

ECOLE POLYTECHNIQUE DE  
THIES

PROJET DE FIN D'ETUDES

— MAI 1985 —

Gm. 0354

TITRE :

\_\_\_\_\_ ETUDE THEORIQUE  
ET EXPERIMENTALE DU  
COEFFICIENT DECHANGE DE  
CHALEUR PAR CONVECTION  
LIBRE ET RADIATION

DIRECTEUR

A. CERNEA  
PROFESSEUR

GENIE MECANIQUE

AUTEUR

A. SARRE  
E.I.

# DEDICACES

Le travail est dédié à :

- Mon grand-père feu Aliou Aram KASSE, paix sur lui, qui n'a ménagé aucun effort pour ma réussite et mon épanouissement.
- A ma grand-mère Oumy M'Bow
- A mes parents, frères et sœurs.
- A mes amis.
- Et à tous ceux qui luttent pour la paix, le développement des sciences, en fait pour un meilleur séjour de l'Homme sur terre.

# REMERCIEMENTS

J'exprime toute ma reconnaissance à mon directeur de projet Adrian CERNEA pour avoir bien voulu proposer et accepter de diriger cette étude -

Qu'il sache combien son ouverture, son expérience, ses conseils et ses encouragements m'ont été utiles.

Je remercie le technicien de chaleur Robert PEPIN pour son assistance.

# SOMMAIRE

Nous présentons dans le cadre de ce projet une étude théorique assistée par ordinateur du coefficient de convection libre et radiation pour une plaque verticale plane à température constante en régime laminaire.

Un programme d'ordinateur simplifié et adapté à notre système, nous permet de déterminer le coefficient de convection ( $h$ ) par la résolution du système d'équations différentielles à dérivées partielles non linéaires qui régissent ce phénomène.

Ce programme est basé sur la méthode d'intégration technique de Runge Kutta et d'itération technique de Nachtsheim - Swigert.

L'étude comparative avec des formules empiriques provenant d'études récentes et publications et avec des résultats obtenus expérimentalement, montrent une bonne concordance.

# TABLE DES MATIERES

	Pages.
DEDICACES	i
Remerciements	ii
Sommaire	iii
Table des matières	<u>iv</u>
Notations	<u>vii</u>
Introduction	1; 2
A Généralités	
I. Notions fondamentales et définitions	3
I.1 Conduction	3
I.2 Convection	4
I.4 Radiation	5
A' Formulation du problème	8
I. APPROCHE GLOBALE	
I. 1 Convection et radiation combinées	9
II Formulation de la convection libre	15
II.1 Généralités	15
II-2 Notions de transfert par convection libre	15

Table des matières.	pages
II-2 .visualisation de la couche limite (fig 2)	16
<u>III</u> Approche théorique	20
III.1 Caractéristiques de la couche limite	20
III.2 Équations fondamentales de base	22
III.2.1 Équation de continuité	23
III.2.2 " de quantité de mot	25
<u>IV</u> Formulation de la résolution numérique	
<u>IV.1</u> Détermination du système adimensionnel de base	28
<u>IV.2</u> Résolution numérique	32
<u>IV.3</u> Exploitation et commentaire des programmes	35
<u>IV.4</u> Complément (fig 7)	37
-----	
B. Verification avec formules empiriques.	38
I Etude comparative	
I.1 Généralités	39
I.2 Exemple de calcul	40
I.3. Tableau récapitulatif (comparaison)	45
I.4 fig 4 (comparaison)	46
fig 5 resultat empirique	47
-----	
C - Verification expérimentale.	

	page
I Vérification expérimentale	
I.1 Descriptions	49
I.2 Montage et schéma de l'expérience.	50, 51
I.3 Détermination des facteurs	52.
I.4 Exemple de calcul	53
I.5 Tableau récapitulatif et commentaire	55
-----	
D. Propositions	57
E. Conclusion	59
-----	
F. Annexes.	
A <sub>1</sub> - Listes des variables du programme	62
A <sub>2</sub> - organigramme du sous-programme de Runge Kutta	65
A <sub>3</sub> Organigramme général	66
A <sub>4</sub> - Listing des programmes et exécution.	
-----	
G - Bibliographie	67

## NOTATIONS

- $A$  : Surface de plaque.  $[m^2]$   
 $T_w$  : Température isotherme de la plaque  $[K]$   
 $T_\infty$  : " " à l'extérieur de la couche limite  $[K]$   
 $T_{moy}$  : " " du film.  
 $h$  : coefficient de convection.  $[W/m^2 K]$   
 $k$  : conductivité thermique  $[W/m K]$   
 $\nu$  : viscosité cinématique  $[m^2/s]$   
 $\mu$  : " " dynamique  $[N.s/m^2]$   
 $Pr$  : nombre de Prandtl  $= (\mu c_p / k)$   
 $\beta$  : coefficient de dilatation  $[K^{-1}]$   
 $\rho, \rho_\infty$  : masse volumique nommée densité ici  $[kg/m^3]$
- $S = G^*(0) = \theta'(0)$  : gradient adimensionnel de température.  
 $\theta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$
- $X = F^{**}(0) = f''(0)$  : dérivée seconde de la fonction  
 sans dimension de courant.
- $u$  : vitesse dans la direction des  $x$  (verticale)  
 $v$  : vitesse dans la direction des  $y$  (horizontale)  
 $u_\infty = 0$  : vitesse loin de la plaque.
- $Nu = \frac{hL}{k}$  : nombre de Nusselt.
- $Gr$  : nombre de Grashof  $(g\beta(T_w - T_\infty)L^3) / \nu^2$
- $L$  : dimension caractéristique ; hauteur de la plaque  $[m]$



## NOTATIONS Suite

$\alpha$  : diffusibilité thermique  $[m^2/s]$

$\epsilon$  : émissivité.

$\sigma$  : constante de (Bolt) STEFAN-BOLTZMAN  $[\frac{W}{m^2 K^4}]$

$g$  : accélération de la pesanteur  $[9,81 m/s^2]$

$q''$  : flux de chaleur  $[W/m^2]$

$Ra$  : nombre de Rayleigh :  $Gr Pr$

# INTRODUCTION

L'augmentation sans cesse du coût de l'énergie et sa dégradation, notamment le pétrole a accéléré les recherches qui se font dans le domaine de l'énergie solaire.

Ainsi la convection libre et la radiation qui sont des facteurs très importants pour l'exploitation de l'énergie solaire (séchage et d'autres importants procédés industriels) méritent une étude approfondie, d'où l'importance de ce sujet.

Depuis l'antiquité, des auteurs fournissent de nombreuses formules empiriques pour la résolution de la convection, mais cette méthode numérique par ordinateur reposant sur l'étude des phénomènes qui régissent les équations de base de la convection libre à l'intérieur de la couche limite est plus satisfaisante pour l'esprit.

Dans une première partie nous nous intéressons à des définitions, des notions de base et à la formulation du problème pour déterminer le système d'équations différentielles non linéaires de

critère adimensionnel.

Par la suite le programme conçu pour une plaque verticale à température constante permettra de déterminer le coefficient de convection.

- Dans une deuxième partie nous comparerons les résultats obtenus avec des formules empiriques.

- Dans une troisième partie nous ferons une recherche expérimentale et une vérification des résultats obtenus.

A

GENERALITES

## I. NOTIONS FONDAMENTALES et DÉFINITIONS

Le transfert de chaleur intervient dans presque toutes les activités. Il est important que nous définissions d'abord les trois principaux modes à partir des phénomènes qui les régissent pour en déduire les équations qui déterminent la quantité d'énergie transférée par unité de temps.

### I.1) Conduction :

Quand un gradient de température existe dans un milieu stationnaire qui peut être un solide ou un fluide au repos : c'est la conduction.

Il y a déplacement de l'ensemble des particules du corps, et c'est ce mouvement désordonné des molécules qui communique la chaleur de proche en proche.

Le flux de chaleur qui traverse une paroi séparant deux milieux à température différente caractérise la conductivité de cette paroi. [10]

Ce flux  $q_c'' = \frac{Q}{A}$  pour une surface  $A$  et par unité de temps est proportionnel :

- A la différence de  $T^\circ$  entre ces deux faces ( $\Delta t$ )
- A l'inverse de l'épaisseur de la paroi ( $L$ )
- A un coefficient de conductivité  $k$  [ $\frac{W}{mK}$ ] qui

est l'un des caractéristiques du matériau constituant la paroi.

$$q_c'' = \frac{-k \Delta t}{L}$$

Loi de Fourier

## I.2) Convection :

C'est la transmission de chaleur entre une surface et un fluide en mouvement.

Ce mode de transfert résulte d'une combinaison de la conduction et du transport. Il est donc lié à l'écoulement du fluide.

Le flux de chaleur  $q_{\text{conv}}''$  pour une surface  $A$  ( $Q/A$ ) et par unité de temps est proportionnel:

- À la différence de  $T^\circ$ ,  $T_w - T_\infty$
- À un coefficient de convection  $h$  [ $\frac{W}{m^2 K}$ ] qui dépend de la vitesse, de la masse volumique  $\rho$  du fluide et de la rugosité de cette paroi. [10]

$$q_{\text{conv}}'' = \frac{Q}{A} = h (t_w - t_\infty)$$

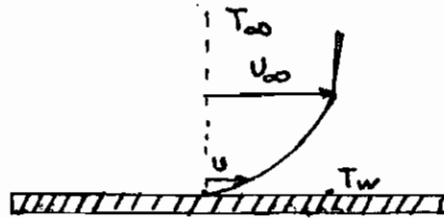
Il existe 3 types de convection suivant la nature de l'écoulement.

### I.2.1 Convection libre :

(A voir page 15)

## I.2.2 Convection forcée :

Le fluide est agité mécaniquement par un moyen externe : pompes, ventilateurs, compresseurs qui sont des organes de mise en circulation.



À la surface de la paroi  $u = 0$ , et loin de la paroi  $u = \text{cte} = U_{\infty}$  c'est à dire à l'extérieur de la couche limite.

Ce mode est caractérisé par le nombre de Reynolds  $Re_L = \frac{UL}{\nu}$  ; et avec  $Gr/Re_L^2 \ll 1$

Les effets de pesanteurs sont négligeables par rapport aux effets dynamiques (vitesse  $U_{\infty}$  donnée au fluide).

## I.2.3 La convection mixte :

On parle de cette convection pour des vitesses relativement faibles [ $Gr/Re_L \approx 1$ ]

Les effets de circulation naturelle se combinent avec la circulation imposée au fluide, en s'épanouissant ou en se contractant.

## I.③ La radiation :

Ce troisième mode c'est le rayonnement thermique.

Tout corps chaud à une température donnée émet de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques.

Que ce soit en présence d'un milieu intermédiaire (l'air) ou dans le vide. Le déplacement de l'énergie se fait sans support matériel.

Ces radiations émises avec une intensité variable dans toutes les directions sont reçues par tout corps froid au voisinage du corps chaud mais sans contact avec lui.

En régime permanent les températures des deux corps restent constantes

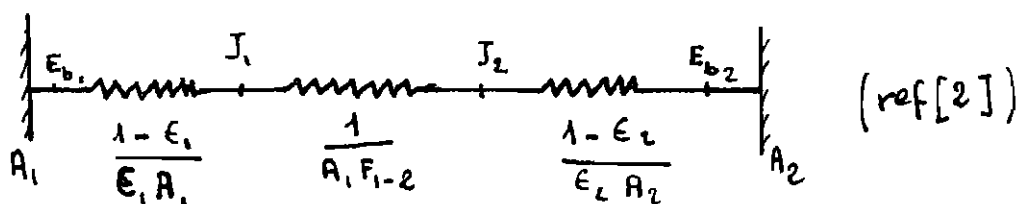
Le flux maxi auquel la chaleur est transmise par une surface est  $q'' = \sigma T_w^4$  avec  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

Le flux réel émis par une surface est donné par  $q'' = \epsilon \sigma T_w^4$

$\epsilon$  dépend du matériau et de son état de surface et est appelé émissivité du corps.

Grâce à la notion de corps noir, un traitement mathématique est possible, on peut faire une analogie électrique.

Considérons l'échange thermique entre deux surfaces  $A_1$  et  $A_2$  qui se voient l'une et l'autre





Le terme  $\frac{1-\epsilon}{\epsilon A}$  est appelé "résistance de surface"

Le terme  $\frac{1}{A_1 F_{1-2}}$  est appelé "résistance spatiale"

$F_{1-2}$  est appelé facteur de forme.

