Ecole Polytechnique de Thiès.

Département de Génie Civil.

# PROJET DE FIN D'ÉTUDES

(Problème du postier chinois appliqué au quartier Grand-Thiès)

Auteur:
Serigne Thiam

Directeur de Projet.
Mr Jean Claude Picard

1980

# REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser mes sincères remerciements et à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de projet. Le Professeur Jean Claude Picard pour sa constante disponibilité et les conseils qu'il n'a jamais cessé de me donner, pour me permettre de mener à bien la présente étude.

- Je remercie également Monsieur et Madame Guilbert pour leur constant soutien et tous ceux qui directement ou indirectement ont contribué à la réussite de cette étude.

# SOMMAIRE

– Le but de ce projet est d'appliquer le "problème du postier chinois" à un des quartiers de la ville de Thiès : Grand-Thiès.
Ceci consiste à trouver un parcours optimal aux véhicules de la municipalité chargés de la collecte des ordures.
On avait prévu de tenir compte des différentes contraintes (capacité des véhicules, fréquence de la collecte etc... ) et de tracer pour les véhicules disponibles les itinéraires à parcourir pour être rempli, et par où ils doivent sortir pour minimiser les coûts de la collecte, mais malheureusement à défaut de renseignements nécessaires qui devaient être fournis par les services de la voirie, cet objectif n'est pas atteint.

– Nous avons abordé le problème en deux étapes :
Dans un premier temps, nous avons appliqué l'algorithme de Kwan. Mei-Ko à un réseau simple (réseau routier de l'Ex-base Aérienne). Mais comme l'algorithme de Kwan devient laborieux et inadapté quand le réseau se complique on a élaboré une méthode heuristique qui ne considère que les sommets de degré impair, qui seront reliés aux premiers points les proches, et où il faut chercher un couplage de valeur minimale. Cette méthode appliquée au réseau de la l'Ex-base donne le même resultat que celui

Obtenu par l'algorithme de Kwan.

L'importance du réseau de Grand-Thiès nous amène à lui appliquer cette méthode heuristique. Et pour avoir une idée du résultat obtenu, nous avons demandé à un compatriote de nous tracer un cycle intuitivement, car la méthode utilisée étant heuristique peut donner un résultat non satisfaisant.

Une comparaison de deux résultats nous révèle que si la collecte se faisait journalièrement, on allait économiser 820m par jour relativement au cycle tracé par notre compatriote, soit une économie de 3%.

On ne saurait dans une étude quelqu'elle soit de la théorie des graphes, oublier Léonard Euler et c'est ce qui nous a amené à consacrer un chapitre à ses résultats.

Dans la partie autres applications, on ne saurait également oublier le problème du voyageur de commerce.

# TABLE DES MATIERES.

# INTRODUCTION

- Durant les dernières décennies, la Recherche Opérationnelle ou gestion scientifique a rendu les prises de décision qui se faisaient de manière intuitive plus scientifique.

Elle s'est longtemps consacrée à l'optimisation de la production, mais la hausse du prix de l'essence, du prix des véhicules et l'augmentation des salaires des chauffeurs ont donné une nouvelle tournure à la Recherche Opérationnelle.

En effet cette hausse du prix et de l'augmentation des salaires se répercutant à tous les niveaux de la vie économique d'un pays, ont contribué récemment à placer au premier plan des préoccupations des entreprises publiques et privées les recherches concernant la distribution des produits.

- Il semble également que le gain de productivité que l'on peut attendre de telles recherches s'avère maintenant supérieur à celui qui résulterait d'une amélioration des méthodes de production.

Cette prise de conscience de l'importance croissante des coûts de distribution dans le prix de revient de nombreux produits a conduit les chercheurs à s'intéresser aux problèmes que soulève la distribution.

Et ce sera plus précisément la théorie des graphes qui s'avère être un outil extrêmement puissant et ce de plus en plus grâce aux nombreuses applications qu'on lui trouve.

