)x_1 + N_2(\zeta)x_2$$

$$y = y(\zeta) = N_1(\zeta)y_1 + N_2(\zeta)y_2$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'interpolation, après calcul, sont les suivantes :

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \zeta)$$

- **Trois nœuds**

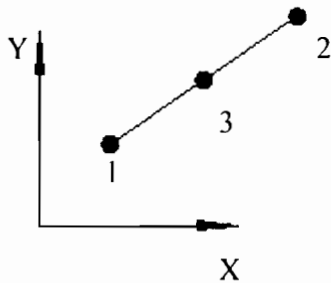


Figure 6-3 : élément réel

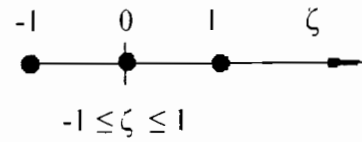


Figure 6-4: élément de référence

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta & \zeta^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'interpolation sont les suivantes :

$$N_1 = \frac{1}{2}(-1 + \zeta)\zeta$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \zeta)\zeta$$

$$N_3 = (1 - \zeta)(1 + \zeta)$$

- Quatre nœuds

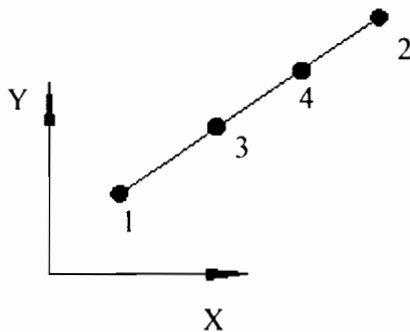


Figure 6-5 : élément réel

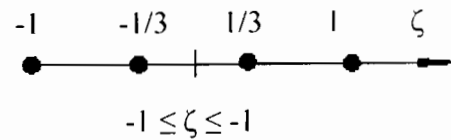


Figure 6-6 : élément de référence

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'interpolation sont les suivantes :

$$N_1 = \frac{1}{16}(1-\zeta)(3\zeta-1)(3\zeta+1) \quad N_2 = \frac{1}{16}(1+\zeta)(3\zeta-1)(3\zeta+1)$$

$$N_3 = \frac{9}{16}(1-\zeta)(1+\zeta)(1-3\zeta) \quad N_4 = \frac{9}{16}(1-\zeta)(1+\zeta)(3\zeta+1)$$

6.1.2. Élément rectangulaire

- Quatre nœuds

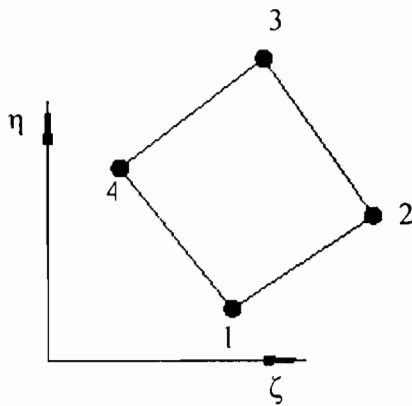


Figure 6-7 : élément réel

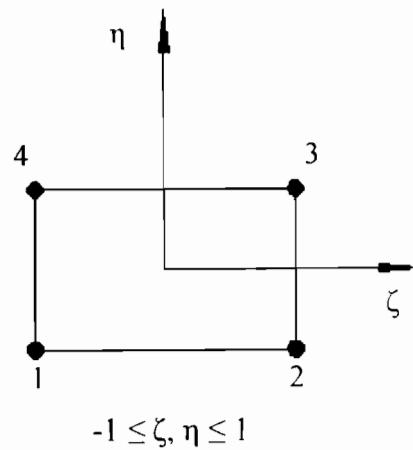


Figure 6-8 : élément de référence

L'ensemble des polynômes d'interpolation est de la forme :

$$\alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta \eta$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = [1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta\eta]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Après le calcul, on obtient les fonctions d'interpolation suivantes

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta) \end{aligned}$$

- **Huit nœuds**

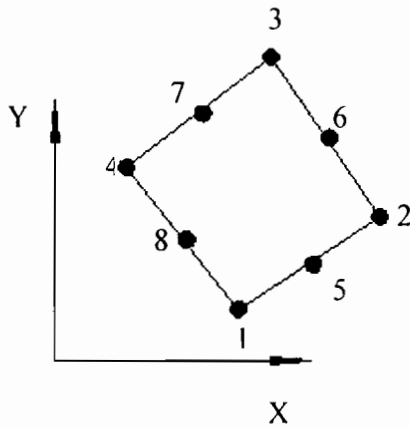


Figure 6-9 : élément réel

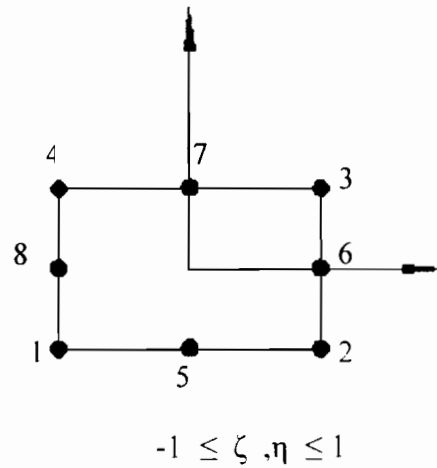


Figure 6-10 : élément de référence

L'ensemble des polynômes d'interpolation s'écrit sous la forme :

$$\alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta^2 + \alpha_5 \zeta \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \zeta^2 \eta + \alpha_8 \zeta \eta^2$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{GC}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = [1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \zeta \eta \quad \eta^2 \quad \zeta^2 \eta \quad \zeta \eta^2]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \zeta - \eta)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(-1 + \zeta - \eta)(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(-1 + \zeta + \eta)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(-1 - \zeta - \eta)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 - \zeta^2)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \zeta)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 - \zeta^2)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \zeta)$$

• Neuf nœuds

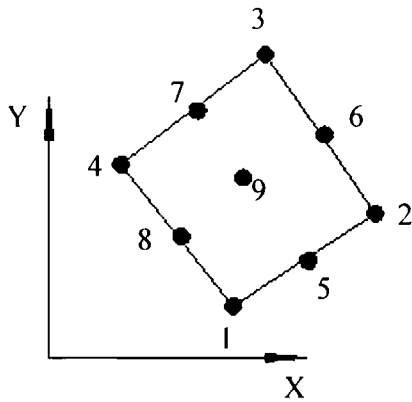
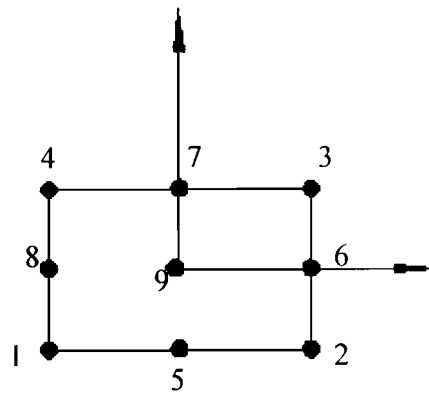


Figure 6-11 : élément de réel



$$-1 \leq \zeta, \eta \leq 1$$

Figure 6-12 : élément référence

L'ensemble des polynômes d'interpolation s'écrit sous la forme :

$$\alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta^2 + \alpha_5 \zeta \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \zeta^2 \eta + \alpha_8 \zeta \eta^2 + \alpha_9 \zeta^2 \eta^2$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{GC}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = [1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \zeta \eta \quad \eta^2 \quad \zeta^2 \eta \quad \zeta \eta^2 \quad \zeta^2 \eta^2]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} \zeta (-1 + \eta) (2\zeta \eta + \zeta + 1) & N_2 &= -\frac{1}{4} \zeta (-1 + \eta) (1 + \zeta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4} \zeta (1 + \eta) (2\eta - 1) (1 + \zeta) & N_4 &= \frac{1}{4} \zeta (1 + \eta) (1 + \zeta - 2\eta) \\
 N_5 &= -\frac{1}{2} (-1 + \eta) (1 + \zeta) (\zeta - \eta + 2\zeta \eta) & N_6 &= -\zeta (-1 + \eta) (1 + \eta) (1 + \zeta) \\
 N_7 &= -\frac{1}{2} (1 + \eta) (1 + \zeta) (\zeta - \eta) & N_8 &= -\zeta^2 (-1 + \eta) (1 + \eta) \\
 N_9 &= (-1 + \eta) (1 + \eta) (1 + \zeta) (2\zeta - 1) & &
 \end{aligned}$$