L'échange thermique net entre les surfaces 1 et 2 par rayonnement

$$q_{1-2, \text{net}} = \frac{E_{b_1} - E_{b_2}}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1-2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}} \quad (\text{A.I. 3})$$

Avec  $E_{b_1} - E_{b_2} = \sigma (T_1^4 - T_2^4)$

et  $A_2 \gg A_1$ ,  $A_2$  environnement couvrant  $A_1$ ,

$$\Rightarrow F_{1-2} \approx 1 \quad ; \quad \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2} \rightarrow 0$$

$$q_{\text{net}} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1}} = \epsilon_1 \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

$$q_{\text{net}} = \epsilon_1 \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

\*  $\sigma$ : constante universelle de Stefan - Boltzman

\*  $T$ :  $T^\circ$  en K.

\*  $\epsilon = \frac{\text{énergie émise}}{\text{énergie émise par un corps noir}}$

Ⓐ

FORMULATION DU  
PROBLEME

# .I. APPROCHE GLOBALE

## I.1. Convection et radiation combinées

---

En pratique dans un problème global de transfert de chaleur, les trois modes à savoir conduction, convection et radiation interviennent simultanément.

Par exemple :

- Résistance électrique chauffante
- Tubes de chaudière soumis à la flamme - etc..

En ce qui concerne notre étude qui consiste à déterminer le coefficient d'échange de chaleur par convection et radiation entre un solide et un fluide les effets de la conduction liée à la diffusion se manifestent surtout à l'interface du fluide et du solide là où l'écoulement du fluide n'existe pas (voir caractéristiques de la couche limite).

L'étude de la combinaison de la convection et de la radiation s'avère alors assez suffisante pour déterminer la quantité de chaleur échangée, en effet la quantité de chaleur qui est transférée par conduction au niveau de la surface se retrouve entièrement dans la convection :

en effet :

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \bar{h} (T_w - T_\infty)$$

Et la radiation thermique résultant de la différence de température  $(T_w - T_\infty)$  est émise à partir de la surface dans toutes les directions :

Elle se présente par un rayonnement d'ondes électromagnétiques émis par un corps en fonction de ses propriétés et de sa température.

Ces ondes se propagent à la vitesse de la lumière  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

avec  $c = \lambda \nu$  où

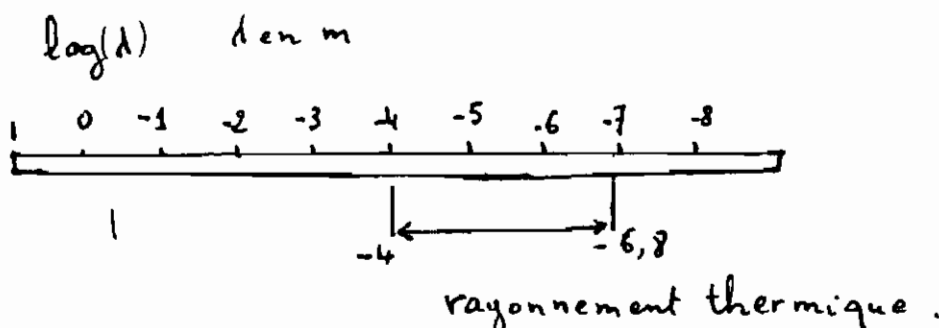
$$\begin{cases} c : \text{vitesse de la lumière} \\ \lambda : \text{longueur d'onde} \\ \nu : \text{fréquence d'onde.} \end{cases}$$

Le coefficient d'émission ou émissivité est le rapport

$$\epsilon = \frac{E}{E_b} = \frac{\text{puissance transmise par un corps/unité de surf}}{\text{puissance transmise par un corps noir}}$$

avec 
$$\epsilon = \frac{\int_0^\infty E_\lambda \bar{E}_{b,\lambda} d\lambda}{\sigma T^4}$$

on représente le spectre des fréquences dans la figure.



Le rayonnement thermique se manifeste dans  
 la zone  $-4 \leq \log \lambda \leq -6,8$  (en mètre)  
 ie:  $-0,15 < \lambda < 100$   $\lambda$  en  $\mu\text{m}$  ( $10^{-6}\text{m}$ )

et 
$$\epsilon = \frac{\int_{0,15 \cdot 10^{-6}}^{100 \cdot 10^{-6}} \epsilon_{\lambda} E_{b,\lambda} d\lambda}{\sigma T^4}$$
 ; émissivité

Pour un corps entouré par une grande surface  
 on a: (voir page 7)

$$q_{\text{rad}} = \epsilon_1 A \sigma (T_w^4 - T_{\infty}^4) \quad \textcircled{a}$$

$$q_{\text{rad}} = A \epsilon_1 \sigma (T_w^4 - T_{\infty}^4) \frac{(T_w - T_{\infty})}{(T_w - T_{\infty})}$$

Si on utilise l'égalité:

$$T_w^4 - T_{\infty}^4 = (T_w - T_{\infty}) (T_w^3 + T_w^2 T_{\infty} + T_w T_{\infty}^2 + T_{\infty}^3)$$

L'équation  $\textcircled{a}$  devient:

$$q_{\text{rad}} = A \epsilon_1 \sigma (T_w^3 + T_w^2 T_{\infty} + T_w T_{\infty}^2 + T_{\infty}^3) (T_w - T_{\infty}) \quad \textcircled{a'}$$

on la note

$$q_{\text{rad}} = \frac{(T_w - T_{\infty})}{1/\bar{h}_{\text{rad}} A} = \frac{\Delta T}{R_{\text{rad}}}$$

avec

$$R_{\text{rad}} = \frac{1}{\bar{h}_{\text{rad}} A}$$

spéciale  
 résistance thermique au  
 transfert par radiation.

ie

$$Q_{\text{rad}} = \frac{T_w - T_{\infty}}{R_{\text{rad}}} = \bar{h}_{\text{rad}} A (T_w - T_{\infty})$$

Cette équation définit le coefficient de radiation moyen qui est similaire au coefficient de convection défini par la loi de Newton ( $q = h_{\text{conv}} A (T_w - T_{\infty})$ )

Quand la différence  $(T_w - T_{\infty})$  est faible, on peut écrire, avec  $\bar{T} = T_{\text{moy}} = \frac{T_w + T_{\infty}}{2}$

$$T_w^3 + T_w^2 T_{\infty} + T_w T_{\infty}^2 + T_{\infty}^3 \approx 4 T_{\text{moy}}^3$$

dans (a') avec  $\bar{h}_{\text{rad}} = \frac{q_{\text{rad}}}{A(T_w - T_{\infty})} = 4 \epsilon \sigma T_{\text{moy}}^3$

$$\bar{h}_{\text{rad}} = 4 \epsilon \sigma T_{\text{moy}}^3$$

[ref 5]

Si d'autre part on pose que la radiation ne participe ni à la diffusion, ni à l'absorption, ni à la réémission, le transfert de chaleur par convection peut être déterminé indépendamment de la radiation.

Et la loi de Newton donne

$$q_{\text{conv}} = \bar{h}_{\text{conv}} A (T_w - T_{\infty}) = \frac{T_w - T_{\infty}}{R_{\text{conv}}}$$

La quantité de chaleur totale qui quitte la surface peut être exprimée par =

$$q_t = q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} = (\bar{h}_{\text{rad}} A + \bar{h}_{\text{conv}} A) (T_w - T_{\infty})$$

$$= \left( \frac{1}{R_{\text{rad}}} + \frac{1}{R_{\text{conv}}} \right) (T_w - T_{\infty})$$

$$\frac{1}{R_{\text{rad}}} + \frac{1}{R_{\text{conv}}} \equiv R_{\text{rad}} \parallel R_{\text{conv}} \quad \text{et on peut}$$

représenter la combinaison convection et radiation par analogie électrique avec deux résistances en // :

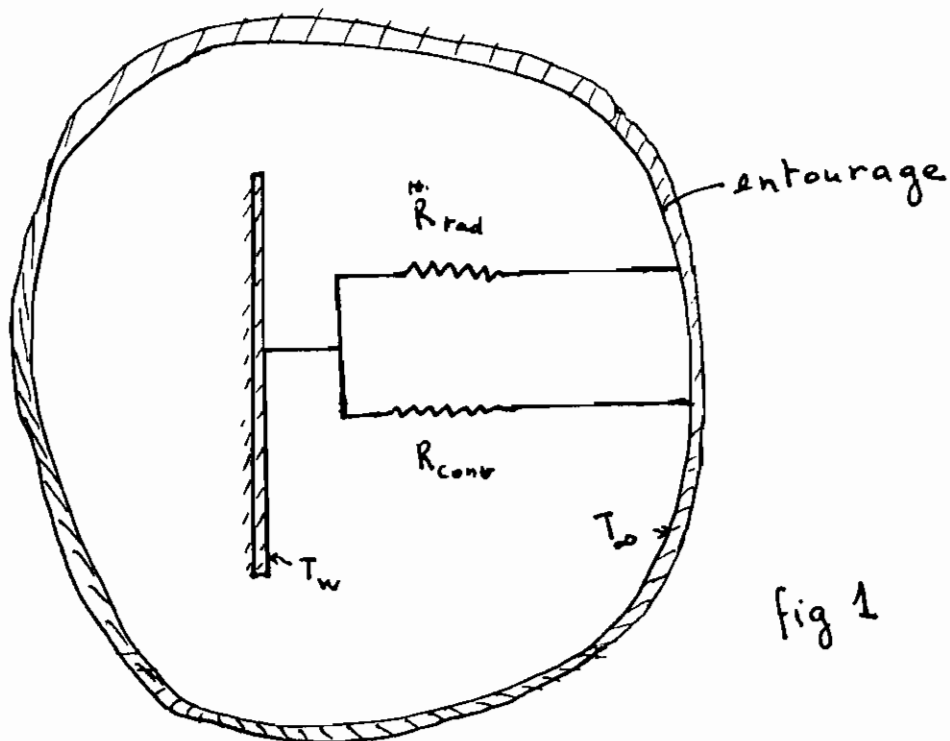


fig 1

$$q_t = \bar{h}_t A (T_w - T_{\infty})$$

avec

$$\bar{h}_t = \bar{h}_{\text{conv}} + \bar{h}_{\text{rad}}$$

Un programme d'ordinateur traitant la combinaison de la convection et de la radiation serait très difficile à élaborer et demanderait la présence d'un ordinateur beaucoup plus puissant car demanderait un temps d'exécution trop long, et une étude théorique très difficile pour tenir compte des phénomènes comme la diffusion, à l'absorption et à la réémission.

Nous allons alors concentrer notre étude théorique à la convection libre pour ensuite en déduire une résolution numérique par ordinateur en analysant les phénomènes qui se manifestent à l'intérieur de la couche limite



## II FORMULATION du PROBLEME de

### CONVECTION Libre -

#### II-1. GENERALITES :

Nous étudions la convection libre entre une plaque verticale à température ( $T_w = \text{cte}$ ) et un fluide.

La largeur de la plaque est supposée infinie, ceci nous permet de négliger toute perturbation dans cette direction horizontale pour pouvoir restreindre notre étude sur une portion du plan normal à la surface (couche limite) -

#### II-2. Notions de transfert de chaleur par convection libre

Ce mode de transfert de chaleur résulte de la combinaison de deux effets :

- ① Le mouvement du fluide déterminé par le changement de densité provenant d'un échauffement ( $T_w > T_\infty$ ) ou d'un refroidissement ( $T_w < T_\infty$ )
- ② Le mouvement désordonné des molécules dû à l'agitation thermique.

