

RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL



ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE THIÈS

**PROJET
DE
FIN D'ÉTUDES**

GC.0388

Titre ELABORATION D'UN PROGRAMME DE CALCUL
INTÉRACTIF D'ANALYSE MATRICIELLE (DES)
DES STRUCTURES EN DEUX DIMENSIONS

Auteur Abdoulaye GACKO
ALioune KASSE

Génie CIVIL

Date JUIN 1983

Ecole Polytechnique de Thiès

Génie Civil

Projet
de
fin d'études..

Titre : Elaboration d'un programme
de calcul interactif d'analyse
matricielle des structures en
deux dimensions (él. 2D)

Auteurs: Abdoulaye Gacko
Alioune Kassé

Directeur: Dr Jean Robert Murat

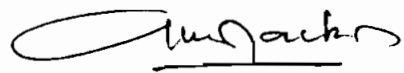
Soumis le 18 Mai 1983

A mon épouse

A mes parents

A mes amis

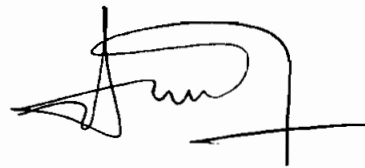
Abdoulaye GACKO



A mes parents

A mes amis

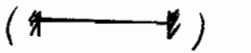
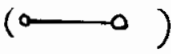
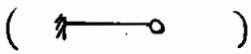
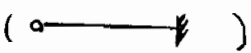
Alioune Kasse'



formaire

Le sujet qui nous est soumis comme projet de fin d'études consiste à écrire, tester et documenter un programme de calcul interactif d'analyse matricielle des structures en deux dimensions; car en utilisant les éléments classiques de pontes.

Les éléments retenus pour l'analyse sont au nombre de quatre:

- Type 1 : barre bi-encastres ()
- Type 2 : barre bi-articulées ()
- Type 3 : barre articulées à gauche et encastres à droite ()
- Type 4 : barre encastres à gauche et articulées à droite ()

Le programme de calcul comporte cinq modules:

- Module 1 : Lecture et impression des données
- Module 2 : Matrices de rigidité
- 3: Traitement des charges
- Module 4 : Calcul des déplacements (Méthode de Cholesky)
- Module 5 : Calcul des forces dans les membres.

Nous noterons que compte tenu de la faible capacité du centre de calcul et d'un certain manque de temps (fermeture du centre de

calcul pour travaux de réflexion pendant quelques jours), nous n'avons pas pu présenter parfaitement un programme conversationnel

qui mettrait l'utilisateur tout à l'aise.

Tous les progrès humains
sont nés du fait qu'à
certaines heures, certains
hommes ont eu le courage
de penser autrement que
les autres

BAYET

Introduction

L'introduction des méthodes matricielles en mécanique des matériaux a totalement bouleversé les procédés de prévision des contraintes et déformations subies par les structures complexes sous l'action de forces statiques et/ou dynamiques.

Ces nouvelles méthodes conviennent particulièrement à l'emploi d'ordinateurs à grande vitesse et elles représentent, pour les ingénieurs concepteurs des structures, un outil d'une valeur inestimable.

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, il n'est pas à prouver la nécessité de munir l'École Polytechnique de Thiès d'un programme de calcul. Ce sera sans doute un programme simple mais qui a quand même son importance car il constitue un début d'un long travail de recherche vu son aspect dynamique. En effet, le projet qui nous est soumis consiste à écrire, tester et documenter un programme de calcul interactif d'analyse matricielle des structures en deux dimensions, ceci en utilisant les éléments classiques de poutres. Il sera réalisé sous forme modulaire et chaque module est documenté et testé individuellement de façon à constituer une banque de programmes pour utilisation future (extension à trois dimensions, introduction d'éléments finis de coques et plaque).

Les différents modules du programme sont:

- Lecture et impression des données de la structure
- Calcul des coefficients des matrices de rigidité globales des membrures et impression de ces matrices
- Calcul de l'ordre du système et des dimensions suivant j_{\max} et $(j-h)_{\max}$

- Assemblage et impression de la matrice générale de la structure.

- Cas de chargements

- Calcul des déplacements

- Détermination des efforts dans les membrures.

Nom du programme : EL-2D.

Chapitre 1 : Le problème

L'École Polytechnique de Thiès, rappelons le, a pour vocation de dispenser l'enseignement et de promouvoir la recherche dans tous les domaines scientifiques où s'exerce l'activité de l'ingénieur. La recherche de méthodes élaborées de calcul des structures s'inscrit dans ce cadre quand on sait que la détermination des contraintes et déformations constitue, sans nul doute, l'étape la plus importante dans la conception d'un ouvrage.

Ce qui précède donc peut constituer une raison valable du projet de fin d'études en question, à savoir l'élaboration du programme EL-20. Outre le fait que EL-20 constitue un début pour la recherche dans le domaine des structures, le programme pourra être d'un apport immédiat aux étudiants. En effet, EL-20 s'adresse à des étudiants pour éventuellement les décharger des calculs fastidieux auxquels ils ont toujours été confrontés au cours des travaux pratiques de structures, Béton Armé et Construction Métallique.

Notons que, vu sa vocation, le programme ne nécessite pas l'élaboration de théories trop poussées car il se veut simple d'utilisation.

Vu la nature du projet, à savoir application simple du calcul matriciel (Méthode des déplacements), vu aussi la capacité très limitée de centre de calcul de l'École, l'élément choisi est la poutre. Pour ces mêmes raisons, nous étudierons seulement les structures planes hyperstatiques chargées dans leur plan.

Par ailleurs, le programme ne tient en compte que les déformations dues à l'effort normal et au moment fléchissant.

Chapitre 2 : Méthode de calcul matriciel

1 - Généralités

Les principes de base de la méthode matricielle sont fondés sur le concept d'éclatement (discretisation) des structures complexes en un certain nombre de composants ayant chacun des caractéristiques statiques et dynamiques exprimées sous forme matricielle. Les matrices composantes correspondant aux différents éléments de la structure peuvent ainsi être considérées comme des blocs d'une construction qui, assemblés selon des règles bien établies, représentent les caractéristiques structurales du système réel. On réduit donc un problème complexe en une série de problèmes beaucoup plus simples.

La discrétisation de la structure permettra une analyse par l'emploi d'équations algébriques simultanées.

Il est toutefois à noter que l'énergie de déformation de la structure discrétisée devra approcher au mieux celle de la structure réelle (continue).