• Douze nœuds

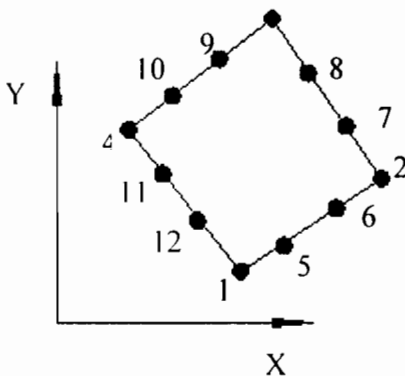
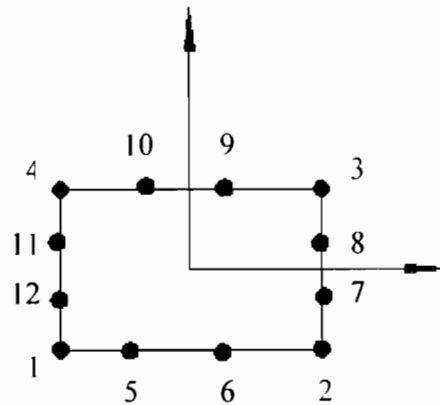


Figure 6-13 : élément réel



$$-1 \leq \zeta, \eta \leq 1$$

Figure 6-14 : élément de référence

L'ensemble des polynômes d'interpolation s'écrit sous la forme :

$$\alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta^2 + \alpha_5 \zeta \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \zeta^2 \eta + \alpha_8 \zeta \eta^2 + \alpha_9 \zeta^3 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \zeta^3 \eta + \alpha_{12} \zeta \eta^3$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta & \eta & \zeta^2 & \zeta \eta & \eta^2 & \zeta^2 \eta & \zeta \eta^2 & \zeta^3 & \eta^3 & \zeta^3 \eta & \zeta \eta^3 \end{bmatrix}$$

o Pour les nœuds du coin $i = 1, 2, 3, 4$

$$N_i = \frac{1}{32} (1 - \zeta \zeta_i) (1 + \eta \eta_i) (-10 + 9\zeta^2 + 9\eta^2)$$

où $\zeta_i = -1, 1, 1, -1$ pour $i = 1, 2, 3, 4$
 $\eta_i = -1, -1, 1, 1$ pour $i = 1, 2, 3, 4$

- Pour les nœuds du côté $\zeta = \pm 1$ pour lesquels $i = 7, 8, 11, 12$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \zeta \zeta_i) (1 + 9\eta \eta_i) (1 - \eta^2)$$

où

$$\zeta = \pm 1 \text{ et } \eta_i = \pm \frac{1}{3}$$

- Pour les côtés $\zeta_i = \pm 1$ et $\eta = \pm \frac{1}{3}$, pour lesquels $i = 5, 6, 9, 10$:

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + 9\zeta \zeta_i) (1 + \eta \eta_i) (1 - \zeta^2)$$

où

$$\eta_i = \pm 1 \text{ et } \zeta = \pm \frac{1}{3}$$

6.1.3. Élément triangulaire

- Trois nœuds

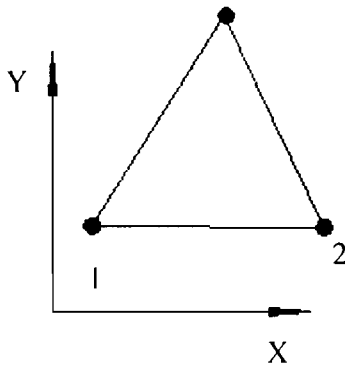


Figure 6-15 : élément réel référence

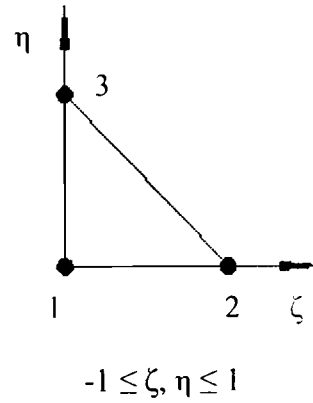


Figure 6-16 : élément de référence

L'ensemble des polynômes d'interpolation s'écrit sous la forme

$$\alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = [1 \quad \zeta \quad \eta]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \zeta - \eta ; \quad N_2 = \zeta ; \quad N_3 = \eta$$

• Six nœuds

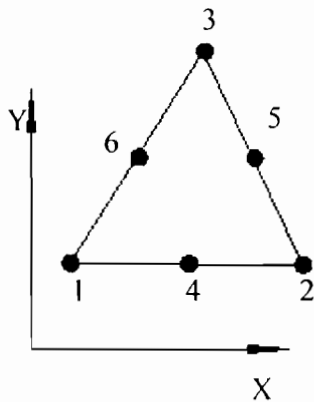
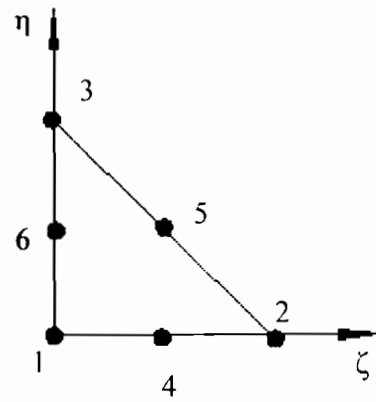


Figure 6-17 : élément réel



$$-1 \leq \zeta, \eta \leq 1$$

Figure 6-18 : élément de référence

L'ensemble des polynômes d'interpolation s'écrit sous la forme

$$\alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta^2 + \alpha_5 \zeta \eta + \alpha_6 \eta^2$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = [1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \zeta\eta \quad \eta^2]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - 3\zeta - 3\eta + 2\zeta^2 + 8\zeta\eta + 2\eta^2$$

$$N_2 = \zeta(-1 + 2\zeta)$$

$$N_3 = \eta(-1 + 2\eta)$$

$$N_4 = -4\zeta(-1 + \zeta + 2\eta)$$

$$N_5 = 4\zeta\eta$$

$$N_6 = -4\eta(-1 + \zeta + \eta)$$

• Dix nœuds

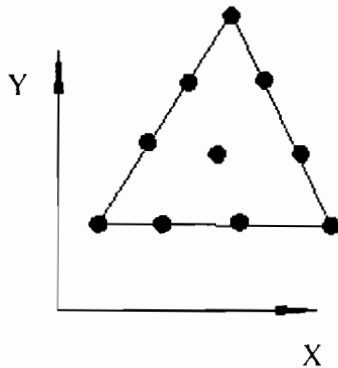


Figure 6-19 : élément réel

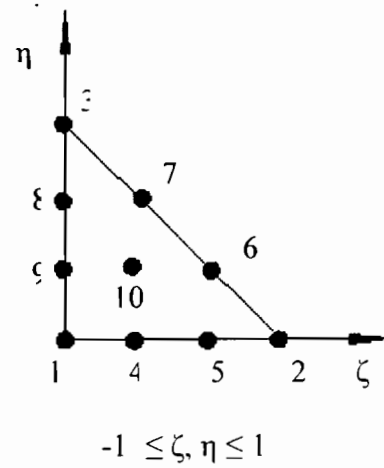


Figure 6-20 élément de référence

L'ensemble des polynômes d'interpolation s'écrit sous la forme

$$\alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta^2 + \alpha_5 \zeta \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \zeta^3 + \alpha_8 \zeta^2 \eta + \alpha_9 \zeta \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{GC}^{-1}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta & \eta & \zeta^2 & \zeta \eta & \eta^2 & \zeta^3 & \zeta^2 \eta & \zeta \eta^2 & \eta^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = -\frac{1}{2}(3\eta - 2 + 3\zeta)(-1 + \zeta + \eta)(3\eta - 1 + 3\zeta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}\zeta(-1 + 3\zeta)(3\zeta - 2)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\eta(-1 + 3\eta)(3\eta - 2)$$