De tels mouvements en la présence d'un gradient

## II.2 VISUALISATION de la couche limite

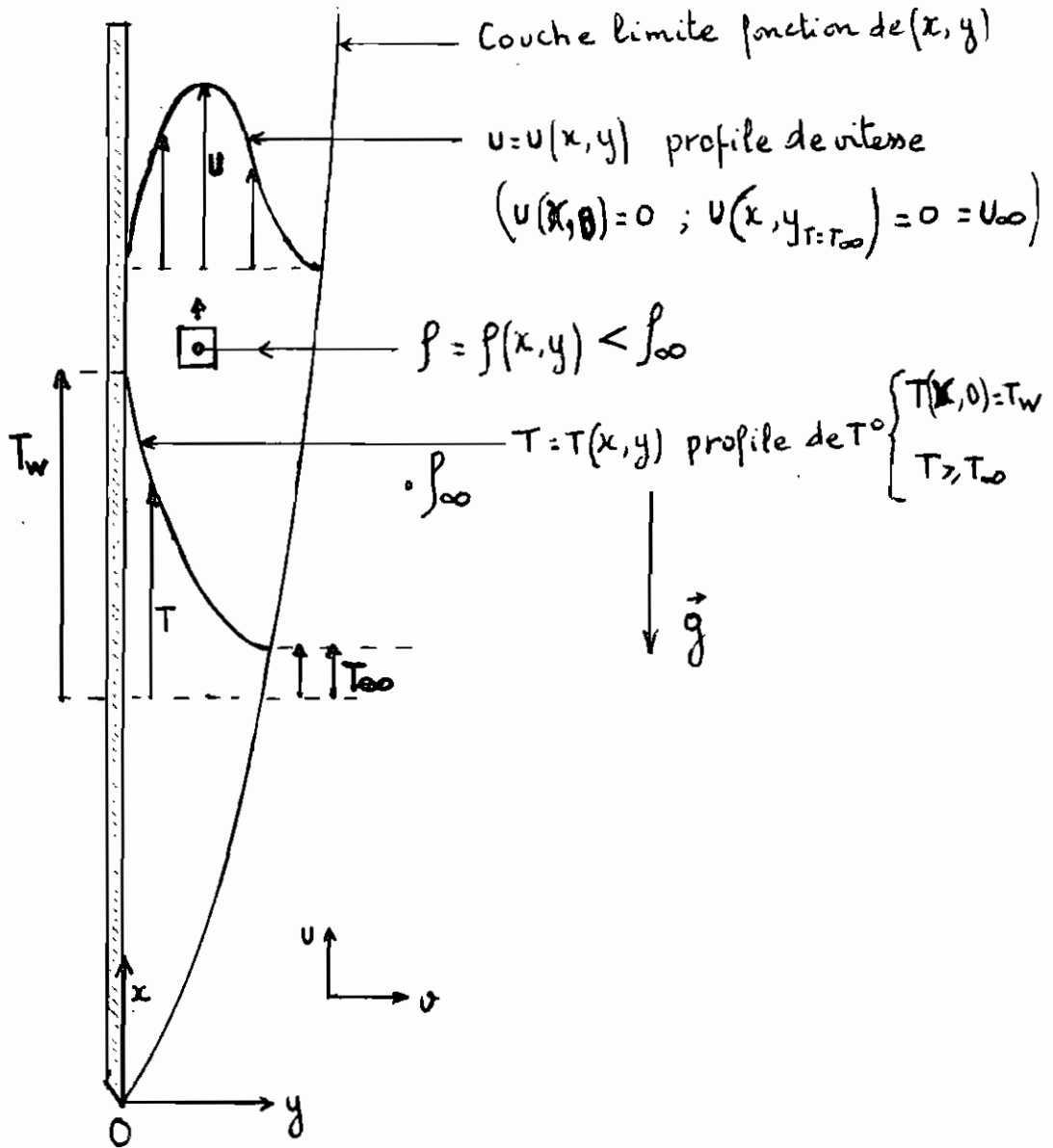


fig 2 - [ref 5]

Profile de vitesse et de temperature :  $T_w > T_{\infty}$

de température engendre le transfert de chaleur.

Une conséquence de cette interaction entre la surface et le fluide est le développement d'une région dans laquelle on note une variation de vitesse et de température, appelé respectivement couche limite dynamique et thermique (couche limite)

La contribution du mouvement désordonné des molécules domine près de la surface, à  $y=0$  ou  $z=0$  et seulement cet aspect intervient.

La contribution du mouvement du fluide montre la croissance de l'épaisseur de la couche limite dans la direction de l'écoulement.

Une appréciation des phénomènes qui régissent cette couche limite est essentielle dans cette étude théorique qui mène à une résolution numérique.

Le développement de l'informatique et des mathématiques nous permet de résoudre de nombreux problèmes en régime laminaire à partir des équations de base.

Cependant beaucoup de modèles théoriques sont basés sur des approximations résultant du fait qu'on a négligé certains termes : dissipation visqueuse, variation de pression ou de quelques propriétés.

Dans le cas de cette convection libre pour une

plaque verticale réchauffée (voir figure 2)  
une des propriétés fondamentales est la densité  $\rho$ .

Les forces de poussée (ascensionnelles) proviennent de la variation de densité fonction de celle de température.

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma(T - T_0)} \quad (\text{ref [3]})$$

$$\rho \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$T \text{ [K]}$$

$\beta = \gamma \text{ [K}^{-1}\text{]}$  Coefficient d'expansion avec la température.

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$

on voit que

$$\rho < \rho_0 \quad \text{pour } T > T_0$$

$$\rho = \rho_0 \quad \text{pour } T = T_0$$

Cette couche limite est supposée avoir une épaisseur définie comme la valeur de  $y$  pour laquelle

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_0} = 0,99 \quad \text{à } x \text{ donné} \quad [\text{ref 7}]$$

I.3. Le coefficient de convection :

A n'importe quelle distance  $x$  sur la plaque par rapport au bord d'attaque, le flux de chaleur peut être déterminé en appliquant la loi de Fourier relative à la conduction

$$\text{car à } y=0 \quad u=0 \quad q'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Cette expression est appropriée puisque à la surface il n'y a pas de mouvement de fluide.

En combinant cette loi avec celle de Newton

$$q'' = h(T_w - T_{\infty})$$

On obtient le coefficient de convection  $h$  local

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0}}{T_w - T_{\infty}}$$

Puisque  $T_w - T_{\infty} = \text{constante}$  et que

$\frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0} \searrow$  quand  $x \nearrow$  (l'épaisseur de la couche limite croît)

et par conséquent  $h \searrow$  quand  $x \nearrow$ .

On définit le coefficient de convection moyen global

$$h_{\text{moy}} = \frac{4}{3} h_L$$

[ref 5]

## III APPROCHE THEORIQUE

### III.1 Caracteristiques de la couche limite.

L'étude de la couche limite nous permet de posséder des techniques plus précises pour la détermination du coefficient de convection  $h$ .

Le concept de couche limite qui a été défini par Prandtl au début de ce siècle constitue la base de la résolution théorique de ce problème.

La force de poussée créée par le changement de densité près de la surface chauffée s'exerce sur les particules à l'intérieur de la couche limite.

Les variations de la viscosité dynamique et fonction de la température est un facteur très important dans le cadre de cette étude.

Si nous considérons un point  $M$  à l'intérieur de la couche limite, ce point est à une température  $T(x, y)$  et une vitesse  $u(x, y)$ .

En convection laminaire, il n'y a pas de mélange entre les couches adjacentes du fluide et le transfert est assuré seulement par conduction moléculaire.

Cette convection libre est caractérisée par le rapport de force de pesanteur et de viscosité comme donné par le nombre sans dimension de

Grashof

$$Gr = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) L^3}{\nu^2}$$

$g$ : accélération locale de la pesanteur.

$\beta$ : coefficient d'expansion de volume à pression constante

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ : viscosité cinématique.

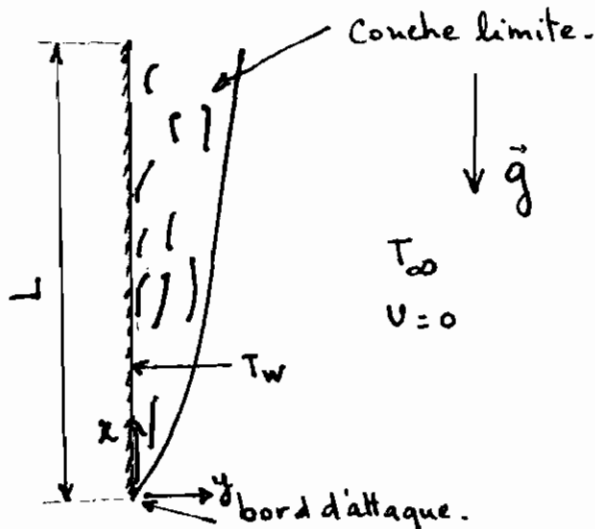
$L$ : hauteur de la plaque verticale.

$T_w$ : température constante de la plaque.

$T_\infty$ : température du fluide loin de la plaque.

Pour les gaz la convection libre laminaire est obtenue pour  $Gr < 10^8$

Mais cette couche limite existe pour  $Gr > 10^4$  sinon la <sup>poussée</sup> (le poids des particules) n'est pas suffisante pour donner assez d'accélération pour la formation de la mince couche limite. [ref 5]



### III. 2 Equations Fondamentales de base.

L'étude du mouvement du fluide à l'intérieur de la couche limite nous permet de posséder des techniques plus précises pour la détermination du coefficient de convection  $h$  en analysant les (coefficient) les profils de températures et de vitesses.

Cette méthode consiste à choisir un élément différentiel de volume de contrôle dans la couche limite laminaire et d'appliquer les lois de la conservation de masse (continuité), de quantité de mouvement et d'énergie pour en déduire les équations fondamentales.

Cette méthode mène ainsi aux équations différentielles <sup>à dérivées</sup> partielles non linéaires qui caractérisent le transfert de chaleur et le comportement de l'écoulement du fluide.

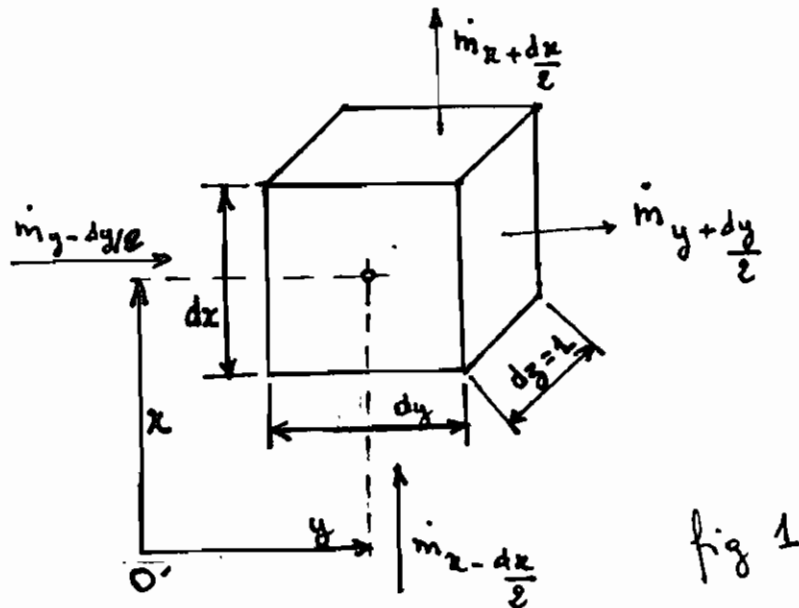
Un changement de variables très particulier et l'intervention de paramètres remarquables nous permet d'obtenir un système d'équations à dérivées partielles.

Ce système d'équations à caractère adimensionnel a été à la base de la résolution numérique de ce problème de convection libre pour une



plaque verticale par ordinateur.

### III.2.1 Equation de continuité.



Considérons un volume différentiel de contrôle dans la couche limite laminaire, de hauteur  $dx$ , de largeur  $dy$  et de profondeur unitaire  $dz = 1$ .

L'écoulement à l'intérieur du volume de contrôle est représenté par un modèle continu de fluide homogène.

Et pour ce volume différentiel de contrôle stationnaire, le principe de la conservation de masse entraîne que le taux net d'écoulement est nul : la quantité qui entre doit être égale à la quantité qui sort du volume de contrôle. (fig 1)

$$\dot{m}_{x-dx/2} + \dot{m}_{y-dy/2} = \dot{m}_{x+dx/2} + \dot{m}_{y+dy/2} \quad (1)$$

Soient  $\rho$  la densité,  $u$  la vitesse dans la direction des  $x$  et  $v$  la vitesse dans la direction des  $y$  au centre de volume de contrôle.

On utilise le développement des séries de Taylor du 1<sup>er</sup> ordre pour  $\rho u$  et  $\rho v$ .