2 - Étapes à suivre

Nous distinguons huit (8) étapes à suivre pour traiter une structure à l'aide de la méthode.

a - Discretisation de la structure

Il s'agit de subdiviser la structure en un certain nombre d'éléments reliés aux nœuds. Ces éléments représentent les caractéristiques élastiques du milieu idéalisé.

Exemple: Pour les structures en forme de cadres en deux dimensions, on utilise des éléments unidimensionnels.

b. Choix des champs de déplacement

Pour chaque élément, on choisit les degrés de liberté appropriés

c - Calcul des déformations et contraintes

Il se fait par différenciation à partir des déplacements

d - Matrice de rigidité de l'élément

C'est l'étape la plus importante et la plus difficile et encore la plus critique. Pour sa construction, on utilise plusieurs méthodes dont celle de Castigliano

e - Assemblage des éléments

Les matrices des différents éléments de la structure sont assemblées pour créer une matrice générale. L'assemblage est basé sur le fait qu'à chaque noeuds où des éléments sont reliés, la valeur du déplacement est la même pour tous les éléments à ce noeud.

f - Solution des équations simultanées

Elle peut se faire par plusieurs méthodes dont celle de Cholesky. Il faut noter que la matrice de rigidité est généralement symétrique et bandée.

g - Calculs supplémentaires

La solution des équations nous donne les déplacements qui serviront à évaluer les déformations et contraintes

h - Interprétation des résultats

Pour l'ingénieur, il s'agit d'évaluer d'une manière détaillée les résultats d'ordinateurs afin de juger du degré de précision et par conséquent de la fiabilité de son modèle.

3 - Caractéristiques de l'élément poutre

Un élément poutre d'une structure plane hyperstatique est une barre droite de longueur L , de module d'élasticité E , de section transversale A , de moment d'inertie I .

Toutes les barres de la structure sont situées dans un même plan (Oxy). Chaque barre est caractérisée par une origine h et une extrémité j (h < j) et est orientée dans le sens $\vec{h_j}$

Pour chaque barre de structure, on définit un système d'axes locaux (L) lié à cet élément et on établit sa matrice de rigidité locale [k']. On transforme ensuite celle-ci par une matrice de rotation [λ] de manière à l'exprimer par rapport à un système global (G) lié à la structure; on obtient alors la matrice globale [k] de l'élément.

On peut dès lors construire la matrice de rigidité générale [G] de la structure par assemblage des différentes matrices [k], calculer les inconnues cinématiques (déplacements) et les efforts dans le système d'axes globaux. Pour faciliter l'interprétation des résultats (Etablissement des diagrammes de efforts normaux, tranchants et moments fléchissants) ceux-ci sont fournis en axes locaux.

On choisit une convention unique de signe pour toutes les grandeurs du type force et déplacement.

4- Application à une structure plane hyperstatique chargée dans son plan

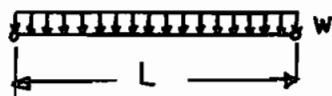
Pour ce structure on représente une charge en travée par: $P = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}$

Les déplacements nodaux sont A_x, A_y, θ et les forces nodales associées F_x, F_y, M_z .

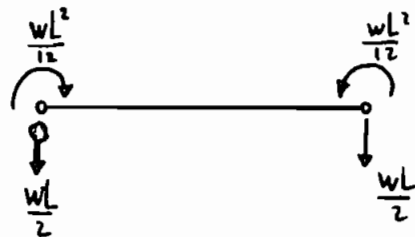
Les charges agissant en travée sont remplacées par des forces nodales

statiquement équivalentes de sorte que la barre n'est plus sollicitée qu'à ses extrémités

Exemple: Barre supportant une charge uniformément répartie



Système réel



Système statiquement équivalent

Les forces nodales intérieures $\{Q\}$ sont reliées aux déplacements nodaux intérieurs $\{q\}$ par la matrice de rigidité caractérisant la barre étudiée. En représentant respectivement les vecteurs des forces nodales et des déplacements nodaux intérieurs en h par :

$$\{Q_h\} = \{F_{x,h}, F_{y,h}, M_{3,h}\}^T$$

$$\{q_h\} = \{\Delta_{x,h}, \Delta_{y,h}, \theta_h\}^T$$

et d'une manière analogue en j , on peut écrire pour chaque barre, en vertu de la relation force-déplacement $\{Q\} = [k]\{q\}$

$$\begin{Bmatrix} Q_h \\ Q_j \end{Bmatrix} = [k] \cdot \begin{Bmatrix} q_h \\ q_j \end{Bmatrix}$$

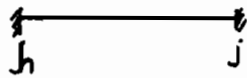
Le vrai problème donc consistera à construire la matrice de rigidité de chaque barre.

Chapitre 3: Eléments choisis et Chargements

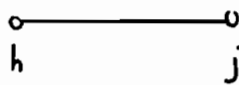
1. Description

Il a été recensés 4 types éléments, à savoir

Type 1: Barre bi-encastree



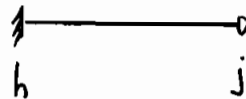
Type 2: Barre bi-rotulée



Type 3: Barre articulée en h et encastree en j



Type 4: Barre encastree en h et articulée en j



Ce sont là les éléments type que l'on retrouve dans les ossatures, treillis articulés, etc... qui constituent en général les structures planes hyperstatiques chargées dans leur plan.

2 - Matrice de rigidité d'un élément en axes locaux

2-a. Généralités

Après avoir discrétisé la structure réelle, il s'agit maintenant de déterminer les matrices de rigidités de ses éléments. La détermination de cette matrice peut se faire à l'aide de plusieurs méthodes parmi lesquelles on peut citer:

- . Méthode de Castigliano
- . Solution d'équations différentielles

. Inversion de la relation force-déplacement.

Dans le cadre de ce projet, les calculs seront faits à l'aide de la Méthode graphique de Castigliano, par conséquent la plus familière pour l'avenir beaucoup utilisée dans le cadre des cours de structures.

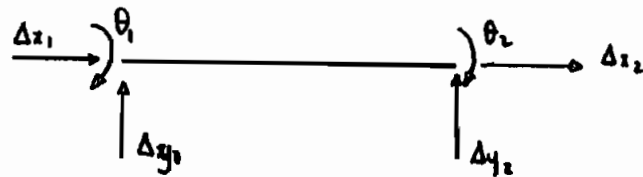
Notons que la matrice de rigidité, en vertu du théorème de Betti, est symétrique.

2-b Matrices $[k']$ des différents types d'éléments

Note: Nous nous bornerons à exposer les calculs pour la détermination de la matrice $[k']$ du type 1, car c'est la matrice la plus générale.