$$N_4 = \frac{9}{2}\zeta(-2 + 3\eta + 3\zeta)(-1 + \zeta + \eta)$$

$$N_5 = -\frac{9}{2}\zeta(-1 + 3\zeta)(-1 + \zeta + \eta)$$

$$N_6 = \frac{9}{2}\zeta\eta(-1 + 3\zeta)$$

$$N_7 = \frac{9}{2}\zeta\eta(-1 + 3\eta)$$

$$N_8 = -\frac{9}{2}\eta(-1 + 3\eta)(-1 + \zeta + \eta)$$

$$N_9 = \frac{9}{2}\eta(3\eta - 2 + 3\zeta)(-1 + \zeta + \eta)$$

$$N_{10} = -27\zeta\eta(-1 + \zeta + \eta)$$

6.2. Interpolation Type P

Les fonctions d'interpolation de type P, appelées aussi fonctions hiérarchiques, sont déterminées à partir des polynômes de Legendre. Il faut noter qu'il n'existe pas une méthode unique pour déterminer ces fonctions, cependant les critères suivants doivent être vérifiés

- Permettre le calcul efficace des matrices de rigidité,
- Minimiser l'erreur d'approximation c'est-à-dire l'erreur d'interpolation.
- Assurer la performance de la procédure de la solution itérative.

6.2.1. Élément linéique

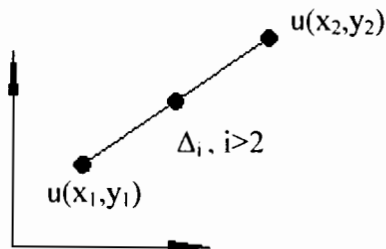


Figure 6-21 : élément réel

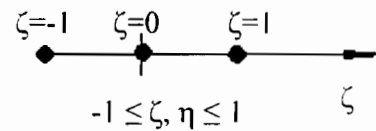


Figure 6-22 : élément de référence

Les fonctions d'interpolation sont organisées en deux catégories :

- **Aux nœuds externes**

$$N_1(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$$

$$N_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta)$$

- **Aux nœuds internes**

$$N_i(\zeta) = \phi_{i-1}(\zeta) \quad ; \quad i = 3, 4, \dots, p+1$$

où ϕ_j est défini en terme de polynômes de Legendre p_{j-1} par :

$$\phi_j(\zeta) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\zeta} p_{j-1}(t) dt \quad ; \quad j = 2, 3, \dots$$

D'après les propriétés du polynôme de Legendre, ϕ_j vérifie la relation :

$$\phi_j(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} [p_j(\zeta) - p_{j-2}(\zeta)]$$

ϕ_j est un polynôme de degré j .

De la définition de ϕ_j et de la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre, nous avons

$$\phi_j(-1) = \phi_j(+1) = 0 \quad , \quad j = 2, 3, \dots$$

et

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_i}{d\zeta} \frac{d\phi_j}{d\zeta} d\zeta = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$$

Les polynômes de Legendre sont les solutions de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad ; \quad -1 < x < 1$$

Les premiers polynômes de Legendre sont

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$p_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

$$p_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$$

La formule générale du polynôme de Legendre s'écrit :

$$p_l(x) = \frac{1.3.5\dots(2l-1)}{l!} \left[x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2.4(2l-1)(2l-3)} x^{l-4} - \dots \right]$$

La formule générale explicite du polynôme de Legendre s'écrit

$$p_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-2k)!(l-k)!} x^{l-2k}$$

où $\lfloor l/2 \rfloor$ désigne le plus grand entier contenu dans $l/2$.

Quelques relations de récurrence des polynômes de Legendre.

$$a) \quad (2l+1)xp_l(x) = (l+1)p_{l+1}(x) + lp_{l-1}(x), \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Cette relation permet de calculer $p_{l+1}(x)$ si $p_l(x)$ et $p_{l-1}(x)$ sont connus, ainsi elle permet de calculer tous les polynômes de Legendre un par un en commençant par $p_0(x) = 1$ et $p_1(x) = x$.

$$b) \quad p_{l-1}(x) = xp_l(x) + \frac{1-x^2}{l} p'_l(x) \quad (l \geq 1)$$

$$p_{l+1}(x) = xp_l(x) - \frac{1-x^2}{l+1} p'_l(x) \quad (l \geq 0)$$

Ces relations peuvent être combinées pour établir l'équation différentielle du second ordre satisfaite par p_l , appelée l'équation différentielle de Legendre :

$$c) (1-x^2)p_l'' - 2xp_l' + (l^2+1)p_l = 0, \text{ pour tout } l$$

d) Propriété d'orthogonalité du polynôme de Legendre

$$\int_{-1}^{+1} p_l(x)p_m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$$

$$e) p_l(-1) = (-1)^l$$

$$p_l(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ est impair} \\ (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{l!}{2^l \left(\frac{l}{2}!\right)^2} & \text{si } l \text{ est pair} \end{cases}$$

6.2.2. Élément rectangulaire

Les fonctions polynomiales sont déterminées par l'ensemble de tous les monômes $\zeta^i \eta^j$; $i, j = 0, 1, \dots, p$; $i+j = 0, 1, \dots, p$, complétés par les monômes suivants

- $\zeta \eta$ dans le cas où $p=1$;
- $\zeta^p \eta$ et $\zeta \eta^p$ dans le cas où $p \geq 2$

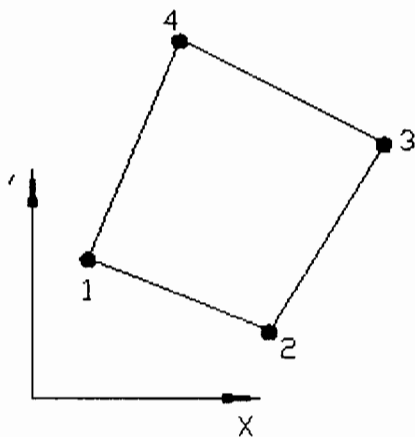


Figure 6-23 élément réel (Ω_q)

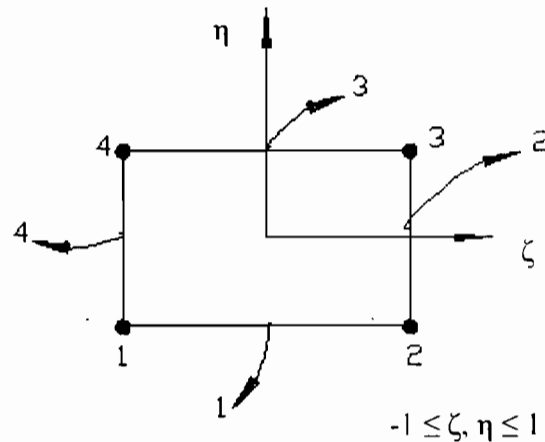


Figure 6-24 : élément quadrilatère standard

Les fonctions d'interpolation sont basées sur les polynômes de Legendre et, par conséquent ont plus de propriétés favorables du point de vue de l'erreur d'arrondi par rapport à l'accroissement du degré du polynôme. Il est utile d'organiser les fonctions d'interpolation en trois catégories : fonctions d'interpolation aux nœuds des coins, aux nœuds des côtés et aux nœuds internes.

Définissons tout d'abord deux espaces des polynômes :

- $S^p(\Omega_q)$, l'espace des polynômes définis sur Ω_q engendré par l'ensemble de tous les monômes $\zeta^i \eta^j$; $i, j = 0, 1, 2, \dots, p$; $i+j = 0, 1, 2, \dots, p$ complétés par les monômes suivants :
 - dans le cas où $p=1$, le monôme $\zeta \eta$;
 - dans le cas où $p \geq 2$, les monômes $\zeta^p \eta$ et $\zeta \eta^p$.

