



école polytechnique de thiès

GM.0561

PROJET DE FIN D'ETUDES

TITRE: ETUDE ANALYTIQUE
DU
PROBLEME DE BÖDEWADT

Auteur Amadou Malick THIAM

Génie Mécanique

Date JUIN-78

ETUDE ANALYTIQUE
DU
PROBLEME DE BÖDEWADT

par
Amadou M. THIAM
4^{ème} Mécanique

Sous la direction de
M^r Dinh VO NGOC
Professeur à L' E.P.T.

• — JUIN - 1978 — •

REMERCIEMENTS.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur DINH Vo NGOC qui m'a constamment guidé dans cette étude et dont les conseils et les remarques ont été d'un apport déterminant dans la présentation finale de cette étude.

Je remercie également Monsieur Roger Martin, professeur d'Electrotechnique, pour avoir vérifié le schéma de principe de la méthode analogique, ainsi que MM. D. Savage et G. Morin, professeurs de mathématiques pour avoir examiné la solution analytique du problème étudié.

SOMMAIRE

Nous nous proposons, dans le cadre de ce projet, de faire une étude analytique sur l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible tournant au delà d'une surface plane, fixe, et infinie.

L'utilisation de l'hypothèse de von Kármán nous a permis de ramener les équations complexes du problème étudié, en un système d'équations différentielles à une seule variable.

Les résultats obtenus par une méthode analytique proposée pour ces équations montrent une très bonne concordance avec ceux obtenus par d'autres auteurs.

LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Principe de la méthode Analogique

Figure 2 : Fonctions F - G - H obtenues par la méthode Analytique et par la méthode de J. E. Nydahl. [1]

Figure 3 : Direction globale de l'écoulement du fluide dans un plan passant par le centre du disque

Figure 4 : Ecoulement global du fluide - (à trois dimensions)

Figure 5: Schéma des circuits intégrateur (a), Sommateur (b) et multiplicateur (c) utilisés dans la méthode analogique.

TABLE DES NOTATIONS

u, v, w : composantes radiale, tangentielle, et axiale de la vitesse

ω : vitesse angulaire du fluide

r : distance (rayon)

Z : hauteur du point considéré

p : pression

ν : viscosité cinématique du fluide

ρ : masse volumique du fluide

(δ, U) : grandeurs de référence

$$\delta = \sqrt{\nu/\omega} \quad (\text{longueur})$$

$$U = \omega \cdot r \quad (\text{vitesse})$$

x : variable addimensionnelle = Z/δ

F, G, H : fonctions de x

$$F(x) = u/U$$

$$G(x) = v/U$$

$$H(x) = w/\sqrt{\omega\nu}$$

R : résistance (Ω)

C : capacité (μF)

V_e : tension d'entrée

V_s : tension de sortie

TABLE DES MATIERES

	Page
SOMMAIRE	i
LISTE DES FIGURES	ii
TABLE DES NOTATIONS	iii
INTRODUCTION	1
<u>CHAPITRE - I : FORMULATION DU PROBLEME</u>	
I-1. Généralités	3
I-2. Equations de base	3
I-3. Réduction des équations de base	4
I-3-1. Grandeurs de référence	4
I-3-2. Hypothèse de von Kármán	5
I-3-3. Equations réduites et conditions aux limites	5
<u>CHAPITRE - II : RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS REDUITES.</u>	
II-1. Généralités	8
II-2. Méthode Analogique	8
II-2-1. Principe de la méthode	8
II-2-2. Schéma de principe	9
II-3. Méthode Numérique	11

II-4. Méthode Analytique	14
II-4-1. Principe de résolution analytique	14
II-4-2. Choix d'une fonction $F(x)$	14
II-4-3. Calcul de $H(x)$	17
II-4-4. Calcul de $G(x)$	18
II-4-5. Détermination des constantes λ, t	20
II-4-6. Résultats	27
<u>CHAPITRE - III</u> : DISCUSSION	32
CONCLUSION	39
ANNEXE	
A-I. Réduction des équations de base	41
A-II. Schéma des circuits utilisés : Figure 5	43
A-III. Transformation de $P(x) = [G(x)]^2$	44
pour extraction de la racine : $\sqrt{P(x)} = G(x)$	
A-IV. Formulation de la méthode numérique (Runge-kutta ; Tirs ; Organigramme ; programme)	46
BIBLIOGRAPHIE	51

INTRODUCTION.

On se propose d'étudier l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible tournant à une vitesse angulaire constante, au-delà d'une surface plane fixe et infinie, problème déjà étudié par BÖDEWADT [1].

Ce problème présente beaucoup d'intérêts :

- Etudes météorologiques, car cet écoulement est souvent assimilé au cyclone
- Etudes théoriques de la Mécanique des fluides dans la recherche d'une solution pour le mouvement du fluide, d'où, par exemple, les techniques de résolution analytique, numérique et analogique d'un système d'équations différentielles non-linéaires.

Dans le premier chapitre, on s'intéressera à la formulation du problème. Les équations complexes seront transformées en équations réduites.

Le deuxième chapitre traite des différentes méthodes employées pour résoudre ces équations. Une solution analytique y sera présentée.

Nous discuterons ensuite ces résultats au chapitre trois, ce qui nous permettra de vérifier la validité de nos résultats.

CHAPITRE - I.

FORMULATION^{DU} PROBLEME

CHAPITRE - I

FORMULATION DU PROBLEME

I-1. GENERALITES

On considère un fluide visqueux incompressible tournant, à une vitesse angulaire constante, au-delà d'une surface plane infinie.

L'écoulement global est régi par les équations de Navier-Stokes. Vu la symétrie de révolution du problème étudié, on utilise le système de coordonnées cylindriques et la surface plane au-delà de laquelle évolue l'écoulement sera considérée par la suite, comme un disque infini.

I-2. EQUATIONS DE BASE

Considérant les conditions présentées ci-dessus et en négligeant les forces extérieures, les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire, dans le cas stationnaire, comme suit :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \quad (I-1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u \cdot v}{r} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} \quad (I-2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} \quad (I-3)$$

Equation de Continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (I-4)$$

avec u, v, w et p fonctions de (r, z)

I-3. REDUCTION DES EQUATIONS DE BASE

Il serait très difficile de résoudre le système des équations ci-dessus, si au préalable on n'introduisait pas certaines hypothèses pour obtenir des équations réduites.

I-3-1. Grandeurs de référence

Longueur : $\delta = \sqrt{\nu/\omega} \quad [1] \quad (R-1)$

δ est l'épaisseur de la couche de fluide transportée par le disque.

ou pose $x = z/\delta$ variable adimensionnelle, qui remplacera z dans les équations réduites.

- Vitesse. $U = \omega \cdot r$

$$\left. \begin{aligned} \text{ainsi : } u &= \omega r F(x) = U \cdot F(x) \\ v &= \omega r G(x) = U \cdot G(x) \end{aligned} \right\} (R-2)$$

- Ou a aussi : $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$

\therefore gradient de pression pour un écoulement sans friction.

1-3-2. Hypothèse de von Kármán

- On introduit l'hypothèse de von Kármán selon laquelle la composante axiale w de la vitesse ne dépend que de Z , c'est à dire :

$$\boxed{w = \sqrt{\omega r} \cdot H(x)} \quad (R-3)$$

- Cette hypothèse permettra beaucoup de simplifications

1-3-3. Equations réduites et Conditions aux limites

- Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors, compte-tenu des changements de variables et de l'hypothèse (R-3) comme suit :

$$(S.1) \left\{ \begin{aligned} F^2 - G^2 + HF' - F'' + 1 &= 0 & (I-5) \\ 2GF + HG' - G'' &= 0 & (I-6) \\ 2F + H' &= 0 & (I-7) \end{aligned} \right.$$

[Annexe I]

avec les conditions aux limites suivantes :

- pour $x = 0$:

$$F(0) = G(0) = H(0) = 0$$

- pour $x \rightarrow \infty$:

$$F \rightarrow 0$$

$$G \rightarrow 1$$

} C.1

Ces conditions sont déduites de la condition de non glissement à la paroi du fluide visqueux,

c'est à dire :

$$\text{pour } z = 0 : \quad u = v = w = 0$$

$$\text{pour } z \rightarrow \infty : \quad u = 0, \quad v = \omega r$$

La résolution du système des équations (I-5), (I-6), (I-7) permettra de connaître la pression $p = p(z)$ par intégration de l'équation (I-3) qui peut s'écrire, en posant $p = p(z) = \rho g \omega P(x)$,

comme suit :

$$P' + HP' - H'' = 0$$

Puisque le système d'équations requises est obtenu ainsi que les conditions aux limites, nous passons maintenant à la recherche d'une solution.