• Type 1

1 2 $E, L, A, I.$

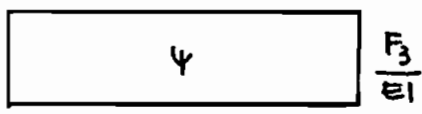
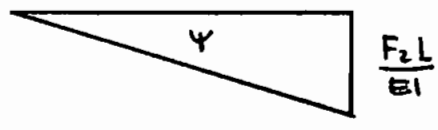


- Déplacement unitaire de $\Delta x_1 = 1$, les autres étant nuls

$$\frac{dW}{dF_1} = 1$$

$$\frac{dW}{dF_2} = \frac{dW}{dF_3} = 0$$

W : énergie de déformations.



Aire	y_G	
	$f(F_2)$	$f(F_3)$
$\frac{F_2 L^2}{2EI}$	$\frac{2}{3}L$	1
$\frac{F_3 L}{EI}$	$\frac{1}{2}L$	1

$$\frac{dW}{dF_1} = \frac{F_1 L}{EA} \times 1 \Rightarrow F_1 = k_{11} = \frac{EA}{L}$$

$$\frac{dW}{dF_2} = \frac{F_2 L^3}{3EI} + \frac{F_3 L^2}{2EI} = 0 \Rightarrow \frac{F_2 L}{3} + \frac{F_3}{2} = 0 \quad (i)$$

$$\frac{dW}{dF_3} = \frac{F_2 L^2}{2EI} + \frac{F_3 L}{EI} = 0 \Rightarrow \frac{F_2 L}{2} + F_3 = 0 \quad (2i)$$

De (2i), nous trouvons que $F_3 = -\frac{F_2 L}{2}$. Remplaçons F_3 par sa valeur dans (i) et on a:

$$\frac{F_2 L}{3} - \frac{F_2 L}{4} = 0 ; \text{ ce qui ne peut être vrai que le cas où } F_2 = 0. \text{ Donc } F_3 = 0$$

Le problème est désormais isostatique et on peut trouver F_4, F_5, F_6 grâce aux équations d'équilibre.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 + F_4 = 0 \Rightarrow F_4 = -\frac{EA}{L}$$

$$\Sigma M_{\text{O}} = 0 \Rightarrow F_6 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_5 = 0$$

Donc :

$$F_1 = k_{11} = \frac{EA}{L}$$

$$F_2 = k_{21} = 0$$

$$F_3 = k_{31} = 0$$

$$F_4 = k_{41} = -\frac{EA}{L}$$

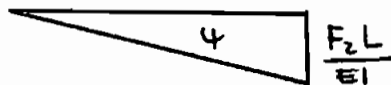
$$F_5 = k_{51} = 0$$

$$F_6 = k_{61} = 0$$

- déplacement unitaire de Δy_1

$$\frac{dW}{dF_1} = \frac{dW}{dF_3} = 0$$

$$\frac{dW}{dF_2} = 0$$



Aire	y_G	y_G
	$f(F_2)$	$f(F_3)$
$\frac{F_2 L^2}{2EI}$	$\frac{2}{3}L$	1
$\frac{F_3 L}{EI}$	$\frac{1}{2}L$	1

$$\frac{dW}{dF_1} = \frac{F_1 L}{EA} = 0 \Rightarrow F_1 = 0$$

$$\frac{dW}{dF_2} = \frac{F_2 L^3}{3EI} + \frac{F_3 L^2}{2EI} = 1 \quad (i)$$

$$\frac{dW}{dF_3} = \frac{F_2 L^2}{2EI} + \frac{F_3 L}{EI} = 0 \quad (2i)$$

$$\text{De (2i)} \quad F_3 = -\frac{F_2 L}{2}$$

$$(i) \rightarrow \frac{F_2 L^3}{3EI} - \frac{F_2 L^3}{4EI} = 1 \Rightarrow F_2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{EI}{L^3}$$

$$\Rightarrow F_2 = k_{22} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$F_3 = -\frac{12EI \times L}{2L^3} = -\frac{6EI}{L^2}$$

Là aussi le problème est désormais isostatique et les équations d'équilibre suffisent pour résoudre F_4, F_5, F_6

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_5 = -\frac{12EI}{L^3}$$

$$\sum M_{\odot} = 0 \Rightarrow F_6 = -\frac{6EI}{L^2}$$

- Déplacement unitaire de θ_1

$$\frac{dW}{dF_3} = 1$$

$$\frac{dW}{dF_1} = \frac{dW}{dF_2} = 0$$

Comme précédemment

$$\frac{dW}{dF_1} = 0 \Rightarrow F_1 = 0$$

$$\frac{dW}{dF_2} = \frac{F_2 L^3}{3EI} + \frac{F_3 L^2}{2EI} = 0 \quad (i)$$

$$\frac{dW}{dF_3} = \frac{F_2 L^2}{2EI} + \frac{F_3 L}{EI} = 1 \quad (ii)$$

De (i) nous déduisons que $F_3 = -\frac{2F_2 L}{3}$

$$(ii) \Rightarrow \frac{F_2 L^2}{2EI} - \frac{2}{3} \cdot \frac{F_2 L^2}{EI} = 1$$

$$\Rightarrow F_2 \left(\frac{3-4}{6} \right) = \frac{EI}{L^2} \Rightarrow F_2 = -\frac{6EI}{L^2}$$

On a alors $F_3 = \frac{4EI}{L}$

Le problème est alors isostatique et utilisant les équations d'équilibre, on trouve:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_4 = 0 \quad ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow F_5 = \frac{6EI}{L^2} \quad ; \quad \sum M_2 = 0 \Rightarrow F_6 = \frac{2EI}{L}$$

N.B: On procéderait de la même manière pour les déplacements produits à l'autre extrémité. On trouve alors, sous forme matricielle:

$$K'_1 = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

• Type 2

En suivant la même procédure que pour le type 1, on obtient:

$$K'_2 = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Type 3

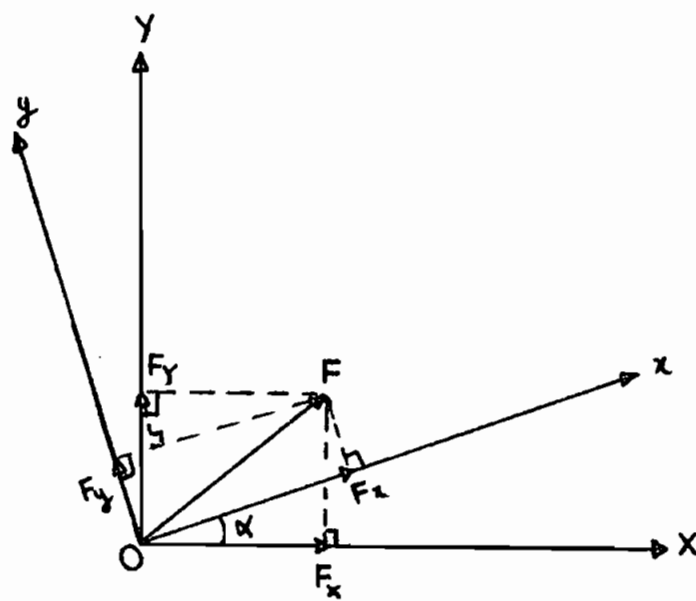
$$K'_3 = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix}$$