- $S^{p,q}(\Omega_q)$, l'espace des polynômes définis sur Ω_q engendré par l'ensemble de tous les monômes $\zeta^i \eta^j$; $i=0, 1, 2, \dots, p$; $j=0, 1, 2, \dots, q$.

6.2.2.1. Fonctions d'interpolation hiérarchiques

Les fonctions d'interpolation sont donc les suivantes :

- **Aux nœuds des coins**

Il y a quatre fonctions d'interpolation aux nœuds des coins. Ces fonctions sont exactement les mêmes que celles du type H de l'élément quadrilatère à quatre nœuds :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta) \end{aligned}$$

- **Aux nœuds des côtés**

Il y a $4(p-1)$ fonctions d'interpolation associées aux côtés des éléments finis ($p \geq 2$)

- **Côté 1**

$$N_i^{(1)} = \frac{1}{2}(1-\eta)\phi_i(\zeta) \quad ; \quad i=2, 3, \dots, p$$

où $\phi_i(\zeta)$ est une fonction polynomiale définie en terme de polynôme de Legendre par P_{j-1} :

$$\phi_i(\zeta) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\zeta} P_{j-1}(t) dt$$

- **Côté 2**

$$N_i^{(2)} = \frac{1}{2}(1+\zeta)\phi_i(\eta) \quad ; \quad i=2, 3, \dots, p$$

La définition pour les autres côtés est analogue :

- **Côté 3**

$$N_i^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + \eta)\phi_i(\zeta) ; \quad i=2, 3, \dots, p$$

- **Côté 4**

$$N_i^{(4)} = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\phi_i(\eta) ; \quad i=2, 3, \dots, p$$

- **Aux nœuds internes**

Il y a $(p-2)(p-3)/2$ fonctions d'interpolation ($p \geq 4$). Ces fonctions s'écrivent :

$$N_1^{(0)} = \phi_2(\zeta)\phi_2(\eta)$$

$$N_2^{(0)} = \phi_3(\zeta)\phi_2(\eta)$$

$$N_3^{(0)} = \phi_2(\zeta)\phi_3(\eta)$$

$$N_4^{(0)} = \phi_4(\zeta)\phi_2(\eta)$$

$$N_5^{(0)} = \phi_3(\zeta)\phi_3(\eta)$$

$$N_6^{(0)} = \phi_2(\zeta)\phi_4(\eta)$$

etc.

Pour l'espace $S^{p,q}(\Omega_q)$, il y a $(p-1)(q-1)$ fonctions d'interpolation ($p, q \geq 2$). Ces fonctions s'écrivent :

$$N_k^{(0)} = \phi_i(\zeta)\phi_j(\eta) ; \quad i=2, 3, \dots, p ; \quad j=2, 3, \dots, q$$

où l'indice k dépend de la convention du numérotage adopté.

6.2.2.2. Fonctions d'interpolation de type conventionnel

Dans les programmes de calcul par élément fini conventionnel, le degré du polynôme des éléments est souvent égal à 1 ou 2, exceptionnellement égal à 3.

6.2.2.2.1. Élément rectangulaire à quatre nœuds

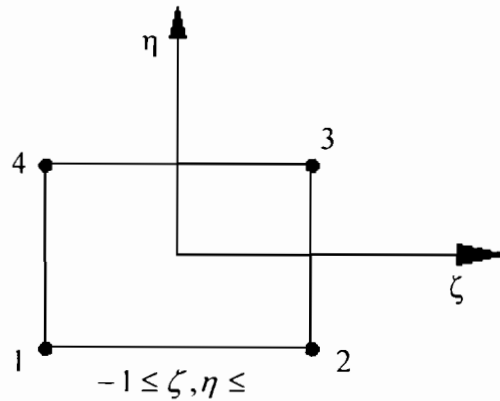


Figure 6-25 : élément quadratique standard à quatre nœuds

Dans le cas où $S^1(\Omega_{st}^{(q)}) = S^{1,1}(\Omega_{st}^{(q)})$, les fonctions d'interpolation sont exactement les mêmes que les fonctions d'interpolation hiérarchiques de degré $p=1$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)
 \end{aligned}$$

6.2.2.2.2. Élément rectangulaire à huit nœuds

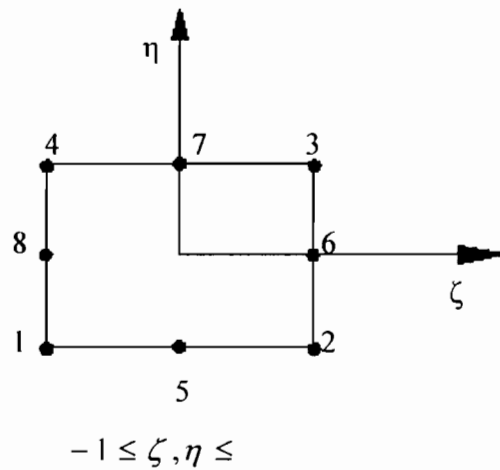
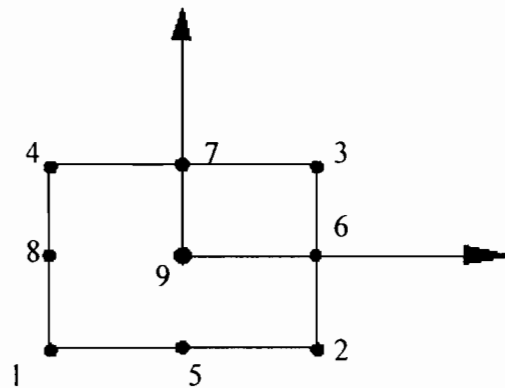


Figure 6-26 : élément quadratique standard à huit nœud

Pour l'espace $S^2(\Omega_{st}^{(q)})$, c'est à dire pour $p=2$, il y a huit (8) fonctions d'interpolation qui sont définies comme suit

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)(-1-\zeta-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)(-1+\zeta-\eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta)(-1+\zeta+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)(-1-\zeta+\eta) \\
 N_5 &= \frac{1}{2}(1-\zeta^2)(1-\eta) & N_6 &= \frac{1}{2}(1+\zeta)(1-\eta^2) \\
 N_7 &= \frac{1}{2}(1-\zeta^2)(1+\eta) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\zeta)(1-\eta^2)
 \end{aligned}$$

6.2.2.2.3. Élément rectangulaire à neuf nœuds



$$-1 \leq \zeta, \eta \leq 1$$

Figure 6-27 : élément quadratique standard à neuf nœuds

Pour l'espace $S^{2,2}(\Omega_{sq}^q)$, il y a neuf fonctions d'interpolation. Les huit premières sont les fonctions d'interpolation de l'élément rectangulaire à huit nœuds, la neuvième est celle du nœud interne. Ces fonctions d'interpolation sont les suivantes

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)(-1-\zeta-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)(-1+\zeta-\eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta)(-1+\zeta+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)(-1-\zeta+\eta) \\
 N_5 &= \frac{1}{2}(1-\zeta^2)(1-\eta) & N_6 &= \frac{1}{2}(1+\zeta)(1-\eta^2) \\
 N_7 &= \frac{1}{2}(1-\zeta^2)(1+\eta) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\zeta)(1-\eta^2) \\
 N_9 &= \frac{1}{2}(1-\zeta^2)(1-\eta^2)
 \end{aligned}$$

6.2.3. Élément triangulaire

L'élément triangulaire standard est le triangle équilatéral nommé (Ω_t)

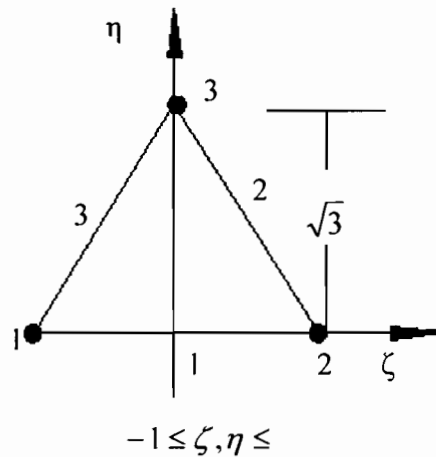


Figure 6-28 : élément triangulaire standard (Ω_t)

Définissons d'abord deux espaces de polynômes :

- $S^p(\Omega_t)$, l'espace des polynômes défini sur (Ω_t) engendré par l'ensemble de tous les monômes $\zeta^i \eta^j$; $i, j = 0, 1, 2, \dots, p$; $i+j = 0, 1, 2, \dots, p$.