CHAPITRE - II.

RESOLUTION ^{DU} SYSTEME
D'EQUATIONS REDUITES

CHAPITRE - II

RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS REDUITES

II-1. GENERALITES

On cherche la solution du système (S.1)
avec les conditions aux limites (C.1)

Trois méthodes de résolution seront envisagées.

Il s'agit des méthodes analogique, numérique
et analytique. Pour les deux premières méthodes
citées, nous ne donnerons que les grands principes.

La méthode analogique consiste à réaliser un
circuit électronique pour simuler les équations,
quant à la méthode numérique, on donnera le
principe de la méthode de Runge-Kutta, employée
pour la résolution de systèmes d'équations
linéaires du premier ordre.

II-2. METHODE ANALOGIQUE

II-2-1. Principe de la méthode

Il s'agit de réaliser le schéma de principe

d'un circuit électronique capable, de nous, donner sur l'oscilloscope les graphes des trois fonctions F, G et H. Pour cela, il nous faudra :

- 25 amplificateurs opérationnels (ampli-op.)
- des relais pour les conditions initiales

Vue la complexité du circuit, à réaliser, et, considérant le temps alloué, au projet par les contraintes, académiques, nous nous limiterons, au schéma de principe qui est, donné, à la page suivante (10)

On verra, en ANNEXE II Les circuits sommateur - intégrateur - multiplicateur utilisés, dans le schéma de principe

II-2-2. Schéma de principe

Notation

\boxed{XY} = Calcul du produit, de X par Y
réalisé par un circuit
Log - antilog suivant le principe

$$\log X + \log Y = \log XY$$

$$\text{et } \text{anti}(\log XY) = XY$$

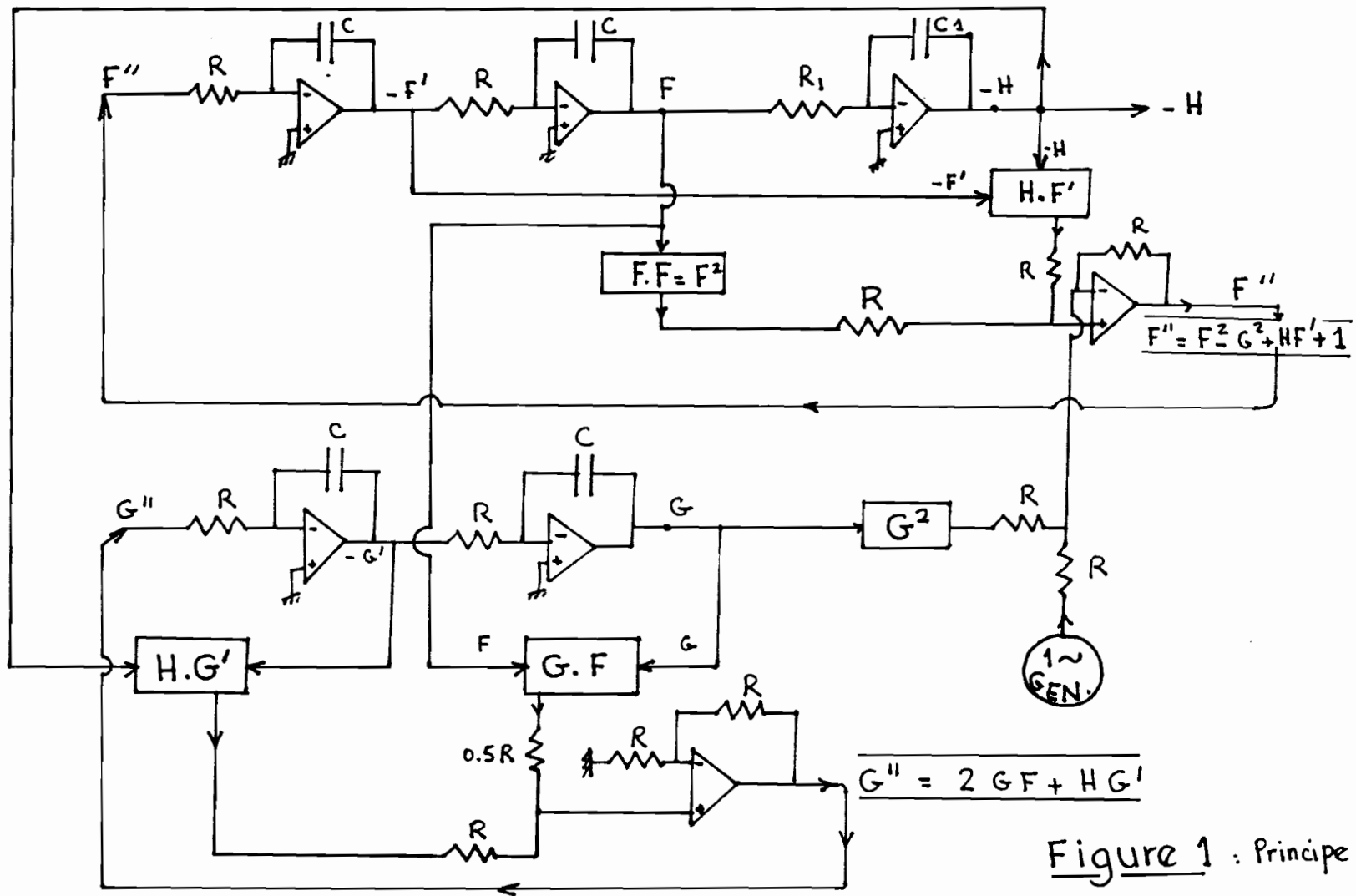


Figure 1 : Principe

II-3. METHODE NUMERIQUE

Il ya à notre connaissance plusieurs méthodes de résolution numérique possibles pour résoudre le système d'équations (S.1) avec les conditions aux limites (C1). Par exemple, la méthode des éléments finis, des différences finies [2] ou encore, celle du traitement direct des équations de Navier Stokes dans un domaine borné [3]. La méthode de Runge-Kutta dont nous discuterons du principe, s'avère plus simple à utiliser.

Principe de la méthode de Runge-Kutta

Il s'agit d'une méthode numérique pour la résolution d'un système d'équations du premier ordre, à conditions initiales. L'application de cette méthode pour notre problème ici étudié nécessite tout d'abord une transformation du système (S1) en un système du premier ordre.

En posant :

$$F = F_0(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1(x)$$

$$\begin{aligned}
 G &= F_2(x) \\
 \frac{\partial G}{\partial x} &= F_3(x) \\
 H &= F_4(x) \\
 \frac{\partial F_4}{\partial x} &= F_5(x) = \frac{\partial H}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Les équations du système (S1) deviennent:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 F = F_0 \\
 G = F_2 \\
 H = F_4 \\
 F'_0 = F_1 \\
 F'_1 = 1 + F_0^2 - F_2^2 + F_1 F_4 \\
 F'_2 = F_3 \\
 F'_3 = 2 F_0 F_2 + F_3 F_4 \\
 F'_4 = F_5 = -2 F_0
 \end{array} \right. \quad (S-2)$$

Avec ces mêmes notations, les conditions aux limites (C-1) s'écrivent:

$$\begin{array}{l}
 x = 0 : \\
 x = \infty :
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 F_0(0) = F_2(0) = F_4(0) = 0 \\
 F_0(\infty) = 0 \quad (C-2) \\
 F_2(\infty) = 1 \quad (\Leftrightarrow 14)
 \end{array} \right.$$

Il est à remarquer que la résolution du système (S-2) par la méthode de Runge-kutta nécessite la connaissance des conditions initiales suivantes :

$$F_0(0), F_2(0), F_4(0)$$

$$F_1(0), F_3(0).$$

Or les conditions aux limites (C-2) ne nous fournissent que les trois premières.

C'est aussi la raison pour laquelle nous aurons besoin d'une méthode itérative supplémentaire, appelée méthode des Tirs, permettant des itérations systématiques des conditions initiales manquantes $F_1(0)$ et $F_3(0)$ afin de satisfaire les conditions $F_0 = 0$ et $F_2 = 1$ quand x tend vers l'infini.

Le développement détaillé de ces méthodes se trouve en [ANNEXE IV]

II-4. METHODE ANALYTIQUE.