Type 4

$$K'_4 = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3- Détermination de la matrice de rotation $[\lambda]$

Pour la détermination de $[\lambda]$ on part d'un exemple simple d'une force F



X, Y sont les coordonnées en axes globaux (G)

x, y sont les coordonnées en axes locaux (L)

α : angle entre axes locaux et axes globaux

Les cosinus directeurs de x en relation avec X et Y sont $\cos \alpha$ et $\cos(90-\alpha) = \sin \alpha$

Par transformation trigonométrique, on voit que:

$$F_{x'} = F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha$$

$$F_{y'} = -F_x \sin \alpha + F_y \cos \alpha$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

$$\{F_L\} = [\lambda] \times \{F_G\} \Rightarrow \{F_G\} = [\lambda]^{-1} \times \{F_L\}$$

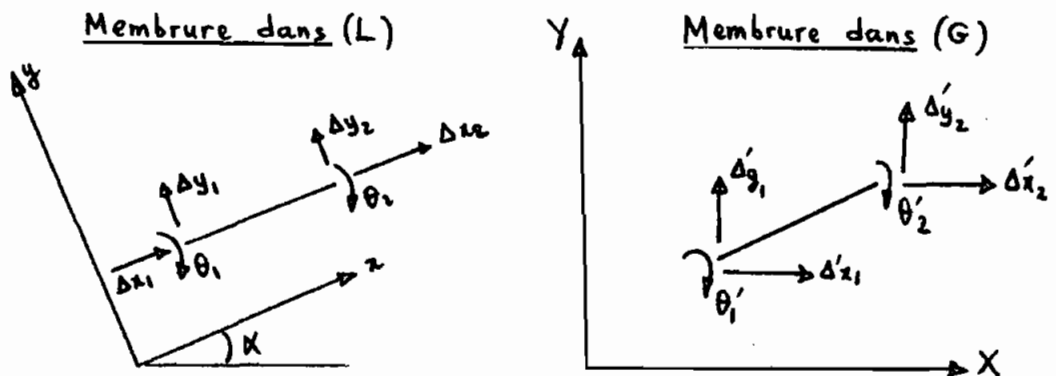
Inversons $[\lambda]$

Le déterminant $\Delta = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$[\lambda]^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} (-1)^2 \cos \alpha & (-1)^3 \sin \alpha \\ (-1)^3 (-\sin \alpha) & (-1)^4 \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

On constate que $[\lambda]^{-1} = [\lambda]^t$; $[\lambda]$ est dite matrice carrée orthogonale

• Déterminons maintenant $[\lambda]$ pour un élément à 6 degrés de liberté



En se basant sur l'exemple précédent on a :

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta x'_1 \cos \alpha + \Delta y'_1 \sin \alpha \\ \Delta y_1 &= -\Delta x'_1 \sin \alpha + \Delta y'_1 \cos \alpha \\ \theta_1 &= \theta'_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta x'_1 \\ \Delta y'_1 \\ \theta'_1 \end{Bmatrix}$$

on a $\{\Delta_{1L}\} = [\lambda_1] \times \{\Delta_{1G}\}$

$\{\Delta_{2L}\} = [\lambda_2] \times \{\Delta_{2G}\}$ car

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta x'_2 \\ \Delta y'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix}$$

En superposant on obtient:

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \theta_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta' x_1 \\ \Delta' y_1 \\ \theta'_1 \\ \Delta' x_2 \\ \Delta' y_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix}$$

On a donc, pour un élément à six degrés de liberté

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quand on repart de la relation $F = K\Delta$ on a

$$\{F_L\} = [K_L] \times \{\Delta_L\}$$

$$\{F_G\} = [K_G] \times \{\Delta_G\} = [\lambda]^t \times \{F_L\}$$

Par ailleurs on a $\{\Delta_L\} = [\lambda] \times \{\Delta_G\}$

$$\text{D'où } \{F_G\} = [\lambda]^t \times [K_L] \times \{\Delta_L\} = \underbrace{[\lambda]^t \times [K_L] \times [\lambda]}_{K_G} \times \{\Delta_G\}$$

Notons que $K_G = K$; $K_L = K'$

$$\text{d'où: } \boxed{[K] = [\lambda]^t \times [K'] \times [\lambda]}$$

Par soucis d'économie de mémoire du fait que l'on dispose d'un ordinateur de petite capacité (48K), nous effectuons à la main le produit $[K] = [\lambda]^t \times [K'] \times [\lambda]$; ce qui conduit donc à l'étape 4 (détermination des matrices $[K]$ des différents types d'éléments.)

4. Matrices de rigidité globales $[K]$ des éléments

Rappelons que la détermination de ces matrices, on utilise la formule $[K] = [\lambda]^t \times [K'] \times [\lambda]$.

. Type 2

Posons $\frac{EA}{L} = \alpha$; $\cos \alpha = c$; $\sin \alpha = s$.

$${}^{\lambda^t} \times K' = \begin{pmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\alpha & 0 & 0 & -c\alpha & 0 & 0 \\ s\alpha & 0 & 0 & -s\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c\alpha & 0 & 0 & c\alpha & 0 & 0 \\ -s\alpha & 0 & 0 & s\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[K_2] = (\lambda^T K') \times \lambda = \begin{pmatrix} e\lambda & 0 & 0 & -e\lambda & 0 & 0 \\ \Delta\lambda & 0 & 0 & -\Delta\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e\lambda & 0 & 0 & e\lambda & 0 & 0 \\ -\Delta\lambda & 0 & 0 & \Delta\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[K_2] = \begin{pmatrix} c^2\lambda & es\lambda & 0 & -c^2\lambda & -es\lambda & 0 \\ es\lambda & s^2\lambda & 0 & -es\lambda & -s^2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2\lambda & -es\lambda & 0 & c^2\lambda & es\lambda & 0 \\ -es\lambda & -s^2\lambda & 0 & es\lambda & s^2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Type 1