Cet espace est fréquemment utilisé.

- $S^{p,q}(\Omega_t)$, l'espace des polynômes défini sur (Ω_t) engendré par l'ensemble de tous les monômes $\zeta^i \eta^j$; $i, j = 0, 1, 2, \dots, p$.

Cet espace est rarement utilisé.

Dans le but de simplifier la notation, les fonctions suivantes seront utilisées :

$$L_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right)$$

$$L_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}}$$

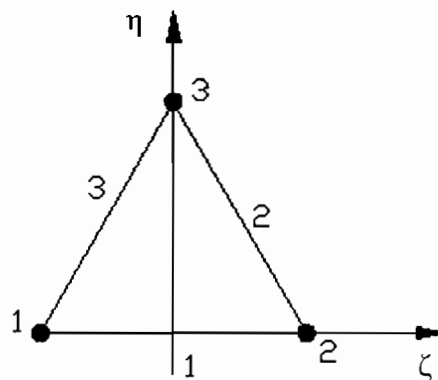
Ces fonctions sont appelées fonctions barycentriques, triangulaire ou de coordonnées surfaciques.

Noter que $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.

6.2.3.1. fonctions d'interpolation hiérarchiques

La procédure de construction des fonctions d'interpolation est la même que pour l'élément quadrilatère standard, à savoir trois catégories de fonctions d'interpolation : aux nœuds des coins ; aux nœuds des côtés et aux nœuds internes.

- **Nœuds des coins**



$$-1 \leq \zeta, \eta \leq 1$$

Figure 6-29 : élément de référence

Il y a trois fonctions d'interpolation nodales aux coins : L_1 , L_2 et L_3 . Ces fonctions sont les mêmes que celles pour l'élément triangulaire standard à trois nœuds situés aux coins du triangle :

$$N_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right)$$

$$N_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}}$$

- **Nœuds des côtés**

Il y a $3(p-1)$ fonctions d'interpolation construites comme celles de l'élément quadrilatère.

Définissons $\phi_j(\zeta)$ comme suit :

$$\phi_j(\zeta) = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2) \varphi_j(\zeta) ; j = 2, 3, \dots, p$$

où $\varphi_j(\zeta)$ est une fonction polynomiale définie en terme de polynôme de Legendre p_{j-1} par :

$$\varphi_j(\zeta) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\zeta} p_{j-1}(t) dt$$

Ainsi ;

$$\varphi_2(\zeta) = -\sqrt{6} ; \varphi_3(\zeta) = -\sqrt{10}\zeta ; \varphi_4(\zeta) = -\sqrt{\frac{7}{8}}(5\zeta^2 - 1).$$

Les fonctions de forme des nœuds de côté sont exprimées en fonction des fonctions barycentriques L_1, L_2 et L_3 .

- **Côté 1**

$$N_i^{(1)} = L_1 L_2 \varphi_i(L_2 - L_1) ; i = 2, 3, \dots, p$$

où

$$L_1 L_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right)$$

et

$$L_2 - L_1 = \zeta$$

Donc

$$N_i^{(1)} = \frac{1}{4} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \varphi_i(\zeta) ; i = 2, 3, \dots, p$$

- **Côté 2**

$$N_i^{(2)} = L_2 L_3 \varphi_i(L_3 - L_2) ; i = 2, 3, \dots, p$$

où

$$L_2 L_3 = \frac{\eta}{2\sqrt{3}} \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right)$$

et

$$L_3 - L_2 = \frac{1}{2} (-1 - \zeta + \eta\sqrt{3})$$

donc

$$N_i^{(2)} = \frac{\eta}{2\sqrt{3}} \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \varphi_i \left[\frac{1}{2} \left(-1 - \zeta + \eta\sqrt{3} \right) \right] ; i = 2, 3, \dots, p$$

- **Côté 3**

$$N_i^{(3)} = L_3 L_1 \varphi_i(L_1 - L_3) ; i = 2, 3, \dots, p$$

où

$$L_3 L_1 = \frac{\eta}{2\sqrt{3}} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right)$$

et

$$L_1 - L_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \zeta - \eta\sqrt{3} \right)$$

d'où

$$N_i^{(3)} = \frac{\eta}{2\sqrt{3}} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \varphi_i \left[\frac{1}{2} \left(1 - \zeta - \eta\sqrt{3} \right) \right] ; i = 2, 3, \dots, p$$

- **Nœuds internes**

Pour l'espace $S^p(\Omega_t)$, la fonction d'interpolation du premier nœud s'écrit :

$$N_1^{(0)} = L_1 L_2 L_3$$

Les autres fonctions d'interpolation des autres nœuds internes sont générées par la multiplication de $N_1^{(0)}$ par les polynômes de Legendre et les produits des polynômes de Legendre :

$$N_2^{(0)} = L_1 L_2 L_3 P_1(L_2 - L_1)$$

$$N_3^{(0)} = L_1 L_2 L_3 P_1(2L_3 - 1)$$

Ainsi nous avons

$$L_1 L_2 L_3 = \frac{\eta}{4\sqrt{3}} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right)$$

$$L_2 - L_1 = \zeta$$

$$2L_3 - 1 = \frac{2\eta}{\sqrt{3}} - 1$$

Les trois premières fonctions d'interpolation aux nœuds internes s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} N_1^{(0)} &= \frac{\eta}{4\sqrt{3}} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\ N_2^{(0)} &= \frac{\eta}{4\sqrt{3}} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) P_1(\zeta) \\ N_3^{(3)} &= \frac{\eta}{4\sqrt{3}} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) P_1\left(\frac{2\eta}{\sqrt{3}} - 1\right) \end{aligned}$$

6.2.3.2. Fonction d'interpolation de type conventionnel

Les fonctions d'interpolation conventionnelles pour l'élément triangulaire sont construites de sorte qu'elles correspondent aux fonctions d'interpolation conventionnelles pour l'élément rectangulaire.

6.2.3.2.1. Élément triangulaire à trois nœuds

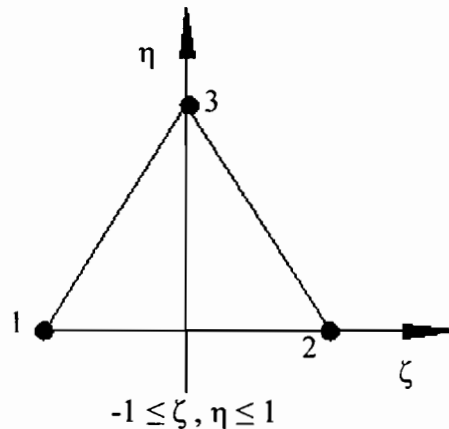


Figure 6-30 : élément triangulaire standard à trois nœuds

Les fonctions d'interpolation correspondant à $p=1$ sont exactement les mêmes que les fonctions hiérarchiques de degré 1. Ces fonctions sont les suivantes

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\ N_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\ N_3 &= \frac{\eta}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