II-4-1. Principe de la résolution analytique.

La solution de ce système n'étant pas évidente, on va choisir méthodiquement une fonction F , (G ou H) qui répondrait aux conditions initiales et qui permettrait de trouver les deux autres fonctions du système.

Nous considérons ainsi une fonction $F(x)$ puisqu'elle va nous donner très rapidement la fonction $H(x)$ par intégration de l'équation (I-7)

$H(x)$ et $F(x)$ étant connues, on se réfère ensuite à l'équation (I-5) pour calculer $G(x)$. La solution exacte du problème sera obtenue si on trouve les différentes constantes contenues dans les expressions de $F(x)$, $G(x)$ et $H(x)$.

Pour cela, on utilisera les conditions initiales et l'équation (I-6).

II-4-2. Choix d'une fonction $F(x)$

telle que :

$$\begin{cases} F(x=0) = 0 \\ F(x \rightarrow \infty) = 0 \end{cases}$$

$F(x)$ peut alors être de la forme :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i x} \cdot k_j x^j$$

ou $\lambda_i < 0$

ou a que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^b e^{-ax} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{ax} = 0$$

a, b constantes positives.

Les conditions aux limites sont alors respectées.

Cependant, il serait difficile de travailler avec une telle fonction $F(x)$ avec ses $2 \cdot n$ constantes λ_i et k_j .

D'où les approximations suivantes :

1° Les λ_i sont égaux : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = cte$

2° Les $k_j x^j$ sont particuliers, c'est à dire qu'on se limitera à des $k_j x^j$ qui sont les termes d'une série bien connue.

En particulier, avec l'expression

$$F(x) = e^{\lambda x} \sum_{j=1}^n k_j x^j, \text{ on aura :}$$

soit $\sum k_{j^+} x^{j^+} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

soit $\sum k_{j^-} x^{j^-} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

ou bien une combinaison de ces deux séries :

On a bien sûr :

$$\sum k_{j^+} x^{j^+} = \sin x$$

$$\sum k_{j^-} x^{j^-} = \cos x$$

Leur combinaison pouvant donner :

$$\sum k_j x^j = f[\sin x \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x]$$

On se contentera de la forme simple

$$\sum k_j x^j = \sin tx$$

$t =$ constante.

On aura donc

$$F(x) = -e^{\lambda x} \sin tx, \lambda < 0 \quad (D-1)$$

Le signe 'moins', uniquement pour fin de calcul

Il n'a aucune importance dans la mesure où

$\sin tx$ peut être positif ou négatif pour

certaines valeurs de x .

λ, t sont des constantes à déterminer

D-4-3. Calcul de $H(x)$

— D'après (I-7), $H' = -2F$

— soit $H = -2 \int F(x) dx$

$$H = -2 \int -e^{\lambda x} \sin tx dx$$

$$H = 2 \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + t^2} (\lambda \sin tx - t \cos tx) \right] + k$$

— ou, a par ailleurs :

— à $x=0$, $H(0) = 0$

— d'où $k = \frac{2t}{\lambda^2 + t^2}$

$$H = \frac{2}{\lambda^2 + t^2} \left[e^{\lambda x} (\lambda \sin tx - t \cos tx) + t \right] \quad (\text{II-2})$$

Recherche d'une relation entre λ et t

— ou, a :

$$F(x) = -e^{\lambda x} \sin tx$$

$$\rightarrow F'(x) = -e^{\lambda x} [\lambda \sin tx + t \cos tx]$$

$$\rightarrow F''(x) = -e^{\lambda x} [(\lambda^2 - t^2) \sin tx + 2\lambda t \cos tx]$$

D'après l'équation (I-5), on a :

$$F''(x) = F^2(x) - G^2(x) + HF'(x) + 1$$

— cette équation doit être satisfaite pour tout x , en particulier pour $x=0$

— ainsi, on a :

$$F''(0) = F^2(0) - G^2(0) + H(0)F'(0) + 1.$$

— Cependant, les conditions imposent :

$$F(0) = 0 \rightarrow F^2(0) = 0$$

$$G(0) = 0 \rightarrow G^2(0) = 0$$

$$H(0) = 0$$

$$F'(0) = e^0(\lambda 0 + t 1) = t$$

$$\text{et } H(0)F'(0) = 0 \cdot t = 0 \quad (t \text{ constante})$$

par conséquent, on aura :

$$F''(0) = 1$$

Remplaçant $x = 0$ dans l'équation (I-5), il vient :

$$F''(0) = -e^0 \{(\lambda^2 - t^2) 0 + 2\lambda t 1\} = 1$$

soit

$$\boxed{2\lambda t = -1} \quad (\text{II-3})$$

Pour connaître exactement λ et t , il nous faut une seconde relation entre λ et t .

Pour cela, nous devons connaître la fonction $G(x)$.

II-4-4. Calcul de $G(x)$

$$\text{D'après (I-5), } G^2 = F^2 + HF' - F'' + 1$$

$$\text{d'où } G = \sqrt{F^2 + HF' - F'' + 1}$$

toutes les fonctions sous le radical sont connues

$$G^2 = (-e^{\lambda x} \sin tx)^2 + e^{\lambda x} \left\{ (\lambda^2 - t^2) \sin tx - \cos tx \right\} \\ + 1 - e^{\lambda x} (\lambda \sin tx + t \cos tx) \cdot \frac{2}{\lambda^2 + t^2} \\ \times \left[e^{\lambda x} (\lambda \sin tx - t \cos tx) + t \right]$$

Après transformation, on trouve :

$$G^2 = 1 - e^{2\lambda x} \sin^2 tx + \frac{2t^2 e^{2\lambda x}}{\lambda^2 + t^2} \\ + e^{\lambda x} \left[(\lambda^2 - t^2) \sin tx - \cos tx \right] - \frac{2t}{\lambda^2 + t^2} e^{\lambda x} (\lambda \sin tx + t \cos tx)$$

On pose :

$$G^2 = S + Q + I$$

avec :

$$I = 1 + \frac{2t^2 e^{2\lambda x}}{\lambda^2 + t^2} = 1 + C e^{2\lambda x}$$

$$S = -e^{2\lambda x} \sin^2 tx - \frac{2t}{\lambda^2 + t^2} e^{\lambda x} \sin tx + (\lambda^2 - t^2) e^{\lambda x} \sin tx$$

$$S = e^{\lambda x} \sin tx \left[A - e^{\lambda x} \sin tx \right]$$

$$Q = -e^{\lambda x} \cos tx \left(1 + \frac{2t^2}{\lambda^2 + t^2} \right)$$

$$Q = B e^{\lambda x} \cos tx$$

ou, a, ainsi :

$$G^2 = e^{\lambda x} \sin tx (A - e^{\lambda x} \sin tx) + B e^{\lambda x} \cos tx + C e^{2\lambda x} + 1$$

avec :

$$A = \lambda^2 - t^2 + \frac{1}{\lambda^2 + t^2}$$

$$B = - \left(1 + \frac{2t^2}{\lambda^2 + t^2} \right)$$

$$C = \frac{2t^2}{\lambda^2 + t^2}$$

La fonction $[G^2]$ ne peut être extraite pour obtenir une forme simple de G . [Annexe III]

On tire G

$$G = \left\{ (C - \sin^2 tx) e^{2\lambda x} + (B \cos tx + A \sin tx) e^{\lambda x} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II-4})$$

A, B et C, étant définis ci-dessus

II-4-5. Détermination des constantes λ, t

On cherche une autre relation entre λ et t .

ce qui nous permettra, avec l'équation (II-3), de calculer définitivement λ et t .

L'équation (I-6) s'écrit :

$$2GF + HG' - G'' = 0$$

avec F, G, H définies par les équations respectives (II-1), (II-4), (II-2).

$$G = \sqrt{(C - \sin^2 x) e^{2\lambda x} + (B \cos x + A \sin x) e^{\lambda x} + 1}$$

G vérifie bien les conditions aux limites :
en effet :

$$i) \quad G(0) = \sqrt{C + B + 1}$$

$$\text{or } B = -(1 + C)$$

$$\Rightarrow B + C + 1 = 0$$

$$\text{d'où } G(0) = 0$$

$$ii) \quad G(\infty) = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1 \quad \left. \vphantom{G(\infty)} \right\} \text{C.Q.F.M}$$

On calcule maintenant G' et G'' .

L'équation (I-6) doit être satisfaite, pour tout x , y compris $x = 0$.