L'équation (1) devient avec

$$\dot{m}_{x-\frac{dx}{2}} = \left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \left(-\frac{dx}{2}\right) \right] dy \times 1$$

$$\dot{m}_{y-\frac{dy}{2}} = \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \left(-\frac{dy}{2}\right) \right] dx \times 1$$

$$\dot{m}_{x+\frac{dx}{2}} = \left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \left(+\frac{dx}{2}\right) \right] dy \times 1$$

$$\dot{m}_{y+\frac{dy}{2}} = \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \left(+\frac{dy}{2}\right) \right] dx \times 1$$

$$\dot{m} = \rho u A = \text{kg/m}^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{m}^2 = \left[ \text{kg/s} \right]$$

(1)  $\rightarrow$  après simplification :

$$2 \times \frac{dx}{2} \times dy \times \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0} \quad (A')$$

Si  $\rho = \text{constante} \Rightarrow$  écoulement incompressible à l'intérieur du volume de contrôle on a :

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0} \quad \text{A) } \underline{\text{Equation de continuité.}}$$

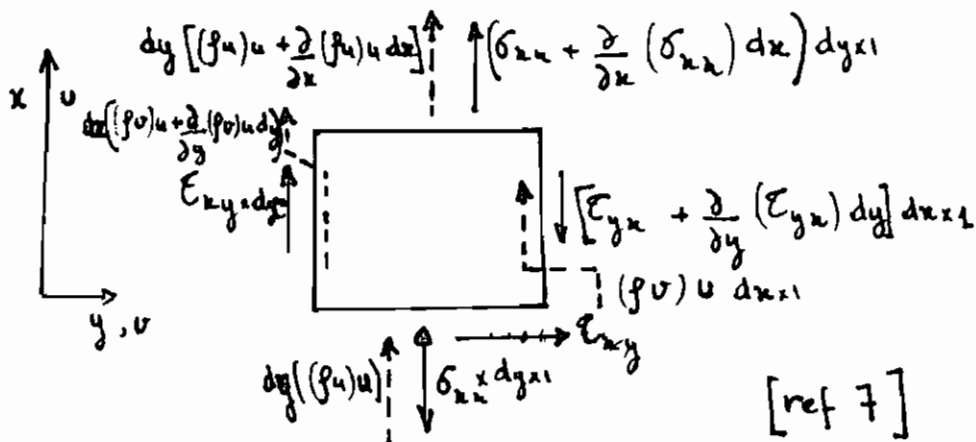
### III. 2. 2. Equation de quantité de mouvement

La deuxième loi de Newton entraîne que la résultante de l'ensemble des forces qui s'exercent sur le volume de contrôle dans une direction donnée est égale à la variation de quantité de mouvement par rapport au temps sur cette direction.

Deux types de forces agissent sur le volume de contrôle

- La force de pesanteur proportionnelle au volume.
- Les forces de surface dues à la pression statique du fluide, aussi bien que les contraintes normales ou tangentielles liées à la viscosité.

Dans la direction des x on a :



- Dans la direction des y les variations sont négligeables par à x

on obtient dans la direction des  $x$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) u + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) u = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + X + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

Dans le cas de la convection libre :

Le gradient de pression  $\frac{\partial P}{\partial x}$  résulte de la différence de niveau.  $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_{\infty} g$ .

$X = -\rho g$  poids par unité de volume.

$$\frac{\partial}{\partial x} [(\rho u) u] + \frac{\partial}{\partial y} [(\rho v) u] = (\rho_{\infty} - \rho) g + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$\text{avec } \bar{\beta} = \frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{(\rho - \rho_{\infty})}{(T - T_{\infty})} = \rho_{\infty} \left( \frac{1/\rho - 1/\rho_{\infty}}{T - T_{\infty}} \right) \Rightarrow$$

$$\rho_{\infty} - \rho = \rho \bar{\beta} (T - T_{\infty}) \quad (\text{ref [6]})$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

L'équation (1) devient : pour  $\rho = \text{cte}$  dans le volume de contrôle et par (A)  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ,  $v = \frac{\mu}{\rho}$

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \bar{\beta} (T - T_{\infty}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (2)$$

Equation de quantité de mouvement

### III.2.3 Equation d'énergie :

On applique la loi de conservation d'énergie à un elt infinitesimal de volume de contrôle à l'intérieur de la couche limite.

$$[\text{énergie station } \Theta] + [\text{énergie ajoutée}] - [\text{énergie perdue}] - [\text{énergie utilisée en travail}] = [\text{énergie à la station } \Theta]$$

On admet sans démonstration voir référence [5] que l'équation d'énergie est :

$$\boxed{u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} \quad (C)$$

Equation d'énergie.

avec  $\alpha = \frac{k}{c_p \rho}$  : diffusibilité thermique du matériau.

## IV FORMULATION de la RESOLUTION NUMERIQUE

### IV-1 Détermination du système adimensionnel de base

L'étude du mouvement du fluide à l'intérieur de la couche limite nous a permis d'obtenir les équations fondamentales de base :

$$1) \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0} \quad \textcircled{A} \quad \text{Continuité'}$$

$$2) \quad \boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \bar{\beta} (T - T_{\infty}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad \textcircled{B}$$

Conservation de quantité de mouvement.

$$3) \quad \boxed{u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} \quad \textcircled{C}$$

Conservation d'énergie.

Le système d'équations différentielles à dérivées partielles est obtenu en posant des changements de variables adéquats (voir référence [5]) dans la couche limite dont les conditions initiales et aux limites sont :

(voir fig 2 )



de même

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4\sqrt{c^3} f'' x^{1/4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\sqrt{c^3} f'' y x^{-3/4} + 2\sqrt{c^2} x^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4\sqrt{c^4} f''$$

Compte tenu du fait de la présence de la température dans les équations (B) et (C) on les résout en  $\eta$  temps.

En substituant dans l'équation (B) de quantité de mouvement

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g_x \bar{A} (T - T_{\infty}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{on obtient}$$

$$\boxed{f''' + 3ff'' + 2(f')^2 + \theta = 0}$$

(B')

$$\text{avec } \theta = \frac{\partial^i f}{\partial \eta^i}$$

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}$$

Pour les dérivations par rapport à la température.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} = (T_w - T_{\infty}) \left( -\frac{1}{4} c y x^{-5/4} \right) \theta'$$

et



$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \times \frac{\partial T}{\partial \theta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = (T_w - T_\infty) C x^{-1/4} \theta'$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = (T_w - T_\infty) C x^{-1/4} \theta'' C x^{-1/4}$$

En substituant  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  dans l'équation ④ d'énergie on obtient :

$$\boxed{\theta'' + 3Pr f \theta' = 0} \quad \text{③'}$$

On signale que l'équation ① est toujours vérifiée pour ce qui concerne cette convection en régime laminaire, et que cette couche caractérisée par ces profils de vitesses et de température est bien définie par les équations ②' et ③' de critère adimensionnel régissant respectivement la conservation des principes de quantité de mouvement et d'énergie qui sont :

$$\begin{cases} f''' + 3ff'' - 2(f')^2 + \theta = 0 & \text{②'} \\ \theta'' + 3Pr f \theta' = 0 & \text{③'} \end{cases}$$

[ref 5 et 7]

②' et ③' constituent le système d'équation différentielles non linéaire de critère adimensionnel pour la résolution numérique de ce problème.

Les conditions initiales et aux limites deviennent :

$$\begin{matrix} \eta = 0 \\ (y=0) \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} f = 0 \\ f' = 0 \\ \theta = 1 \end{array} \right. \quad (T_w = T)$$

$$\begin{matrix} (y \rightarrow \infty) \\ \eta \rightarrow \infty \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} f' = 0 \\ \theta = 0 \end{array} \right. \quad (T = T_\infty)$$

On vérifie que les mêmes conditions sont respectées par ces changements de variables.

#### IV - 2. Résolution numérique.

Par définition on a:  $\frac{Q}{A} = q'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$

$$q'' = -k (T_w - T_\infty) C x^{-1/4} \frac{d\theta}{d\eta} \Big|_{\eta=0}$$

$$= - \left[ + k (T_w - T_\infty) \left[ \frac{g_x \bar{\beta} (T_w - T_\infty)}{4 \nu^2} \right]^{1/4} x^{-1/4} \theta'(0) \right] \frac{x}{x}$$

$$= - k (T_w - T_\infty) \left[ \left( \frac{g_x \bar{\beta} (T_w - T_\infty)}{4 \nu^2} \right)^{1/4} \frac{x^{3/4}}{x} \theta'(0) \right]$$

$$q'' = + k(T_w - T_\infty) \left[ \frac{g_x \bar{\beta}(T_w - T_\infty) x^3}{4\nu^2} \right] \frac{\theta'(0)}{x} \quad (a)$$

Cette énergie est transférée en convection

$$q'' = h_f(T_w - T_\infty) \quad (b)$$

En combinant (a) et (b) on peut obtenir le nombre local de Nusselt.

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = \frac{q''/(T_w - T_\infty) \times x}{k}$$

$$\text{avec } Gr_x = \frac{g_x \bar{\beta}(T_w - T_\infty) x^3}{\nu^2}$$

$$Nu_x = - \left[ \frac{Gr_x}{4} \right]^{1/4} \theta'(0) \quad (c)$$

$$\text{D'autre part } \bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h \, dx = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{k Nu_x}{x} \right) dx$$

avec  $g = \text{cte}$  et  $\theta'(0) = \text{cte}$

$$\bar{h} = \frac{k}{L} \left[ \frac{g \bar{\beta}(T_w - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4} \theta'(0) \int_0^L x^{-1/4} dx$$

$$\text{pour } \int_0^L x^{-1/4} dx = \frac{x^{(-1/4)+1}}{-1/4+1} \Big|_0^L = \frac{4}{3} L^{3/4}$$

$\bar{h}$  coefficient moyen de convection libre.

on a

$$\bar{h} = -\frac{4}{3} \frac{k}{L} \left[ \frac{g \beta (T_w - T_\infty) L^3}{4 \nu^2} \right]^{1/4} \theta'(0) \quad (d)$$

avec

$$\bar{N}_{uL} = \frac{\bar{h} L}{k} = -\frac{4}{3} \left[ \frac{g \beta (T_w - T_\infty) L^3}{4 \nu^2} \right]^{1/4} \theta'(0)$$

$$\bar{N}_{uL} = \frac{4}{3} \left[ \frac{Gr_L}{4} \right]^{1/4} \theta'(0) \quad (e)$$

on voit que  $\bar{N}_{uL} = \frac{4}{3} N_{uL}$

on a l'équation simplifiée:

$$\bar{N}_{uL} = -0,9228 Gr_L^{1/4} \theta'(0) \quad (h) \quad [ref 5]$$

La résolution du problème par ordinateur permet d'obtenir  $\theta'(0) = Gr^*(0)$  qui sert pour la détermination du nombre de Nusselt moyen et par conséquent  $\bar{h} = \frac{k \bar{N}_{uL}}{L}$  lorsque les conditions de convergence sont satisfaites.

$\theta'(0)$  est le gradient de rapport de température à  $\eta = 0$

### IV. 3. Exploitation et commentaire des programmes.

Nous avons mis à la disposition du centre de calcul deux programmes de précision différente.

L'un avec un pas d'iteration  $H = 0,01$  et l'autre avec  $H' = 0,1$  qui donne les mêmes résultats au  $1/1000$  près et dont le temps d'exécution est beaucoup plus rapide pour palier à certaines contraintes de disponibilité du centre.

Chaque programme est divisé en quatre parties:

- Une partie d'explication et de commentaires.
- Un sous programme pour la résolution d'équation différentielles aux dérivées partielles par la méthode de Runge Kutta.
- Un sous programme sur la méthode d'iteration technique de Nachtsheim - Swigert.
- Une présentation des résultats sous forme de tableau.

L'exploitation consiste à supposer des valeurs pour  $(\gamma = f''(0) = F_{**}(0))$  et  $(\theta'(0) = G_x(0) = S)$ .

Ces valeurs initiales sont associées au nombre de Prandtl  $Pr$  pour constituer l'ensemble des données à entrer.

Pour des fluides de faible viscosité (air) de  $Pr \ll 1$  il est judicieux de poser  $f''(0) = F_{**}(0) = 0,6$  et  $\theta'(0) = G_x(0) = -0,5$ .