En procédant de la même manière que pour le type 2, on obtient en posant $\frac{EA}{L} = z$; $\frac{12EI}{L^3} = y$; $\frac{6EI}{L^2} = \beta$; $\frac{2EI}{L} = u$:

$$[K_1] = \begin{pmatrix} c^2x + s^2y & cs(x-y) & s\beta & -(c^2x + s^2y) & -cs(x-y) & s\beta \\ cs(x-y) & s^2x + c^2y & -c\beta & -cs(x-y) & -(s^2x + c^2y) & -c\beta \\ s\beta & -c\beta & 2u & -s\beta & c\beta & u \\ -(c^2x + s^2y) & cs(x-y) & -s\beta & c^2x + s^2y & cs(x-y) & -s\beta \\ -cs(x-y) & -(s^2x + c^2y) & c\beta & cs(x-y) & s^2x + c^2y & c\beta \\ s\beta & -c\beta & u & -s\beta & c\beta & 2u \end{pmatrix}$$

• Type 3 : Posons $\frac{EA}{L} = x$; $\frac{3EI}{L} = y$; $\frac{3EI}{L^2} = z$; $\frac{3EI}{L^3} = u$

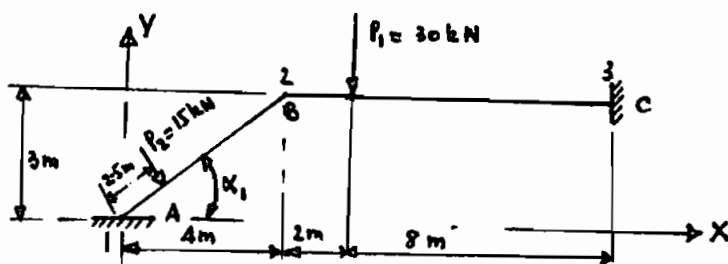
$$[K_3] = \begin{pmatrix} c^2x + s^2u & cs(x-u) & 0 & -(c^2x + s^2u) & cs(u-x) & sz \\ cs(x-u) & s^2x + c^2u & 0 & cs(u-x) & -(c^2u + s^2x) & -cz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(c^2x + s^2u) & cs(u-x) & 0 & c^2x + s^2u & cs(x-u) & -sz \\ cs(u-x) & -(s^2x + c^2u) & 0 & cs(x-u) & s^2x + c^2u & cz \\ sz & -cz & 0 & -sz & cz & y \end{pmatrix}$$

• Type 4 : Posons $\frac{EA}{L} = x$; $\frac{3EI}{L} = y$; $\frac{3EI}{L^2} = z$; $\frac{3EI}{L^3} = u$

$$[K_4] = \begin{pmatrix} c^2x + s^2u & cs(x-u) & sz & -(c^2x + s^2u) & -cs(x-u) & 0 \\ cs(x-u) & s^2x + c^2u & -cz & -cs(x-u) & -(s^2x + c^2u) & 0 \\ sz & -cz & y & -sz & cz & 0 \\ -(c^2x + s^2u) & -cs(x-u) & -sz & c^2x + s^2u & cs(x-u) & 0 \\ -cs(x-u) & -(c^2u + s^2x) & cz & cs(x-u) & s^2x + c^2u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Exemple de calcul de matrice K

Soit la structure suivante :



$$E = 200 \text{ GPa} ; I_{AB} = 5.0 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 ; A = 10^3 \text{ mm}^2 ; L_{AB} = 5 \text{ m} ; L_{BC} = 10 \text{ m} \\ I_{BC} = 10^5 \text{ mm}^4$$

. Détermination de K_{AB}

$$X(1) = 0 ; Y(1) = 0$$

$$X(2) = 4 ; Y(2) = 3$$

Type d'élément : Type 1

$$e = \frac{X(2) - X(1)}{L_{AB}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$s = \frac{Y(2) - Y(1)}{L_{AB}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\alpha = \frac{EA}{L} = \frac{210^8 \times 10^{-3}}{5} = 40000$$

$$\gamma = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \times 210^8 \times 510^{-6}}{5^3} = 96$$

$$\beta = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \times 210^8 \times 510^{-6}}{5^2} = 240$$

$$u = \frac{2EI}{L} = \frac{2 \times 210^8 \times 510^{-6}}{5} = 400$$

Après calculs on obtient :

$$[K_{AB}] = \begin{bmatrix} 25634.6 & 19153.9 & 144 & -25634.6 & -19153.9 & 144 \\ 19153.9 & 14461.4 & -192 & -19153.9 & -14461.4 & -192 \\ 144 & -192 & 800 & -144 & 192 & 400 \\ -25634.6 & -19153.9 & -144 & 25634.6 & -19153.9 & -144 \\ -19153.9 & -14461.4 & 192 & -19153.9 & 14461.4 & 192 \\ 144 & -192 & 400 & -144 & 192 & 800 \end{bmatrix}$$

De même pour la membrure BC
Type 1.

$$[K_{BC}] = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -120 & 0 & -24 & -120 \\ 0 & -120 & 800 & 0 & 120 & 400 \\ -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 120 & 0 & 24 & 120 \\ 0 & -120 & 400 & 0 & 120 & 800 \end{bmatrix}$$

6- Exemple de calcul au computer

Voir annexe B pour les mêmes membrures

(A l'annexe Membres AB = Membre 1

Membre BC = Membre 2

Note : si on veut faire une bonne comparaison entre les termes de la matrice de rigidité globale calculés à la main et ceux calculés au computer, il faudra multiplier ceux calculés à la main par le 1000 car lors du calcul manuel on a exprimé E en kPa et lors du calcul au computer E a été exprimé en Pa .

7- Traitement des charges

Après avoir trouvé les matrices de rigidité, l'étape suivante dans l'analyse est de considérer les charges sur la structure.

Il est plus commode initialement de manier les charges aux noeuds et les charges sur les membrures séparément. La raison est que les charges aux noeuds et les charges sur les membrures sont traitées de différentes manières :

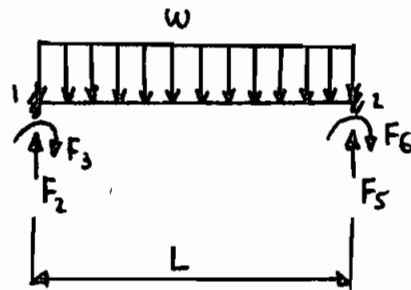
Les charges aux noeuds sont prêtes pour placement immédiat dans un vecteur de charge, mais les charges sur les membrures sont prises en compte en calculant les réactions qu'elles produisent aux noeuds. Les réactions peuvent être transformées en charges équivalentes nodales et combinées avec les charges directement appliquées aux noeuds.