Calcul de G'

$$G' = \frac{1}{2\sqrt{(C - \sin^2 t x) e^{2\lambda x} + (B \cos t x + A \sin t x) e^{\lambda x} + 1}} \left[2\lambda e^{2\lambda x} (C - \sin^2 t x) + e^{2\lambda x} (0 - 2\sin t x \cdot t \cos t x) + \lambda e^{2\lambda x} (B \cos t x + A \sin t x) + e^{\lambda x} (A t \cos t x - B t \sin t x) \right]$$

soit, encore, en réduisant l'expression:

$$G' = \frac{1/2}{\sqrt{(C - \sin^2 t x) e^{2\lambda x} + (B \cos t x + A \sin t x) e^{\lambda x} + 1}} \left[e^{2\lambda x} \{ 2\lambda (C - \sin^2 t x) - t \sin 2 t x \} + e^{\lambda x} \{ \cos t x (A t + \lambda B) + \sin t x (A \lambda - B t) \} \right]$$

Calcul de G''

$G'(x)$ est de la forme $G' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$

$$\text{ainsi } G'' = \frac{1}{2} \frac{U''\sqrt{U} - U' \cdot U'/2\sqrt{U}}{U} = \frac{1}{2} \frac{U''\sqrt{U} - \frac{U'^2}{2\sqrt{U}}}{U}$$

Du la longueur des calculs, on va donner les termes
 $U''\sqrt{U}$ -, $U'^2/2\sqrt{U}$

$$\begin{aligned} U''\sqrt{U} = & \left[2\lambda e^{2\lambda x} \{ 2\lambda(c - \sin^2 tx) - t \sin 2tx \} + e^{2\lambda x} \{ -4\lambda t \sin tx \cos tx \right. \\ & \left. - 2t^2 \sin 2tx \} + \lambda e^{\lambda x} \{ \cos tx (\lambda B + At) \} + \lambda e^{\lambda x} \sin tx (\lambda A - Bt) \right] \\ & + e^{\lambda x} \{ t \sin tx (-\lambda B - At) + t \cos tx (\lambda A - Bt) \} \\ & \times \sqrt{(c - \sin^2 tx) e^{2\lambda x} + (B \cos tx + A \sin tx) e^{\lambda x} + 1} \end{aligned}$$

$$U'^2 / 2\sqrt{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(C - \sin^2 t x) e^{2\lambda x} + (B \cos t x + A \sin t x) e^{\lambda x} + 1}} \times$$

$$\times \left[e^{2\lambda x} \{ 2\lambda (C - \sin^2 t x) - t \sin 2t x \} + e^{\lambda x} \{ \cos t x (A t + \lambda B) + \sin t x (\lambda A - B t) \} \right]^2$$

On a aussi les expressions suivantes :

$$2G.F = -2e^{\lambda x} \sin t x \sqrt{[C - \sin^2 t x] e^{2\lambda x} + [B \cos t x + A \sin t x] e^{\lambda x} + 1}$$

$$HG' = \frac{2}{\lambda^2 + t^2} \left[e^{\lambda x} (\lambda \sin t x - t \cos t x) + t \right] \times \frac{1/2}{\sqrt{(C - \sin^2 t x) e^{2\lambda x} + [B \cos t x + A \sin t x] e^{\lambda x} + 1}}$$

$$\times e^{2\lambda x} [2\lambda (C - \sin^2 t x) - t \sin 2t] + e^{\lambda x} [\cos t x (A t + \lambda B) + \sin t x (\lambda A - B t)]$$

L'équation $G'' = 2GF + HG'$ doit être satisfaite pour tout x , en particulier pour $x = 0$

En raison de la complexité des calculs, on l'annulera pour la seule valeur $x = 0$. Rigoureusement, il faudrait l'annuler pour tout x .

Analyse des termes de l'équation

$$\underline{G'' = 2GF + HG' \text{ quand } x = 0}$$

i) $2GF$:

$$\text{pour } x = 0 \quad \begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases} \rightarrow 2GF = 0$$

ii) $H.G'$

$$\text{pour } x = 0 \quad H.G' = \frac{0}{0} \text{ (indétermination)}$$

$$\text{D'où } \therefore \{2GF + HG'\}_{x=0} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)}$$

$$\text{iii) } G'' = \frac{1}{2} \frac{U''\sqrt{U} - U'^2/2\sqrt{U}}{U}$$

pour $x = 0$

$$G'' = \frac{0 - K'/0}{0} = \frac{0}{0} + \frac{K}{0}$$

$$\text{Ainsi donc } : \quad \frac{0}{0} = \frac{0}{0} + \frac{K}{0} \therefore \{2GF + HG' = G''\}$$

Les deux membres sont identiques si $K = 0$,
l'équation est alors vérifiée.

ou a: $K = (2\lambda C + \lambda B + At)^2$

- d'où

$$\boxed{2\lambda C + \lambda B + At = 0} \quad (\text{II-5})$$

- On a aussi :

$$\boxed{2\lambda t = -1} \quad (\text{II-3})$$

Calcul de λ et t

$$(\text{II-5}) \Rightarrow 2\lambda \left[\frac{2t^2}{\lambda^2 + t^2} \right] + \lambda \left[-1 - \frac{2t^2}{\lambda^2 + t^2} \right]$$

$$+ t \left[\lambda^2 - t^2 + \frac{1}{\lambda^2 + t^2} \right] = 0$$

- avec $2\lambda t = -1$

- ou tire : $t^4 = 3/4$

- d'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} t = 0.9306 \\ \lambda = -0.5373 \end{array}}$$

II-4-6. Résultats

Les coefficients A , B , C dans l'expression de $G(x)$ sont :

$$A = \lambda^2 - t^2 + \frac{1}{\lambda^2 + t^2} = 0.2886$$

$$B = -1 - \frac{2t^2}{\lambda^2 + t^2} = -2.50$$

$$C = -1 - B = 1.50$$

La solution du système d'équations, en F , G et H , est donc la suivante :

$$F(x) = -e^{-0.5373x} \sin(0.9306x)$$

$$H(x) = \sqrt{3} \left[-e^{-0.5373x} \left(0.5373 \sin(0.9306x) + 0.9306 \cos(0.9306x) \right) + 0.9306 \right]$$

$$G^2(x) = \left\{ 1 + e^{-1.0745x} \left(1.5 - \sin^2(0.9306x) \right) + e^{-0.5373x} \left[-2.5 \cos(0.9306x) + 0.2886 \sin(0.9306x) \right] \right\}$$

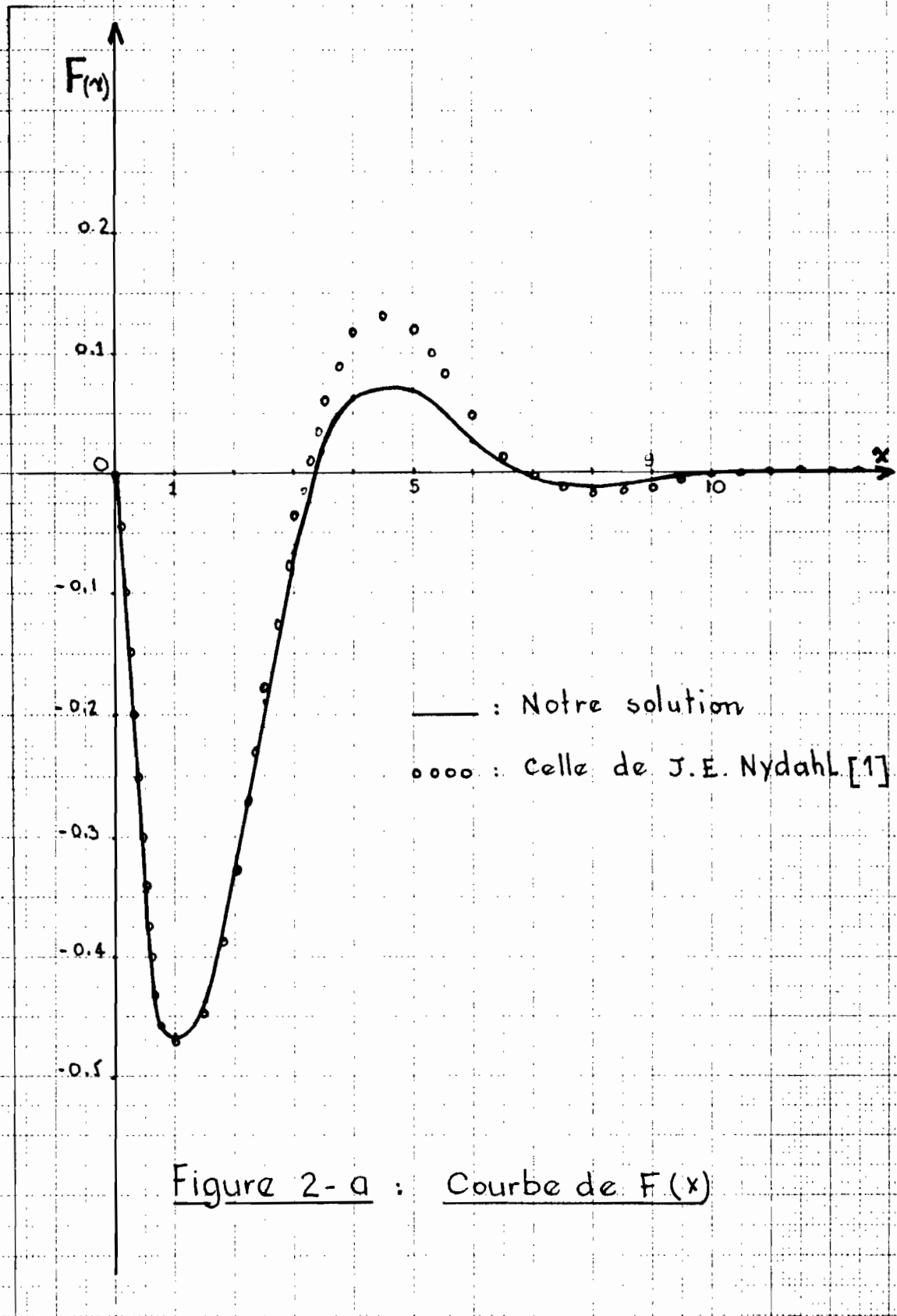
Le listing du programme, et les résultats, se trouvent à la page suivante.