Une bonne utilisation nécessite une approximation adéquate de :

$f''(0)$  dérivée seconde la fonction de courant ( $\psi$ ) à  $\eta=0$

$\theta'(0)$  gradient de rapport de température à  $\eta=0$

On essaye d'obtenir pour  $\eta = \eta_{max}$

$\theta = 0$ , on se fixe une précision de  $2E-4$

pour satisfaire la convergence qui correspond à la bonne valeur de  $\theta'(0)$

$$\text{i.e. } \tilde{\eta} = \eta_{max}, \quad \theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} \in [0; 2E-4] \Rightarrow T = T_{\infty}$$

$\eta_{max}$  prend successivement les valeurs 0, 2, 4, 8 =

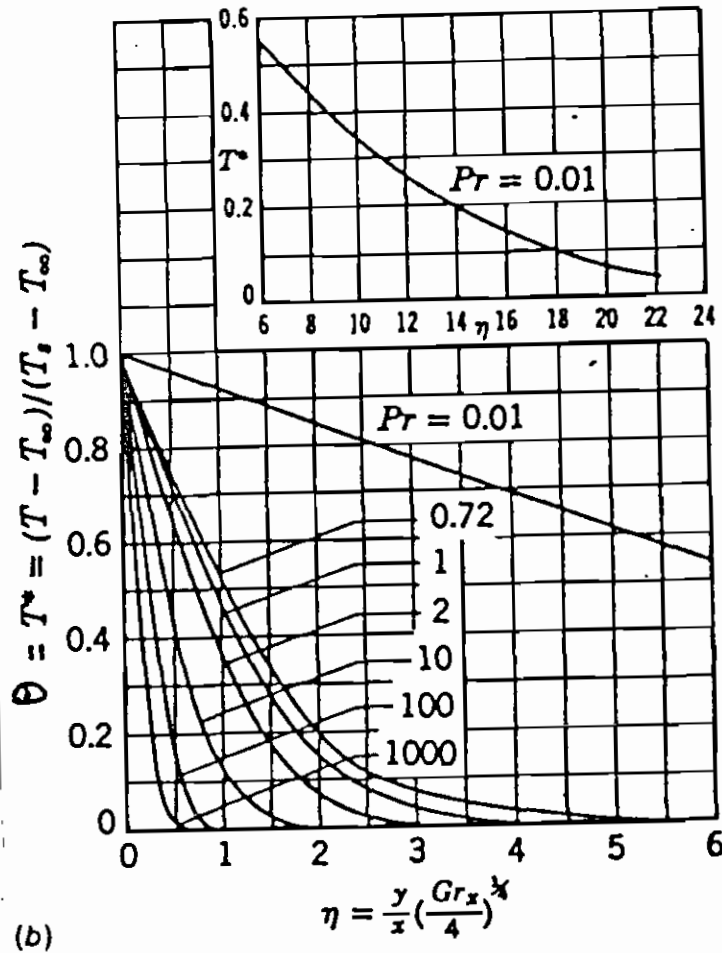
D'autre part ce programme permet d'obtenir  $\theta', f', f''$  [mais malheureusement ici <sup>seulement</sup> pour des valeurs particulières de  $\eta$  (0, 2, 4, 8)], connaissant  $(x, y)$  coordonnées d'un point M,  $Gr_x$ ,  $T_w$ ,  $T_{\infty}$ , pour la détermination de  $\eta = \frac{y}{x} \left[ \frac{Gr_x}{4} \right]^{1/4}$ , pour la en déduire la vitesse et la température de M.

IV.4 complément : on propose les fig 3 (a) et (b)  
[ref 7]

Pour chaque point  $(x, y)$  de la couche limite on détermine  $\eta$  avec le nbre de Grashof ;  $\eta = \frac{y}{x} \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4}$   
 $(\eta, Pr) \rightarrow \theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} \rightarrow \text{d'où } T \text{ (fig 3 (b))}$

$(\eta, Pr) \rightarrow f'(\eta)$  d'où  $u = \frac{2V}{x} (Gr_x)^{1/2} \times f'(\eta)$  (fig 3 (a))

(b) Profile de temperatures  
 $\theta(\eta) \rightarrow T$  connaissant  $Pr$



(a) Profile de vitesses  
 $f'(\eta) \rightarrow u = \frac{g\beta}{\alpha} \left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} f'(\eta)$

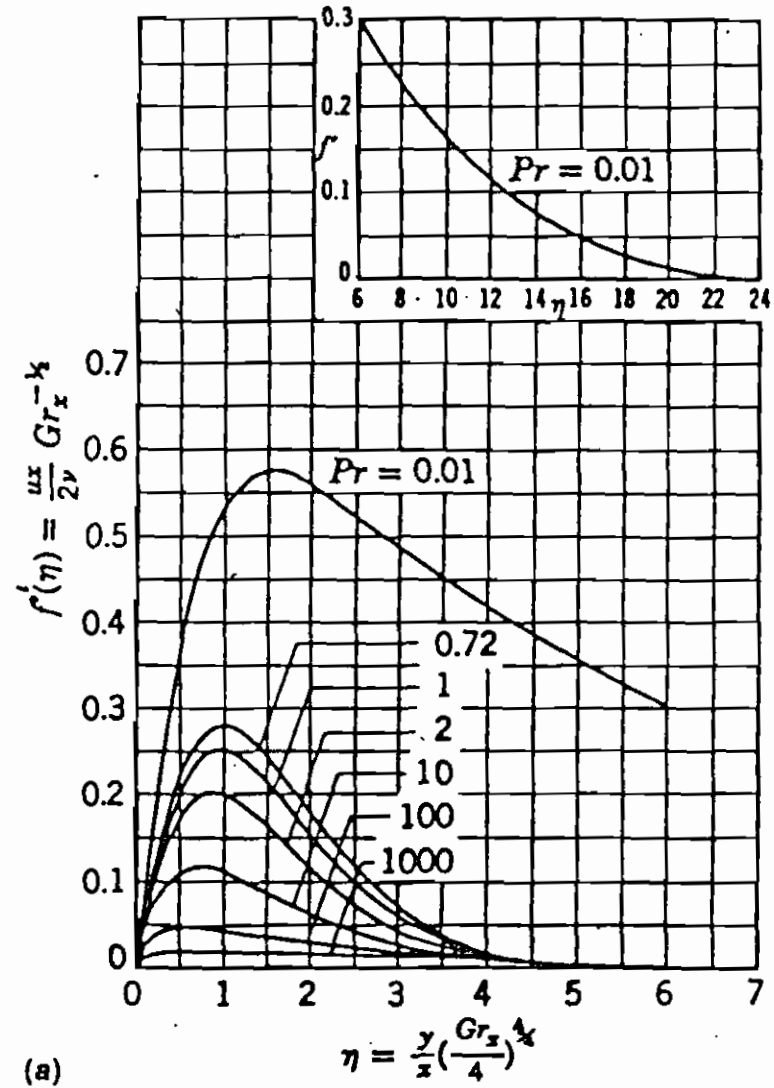


fig 3.

Courbes de  $f'(\eta)$  et  $\theta(\eta)$  résumant les résultats de l'intégration d'OSTACH ref [7] Convection laminaire (Surface verticale)

ⓑ

VERIFICATION AVEC  
FORMULES EMPIRIQUES



# I. ETUDE COMPARATIVE DE LA METHODE NUMERIQUE et FORMULES EMPIRIQUES.

## I.1 Généralités

Le programme d'ordinateur nous a permis par la méthode numérique la valeur de  $g(Pr) = \theta'(0)$  pour la détermination du nombre de Nusselt ( $\bar{N}_L$ ) qui donne directement le coefficient de convection

$$\bar{N}_L = \frac{hL}{k}$$

$$(\bar{N}_L = -0,3428 Gr^{1/4} \theta'(0))$$

$k$  : conductivité thermique de l'air pour une température donnée.

Il existe une très large gamme de formules pour la détermination du nombre de Nusselt en combinant les différents paramètres pour estimer le plus exactement possible la chaleur échangée par unité de temps.

La diversité de ces formules montre la complexité d'une telle tâche.

Ce programme permet dans des conditions bien définies, même si elles sont difficilement réalisables par exemple : plaque de largeur infinie, température de surface constante, écoulement laminaire etc..., de manière à pouvoir négliger les perturbations, nous a permis d'obtenir des résultats.

Ces résultats proviennent de l'exploitation des lois régissant l'ensemble des phénomènes à l'intérieur de la couche limite.

On se propose de vérifier à l'aide d'une documentation scientifique récente comme résultat empirique (1983) de vérifier cette méthode numérique.

Churchill et Chu ont proposé pour une mince couche limite laminaire existant dans le domaine  $10^4 < Ra_L < 10^9$  avec

$Ra_L$  : nombre de Rayleigh  $Ra_L = Gr \cdot Pr$

l'équation :

$$\bar{N}_u = 0,68 + 0,67 \left[ Ra_L \psi(Pr) \right]^{1/4}$$

(avec) avec  $\psi(Pr) = \left[ 1 + \left( \frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9}$

Exemple de calcul :

On se propose une plaque verticale de hauteur (dimension caractéristique)  $L = 1\text{m}$ , et une température de surface  $T_w$  constante

La température du fluide  $T_\infty$  sera choisie pas très loin de cette température  $T_w$  pour respecter les conditions d'application de cette formule :  $(T_w - T_\infty)$  faible.

Le nombre de Prandtl est choisi dans les tables à la température moyenne du film:  $Pr = f(T_{moy})$  pour ce fluide gaz qui est de l'air.

$$\left. \begin{array}{l} T_w = 44^\circ\text{C} \quad \equiv 317\text{K} \\ T_\infty = 36^\circ\text{C} \quad \equiv 309\text{K} \end{array} \right\} T_{moy} = \frac{T_w + T_\infty}{2} = 313\text{K}$$

ce qui donne  $Pr = 0,71$

$$Gr = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) L^3}{\nu^2} = \frac{9,81 \frac{1}{313} (317 - 309) \times 1^3}{(17,6 \times 10^{-6})^2} = 8,094 \times 10^8$$

$$Ra_L = Gr Pr = 8,094 \times 10^8 \times 0,71 = 5,747 \times 10^8 < 10^9$$

$$\psi(Pr) = \left[ 1 + \left( \frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9} = 0,34704$$

$$\bar{Nu}_L = 0,68 + 0,67 \left[ 5,747 \times 10^8 \times 0,34704 \right]^{1/4} = 80,29$$

$$\bar{h} = \frac{k \bar{Nu}_L}{L}; \quad k = 0,0265 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

$$L = 1\text{m}$$

$$\boxed{\bar{h} = 2,128 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}}$$

méthode empirique

$\bar{h}$  représente le coefficient de convection moyen (libre) pour cette plaque verticale avec cette formule empirique.

D'autre part la résolution de ce problème avec la méthode numérique par ordinateur donne.

$$\bar{N}_u = -0,9428 Gr^{1/4} \theta'(0)$$

$\theta'(0) = G^*(0)$  lorsque les conditions de convergence dans les limites de précision sont respectées.

ici  $\theta'(0) = -0,50200676$

$$\bar{N}_u = -0,9428 \times (8,09410^8)^{1/4} \times (-0,50200676) = 79,83.$$

$$\bar{h} = \frac{k \bar{N}_u}{L} = \frac{0,0265 \times 79,83}{1} = 2,116 \frac{W}{m^2 K}$$

$$\bar{h} = 2,116 \frac{W}{m^2 K}$$

méthode numérique.

$\bar{h}_{emp}$	$\bar{h}_{num}$	$\Delta \bar{h}$	$\frac{\bar{h}_{emp} - \bar{h}_{num}}{\bar{h}_{emp}} \%$
2,128	2,116	0,012	0,6%

Cette erreur relative de l'ordre de 1% justifie bien la concordance des résultats obtenus.

En exploitant la figure 5  
établie pour  $\log_{10} \bar{N}_{uL} = f[\log_{10}(Gr Pr)]$

$$Gr Pr = 5,747 \cdot 10^8 \rightarrow \log_{10}(5,747 \cdot 10^8) = 8,76$$

$$\text{donne } \log_{10} \bar{N}_{uL} = 1,9 \Rightarrow \bar{N}_{uL} = 79,43$$

$$k = 0,0265$$

$$\bar{h}_{(fig)} = \frac{0,0265 \times 79,43}{1} = 2,105 \frac{W}{m^2 K}$$

Ce qui donne comme erreur relative :

$$\frac{\bar{h}_{num} - \bar{h}}{\bar{h}} = \frac{2,116 - 2,105}{2,105} \times 100 = 0,5\%$$

D'où vérification acceptable pour cette figure 5 (page 47)

Nous avons déterminé les nbres de Nusselt pour des fluides de faibles viscosité  $Pr = \frac{\mu c_p}{k} = 0,7$  tels que l'air, et pour des fluides visqueux  $Pr = 7$  comme l'eau saturante.