Ces réactions aux charges en travée seront déterminés par les méthodes traditionnelles de calcul (Méthode de Castiglino par exemple) et sont, dans un premier temps exprimés dans le système local (L). Nous aurons à les exprimer dans le système global (G) - en unités

8- Chargements

Nous allons étudier les cas de chargements les plus courants

• Cas 1



Nous pouvons déterminer F_5 et F_6 par la méthode graphique de Castigliano avec la condition de casuels suivante:

$$\Sigma \text{déplacements en } 2 = 0 ; \text{ d'où } \frac{dw}{dF_5} = \frac{dW}{dF_6} = 0$$

et poser ensuite $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M_0 = 0$ pour trouver F_2 et F_3

Nous aboutissons aux résultats suivants:

$$F_2 = \frac{wL}{2}$$

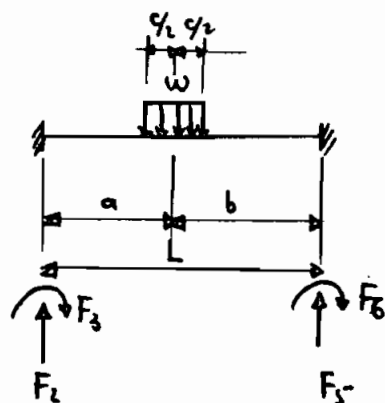
$$F_3 = -\frac{wL^2}{12}$$

$$F_5 = \frac{wL}{2}$$

$$F_6 = \frac{wL^2}{12}$$

Ce sont là les réactions aux appuis du système cinématiquement stable

• Cas 2



Par le même procédé que pour le cas 1 on obtient

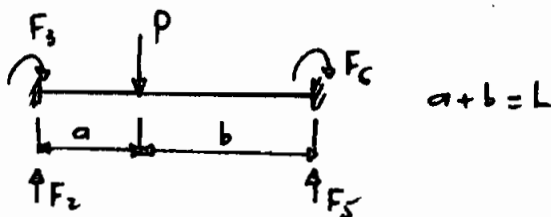
$$F_3 = -\frac{wc}{12L^2} [12ab^2 + c^2(1-3b)]$$

$$F_6 = \frac{wc}{12L^2} [12a^2b + c^2(1-3a)]$$

$$F_2 = \frac{wca}{L} + \frac{F_3 - F_6}{L}$$

$$F_5 = \frac{wca}{L} + \frac{F_6 - F_3}{L}$$

• Cas 3 :



Même procédé que pour le cas 1

$$F_6 = \frac{Pa^2b}{L^2} \quad ; \quad F_3 = -\frac{Pab^2}{L^2}$$

$$F_2 = P \frac{b^2(3a+b)}{L^3} \quad ; \quad F_5 = P \frac{a^2(3b+a)}{L^3}$$

Chapitre 4 : Matrice Générale

1- Importance de la numérotation des nœuds dans la construction de la matrice générale

La matrice de rigidité de la structure est la contribution individuelle de tous les éléments par rapport à une numérotation globale.

Il ya deux types de numérotation :

- une numérotation locale correspondant à l'élément (de façon si on a 3 degrés de liberté (ddl) par nœud)

- Une numérotation globale correspondant à la structure. On affecte à chaque ddl de l'élément un vecteur d'adresse qui est son numéro global. Ce procédé s'adapte mieux à la programmation

I : numéro local du ddl au niveau d'un nœud : de 1 à 3

$V(I)$: vecteur d'adresse du ddl I : numéro global du ddl

On a

$$V(I) = 3(H-1) + I \quad \text{au nœud } H \text{ de l'élément}$$

$$V(I+3) = 3(J-1) + I \quad \text{au nœud } J \text{ de l'élément}$$

. Numérotation locale



. Numérotation globale

$$V(1) = 3(2-1) + 1 = 4$$

$$V(2) = 5$$

$$V(3) = 6$$

$$V(3+1) = 10$$

$$V(3+2) = 11$$

$$V(3+3) = 12$$



Après ce calcul, on insère chaque ligne de la matrice de rigidité globale K de l'élément dans la matrice G sans tenir compte du fait qu'un ddl est bloqué ou non. Au niveau d'un noeud où se rencontrent plusieurs éléments, les contributions de chacun d'eux sont cumulées

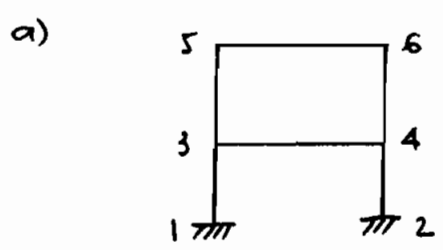
Avec une numérotation intelligente, les termes de la matrice G sont rapprochés de la diagonale principale et on obtient ainsi une matrice bandée

Pour minimiser la largeur de bande, il faut numéroté de telle sorte que la différence maximale $|H-J|$ soit minimisée

on a largeur de bande: $N_1 = (|H-J|_{\max} + 1) \times NDL$

avec NDL : nombre de degrés de liberté par noeud = 3 dans notre contexte. Donc $N_1 = 3(|H-J|_{\max} + 1)$

Exemples

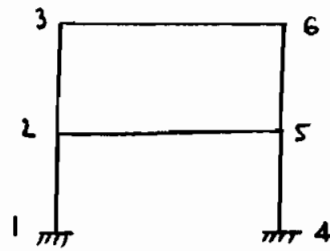


$N_1 = 3(2+1) = 9$

1	2	3	4	5	6
x	x	x			
x	x	x	x		
x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x
		x	x	x	x
			x	x	x

une croix (x) représente 3ddl

a)



$$N_1 = 3(6 - 3 + 1) = 12$$

1	2	3	4	5	6
x	x	x	x		
x	x	x	x	x	
x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x
		x	x	x	x

Nous notons que la largeur de bande est minimale pour le 1^{er} ex^{em}ple de numérotation. En effet pour la première numérotation $|H-J|_{\max} = 2$ et pour la deuxième $|H-J|_{\max} = 3$

La dimension de la matrice est $N \times NDL \times N_1$

où N est le nombre de nœuds de la structure

et $N_1 = N \times NDL$ est le nombre d'équations

Pour la programmation, on l'aura besoin que de stocker les termes non nuls autour de la diagonale principale en tenant compte de la symétrie de la matrice G