V RAMA;X;F;G;H
 [1] X F(X) G(X) H(X)
 [2] X←0,(0.5x18),(4+(10),20
 [3] F←(∗^{-0.53727xX})x100.9306xX
 [4] H←(3∗0.5)x0.9306-(∗^{-0.53727xX})x(0.53727x100.9306xX)+0.9306
 x200.9306xX
 [5] G←(1+((∗^{-1.0745xX})x(1.5-(100.9306xX)∗2)))+(∗^{-0.53727xX})x((0
 .2886x100.9306xX)-2.5x200.9306xX))∗0.5
 [6] @ 4 20 pX,F,G,H

V

RAMA

X	F(X)	G(X)	H(X)
0.0000E0	0.0000E0	0.0000E0	0.0000E0
5.0000E-1	3.4299E-1	3.8728E-1	1.9153E-1
1.0000E0	4.6863E-1	7.4511E-1	6.1312E-1
1.5000E0	4.3987E-1	1.0190E0	1.0772E0
2.0000E0	3.2716E-1	1.1860E0	1.4650E0
2.5000E0	1.8996E-1	1.2524E0	1.7268E0
3.0000E0	6.8378E-2	1.2423E0	1.8503E0
3.5000E0	1.7578E-2	1.1867E0	1.8724E0
4.0000E0	6.3974E-3	1.1142E0	1.8285E0
5.0000E0	6.8009E-3	9.9640E-1	1.6817E0
6.0000E0	2.5634E-3	9.5821E-1	1.5866E0
7.0000E0	5.3264E-3	9.7248E-1	1.5704E0
8.0000E0	1.2471E-2	9.9509E-1	1.5915E0
9.0000E0	6.8877E-3	1.0059E0	1.6118E0
1.0000E1	5.5002E-3	1.0058E0	1.6188E0
1.1000E1	1.9679E-3	1.0021E0	1.6167E0
1.2000E1	1.5616E-3	9.9944E-1	1.6129E0
1.3000E1	4.1825E-4	9.9891E-1	1.6109E0
1.4000E1	2.4123E-4	9.9943E-1	1.6108E0
2.0000E1	5.0700E-6	9.9997E-1	1.6118E0



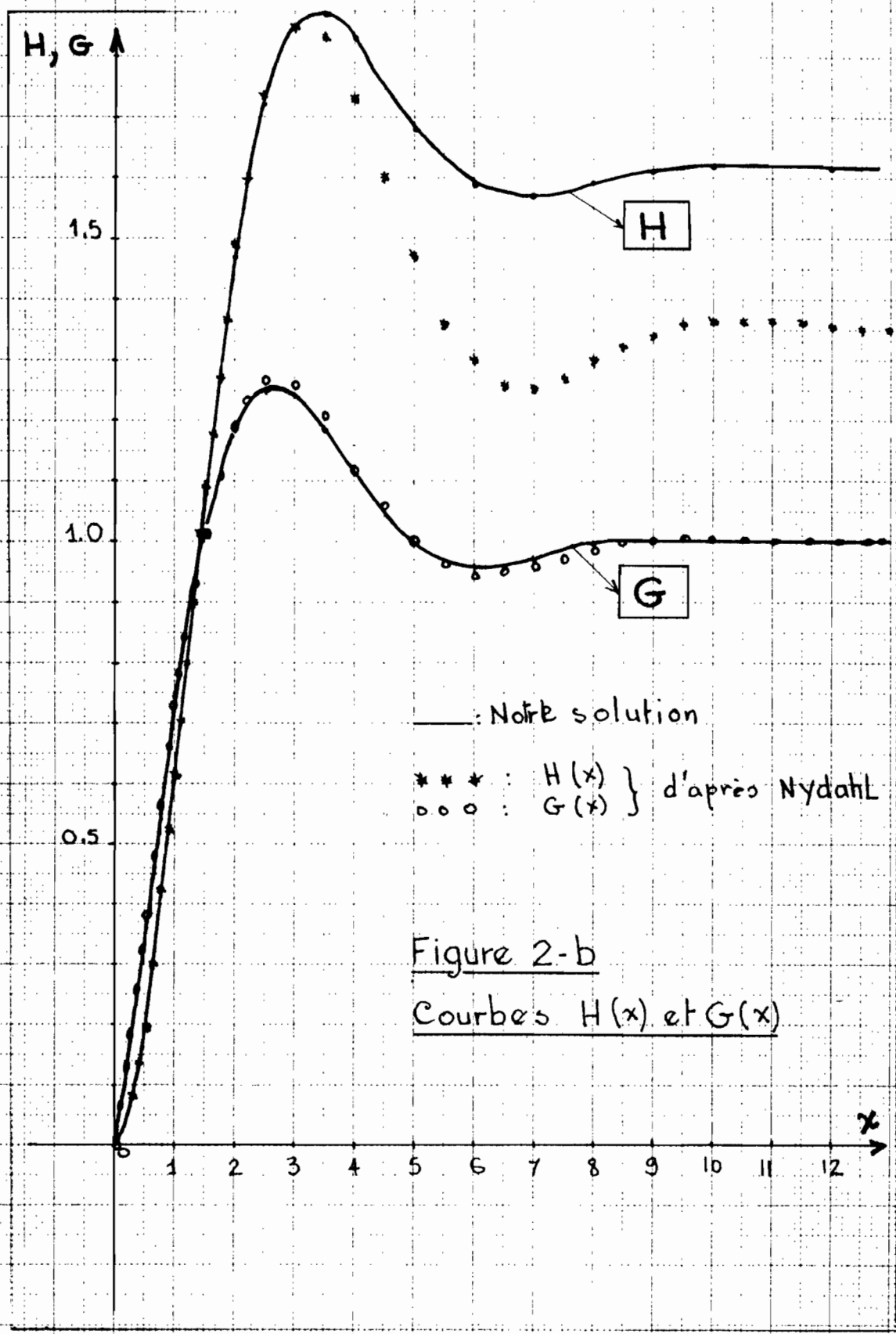


Figure 2-b
Courbes $H(x)$ et $G(x)$

CHAPITRE - III.

DISCUSSION

CHAPITRE - III

DISCUSSION

Elle porte sur la répartition de la pression

$\frac{\partial p}{\partial z}$ et $\frac{\partial p}{\partial r}$

- les composantes de la vitesse
- le frottement pariétal
- la comparaison des résultats obtenus avec ceux de J. E. Nydahl (plus précis).