Pour des fluides très visqueux telle que la glycérine  $Pr \approx 1000$  on n'a pas pu obtenir un résultat -

En effet le programme a été établi pour des fluides dont les couches limites thermiques et dyna-

mique sont du même ordre de grandeur.

Mais selon le tableau proposé dans la référence [1] (tableau 1) on donne le rapport des épaisseurs de couches limites dynamique et thermique en fonction du nombre de Prandtl.

$$\frac{\delta_d}{\delta_t} = \frac{\eta_d}{\eta_t}$$

$Pr$	$\eta_d$	$\eta_t$	$\eta_d/\eta_t$
0,01	17,5	21,5	0,8
0,03	12	12	1
0,72	4,4	3,1	1,4
1	4,2	2,7	1,5
10	5,2	1,2	4,3
1000	17	0,35	48

ref [1]

tableau 1

Donc pour de grands nombres de Prandtl la couche limite dynamique apparaît comme beaucoup plus épaisse que la couche limite thermique

Nous limitons alors notre comparaison pour des fluides dont les nombres de Prandtl sont inférieurs à 1 et d'élaboration pour respecter les conditions d'application de ce programme

I.3. Tableau récapitulatif et figure pour la comparaison (résultats empiriques)  
(voir fig 4 et fig 5)

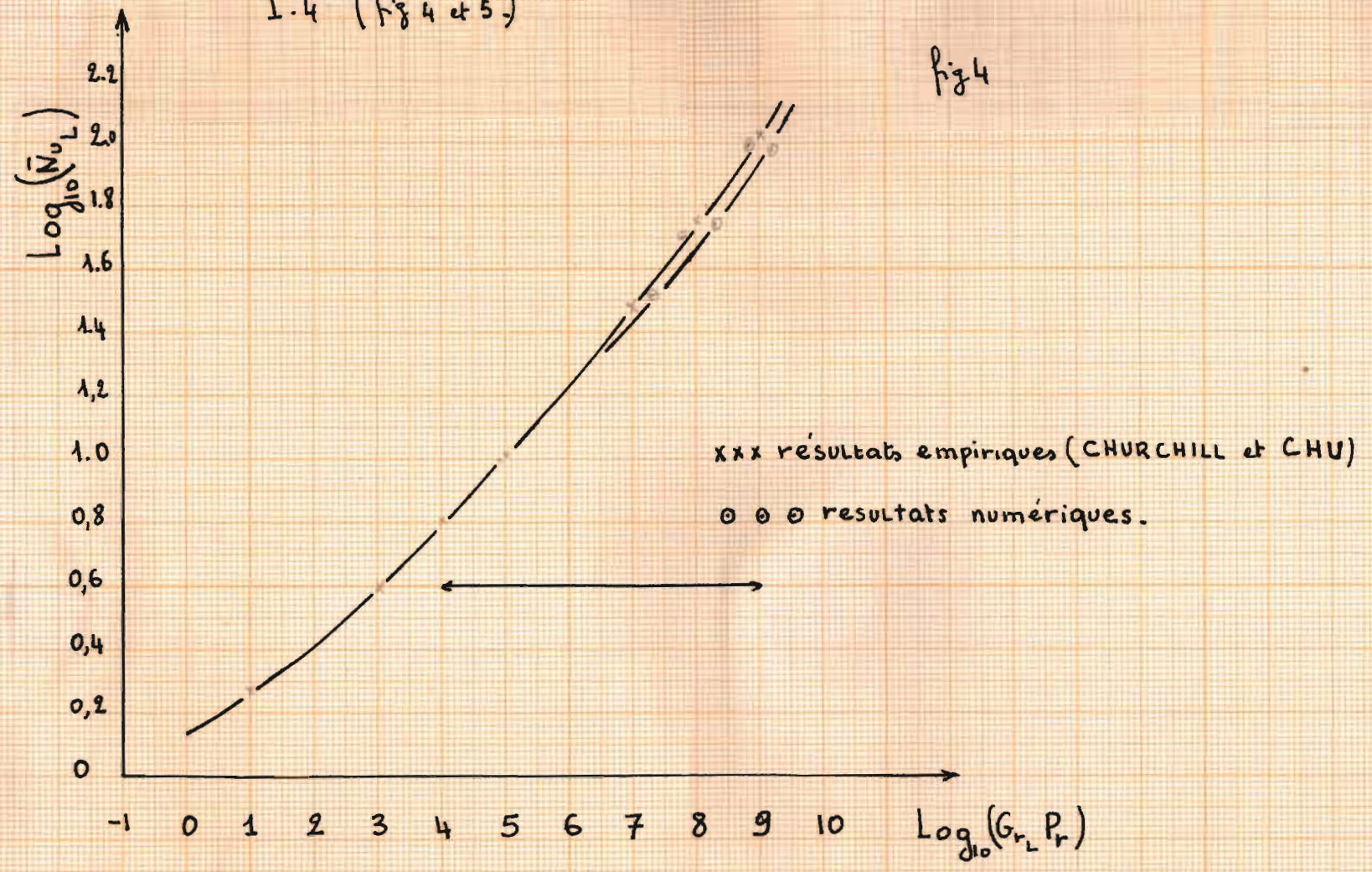
on pose:  $L = 1m$  hauteur de plaque.

$T_w$ (K)	$T_\infty$ (K)	$T_{moy}$ (K)	$Pr$	$Gr$	$Ra = GrPr$	$\bar{N}_{uL}$ sur m.	$\theta(0) = G\alpha(0)$	$V$ (m/s)	$\log_{10}(GrPr)$	$\log_{10}(\bar{N}_{uL})$
317	309	0,71 313	0,71	$8,094 \cdot 10^8$	$5,747 \cdot 10^8$	73,83	-0,50200676	$17,6 \cdot 10^{-6}$	8,76	1,902
332	329	330,5	0,7013	$2,4 \cdot 10^8$	$1,68 \cdot 10^8$	58,65	-0,49977	$19,6 \cdot 10^{-6}$	8,226	1,76
333	313	323	0,7027	$1,7608 \cdot 10^9$	$1,223 \cdot 10^9$	96,675	-0,500229	$18,68 \cdot 10^{-6}$	9,09	1,985
728	700	714	0,697	$77,49 \cdot 10^6$	$54,01 \cdot 10^6$	44,11	-0,498653	$70,46 \cdot 10^{-6}$	7,73	1,64

tableau 2

I.4 (fig 4 et 5)

fig 4



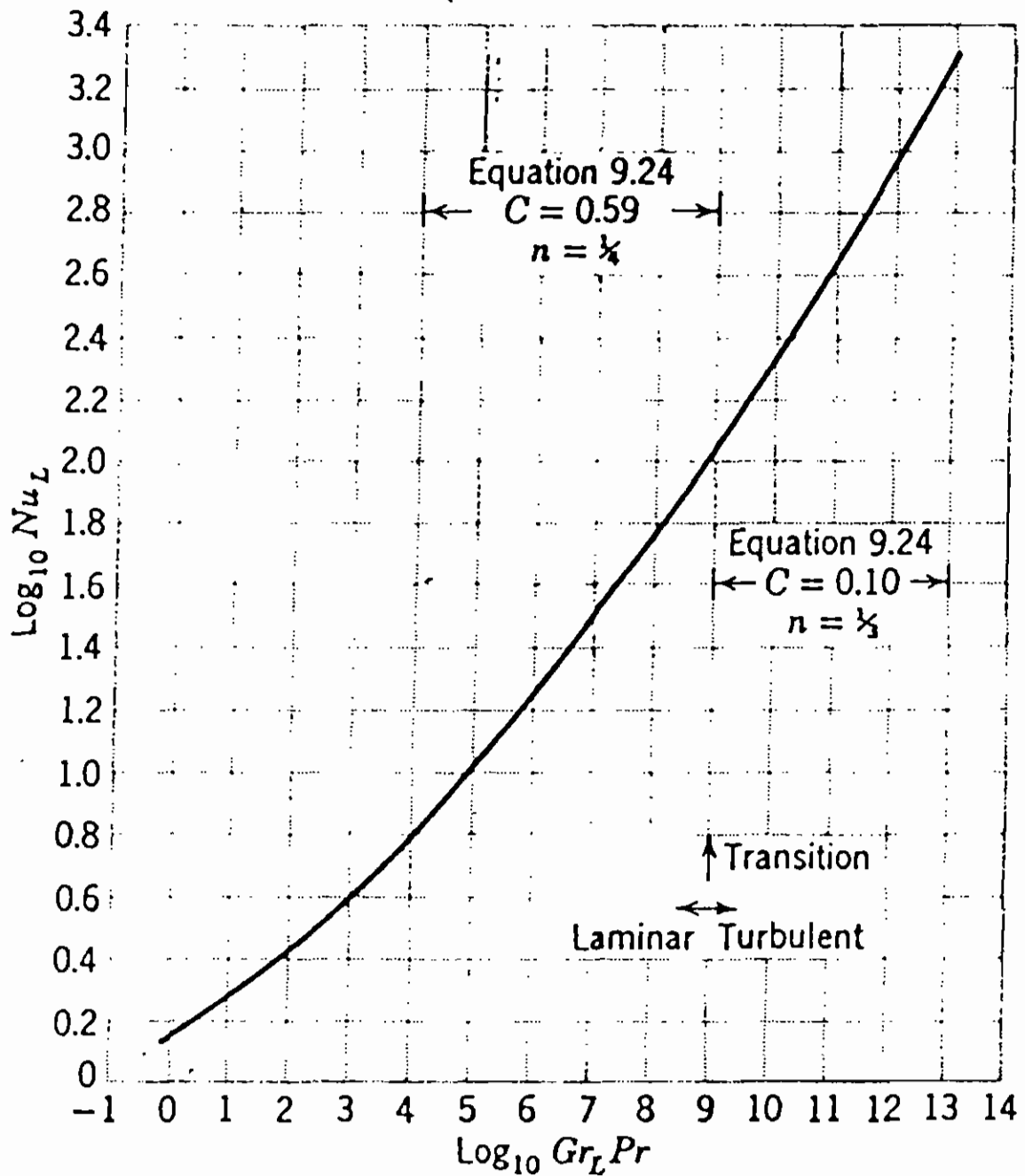
97

(fig 4)

COMPARAISON des RESULTATS NUMERIQUES  
 Avec CEUX DE La METHODE EMPIRIQUE .  
 Convection Libre (Plaque VERTICALE)



(fig 5)



Nombre de Nusselt par CONVECTION LIBRE

Pour une Plaque VERTICALE (CHURCHILL et CHU.)

(fig 5)

©

VERIFICATION  
EXPERIMENTALE

# I. VERIFICATION EXPERIMENTALE

## I.1. Description:

Pour cette partie expérimentale on considère une plaque en cuivre (voir schéma du montage) (fig C.I.2) de  $L = 70 \text{ mm}$  = hauteur;  $80 \text{ mm}$  de largeur et d'épaisseur faible ( $\approx 3 \text{ mm}$ ).

Les relevés de température pour les différents points répartis à la surface de la plaque sont faits au thermocouple lorsque le régime permanent est atteint.