Il convient aussi d'évoquer les groupes de recherches qui dans chaque grande ville se préoccupent de l'utilisation optimale des flottes de véhicules municipaux chargés de collecter les ordures, de nettoyer les rues, d'enlever la neige etc...

- Il faut enfin souligner l'importance des sommes d'argent consacrées aux activités de distribution tant dans le domaine public que dans le domaine privé et le montant des économies qui peuvent être réalisées.

- Déjà en 1966 une étude effectuée en Angleterre révélait que dans ce pays 90 millions de dollars pouvaient être économisés sur les quelques 7 milliards de dollars consacrés au transport des marchandises.

- De même The "New York department of sanitation" consacre 200 millions de dollars par an à la collecte des ordures, soit presque la moitié du budget du Sénégal.

- En tenant compte des progrès réalisés dans le domaine de la Recherche Opérationnelle appliquée à la distribution physique, on estime à 15% en moyenne le taux d'économie qu'on peut réaliser.

- Ces quelques remarques illustrent l'importance de la distribution dans l'économie d'un pays et l'ampleur des problèmes qui se posent ; C'est ce qui justifie le choix de ce projet et devait motiver les municipalités et les chefs d'entreprise à investir dans ce domaine.

# CHAPITRE I

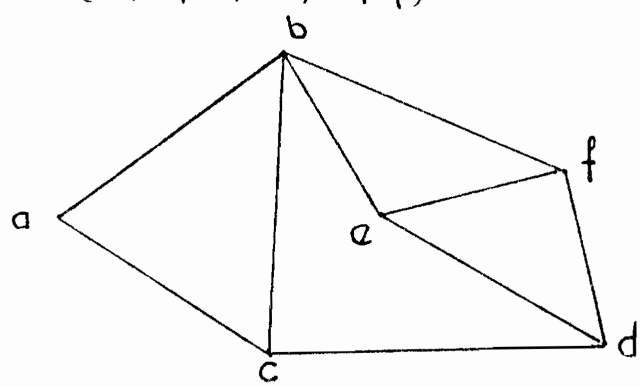
## quelques définitions et propriétés sur la théorie des graphes.

Graphe:

Un graphe G est une structure comportant un ensemble non vide de N éléments appelés sommets et un ensemble de A éléments appelés arêtes. Chaque élément de A est composé d'un couple non ordonné d'éléments choisis dans l'ensemble N. Un graphe est souvent désigné par la notation $G(N, A)$.

Exemple:

$$A = (ab,\ ac,\ bc,\ be,\ ef,\ ed,\ cd,\ df)$$
$$N = (a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$$




(fig I-1)

Remarque: Un graphe peut être orienté ou non orienté. Une arête $(i, j)$ est orientée du sommet incident $i$ au sommet aboutissant $j$, les arêtes aboutissantes et incidentes relatives d'un même sommet sont adjacentes à celui-ci.

Mais dans ce projet seuls les graphes non orientés sont considérés

- Chaîne:

Une chaîne est une séquence d'arêtes de G telle que chaque arête de la séquence ait une extrémité en commun avec l'arête précédente et l'autre extrémité en commun avec l'arête suivante. Le nombre d'arêtes de la séquence est la longueur de la chaîne.

Une chaîne qui ne rencontre pas deux le sommet est dite élémentaire;

- Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même arc est dite simple.

- Degré d'un sommet.

- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont adjacentes

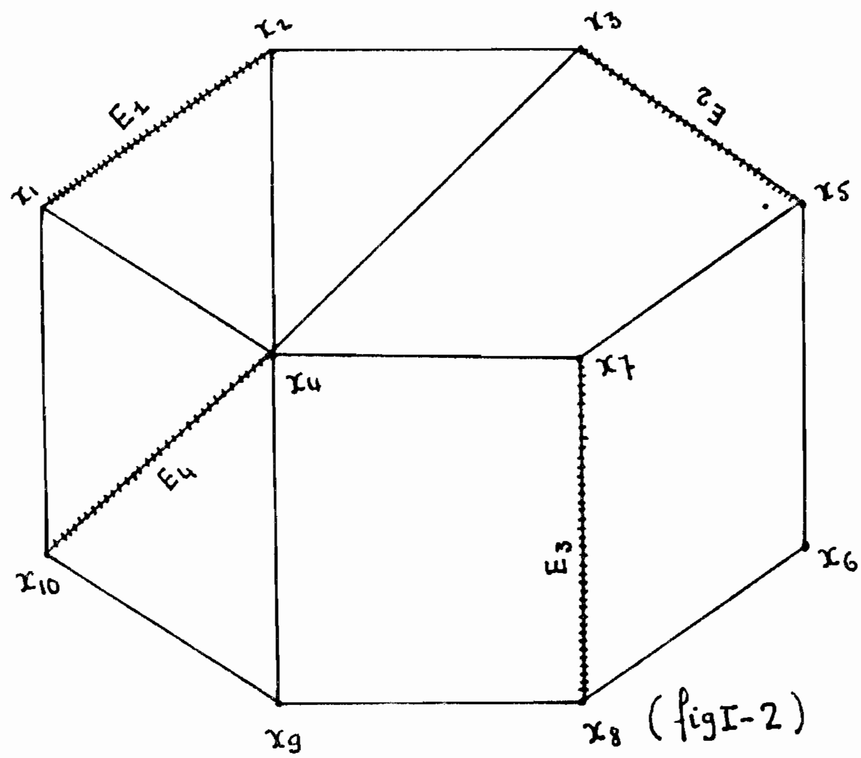
- Graphe connexe.

- C'est un graphe G(N, A) tel que toute paire $X_i$, $X_j$ de deux sommets distincts, il existe une chaîne reliant les sommets $X_i$ et $X_j$.

## Matching (couplage)

Etant donné un graphe non orienté $G(N, A)$, on appelle couplage un sous-ensamble d'arêtes M de l'ansamble des arêtes de G tallesque deux arêtes qualconques de M sont non adjacantes.

Exemple:




(fig I-2)

Dans la figure précédente les arêtes hachurées formant un couplage M: avec $M = (E_1, E_2, E_3, E_4)$

### Sommet saturé et sommet insaturé

On dit qu'un sommet $x_i$ est saturé par un couplage M s'il existe une arête de M attachée à $x_i$ et on écrira : $x_i \in S(M)$. Ex: les sommets: $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_8$, $x_{10}$ sont saturés. Si $x_i \notin S(M)$ on dira que le sommet

$x_i$ est insaturé par M

Exple de sommet insaturé : $x_9$, $x_6$

- Remarque :

Un couplage qui sature tous les sommets du graphe est appelé couplage-parfait.

Un couplage-parfait est evidemment maximum

- Chaîne alternée.

Une chaîne alternée est une chaîne élémentaire dont les arêtes appartiennent alternativement à M et à (A - M)

Exemple de chaîne alternée : $(x_8, x_7, x_5, x_3, x_2, x_1, x_4, x_{10})$

- Chaîne augmentante.

Une chaîne augmentante est une chaîne alternée dont les sommets de départ et d'arrivée sont insaturés

Exple de chaîne augmentante : $(x_9, x_{10}, x_4, x_1, x_2, x_3, x_6)$

- Théorème de Berges (1957)

- Un couplage M est maximum si et seulement si il n'existe pas de chaîne alternée reliant un point insaturé à un autre point insaturé, ou en d'autres termes s'il n'existe pas de chaîne augmentante.