1° Répartition de la pression: $\frac{\partial p}{\partial z}$ et $\frac{\partial p}{\partial r}$

D'après (I-3), on peut écrire

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left[\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

avec $w = \sqrt{\nu \omega} \cdot H(x)$ (R-3)

$$u = r\omega \cdot F(x) \quad (R-2)$$

* Près de la paroi, cette équation (I-3) s'écrit:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left[\nu (0 + 0 + 0) - 0 + w \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

soit : $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho w \frac{\partial w}{\partial z}$

mais on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial z} = \sqrt{2\omega} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{0.4}{0.8} = 0.5 \quad (\text{Figure 2b}) \end{cases}$$

et donc $H \approx \frac{1}{2} x$

D'où :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho (0.5 \sqrt{2\omega}) (0.5 x) = 0.25 \rho \sqrt{2\omega} x$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = k \omega \cdot x} \quad k = \text{cte.}$$

Quant à $\frac{\partial p}{\partial r}$, on a, d'après (R-2) :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2$$

soit :

$$\boxed{p(r) = \left[\rho \frac{\omega^2}{2} \right] r^2 + p(0)}$$

La pression est donc une fonction parabolique suivant la direction axiale près de la paroi. Il en est de même suivant la direction radiale

* Loin de la paroi, c'est à dire pour $x \rightarrow \infty$

on a alors :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho [2(0+0+0) - 0 + \text{cte} \cdot 0]$$

d'où $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$; c'est l'hypothèse du type Prandtl.

2/ Les composantes de la vitesse.

* Près de la paroi du disque

- F { qui est en relation avec u (radiale) } est négative, ce qui veut dire que l'écoulement est dirigé vers l'intérieur

- H { en relation avec w (composante axiale) } est positive et le fluide est aspiré le haut

* Loin de la paroi ($x \rightarrow \infty$)

- $F \rightarrow 0$: pas d'entraînement du fluide dans la direction radiale

- G tend vers la rotation imposée du fluide

- $H = \text{constante}$, ce qui veut dire que l'écoulement suit la direction verticale

En étudiant l'écoulement dans un plan médian, passant par le centre du disque, nous pouvons observer la direction globale de l'écoulement du fluide. Cette direction peut être représentée à la figure 3 de la page suivante.

En combinant avec la troisième composante tangentielle de la vitesse représentée par la fonction G , nous retrouvons l'allure de

l'écoulement global, figure 4 déjà existante dans [1]

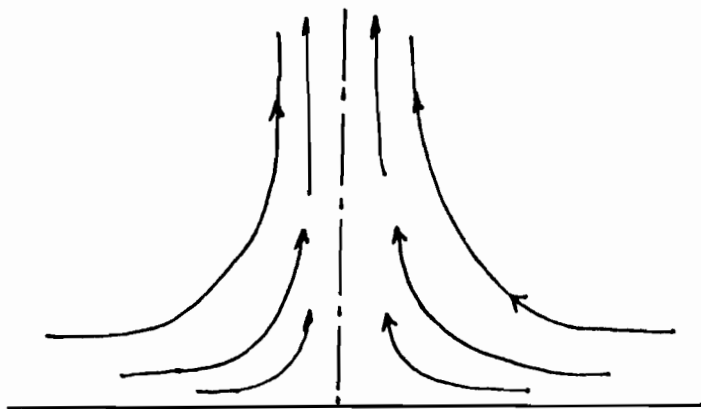


Figure: 3 - Ecoulement du fluide dans un plan passant par le centre du disque

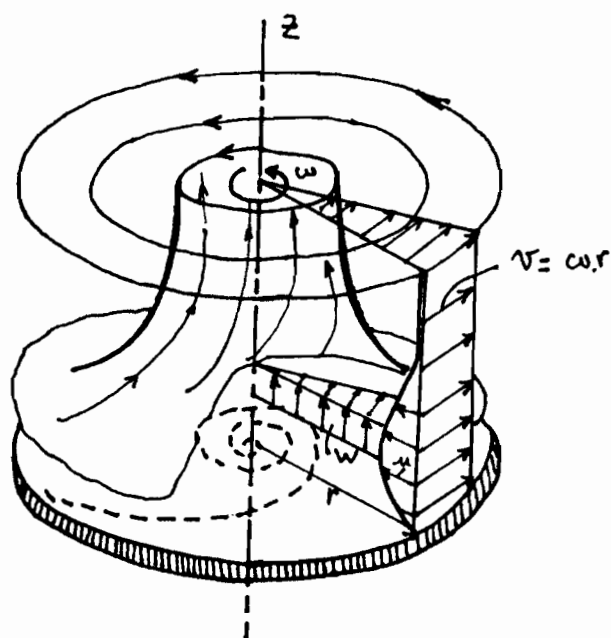


Figure: 4 - Ecoulement global du fluide

3/ Le Frottement pariétal

On calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ seulement. car le frottement pariétal est proportionnel à ces fonctions seulement.

$$1/ \frac{\partial u}{\partial x} = r\omega F'(x) \approx -0.5 r\omega$$

$$2/ \frac{\partial v}{\partial x} = r\omega G'(x) \approx 0.5 r\omega$$

(à la paroi, $F'(x) = G'(x) \approx H'(x) = 0.5$)

On a: $\tau = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$

$$\boxed{\tau = k \cdot r \omega} \quad \text{où } k = \text{cte}$$

τ est donc une fonction linéaire de r et pour un rayon donné r , il ne dépend que de la rotation (ω).

4/ Comparaison des résultats obtenus avec ceux de J. E. Nydahl

Après les courbes de la figure 2, pages 29 et 30 on note que :

a) La solution trouvée pour $G(x)$ est identique

à la solution de Nydahl

b) Il en est de même pour la fonction $F(x)$
pour $x \in \{[0 - 3.5] \cup [6 - \infty]\}$

Entre 3.5 et 6, la fonction de Nydahl
monte un peu plus.

c) La fonction $H(x)$ correspond à la solution
de Nydahl pour $0 \leq x \leq 3$. et pour
 $x > 3$, on note une différence de l'ordre
de 16%.

La différence provient certainement du fait
que nous avons négligé certains termes de la
fonction $F(x)$ choisie au départ. Nous n'avons
tenu compte en effet que des termes en sinus et
cosinus.

CONCLUSION

CONCLUSION

Cette étude nous aura permis de nous familiariser avec les méthodes de recherche théorique ainsi que les traitements de systèmes d'équations différentielles non linéaires, que l'on rencontre toujours dans les études de l'écoulement d'un fluide régi par les équations de Navier-Stokes.

La méthode analytique, même si elle est efficace, ne fournit dans la plupart des cas tel que la présente étude, qu'une solution approchée. Cependant, elle nous a donné de bons résultats si l'on se réfère à la solution de J. E. Nydahl qui, à notre connaissance, représente la meilleure solution obtenue jusqu'à présent [1].

L'étude expérimentale pour ce type d'écoulement servira éventuellement à mieux valider les résultats ici obtenus.

ANNEXE

A-I. Réduction des équations de base

A-II. Schéma des circuits analogiques

A-III. Transformation de la fonction $\Gamma(x)$

A-IV. Formulation des méthodes numériques

ANNEXE-1

Réduction des équations de base

- Equation (I-1)

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

- avec $u = \omega r F(x)$

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial r} = \omega F(x)$$

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial z} = \omega r \frac{\partial F(x)}{\partial z} = \omega r \left[\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \right]$$

$$= \omega r \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} F'$$

$$\bullet -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -r\omega^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u}{r} \right] = \frac{\partial}{\partial r} [\omega F(x)] = 0$$

$$\bullet \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \omega r \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} \frac{\partial F'}{\partial z}$$

$$= \omega r \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} F'' \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}}$$

$$= \frac{\omega^2 r}{\gamma} F''$$

- On a donc :

$$\omega \omega F + \omega \omega r F' \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} - \frac{v^2}{r} = -r\omega^2 + r\omega^2 F''$$

- ou encore

$$\frac{u}{r\omega} F + F' \frac{w}{\sqrt{\omega\gamma}} - \frac{v^2}{r^2\omega^2} + 1 - F'' = 0$$

soit : $F^2 - G^2 + HF' - F'' + 1 = 0$ (I-5)