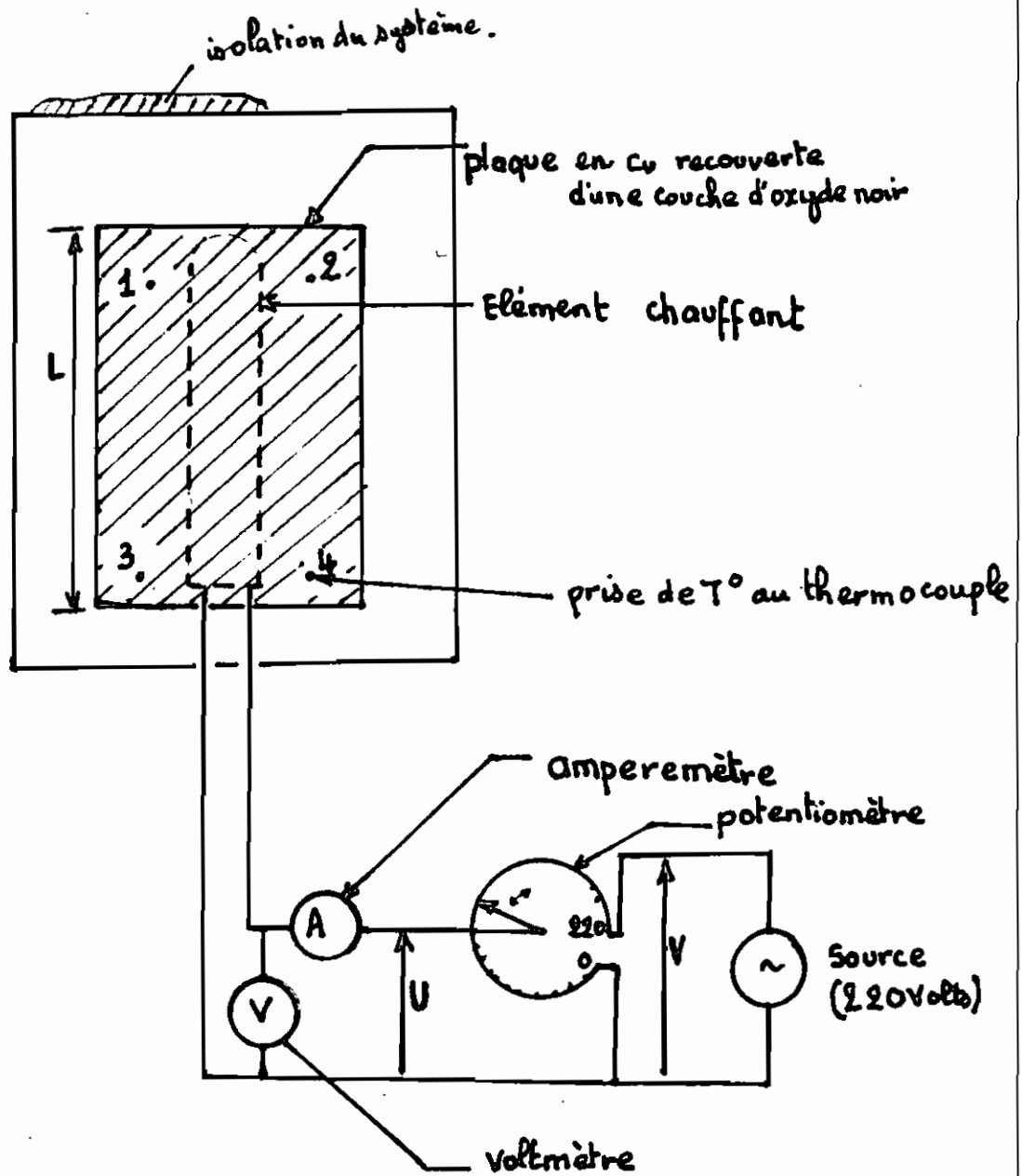
L'entourage est constitué d'une enceinte en verre isolée de l'extérieur par un vide, l'intérieur est recouvert d'une mince couche d'argent supposée entièrement réfléchissante (émissivité  $\epsilon = 1$ )

Cette enceinte à  $T_{\infty}$  nous permet d'atteindre les perturbations liées à la circulation de l'air ce qui est non conforme à la convection naturelle.

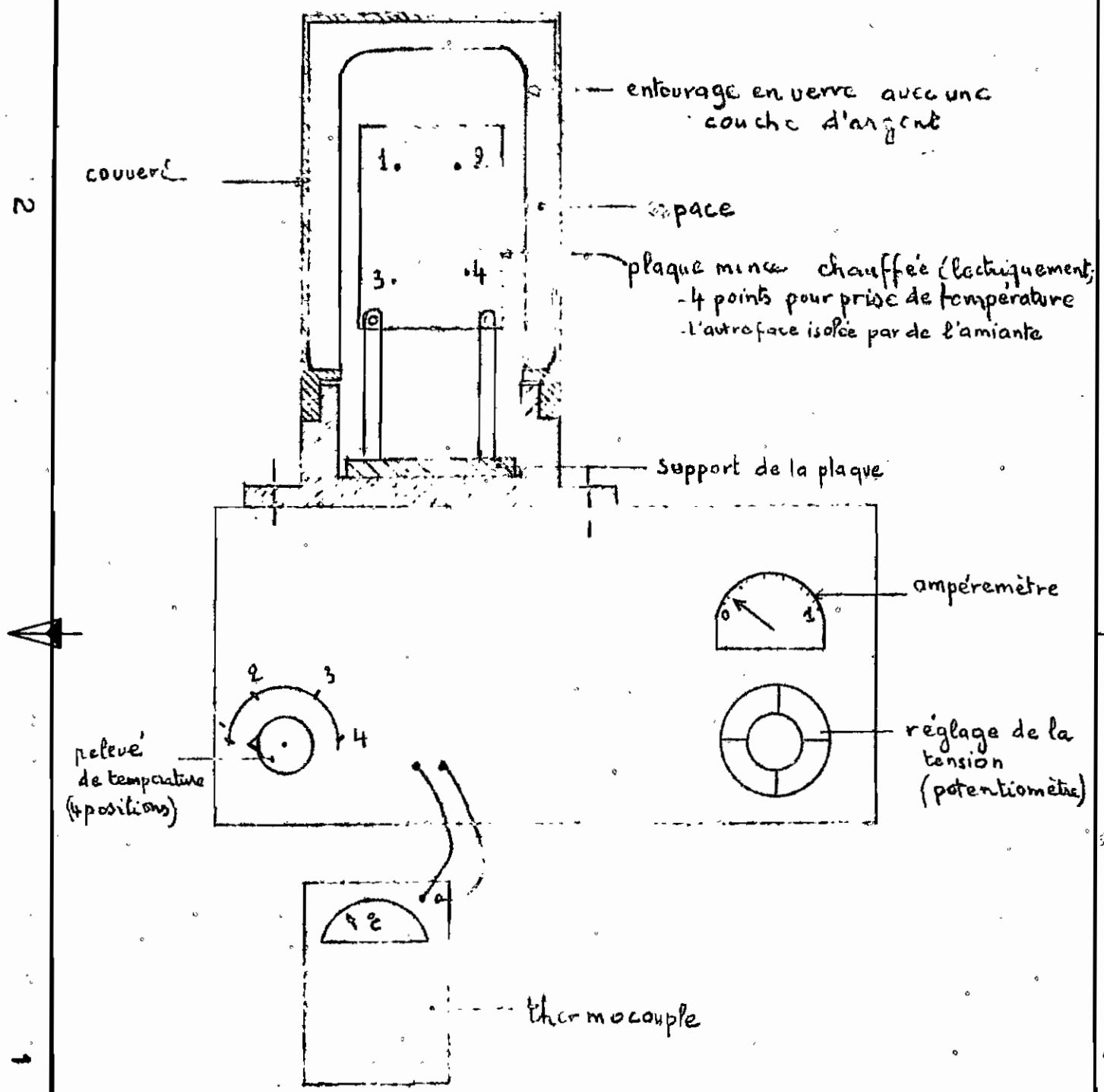
Par ailleurs les effets de rayonnement non désirés seraient trop importants par rapport à la convection.

La deuxième face de la plaque est isolée par une couche d'amiante pour que notre puissance électrique soit transférée par une seule face par convection libre et radiation combinées.

I.2. Montage fig I.2



SCHEMA DU MONTAGE EXPERIMENTAL



PROJET DE FIN D'ETUDES

MONTAGE EXPERIENCE

NOM		DATE	
N°		EVALUATION	
N° DE TRAVAIL			

B

A

### I.3. Détermination des facteurs

La plaque est chauffée électriquement par l'intermédiaire d'une partie chauffante.

L'ensemble est supposé purement résistive ( $\cos\varphi = 1$ ) et la puissance s'exprime par

$$Q_e = UI \cos\varphi = UI. \quad [W]$$

Par effet joule est transférée sous forme de chaleur, cette chaleur se dissipe par la combinaison de plusieurs facteurs.

$$Q_t = Q_{conv} + Q_{rad} + Q_{acc} + Q_{perte}. \quad [ref\ 2]$$

I.3.1

-  $Q_{conv} = h A (T_w - T_{\infty})$

-  $Q_{rad} = \varepsilon \sigma A (T_w^+ - T_{\infty}^+)$

-  $Q_{accumulée} = Q_{acc} = \int V C_p \frac{\partial T}{\partial t}$

en régime permanent  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow Q_{acc} = 0$

-  $Q_{perte} = 0$

on néglige les pertes en supposant que tout est transmis par une face.

on obtient

$$Q_{total} = Q_{conv} + Q_{rad} \quad (I.3.2)$$

et

$$h_{conv} = \frac{Q_{conv}}{A(T_w - T_{\infty})} = \frac{Q_{total} - Q_{rad}}{A(T_w - T_{\infty})} \quad (ref[1])$$

Exemple de calcul :

On a pris les températures pour 3 points sur la plaque et  $T_{\infty}$  à la surface de l'entourage à l'aide d'un thermocouple.

$$T_{w \text{ moy}} = \frac{40 + 39 + 41}{3} = 40^{\circ}\text{C}$$

$$T_{\infty} = 33^{\circ}\text{C}$$

$$T_{\text{moy film}} = \frac{40 + 33}{2} = 36,5^{\circ}\text{C} \equiv 309,5\text{K}$$

d'où  $Pr = 0,71$  pour l'air.

$$U = 18,5\text{V} \quad \text{et} \quad I = 0,02\text{A}$$

L'exécution du programme donne

$$\theta'(0) = -0,50200676$$

$$\bar{N}_u = -0,9428 Gr^{1/4} \theta'(0) \quad (\text{ref [5]})$$

$$Gr = \frac{g \beta (T_w - T_{\infty}) L^3}{\nu^2} = \frac{9,81 \times \frac{1}{309,5} (40 - 33) \times 0,07^3}{(17,585 \times 10^{-6})^2}$$

$$Gr = 2,46 \times 10^5$$

$$\bar{N}_u = -0,9428 (2,46 \times 10^5)^{1/4} \times (-0,50200676) = 10,56054$$

$$k = 0,02626 \frac{\text{W}}{\text{m}^{\circ}\text{K}}$$

$$h = \frac{k \bar{N}_u}{L} = \frac{0,02626 \times 10,56054}{0,07} = 3,954$$

Par méthode numérique

$$h_{\text{conv}} = 3,954 \frac{\text{W}}{\text{m}^{\circ}\text{K}}$$

## Détermination de la chaleur transférée par radiation

$$Q_{\text{rad}} = \epsilon \sigma A (T_w^4 - T_{\infty}^4)$$

on a : émissivité du cuivre  $\epsilon = 0,78$  pour <sup>une plaque</sup>  
ayant un état de surface moyen et recouvert d'une couche d'oxyde  
noire.

$$\text{avec : } \sigma = 5,669 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

$$Q_{\text{rad}} = 0,78 \times 5,669 \times 10^{-8} \times 0,07 \times 0,08 \left[ (40+273)^4 - (33+273)^4 \right]$$

$$Q_{\text{rad}} = 0,2056 \text{ W}$$

D'autre part  $Q_{\text{total}} = UI =$   
 $= 18,5 \times 0,02 = 0,37 \text{ W}$

Ainsi

$$h_{\text{conv}} = \frac{Q_{\text{total}} - Q_{\text{rad}}}{A(T_w - T_{\infty})} = \frac{0,37 - 0,2056}{0,07 \times 0,08 (40 - 33)} = 4,194$$

Par expérience

$$h_{\text{conv}} = 4,194 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

et on obtient une erreur relative de :

$$\frac{4,194 - 3,954}{3,954} \times 100 = 6,1\%$$



I.5. Tableau recapitulatif de la comparaison avec l'expérience.

$T_w$ (K)	$T_{\infty}$ (K)	$T_{moy}$ (K)	$Pr$	$k$ $\frac{W}{mK}$	$V$ $\times 10^6$ (m/s)	$Gr$ $\times 10^{-5}$	$\theta(0) = G(0)$	$\bar{Nu}_L$	$U$ (Volt)	$I$ (A)	$Q_e = UI$ (W)	$Q_{rad}$ (W)	$h_{exp}$ $\frac{Q_e - Q_{rad}}{A(T_w - T_{\infty})}$	$h_{num}$ $\frac{k \bar{Nu}_L}{L}$	$\frac{\Delta h}{h_{num}} \%$
317	309	313	0,71	0,0265	17,6	2,776	-0,50200676	10,86	19	0,023	0,44	0,2430	4,400	4,11	7,1
313	306	309,5	0,71	0,0266	17,585	2,46	-0,50200676	10,54	18,5	0,020	0,37	0,2056	4,194	3,954	6,1

Tableau 3

Ces erreurs relatives de l'ordre de 7% prouvent bien notre vérification expérimentale en ce qui concerne la validité de la méthode numérique.