+ Tout graphe a un nombre pair de sommets de degré impair

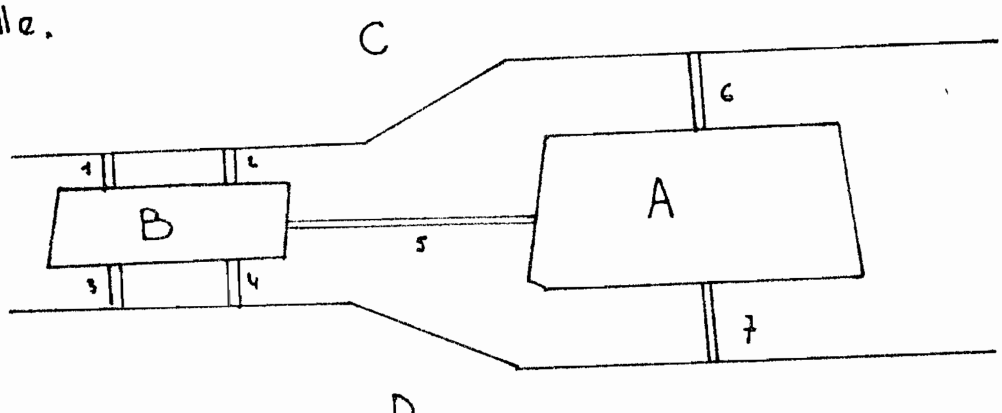
<u>Graphe mixte</u>:

C'est un graphe ayant à la fois des arêtes Orientées et des arêtes non Orientées.

# CHAPITRE II

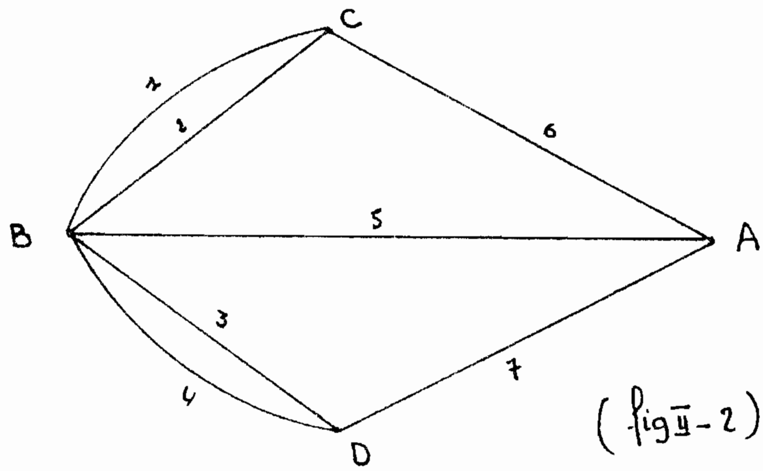
## quelques Résultats d'Euler sur La théorie des graphes

cette partie de la recherche opérationnelle (théorie des graphes) a débuté pourrait-on dire en 1736 avec le problème de Koenigsberg (rebaptisé Kalinigrad). Kalinigrad était une ville construite sur deux îles et sur les deux rives de la rivière Pregel. Sept ponts assuraient la liaison entre ces différentes parties de la ville. Et la question qu'on se posait était la suivante: Est-il possible en partant d'une région quelconque de la ville de passer par les autres régions, en traversant tous les ponts exactement une fois et revenir à la région de départ? La figure 1 donne une illustration de cette ville.




(fig II-1)

A, B, C, D représentent les quatre régions de la ville ;
(1, 2, 3, 4, 5 6, 7 ) représentent les sept ponts.
En représentant les régions par les sommets et les ponts par des arêtes on a la représentation graphique suivante.




( fig II - 2 )

- Selon la nouvelle représentation la question devient ; est-il possible en partant d'un sommet quelconque de traverser toutes les arêtes exactement une fois et revenir au sommet de départ.
Leonard Euler (1707 - 1782) en concluant que ceci était impossible devient le père de la théorie des graphes et donna le point de départ d'une recherche de longue haleine dans ce domaine.
Ce qui lui a valu les résultats suivants.