Equation (I-2)

$$\frac{u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \gamma \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]$$

avec $v = \omega r G(x)$

$$\cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \omega G(x)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0$$

$$\cdot \frac{\partial v}{\partial z} = (\partial v / \partial G) (\partial G / \partial x) (\partial x / \partial z) = r \omega \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} G'$$

$$\cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{r \omega^2}{\gamma} G''$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{v}{r} \right] = 0$$

on a donc : en remplaçant dans (I-2)

$$u \omega G + r \omega \omega \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} G' + \frac{uv}{r} = \gamma \left[\frac{r \omega^2}{\gamma} G'' \right]$$

soit : $2GF + HG' - G'' = 0$ (I-6)

Equation (I-4)

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

avec : $\frac{\partial u}{\partial r} = \omega F$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = (\partial w / \partial H) (\partial H / \partial x) (\partial x / \partial z) = \omega H'$$

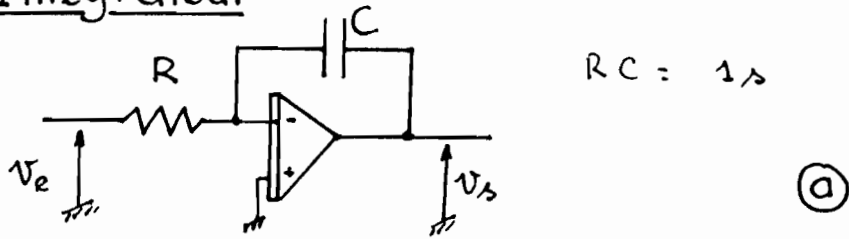
cette équation (I-4) devient alors :

$$\omega F + \frac{u}{r} + \omega H' = 0$$

on a encore : $2F + H' = 0$ (I-7)

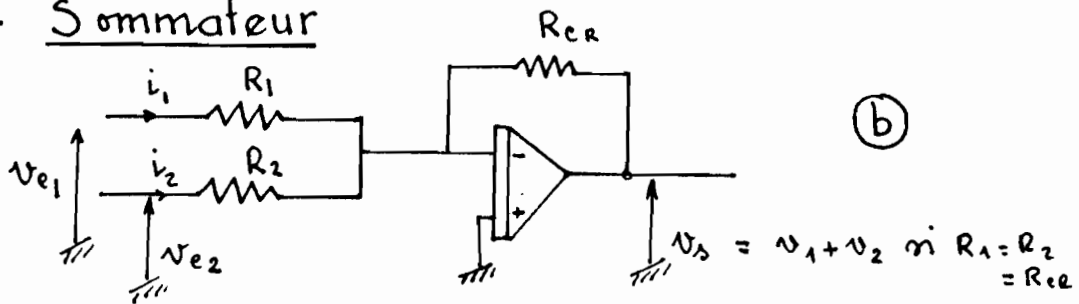
ANNEXE-II [6]

1- Intégrateur



$$V_s = - \int v_e dt$$

2- Sommateur



$$V_s = - \left(\frac{R_{ce} V_1}{R_1} + \frac{R_{ce} V_2}{R_2} \right)$$

3- Multiplicateur (log-antilop)

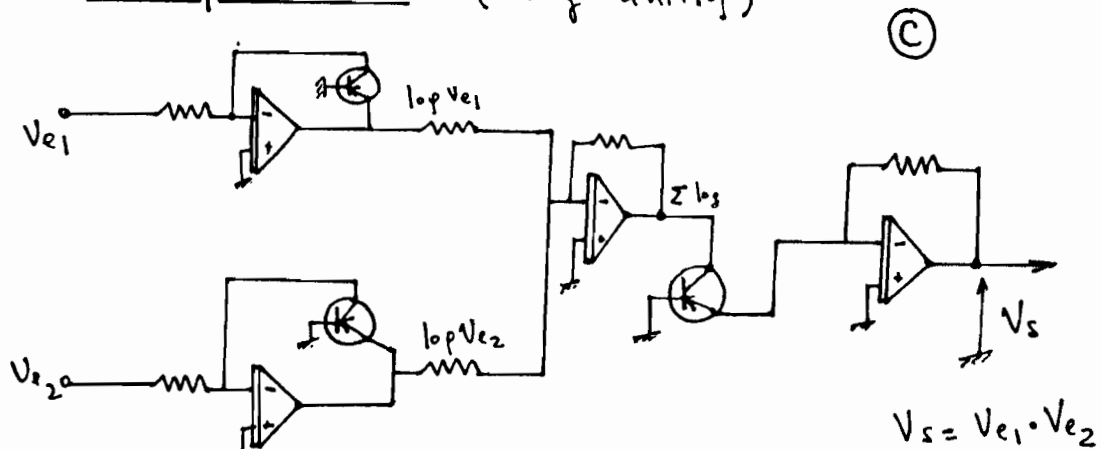


Figure 5 : Schéma des circuits utilisés

ANNEXE - III

Transformation de G^2 .

— on a : $G^2 = 1 + [C e^{2\lambda x} - \sin^2 t x e^{2\lambda x}] + [B e^{\lambda x} \cos t x + A e^{\lambda x} \sin t x]$

— soit encore :

$$G^2 = [C - \sin^2 t x] e^{2\lambda x} + [B \cos t x + A \sin t x] e^{\lambda x} + 1$$

— en posant : $z = e^{\lambda x}$

$$G^2 = P = (C - \sin^2 t x) z^2 + (B \cos t x + A \sin t x) z + 1$$

— équation du second degré en z

G^2 sera un carré parfait si, et seulement si

$$\Delta(P) = 0$$

or $\Delta(P) = (B \cos t x + A \sin t x)^2 - 4(C - \sin^2 t x) \stackrel{?}{=} 0$

— équation qui doit être vérifiée pour tout x ,

y , compris $x = 0$

— avec $x = 0$

$$\Delta(P_0) = B^2 - 4C \stackrel{?}{=} 0$$

Non - $\Delta(P_0) \neq 0$

— car :

$$B = \left(-1 + \frac{2t^2}{\lambda^2 + t^2} \right) = -(1 + C)$$

— donc : $B^2 = (1 + C)^2$

et $B^2 - 4C = (C + 1)^2 - 4C = (C - 1)^2$

- expression nulle si : $(c-1)^2 = 0 \Leftrightarrow c = 1$

- or : $C = \frac{2t^2}{\lambda^2 + t^2}$

$C = 1$ si $|\lambda| = |t|$.

* pour $tx = \pi/2$

$$\Delta(\Gamma_{\pi/2}) = A^2 - 4C + 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\left(\lambda^2 - t^2 + \frac{1}{\lambda^2 + t^2}\right)^2 - \frac{8t^2}{\lambda^2 + t^2} + 4 \stackrel{?}{=} 0$$

- avec $|\lambda| = |t|$, il faudrait que :

$$\left[\frac{1}{\lambda^2 + t^2}\right]^2 + 4 = \left[\frac{8t^2}{\lambda^2 + t^2}\right]$$

- avec $|\lambda| = |t|$

- ce qui revient à dire que :

$$\left[\frac{1}{\lambda^2 + t^2}\right] = 0$$

Ce qui n'est pas le cas, car λ et t sont des paramètres finis, liés par la relation Eq. (II-3)

$$\text{Donc } |\lambda| \neq |t| \Rightarrow C \neq 1 \Rightarrow \Delta(\Gamma_0) \neq 0$$

$\Rightarrow \Gamma = \mathbb{G}^2$ n'est pas un carré parfait.

ANNEXE - IV

Méthode Numérique

1. Formulation Runge - kutta

Runge - kutta , 4^e ordre : [4]

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h ; y_i + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h ; y_i + \frac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h ; y_i + hk_3)$$

2. Formulation de la méthode des tirs

on cherche $F_1(0)$ et $F_3(0)$

pour cela, on pose :