2. Mise en mémoire

La machine dont on dispose actuellement à l'EPT (IBM 5100) stocke les matrices ligne par ligne, mais d'une manière linéaire c'est à dire sur une seule rangée

Exemple

Matrice à stocker : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

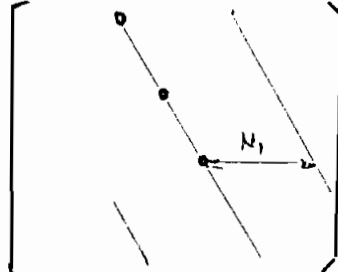
Stockage :

1	4	7	2	5	8	3	6	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Dans le cadre de notre projet, par soucis d'économie de mémoire, nous avons profité du fait que la matrice $[G]$ de la structure est bandée (avec une bonne numérotation) et symétrique. La conséquence est que l'espace mémoire requis est plus petit puisque l'on ne stocke que les termes non nuls au dessus de la diagonale principale (ou au dessous)

Exemple

Matrice à stocker :



Stockage :

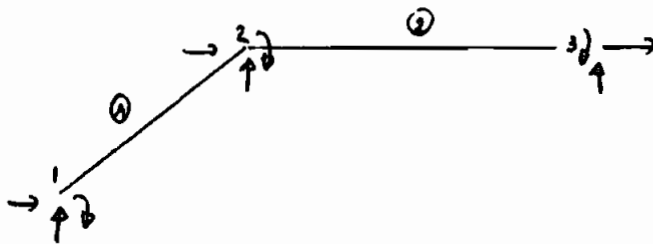
Ligne 1	Ligne 2	Ligne 3	...
•	•	•	•
N_1	N_1	N_1	

N_1 : largeur de bande rappelons-le.

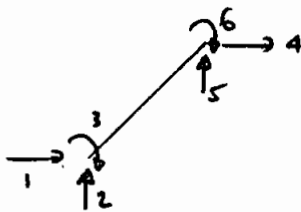
Si on a par exemple une matrice générale bandée et symétrique d'ordre 9 et de largeur 6 et si on utilise cette disposition dans la programmation, au lieu de stocker $9 \times 9 = 81$ termes la machine n'en stocke que 36

3. Exemple de calcul manuel

Soit la structure de la page 21 (Chap. 3)



Numerotation



$$V(1) = 1$$

$$V(4+3) = 4$$

$$V(2) = 2$$

$$V(2+3) = 5$$

$$V(3) = 3$$

$$V(3+3) = 6$$



$$\text{Largeur de bande : } N_1 = 3(1+1) = 6$$

Au chapitre 3 on avait établi les matrices k des membrures ① et ②

La matrice de rigidité générale de la structure étant la contribution individuelle de chaque élément on a que

$$G = K_1 + K_2 \quad \text{pour une numérotation appropriée.}$$

On a :

$[G] =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
25635	19153	144	-25635	-19153	144			
19153	14461	-192	-19153	-14461	-192		○	
144	-192	800	-144	192	400			
-25635	-19153	-144	45635	-19153	-144	-20000	0	0
-19153	-14461	192	-19153	14461	72	0	-24	-120
144	-192	400	-144	72	1600	0	120	400
			-20000	0	0	20000	0	0
			0	-24	120	0	24	120
			0	-120	400	0	120	800

4 - Exemple de calcul par ordinateur

Voir annexe B

Note : Multiplier les termes de G calculés à la main par 1000 pour pouvoir les comparer à ceux calculés au computer car E est exprimée en kPa lors de calcul manuel et en Pa lors de calcul au computer

1. Résolution d'un système d'équations linéaires

Ce problème revêt une grande importance dans l'étude des systèmes linéaires. On sait que toute structure linéaire n fois hyperstatique est régie par un système de n équations linéaires contenant les n inconnues traduisant l'équilibre des nœuds (méthode des déplacements):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Le système d'équations ci-dessus peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

ou $[A]\{X\} = \{B\}$

avec

$[A]$: matrice des coefficients

$\{B\}$: vecteur second membre

$\{X\}$: vecteur des inconnues

Dans le cadre de notre projet, $[G]$ sera la matrice des coefficients, $\{F\}$ matrice des forces représente le vecteur second membre et $\{b\}$ matrice des déplacements sera le vecteur des inconnues.

La solution du système d'équations sera faite par inversion directe de la matrice des coefficients $[G]$

En effet, si les n équations sont linéaires et indépendantes, la matrice $[G]$ n'est pas ~~non~~ singulière et admet dès lors une inverse $[G]^{-1}$ de sorte que

$$[G]^{-1} [G] \{D\} = [G]^{-1} \{F\}$$

$$\{D\} = [G]^{-1} \{F\}$$

La solution du problème se ramène donc à la détermination de l'inversion de la matrice de rigidité et à sa postmultiplication par le vecteur 'forces'

Notons qu'il ya plusieurs méthodes d'inversion et on adoptera la méthode de Cholesky qui s'applique mieux au calcul par ordinateur

2 - Méthode de Cholesky

a - Généralités

Toute matrice carrée $[A]$ de dimension $(n \times n)$ peut être mise sous forme d'un produit d'une matrice triangulaire inférieure $[B]$ et d'une matrice triangulaire supérieure $[C]$. Les éléments diagonaux d'une des matrices triangulaires sont arbitraires et peuvent donc être pris égaux à 1

Ainsi,

$$[A] = [B][C]$$

ou

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant la multiplication et en identifiant avec la matrice originelle $[A]$, on sait déterminer les éléments des matrices triangulaires

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} b_{ir} c_{rj} \quad i \geq j$$

$$c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} b_{ir} c_{rj}}{b_{ii}} \quad i < j$$

$$c_{ii} = 1$$

Dès lors $[A]^{-1} = ([B][C])^{-1} = [C]^{-1} \times [B]^{-1}$

L'inverse $[D]$ de la matrice triangulaire inférieure est calculée en écrivant

$$[B][B]^{-1} = [B][D] = [I]$$

Après multiplication et identification, on obtient finalement les termes de la matrice $[D]$ par les relations.

$$d_{ii} = \frac{1}{b_{ii}}$$

$$d_{ij} = -\frac{1}{b_{ii}} \sum_{r=1}^{i-1} b_{ir} d_{rj} \quad (i > j)$$

$$d_{ij} = 0 \quad (i < j)$$

qui montrent que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire inférieure