Si ces erreurs sont relativement importantes par rapport à celles qu'on a obtenues par la méthode empiriques (0,5%), c'est que notre enceinte réalisée par ce thermostat même si elle nous permet d'avoir une bonne isolation est trop restreinte pour ce type d'expérience, vue la faiblesse de nos dimensions de la plaque [ $8 \times 7 \text{ cm}^2$ ]

Le fait que les coefficients de convection libre obtenus expérimentalement sont supérieurs à cause de la méthode numérique prouve l'existence de pertes (voir équation (I.3.1)) ~~due~~ par l'intermédiaire de supports et épaisseur de la plaque etc ... -

D-

## PROPOSITIONS

Dans le cadre des recherches qui se font actuellement pour une exploitation et pour une utilisation économique de l'énergie, il est non seulement important de savoir utiliser à bon escient les formules, mais aussi de savoir d'où elles proviennent en étudiant les phénomènes physiques qui sont à leur base.

Très souvent une la complexité des phénomènes de transfert de chaleur, de la mécanique des fluides on obtient des équations qui sont mathématiquement très difficiles, voire impossibles à résoudre sans recours à des moyens sophistiqués; par exemple résolution d'équations différentielles non linéaires d'ordre 4.

Mais aujourd'hui les nouvelles découvertes dans le domaine de l'informatique ont mis à notre disposition des systèmes puissants d'ordinateurs.

Il suffit maintenant de posséder les techniques de résolution.

Il s'avère alors très utile d'étendre le cours de

Calcul numérique dans les domaines tels que :  
la méthode des éléments finis, l'iteration technique  
de Nachtsheim - Swigert, la méthode d'intégration  
de Runge Kutta, la méthode des différences  
finies, et de pouvoir à d'autres langages plus  
puissants tels que le Fortran.

(E)

## CONCLUSION

Cette étude numérique pour la détermination du coefficient de convection libre entre une plaque verticale et un fluide nous a permis d'obtenir des résultats dans des conditions bien définies :

La vérification avec les formules empiriques est satisfaisante.

D'autre part le montage expérimental établi nous a permis d'avoir des résultats d'ordre acceptable. En effet pour ce genre d'expérimentation l'enceinte qu'on a utilisée pour assurer l'isolation thermique du système est restreinte d'où la faiblesse des dimensions de la plaque, en outre le système de chauffage nous a permis d'avoir à peine une surface isotherme.

La conception et la construction d'un nouveau montage peut faire l'objet d'une nouvelle expérience pour les étudiants de l'institut.

Cette étude nous a permis de nous familiariser avec les techniques de traitement d'équations différentielles qui sont à la base des phénomènes

réglissant le transfert de chaleur.

Ces programmes corrigés, simplifiés, modifiés pour améliorer le temps d'exécution représentent une contribution qui va enrichir la banque de logiciels que notre École devra posséder pour atteindre un de ses objectifs principaux dans cette ère nouvelle, où tout est lié à l'informatique compte tenu du besoin d'une résolution plus rigoureuse des problèmes qui sont parfois très complexes.

F

ANNEXES

## A.1 LISTE DES VARIABLES DU PROGRAMME

$P_r$  : nombre de Prandtl .

$A, B_0, N, N_2, T_0$  : Variables logiques de contrôle .

$P$  : fonction adimensionnelle de température et variable dans l'intégration technique Runge Kutta

$F$  : fonction adimensionnelle de de courant et variable dans l'intégration technique de Runge K

$H$  : valeur du pas de Runge Kutta

$S$  : gradient sans dimension de  $T^\circ$  et variable de R.K.

$Z$  : correspond à la fonction adimensionnelle de courant

$Y$  : " " à la dérivée première " "

$X$  : " " à la dérivée seconde de la " "

$T$  : maximum de la variable indépendante  $\eta$  (ETA)

$X_0, Y_0, Z_0, S_0, P_0$  : valeurs initiale de  $X, Y, Z, S, P$ .

$E$  : variable indépendante  $\eta$  (ETA)

$Y_g = -Y \text{ à } \eta_{\max} ; Z_g = -Z \text{ à } \eta_{\max}$

$X_g, X_g, Y_g, Z_g, J_g, K_g$  : fonction dans la méthode d'iteration de M. - SWIGERT

$U_{1,2,3,4} ; V_{1,2,3,4} ; W ; R ; J ; G ; L_{1,2,3,4} ; M_{1,2,3,4} :$

Variables dans la méthode d'intégration de R. Kutta -



variables . suite .

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= f''(\eta_{\max}) \\ T_2 &= f'(\eta_{\max}) \\ T_3 &= \theta'(\eta_{\max}) \\ T_4 &= \theta(\eta_{\max}) \end{aligned} \right\} \text{ Pour la première estimation} \\ \text{de } f''(0) \text{ et } \theta'(0) .$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= f''(\eta_{\max}) \\ E_2 &= f'(\eta_{\max}) \\ E_3 &= \theta'(\eta_{\max}) \\ E_4 &= \theta(\eta_{\max}) \end{aligned} \right\} \text{ Pour la seconde estimation} \\ \text{de } f''(0) ; \theta'(0)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= f''(\eta_{\max}) \\ H_2 &= f'(\eta_{\max}) \\ H_3 &= \theta'(\eta_{\max}) \\ H_4 &= \theta(\eta_{\max}) \end{aligned} \right\} \text{ Pour la troisième estimation} \\ \text{de } f''(0) \text{ et } \theta'(0) .$$

$$A_3 = \Delta f'(\eta_{\max}) / \Delta f''(0)$$

$$B_3 = \Delta f'(\eta_{\max}) / \Delta \theta'(0)$$

$$C_3 = \Delta \theta(\eta_{\max}) / \Delta f''(0)$$

$$D_3 = \Delta \theta(\eta_{\max}) / \Delta \theta'(0)$$

$$F_3 = \Delta f''(\eta_{\max}) / \Delta f''(0) .$$

$$G_g = \Delta \theta'(\eta_{max}) / \Delta f''(0)$$

$$H_g = \Delta f''(\eta_{max}) / \Delta \theta'(0)$$

$$I_g = \Delta \theta'(\eta_{max}) / \Delta \theta'(0)$$

F-2

### Sous Programme Runge Kutta 4<sup>e</sup> ordre

Données: Initiales  
de  $y_i$

Calcul de  $K(I, 1), K(I, 2)$   
 $K(I, 3), K(I, 4) \quad 1 \leq I \leq 6$

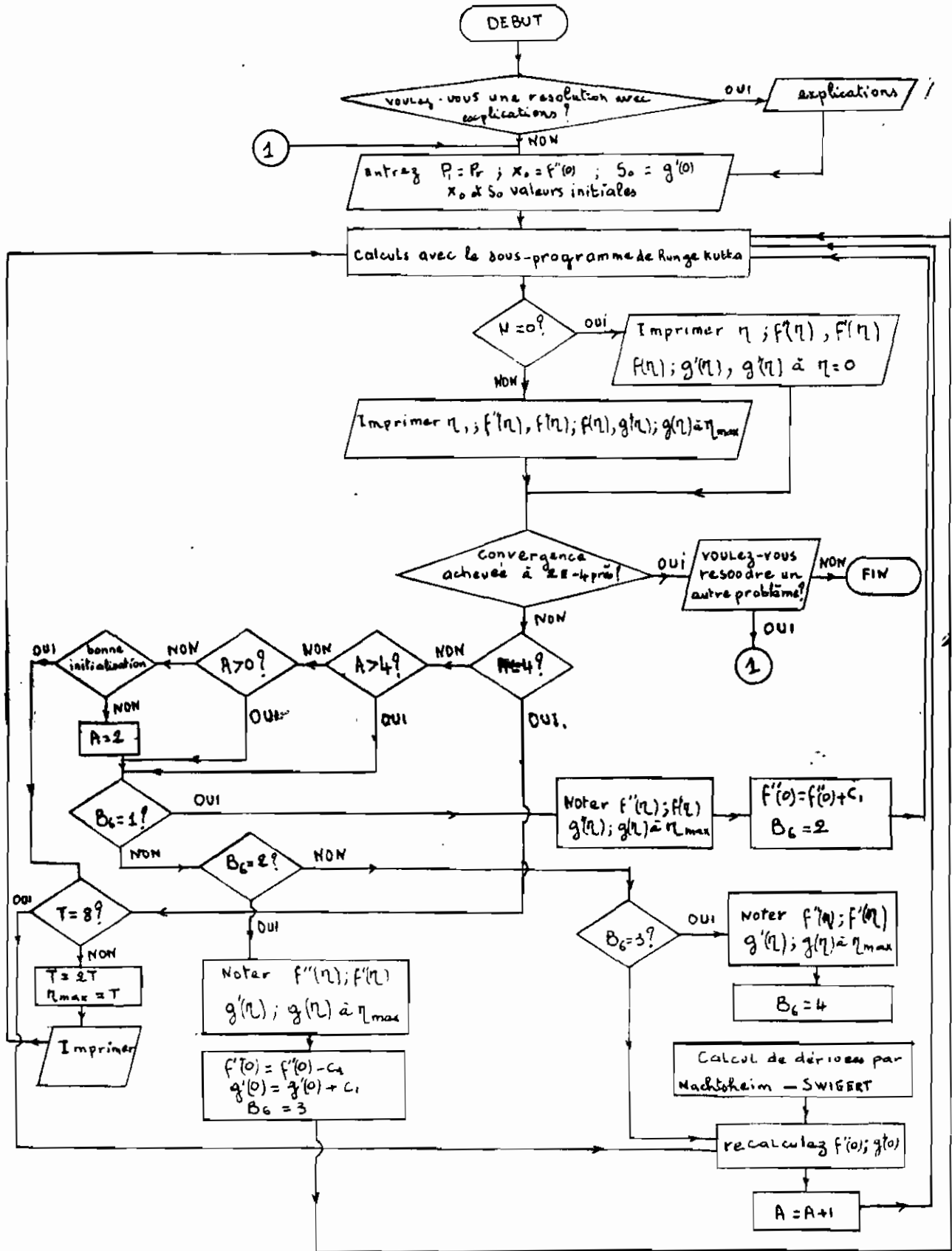
Calcul de  
$$y_{i+1} = y_i + \frac{K(I, 1) + 2K(I, 2) + 2K(I, 3) + K(I, 4)}{6}$$

Retour

organigramme Sommaire Runge Kutta 4<sup>e</sup> ordre

Dessiner par _____		Matricule _____
Groupe _____		
Date _____	Echelle: _____	
N° de TP ou d'examen: _____		

# A.3 - organigramme general :



G

## Bibliographie .

- [1] R. GIBLIN - Les lois de la convection naturelle (Mémoire de sciences physiques)  
Gauthier Villars 1971
- [2] DIN VO NGOC ; A - CERNEA - Notes de cours  
des professeurs
- [3] Hemisphere Publishing Corporation (publications  
récentes) 1983 -
- [4] DONAL Q. KERN . Process Heat Transfer
- [5] J. ALAN Adams ; DAVID F. ROGERS  
Computer - Aided Heat Transfer Analysis  
Mac Graw Hill 1973 .
- [6] D. R PITTS ; L.E . SISSOM  
Serie Schaum's Heat Transfer  
Mac Graw Hill 1977 .
- [7] F. P. INCROPERA ; D. P. DEWITT  
Fundamentals of Heat Transfer  
JOHN WILEY and SONS 1981

- [8] R. SIEGEL , J. R. HOWELL  
Thermal Radiation Heat transfer (2<sup>e</sup> edition)  
Mac G. HILL 1981
- [9] M. DOUCHEZ -  
Etude des transferts en mécanique des fluides  
monophasiques.  
Tome II . Couche Limite Résultats expérimentaux  
Masson et cie 1965.
- [10] Technique de l'Ingénieur B2  
(Chauffage . Froid )