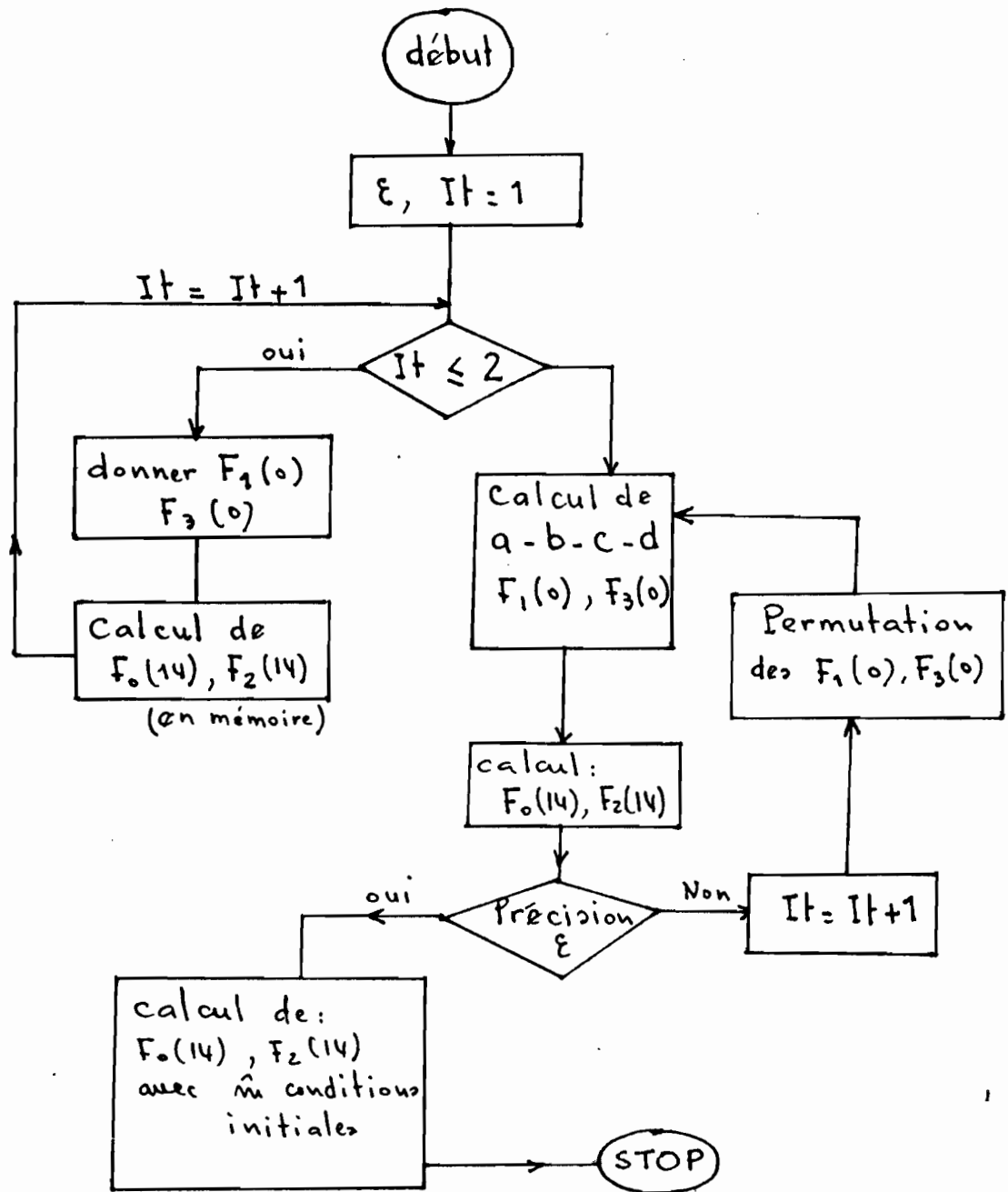
$$F_0(\infty) = a F_1(0) + b F_3(0)$$

$$F_2(\infty) = c F_1(0) + d F_3(0)$$

Remarque : cette approximation linéaire n'est pas unique. Les calculs peuvent converger ou diverger selon le cas. [5]

Il faut alors déterminer a, b, c, d , par itérations successives.

3. Organigramme Sommaire



4. Programme

▽ Tornade ; Iter ; FI ; FF, FIM, FFM

[1] FF ← FI ← 2 2 p Iter ← 1

[2] DEBUT : FI [ITER ; 1] ← 0 , op 0 ← ' FP(0) = ? '

[3] FI [ITER ; 2] ← 0 , op 0 ← ' GP(0) = ? '

[4] RUN , FI [ITER ;]

[5] 0 ← FF [ITER ;] ← 0 RKTA RUN

[6] → (2 > , ITER ← ITER + 1) / DEBUT

[7] GO : FIM ← FI SHOOT FF

[8] 0 ← FFM ← 0 RKTA FIM

[9] → ((1 FFM [1]) > .004) / NON

[10] → ((1 FFM [2] - 1) ≤ .004) / OUI

[11] NON : ITER ← ITER + 1

[12] FI [1 ;] ← FI [2 ;]

[13] FI [2 ;] ← FIM

[14] FF [1 ;] ← FF [2 ;]

[15] FF [2 ;] ← FFM

[16] → GO

[17] OUI : FFM ← 1 RKTA FIM

[18] ▽

$$\nabla R \leftarrow I \text{ RKTA MAM; } Z, \Delta Z; K, F$$

- [1] $F \leftarrow 8 p Z \leftarrow 0 \times \Delta Z \leftarrow 0.25$
- [2] $F[2] \leftarrow MAM[1]$
- [3] $F[5] \leftarrow MAM[2]$
- [4] $ICI : \rightarrow (I \neq 1) / \text{SAUTE}$
- [5] $(1, 9) p Z, F$
- [6] $\text{SAUTE} : \rightarrow (Z = 1) / \text{RA}$
- [7] $F \leftarrow \text{DANSE } F$
- [8] $Z \leftarrow Z + \Delta Z$
- [9] $\rightarrow ICI$
- [10] $\text{RA} : R \leftarrow 1 \ 2 p F[1], F[4]$

$$\nabla$$

$$\nabla R2 \leftarrow \text{FA SHOOT FB; COEFF; FAS; FBS; IL}$$

- [1] $\text{COEFF} \leftarrow 2 \ 2 p \text{IL} \leftarrow 1$
- [2] $\text{HE} : \text{FAS} \leftarrow \text{FA}$
- [3] $\text{FBS} \leftarrow \text{FB}$
- [4] $\text{COEFF}[\text{IL};] \leftarrow (, \text{FBS}[:, \text{IL}]) \div \text{FAS}$
- [5] $\rightarrow (2 \gg \text{IL} \leftarrow \text{IL} + 1) / \text{HE}$
- [6] $R2 \leftarrow (0, 1) \div \text{COEFF}$

$$\nabla$$

∇ RI \leftarrow DANSE F; K; J; KJ; IJK; FC

$$[1] \quad K \leftarrow 4 \quad 8p \cdot \Delta Z \leftarrow 2 \times \Delta Z \quad 12 \leftarrow 0.125 \times J \leftarrow KJ \leftarrow p \cdot FC \leftarrow F$$

$$[2] \quad \text{HAI: } K[KJ; 1] \leftarrow FC[1] \times IJK \leftarrow 1$$

$$[3] \quad K[KJ; 2] \leftarrow FC[2]$$

$$[4] \quad K[KJ; 3] \leftarrow 1 + (FC[1] * 2) + (FC[2] * FC[3]) - FC[4] * 2$$

$$[5] \quad K[KJ; 4] \leftarrow FC[4]$$

$$[6] \quad K[KJ; 5] \leftarrow FC[5]$$

$$[7] \quad K[KJ; 6] \leftarrow (FC[5] * FC[7]) + 2 \times FC[1] * FC[4]$$

$$[8] \quad K[KJ; 7] \leftarrow FC[7]$$

$$[9] \quad K[KJ; 8] \leftarrow -2 \times FC[1]$$

$$[10] \quad \text{MOT: } FC[IJK] + \Delta Z 12 \times K[KJ; IJK] \times J$$

$$[11] \quad \rightarrow (8 \gg IJK \leftarrow IJK + 1) / \text{MOT}$$

$$[12] \quad \rightarrow (3 \gg KJ \leftarrow KJ + 1) / \text{HAI}$$

$$[13] \quad \rightarrow (2 \gg J \leftarrow J + 1) / \text{HAI}$$

$$[14] \quad R1 \leftarrow F + \Delta Z \times (K[1;] + K[4;] + 2 \times K[2;] + K[3;]) \div 6$$

∇

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Hermann Schlichting
'Boundary Layer Theory' - 4^e édition
Mc Graw - Hill
- [2] P. Florent, N. D. Nguyen, D. Vo Ngoc
'Journal de Mécanique', Vol 12, N°4 - Dec. 73
- [3] D. Vo Ngoc
'Ecoulement radial entre disques coaxiaux'
(Thèse de Doctorat) Université LAVAL.
- [4] Jean Legras
'Méthodes et techniques de l'Analyse Numérique'
(Dunod) Pages 175 @ 177
- [5] DINH Vo Ngoc
'Notes personnelles'
- [6] R. Dugehault
'Applications pratiques de l'amplificateur
opérationnel.'
Collection Scientifique contemporaine
Chapitre 1