6.2.3.2.2. Élément triangulaire à six nœuds

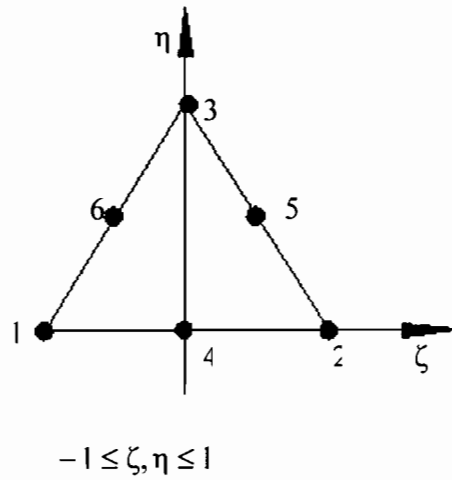


Figure 6-31 : élément triangulaire standard à six nœuds

Dans le cas de $p=2$ les six fonctions d'interpolation sont les suivantes

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \left(-\zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) & N_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \left(\zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\
 N_3 &= \frac{\eta}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\eta}{\sqrt{3}} - 1 \right) & N_4 &= \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\
 N_5 &= \frac{2\eta}{\sqrt{3}} \left(1 + \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) & N_6 &= \frac{2\eta}{\sqrt{3}} \left(1 - \zeta - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right)
 \end{aligned}$$

7. Blending function

La méthode P permet la définition correcte d'un maillage grossier avec des éléments de grandes dimensions. Par contre si la géométrie des côtés de l'élément est curviligne sa représentation convenable nécessite l'utilisation du « blendage » entre la géométrie réelle et la géométrie interpolée. Notons par (X_i, Y_i) les coordonnées au sommet des éléments rectangulaire et triangulaire et les « blending functions » pour le $k^{\text{ème}}$ élément rectangulaire par

$$x = Q_x^{(k)}(\zeta, \eta) \quad \text{et} \quad y = Q_y^{(k)}(\zeta, \eta) \quad (7-1a)$$

et pour le $k^{\text{ème}}$ élément triangulaire par

$$x = Q_x^{(k)}(L_1, L_2, L_3) \quad \text{et} \quad y = Q_y^{(k)}(L_1, L_2, L_3) \quad (7-1b)$$

7.1. Forme linéaire

Quand tous les côtés de l'élément représenté sont droits, alors généralement la forme linéaire est utilisée.

Dans le cas de l'élément rectangulaire, la forme linéaire s'écrit

$$x = Q_x^{(k)}(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i X_i \quad (7-2a)$$

$$y = Q_y^{(k)}(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i Y_i \quad (7-2b)$$

où les N_i sont les fonctions d'interpolation de l'élément rectangulaire à quatre nœuds et X_i, Y_i les coordonnées aux nœuds.

Et dans le cas de l'élément triangulaire, on a

$$x = Q_x^{(k)}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^4 L_i X_i \quad (5-3a)$$

$$y = Q_y^{(k)}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^4 L_i Y_i \quad (5-3b)$$

où les N_i sont les fonctions d'interpolation de l'élément triangulaire à trois nœuds et X_i, Y_i les coordonnées aux nœuds [B. SZABO & I. BABUSKA , 1991)

7.2. Forme paramétrique quadratique

La forme paramétrique quadratique permet la représentation des côtés curvilignes de l'élément par des polynômes de degré 2.

Dans le cas de l'élément rectangulaire, ces fonctions s'écrivent

$$x = \sum_{i=1}^8 X_i N_i(\zeta, \eta) \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^8 Y_i N_i(\zeta, \eta) \quad (7-4a)$$

où les N_i sont des fonctions d'interpolation et (X_i, Y_i) les coordonnées aux nœuds.

Dans le cas de l'élément triangulaire, on a

$$x = \sum_{i=1}^6 X_i L_i(\zeta, \eta) \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^6 Y_i L_i(\zeta, \eta) \quad (7-4b)$$

où les L_i sont les fonctions d'interpolation et (X_i, Y_i) les coordonnées aux nœuds.

7.3. Représentation par la méthode des blending functions

L'intérêt qui réside dans l'utilisation de la version p des éléments finis est la possibilité d'obtenir des résultats relativement précis avec très peu d'éléments c'est à dire avec un maillage grossier. Cette démarche implique le fait que les éléments présentent de dimensions importantes ; par conséquent, il est fréquent de voir dans cette situation, que l'erreur d'approximation de la géométrie du domaine augmente. Pour la réduire, la technique du blindage de la géométrie est adoptée avec des fonctions spécialement conçues (blending functions).

Pour illustrer cette technique, considérons un cas simple où seul un côté de l'élément rectangulaire est curviligne comme montré à la figure (7-1).

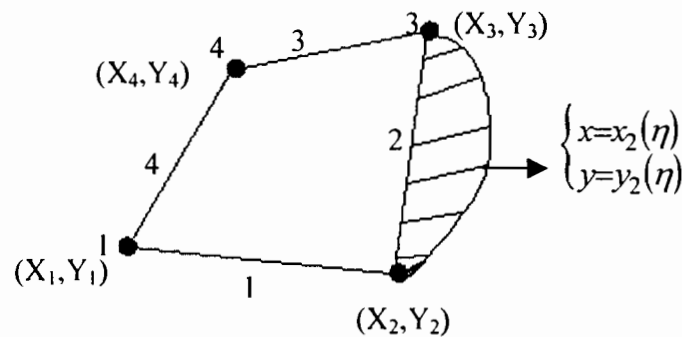


Figure 7-1 : élément rectangulaire à côté courbé

La courbe $x = x_2(\eta)$ et $y = y_2(\eta)$ est donnée sous forme paramétrique telle que

$$x_2(-1) = X_2 ; y_2(-1) = Y_2 \text{ et } x_2(1) = X_3 ; y_2(1) = Y_3$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i X_i + \left[x_2(\eta) - \frac{1-\eta}{2} X_2 - \frac{1+\eta}{2} X_3 \right] \frac{1+\zeta}{2} \quad (7-5a)$$

et

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i Y_i + \left[y_2(\eta) - \frac{1-\eta}{2} Y_2 - \frac{1+\eta}{2} Y_3 \right] \frac{1+\zeta}{2} \quad (7-5b)$$

où les quatre premiers termes de l'expression sont les termes de la représentation linéaire de (7-2). Le cinquième terme est le produit de deux fonctions : l'expression entre parenthèses représente la différence entre $x_2(\eta)$ et la droite qui lie les points (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) . L'autre fonction est une fonction d'interpolation qui est égale à l'unité sur le côté 2 et à zéro sur le côté 4. Nous avons donc

$$x = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)X_1 + \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)X_4 + x_2(\eta)\frac{1+\zeta}{2} \quad (7-6a)$$

$$y = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)Y_1 + \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)Y_4 + y_2(\eta)\frac{1+\zeta}{2} \quad (7-6b)$$

Dans le cas général où tous les côtés sont curvilignes. Les côtés sont paramétrés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x &= x_i(\eta) \\ y &= y_i(\eta) \end{aligned}$$

avec

$$-1 \leq \eta \leq 1 \quad \text{et} \quad i=1, 2, 3, 4.$$

où l'indice i représente le côté de l'élément

Dans ce cas, on a

$$x = \frac{1}{2}(1-\eta)x_1(\zeta) + \frac{1}{2}(1+\zeta)x_2(\eta) + \frac{1}{2}(1+\eta)x_3(\zeta) + \frac{1}{2}(1-\zeta)x_4(\eta) - \sum_{i=1}^4 N_i X_i \quad (7-7a)$$

et

$$y = \frac{1}{2}(1-\eta)y_1(\zeta) + \frac{1}{2}(1+\zeta)y_2(\eta) + \frac{1}{2}(1+\eta)y_3(\zeta) + \frac{1}{2}(1-\zeta)y_4(\eta) - \sum_{i=1}^4 N_i Y_i \quad (7-7b)$$

où X_i ($i=1, 2, 3, 4$) et Y_i ($i=1, 2, 3, 4$) représentent les coordonnées des quatre nœuds aux coins de l'élément rectangulaire.