<u>Théorème d'Euler.</u>

Pour un graphe quelconque non orienté les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un cycle qui traverse chaque arête exactement une fois sont

i°) le graphe doit être connexe

ii°) chaque sommet doit être de degré pair

**Cycle Eulérien**

les cycles qui traversent chaque arête d'un graphe une fois et exactement une fois sont appelés cycles Eulériens.

De même un graphe connexe qui a tous ses sommets de degré pair est appelé eulérien.

– S'il y a exactement deux sommets de degré impair, alors il existe une chaîne qui part d'un des sommets de degré impair vers l'autre sommet de degré impair.

De même, s'il existe exactement quatre sommets de degré impair, alors il existe deux chaînes qui entre elles traversent chaque arête et chacune commence à l'un des quatre sommets de degré impair vers un autre sommet de degré impair.

– Il faut remarquer que Euler ne s'est jamais penché sur les cycles qui traversent chaque arête Au moins une fois; ce qui est plus fréquent.

Son intérêt était plutôt porté sur les graphes dans lesquels il est possible de traverser chaque arête exactement une fois.

Pour les graphes non eulériens, le problème devient autre et consiste à trouver un cycle qui traverse chaque au moins une fois et qui minimise la longueur du cycle.

Dans le cas d'un tel graphe, tout cycle qui doit traverser chaque arête au moins une fois, doit traverser quelques arêtes plus d'une fois, et le problème devient : Quelles arêtes faut-il ajouter au graphe de façon à le rendre Eulérien et de façon à minimiser la longueur des arêtes ajoutées ?

La construction d'un graphe implique que les arêtes ajoutées doivent être déterminées de façon à faire des sommets de degré impair des sommets de degré pair et à laisser les sommets de degré pair avec la même parité.

. Le problème du postier chinois en est une application et il sera traité en detail dans le chapitre suivant

# CHAPITRE III

## Le problème du postier chinois

Kwan Mei-Ko en faisant sa première publication en 1962 sur la théorie des graphes, venait de généraliser les résultats de Léonard Euler qui ne s'intéressait qu'aux cycles qui traversent chaque arête du graphe exactement une fois.

Les études de Kwan étaient plutôt orientées vers les cycles qui traversent chaque arête du graphe au moins une fois ; et son but était de les améliorer jusqu'à ce qu'ils soient optimaux.

– Sa technique étaient appliquée pour la première fois à la détermination de l'itinéraire d'un facteur qui souhaitait faire ses tournées et revenir à la poste tout en minimisant la distance à parcourir.

Et à cause des résultats de Kwan le problème : "Trouver un cycle de longueur minimale qui traverse chaque arête au moins une fois est devenu le "problème du postier chinois"

Avant d'aborder les résultats de Kwan, nous nous proposons de donner la formulation mathématique de ce problème.

### 1°) Formulation Mathématique :

La formulation mathématique du problème du postier chinois est la suivante :

$$\text{Minimiser} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} X_{ij} \quad [7] \qquad (1)$$

Soumises aux contraintes

$$\sum_{k=1}^{N} X_{ki} - \sum_{k=1}^{N} X_{ik} = 0, \quad i = 1, \ldots N \qquad (2)$$

$$X_{ij} + X_{ji} \geq 1 \text{ pour toutes les arêtes } (i,j) \in A \qquad (3)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \text{est entier} \qquad (4)$$

où $N$ = nombre de sommets du graphe

$A$ = ensemble des arêtes " "

$X_{ij}$ = nombre de fois qu'une arête allant du sommet $i$ au sommet $j$ est traversé

$C_{ij}$ = distance de l'arête allant du sommet $i$ au sommet $j$

l'expression (1) étant la fonction objective qui minimise la distance requise du trajet qui traverse chaque arête au moins une fois.

(2) exprime la continuité du flow requis, c'est-à-dire que le nombre d'arêtes incident à un sommet est égal au nombre d'arêtes sortant de ce même sommet.