De la même manière, l'inverse $[E]$ de la matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure

$$[E][E]^{-1} = [E][E] = [I]$$

Dans le cas où les éléments de la diagonale principale valent 1, on obtient les termes de la matrice $[E]$ par les relations :

$$e_{ii} = 1$$

$$e_{ij} = - \sum_{r=j}^{i-1} e_{ir} e_{rj} \quad (i < j)$$

$$e_{ij} = 0 \quad (i > j)$$

Dès lors, la matrice $[A]^{-1}$ se calcule par la relation

$$[A]^{-1} = [E][D]$$

Dans le cas fréquent où la matrice $[A]$ est symétrique (c'est notre cas rappelons-le), on peut mettre $[A]$ sous forme du produit d'une matrice triangulaire supérieure $[H]$ par une matrice triangulaire inférieure $[K]$, celle-ci étant la transposée de $[H]$

$$[A] = [K][H] = [H]^t [H]$$

En utilisant la même méthode que ci-avant pour la détermination des éléments de $[H]$, il vient :

$$h_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} h_{ri}^2}$$

$$h_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} h_{ri} h_{rj}}{h_{ii}} \quad (i < j)$$

$$h_{ij} = 0 \quad (i > j)$$

Les éléments de la matrice $[M] = [H]^{-1}$ sont déterminés à partir de la relation matricielle $[H][H]^{-1} = [H][M] = I$

Ce qui conduit à :

$$m_{ii} = \frac{1}{h_{ii}}$$

$$m_{ij} = -\frac{1}{h_{jj}} \sum_{r=i}^{j-1} h_{rj} m_{ir} \quad (i < j)$$

$$m_{ij} = 0 \quad (i > j)$$

La matrice inverse de $[A]$ vaut

$$\begin{aligned} [A]^{-1} &= ([H]^t [H])^{-1} \\ &= [H]^{-1} ([H]^t)^{-1} \\ &= ([H]^{-1}) ([H]^{-1})^t \end{aligned}$$

et peut être calculée.

- b Applications au calcul des déplacements

$\{D\}$: vecteur des déplacements

$\{F\}$: vecteur des forces

On a : $[G]\{D\} = \{F\}$

Or on peut écrire, vu que $[G]$ est symétrique

$[G] = [H]^t [H]$ où $[H]$ est une matrice triangulaire supérieure

Donc $[H]^t [H]\{D\} = \{F\}$

Posons $[H]\{D\} = \{U\}$, on a alors

$$[H]^t \{U\} = \{F\}$$

On peut alors résoudre pour $\{U\}$ et par la suite résoudre pour $\{D\}$

En résolvant, on a

$$U_1 = F_1 / H_{11}$$

$$U_2 = (F_2 - H_{12} U_1) / H_{22}$$

⋮

$$U_n = (F_n - \sum_{r=1}^{n-1} H_{nr} U_r) / H_{nn}$$

Pour $\{D\}$ on résout par substitution à rebours et on obtient

$$D_n = U_n / H_{nn}$$

$$D_{n-1} = (U_{n-1} - H_{n-1,n} D_n) / H_{n-1,n-1}$$

⋮

$$D_i = (U_i - \sum_{r=i+1}^n H_{ir} D_r) / H_{ii}$$

c- Programmation

Dans cette partie, le calcul des indices et des bornes ^{des bandes} occupe une place importante. En effet ces indices doivent être en concordance avec ceux déjà existant dans la matrice générale de la structure et dans le traitement des charges.

Une astuce de programmation utilisée dans la recherche de la matrice $[H]$ issue de la décomposition est que les termes de la diagonale principale sont donnés sous la forme

$h_{ii} = 1/h_{ii}$; les formules donnant les autres termes de la matrice $[H]$, ceux du vecteur intermédiaire $\{U\}$ et ceux du vecteur des déplacements $\{D\}$ ont toujours au dénominateur le terme h_{ii} . Avec l'astuce que nous utilisons, il ne nous suffit que de multiplier par $h_{ii} = \frac{1}{h_{ii}}$

d- Exemple de calcul des déplacements

(Méthode manuelle de Cholesky)

Soit une structure dont : $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$G = [H]^t [H]$$

$$h_{11} = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{2}$$

$$h_{12} = g_{12} / h_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad h_{13} = g_{13} / h_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h_{22} = \sqrt{g_{22} - h_{12}^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$h_{23} = (g_{23} - h_{12} \times h_{13}) / h_{22} = (2 - \frac{1}{2}) / h_{22} = \frac{3/2}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{10}$$

$$h_{33} = \sqrt{\frac{13}{5}}$$

D'où :

$$H = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ & \sqrt{\frac{5}{2}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ & & \sqrt{\frac{13}{5}} \end{bmatrix}$$

$$[G] \{D\} = \{F\}$$

$$[H]^t [H] \{D\} = \{F\}$$

Posons $[H] \{D\} = \{U\}$

et prenons

$$F = \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} : \text{vecteur chargement}$$

$$u_1 = \frac{f_1}{h_{11}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

De même $u_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}} ; u_3 = -\frac{6}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}}$

$$\{D\} = [H]^{-1} \{U\}$$

$$d_3 = \frac{u_3}{h_{33}} = -\frac{6}{\sqrt{5} \sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = -\frac{6}{13}$$

$$d_2 = \frac{1}{13}$$

$$d_1 = \frac{32}{13}$$

d'où

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} 32/13 \\ 1/13 \\ -6/13 \end{Bmatrix}$$

e - Exemple de calcul au computer

Voir annexe B

Chapitre 6 : Forces dans les éléments

Une fois que la matrice de rigidité générale a été construite et que l'on a déterminé le vecteur F_{DL} des forces aux encastres, on est en mesure de calculer les déplacements à l'endroit des degrés de liberté par la relation

$$\{D\} = [G]^{-1} \{F\}$$

$$\text{ou } \{F\} = \{F_D - F_{DL}\}$$

F_D : forces réelles

F_{DL} : réactions

Cependant, ce qui nous intéresse, c'est de trouver les forces finales sur la structure ou plutôt sur les membres qui composent cette structure. Pour une membre donnée, connaissant les déplacements en ses extrémités et les caractéristiques de rigidité de cette membre, il sera possible de calculer les efforts associés à ses déplacements et causés par les charges extérieures (F_{DL})

En d'autres termes, les charges étant la cause des effets, on doit obtenir l'équilibre ; ce qui permettra d'écrire

$$\{F_M\} = \{F_{DL}\} + [k] \cdot \{D\}$$

où $\{F_M\}$: vecteur des forces aux nœuds.

$[k]$: matrice de rigidité de la membre concernée

Donc pour trouver les efforts finals dans les membres afin de pouvoir tracer les diagrammes d'efforts normaux, d'efforts tranchants et de moments, il suffira d'utiliser la matrice de rigidité $[k]$ de chaque membre.