Dans le cas de l'élément triangulaire, la procédure est similaire. Supposons que seul le côté 1 est curviligne et que la courbe est donnée sous forme paramétrique par ; $x = x_1(\zeta)$,

$$y = y_1(\zeta) ; -1 \leq \zeta \leq 1.$$

Les expressions de x et de y peuvent s'écrire sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^3 L_i X_i + \frac{4L_1 L_2}{1-\zeta^2} \left[x_1(\zeta) - \frac{1-\zeta}{2} X_1 - \frac{1+\zeta}{2} X_2 \right] \quad (7-8a)$$

$$y = \sum_{i=1}^3 L_i Y_i + \frac{4L_1 L_2}{1-\zeta^2} \left[y_1(\zeta) - \frac{1-\zeta}{2} Y_1 - \frac{1+\zeta}{2} Y_2 \right] \quad (7-8b)$$

où l'expression entre parenthèse représente la différence entre $x_1(\zeta)$ et les coordonnées du segment de droite qui lie les points (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) . La fonction $\frac{4L_1 L_2}{1-\zeta^2}$ est égale à l'unité le long du côté 1. En conséquence l'expression « entre parenthèse » n'est pas modifiée le long du côté 1.

8. Intégration numérique

Pour trouver numériquement l'intégrale d'une fonction on peut procéder par plusieurs méthodes. Nous appliquons dans ce projet la quadrature de Gauss qui est la plus utilisée dans le calcul de structure par éléments finis.

8.1. Quadrature de Gauss pour l'intégration d'une fonction à une variable

Considérons

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\zeta) d\zeta \quad (8-1)$$

avec

$$-1 \leq \zeta \leq 1$$

Cette intégrale s'écrit sous la forme

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\zeta) d\zeta \approx \sum_{i=1}^n w_i \phi_i \quad (8-2)$$

avec

$$\phi_i = \phi(\zeta_i)$$

où w_i est une pondération appropriée. Le tableau ci-après donne quelques points de Gauss et leur pondération à l'ordre $n = 6$.

Tableau 8-1 : points et poids de gauss

Ordre n	Localisation ζ_i	Pondération w_i
1	0	2
2	±0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	±0.77459 66692 41483 0.00000 00000 00000	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
4	±0.86113 6311594053 ±0.33998 10435 84856	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
5	±0.90617 98459 38664 ±0.53846 93101 05683 0.00000 00000 00000	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889
6	±0.93246 95142 03152 ±0.66120 93864 66265 ±0.23861 91860 83197	0.17132 44923 79170 0.36076 15730 48139 0.46791 39345 72691

8.2. Quadrature de Gauss pour l'intégration d'une fonction à deux variables

On considère une fonction de deux variables $\phi = \phi(\zeta, \eta)$ avec $-1 \leq \zeta, \eta \leq 1$

Nous avons

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (8-3)$$

Cette intégrale se calcule de la manière suivante : On fixe l'une des variables η par exemple et on calcule l'intégrale d'une fonction à une variable. On a alors

$$\int_{-1}^1 \phi(\eta, \zeta) d\zeta = \sum_{i=1}^n w_i \phi(\zeta_i, \eta) = \phi(\eta) \quad (8-4)$$

De la même manière, on calcule

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\eta) d\eta = \sum_{j=1}^n w_j \phi(\eta_j) \quad (8-5)$$

La combinaison de (8-4) et (8-5) donne

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \phi(\zeta_i, \eta_j) \quad (8-6)$$

Par identification de la relation (8-6) aux relation (5-6) et (5-12), on a : Pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire \mathbf{k}_e

$$\phi(\zeta, \eta) = \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e h \mathbf{J} \quad (8-7)$$

et

$$\phi(\zeta, \eta) = \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \mathbf{J} \quad (8-8)$$

pour le calcul du vecteur forces équivalentes aux nœuds

9. Résolution numérique de systèmes d'équations

La formulation hiérarchique utilisée en version P permet à la matrice de rigidité globale d'avoir une forme creuse c'est à dire contenant beaucoup d'éléments nuls. Cette structure spéciale de la matrice fait appel à une méthode de résolution numérique fiable, stable et utilisable même si la matrice est singulière ou mal conditionnée.

Parmi ces méthodes de résolution numérique nous avons la méthode du gradient conjugué, qui est une méthode itérative et la décomposition en valeur singulière (SVD).

Dans ce projet nous allons utiliser la dernière méthode à savoir la méthode SVD.

9.1. Décomposition en valeur singulière (SVD) « Singular Value Decomposition »

Cette méthode SVD peut être utilisée même si la matrice A est singulière ou mal conditionnée. Elle est basée sur le théorème d'algèbre linéaire suivant : « Toute matrice rectangulaire A d'ordre $(m \times n)$ peut être écrite sous forme de produit de trois matrices U , V et W ».

$$A = U \cdot W \cdot V^T \quad (9-1)$$

avec

$$U \text{ et } V \text{ orthogonales c'est à dire } U^T U = V^T V = I$$

W diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de la matrice AA^T

Dans ce qui suit seul le cas des matrices carrées d'ordre n sera traité. Supposons que la matrice A est une matrice carrée d'ordre n . Alors les matrices U , V et W sont également des matrices carrées d'ordre n . U et V étant orthogonales, leurs inverses coïncident avec leurs transposées. W étant diagonale, son inverse est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont l'inverse des éléments diagonaux de W .

Ainsi, nous avons

$$A^{-1} = V \cdot W^{-1} \cdot U^T \quad (9-2)$$

Considérons la matrice $A^T A$ d'ordre n , de rang $r \leq n$ et de valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n$. Alors nous avons

$$W = \text{diag} (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_n) \quad (9-3)$$

avec

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \dots, n \quad (9-4)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \quad (9-5)$$

avec \mathbf{u}_i les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, c'est à dire

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{u}_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9-6)$$

et

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \quad (9-7)$$

avec \mathbf{v}_i les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, c'est à dire

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9-16)$$

L'algorithme utilisé pour la décomposition en valeur singulière est celui de Householder (cf annexe A-1). [E]

10. Conclusion

Au terme de cette étude, nous avons pu constater l'efficacité de la méthode P des éléments finis.

En effet, dans la méthode P, de grands éléments finis sont souvent de mise avec une attention portée à la présentation de la géométrie du domaine.

L'avantage de la méthode H réside dans la précision ajustable ne nécessitant pas un remaillage du domaine. La méthode P a une convergence exacte et exponentielle alors que la méthode H quant à elle a une convergence algébrique.

Dans ce travail, nous avons présenté les techniques qui permettent de réduire les erreurs tout en représentant correctement les modes rigides[A].

La hiérarchie P des termes de rigidité entraîne un mal conditionnement de la matrice de rigidité et donc pour la résolution numérique du système d'équations obtenu ($\mathbf{KD} = \mathbf{R}$), la méthode résolution numérique SVD est préconisée.

Dans ce projet, la théorie et les méthodes de détermination de la matrice de rigidité et des forces équivalentes aux nœuds de l'élément ont été présentées. La prochaine étape consistera à l'implémentation de l'élément dans un code d'éléments finis standard.

Par ailleurs, ce projet nous a permis de mieux cerner la méthode des éléments finis et l'importance des fonctions d'interpolation type P qui constituent pour nous une nouveauté. Aussi ce projet nous a-t-il donné l'opportunité de découvrir un outil de calcul performant tel en l'occurrence Maple.

Bibliographie

- [A] **SZABO Barna & BABUSKA Ivo**, Finite Element Analysis, John Wiley & Sons 367 pages (1991)
- [B] **Robert D. COOK, David S. MALKUS, Michael E. PLESHA & Robert J. WITT**, Concept and applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition. John Wiley & Sons New York/Chichester/Brisbane/Toronto/Singapore, 2002.
- [C] **J.L. Batoz et G. Dhatt**, Modélisation des structures par éléments finis, volume2, poutres et plaques, Edition Hermès, Paris, 1990,pp 223-302.
- [D] **O.C.Zienkiewicz, FRS & R.L. Taylor**, The Finite Element: Basic Formulation and Linear Problem, Fourth edition Volume1. 1983
- [E] **William H. Process & William T. Vetterling & Saul A. Teukolsky & Brian P. Flannery**, NUMERICAL RECIPES in C: The Art of scientific Computing. Second Edition,1988-1992 by Cambridge University Press. Programs Copyright (C) 1988.
- [F] **Barna A. SZABO**, PROBE, THEORECAL MANUAL, 1985.

Annexes

Annexe A

Algorithme de Householder

Cet algorithme réduit la matrice \mathbf{A} symétrique d'ordre n en une matrice tridiagonale par $(n-2)$ transformations.

Considérons la matrice de Householder

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2.\mathbf{w}.\mathbf{w}^T \quad (\text{A-1})$$

où \mathbf{w} est un vecteur réel avec $|\mathbf{w}|^2 = 1$.

La matrice \mathbf{P} est orthogonale.

En effet

$$\mathbf{P}^2 = (\mathbf{I} - 2.\mathbf{w}.\mathbf{w}^T)(\mathbf{I} - 2.\mathbf{w}.\mathbf{w}^T) \quad (\text{A-2})$$

En développant la relation (A-1), on obtient

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{I} - 4.\mathbf{w}.\mathbf{w}^T + 4.\mathbf{w}(\mathbf{w}^T.\mathbf{w})\mathbf{w} \quad (\text{A-3})$$

Et finalement, on a

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{I} \quad (\text{A-4})$$

En conséquence $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}$. Mais $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, et donc $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$.

Réécrivons \mathbf{P} sous la forme

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}.\mathbf{u}^T}{c} \quad (\text{A-5})$$

où le scalaire c est

$$c = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 \quad (\text{A-6})$$

\mathbf{u} peut maintenant être un vecteur quelconque.

Supposons que \mathbf{x} est le vecteur composé de la première colonne de la matrice \mathbf{A} .

Choisissons

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \pm |\mathbf{x}|\mathbf{e}_1 \quad (\text{A-7})$$

où

$$\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]' \quad (\text{A-8})$$

et le choix du signe sera fait plus tard.

On obtient donc

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{u}}{c} (\mathbf{x} \pm |\mathbf{x}| \mathbf{e}_1)' \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A-9})$$

Après développement de la relation (A-9), on obtient

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{2 \cdot \mathbf{u} \cdot (|\mathbf{x}|^2 \pm |\mathbf{x}| x_1)}{(2|\mathbf{x}|^2 \pm 2|\mathbf{x}| x_1)} \quad (\text{A-10})$$

Ce qui donne finalement

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{u} = \pm |\mathbf{x}| \mathbf{e}_1 \quad (\text{A-11})$$

Ceci montre que la matrice de Householder \mathbf{P} appliquée sur un vecteur \mathbf{x} annule ses éléments exceptés son premier élément.

Pour la première matrice de Householder, choisissons les (n-1) derniers éléments de la première colonne de la matrice \mathbf{A} . D'après la relation (A-11), les (n-2) derniers éléments sont nuls.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \cdot & & \mathbf{P}_{(n-1)} & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & & & & & & \\ a_{31} & & & & & & \\ \cdot & & \text{non pertinent} & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ a_{n1} & & & & & & \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ k & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \cdot & & \text{non pertinent} & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A-12})
 \end{aligned}$$

où $\mathbf{P}_{(n-1)}$ est la matrice de Householder à $(n-1) \times (n-1)$. La quantité k est simplement plus ou moins la norme du vecteur $[a_{21} \ a_{31} \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ a_{n1}]^T$. La transformation complète est donnée par

$$\mathbf{A}' = \mathbf{PAP} = \begin{bmatrix} a_{11} & k & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ k & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \cdot & & \text{non pertinent} & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A-13})$$

Nous avons utilisé le fait que $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$.

Pour la deuxième matrice de Householder, choisissons le vecteur \mathbf{x} tel que ses composantes soient les $(n-2)$ derniers éléments de la deuxième colonne de la matrice \mathbf{A} . On construit

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \\ . & . & & & & & \\ . & . & & \mathbf{P}_{(n-2)} & & & \\ . & . & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A-14})$$

Ainsi la succession des $(n-2)$ telles transformations réduira la matrice \mathbf{A} en une matrice tridiagonale.

Annexe B

Représentation graphique des fonctions d'interpolation d'un élément rectangulaire

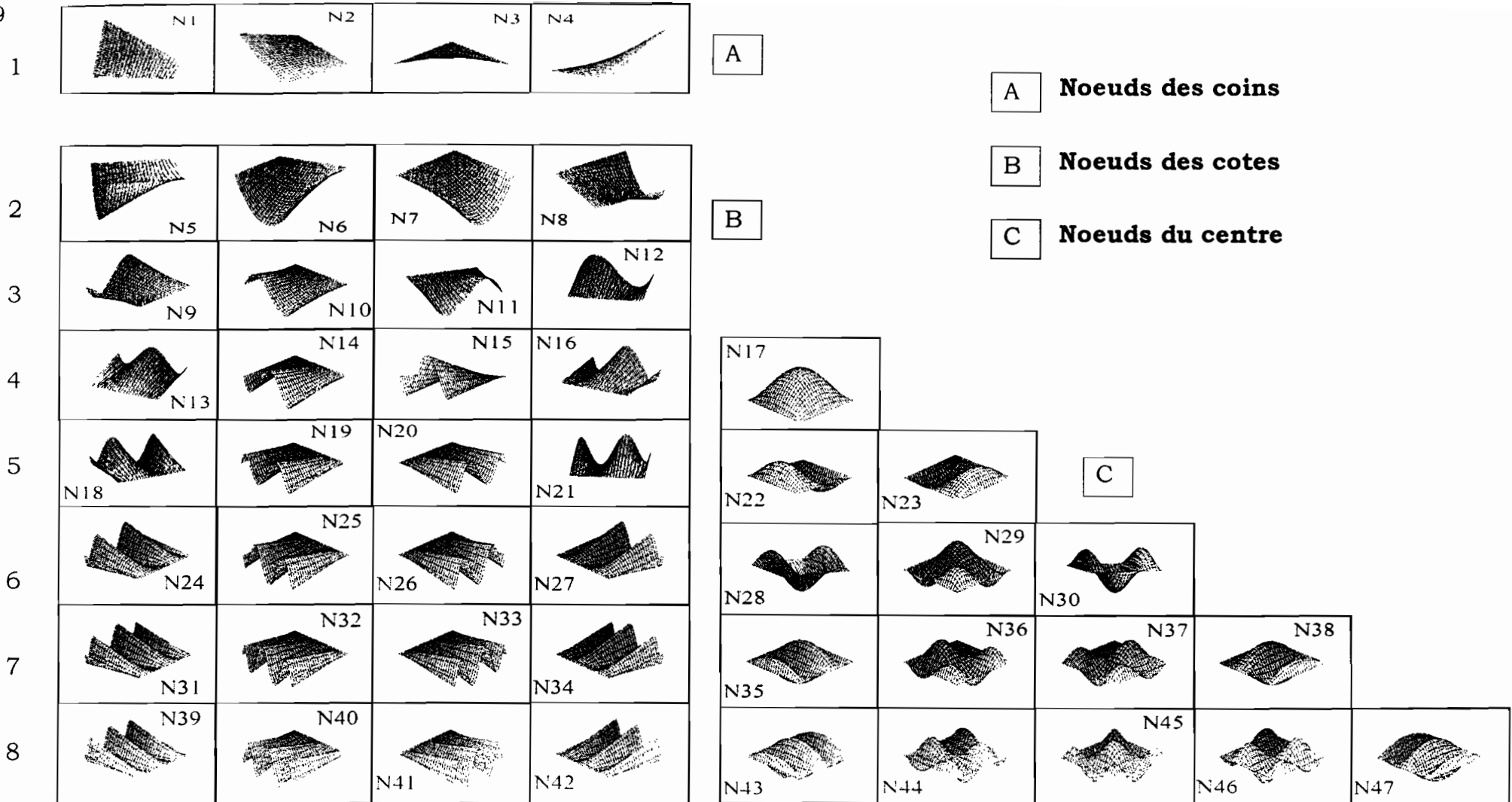


Figure B : Représentation graphique des Fonctions hiérarchiques TYPE P pour un élément rectangulaire