③ traduit le fait que chaque arête doit être au moins traversée une fois.

④ exprime la non existence d'un cycle négatif.

- Il faut remarquer que cette formulation nous aide à définir formellement le problème, mais ne peut être une méthode efficace de résolution ; car si on considère n'importe quelle municipalité ou ville, elle possède au moins des centaines de rues et que le nombre de contraintes ainsi que le nombre de variables est au moins le double du nombre des rues.

- C'est ce qui fait l'importance des résultats de Kwan.

## Résultats de Kwan.

L'idée fondamentale de la technique de Kwan est basée sur le fait qu'un graphe eulérien est constitué d'un ensemble de cycles.

Et en examinant un cycle dans un graphe rendu Eulérian On constate qu'il est constitué d'arêtes qui ne sont pas traversées plus d'une fois et éventuellement d'arêtes qui sont traversées plus d'une fois.

La grande contribution de Kwan était de déterminer que dans chaque cycle d'un graphe rendu eulérien et où on veut optimiser le cycle, la somme des longueurs des arêtes traversées plus d'une fois est supérieure (                    ) à celle des longueurs des arêtes traversées exactement une fois, et l'idée fondamentale est de faire un échange entre les arêtes traversées plus d'une fois et celles traversées exactement une fois de façon à maintenir le graphe eulérien et à diminuer la longueur des arêtes qui sont traversées plus d'une fois.

Pour fixer les idées, prenons un Exemple.

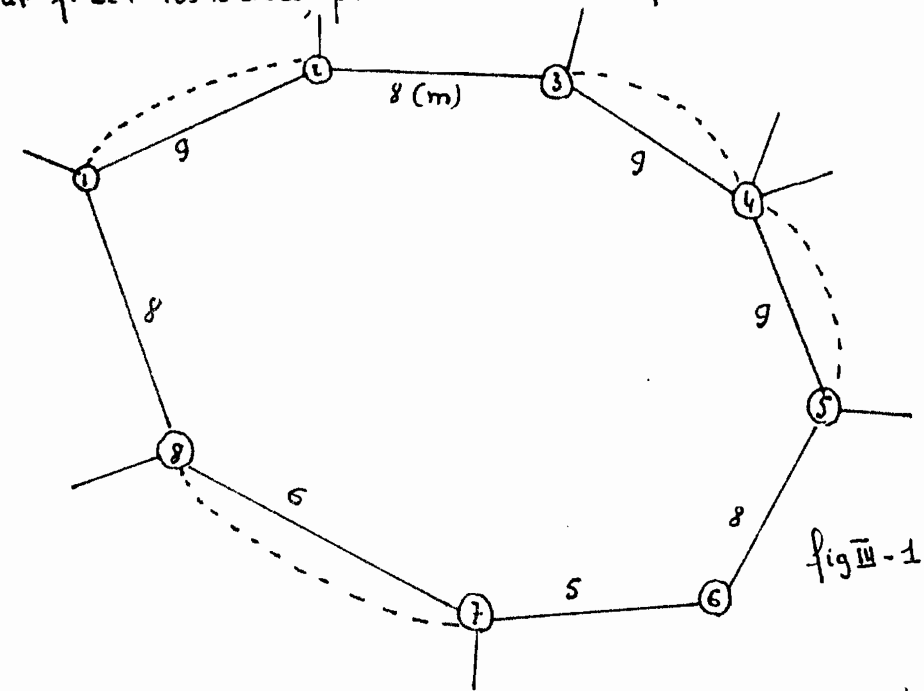



fig III-1

Les pointillées montrent que ces arêtes sont traversées deux fois

- Somme des longueurs des arêtes traversées une fois = 29m
- " " " " " " deux fois = 33m
- En échangeant les arêtes traversées une fois avec les arêtes traversées deux fois, on obtient la figure suivante.

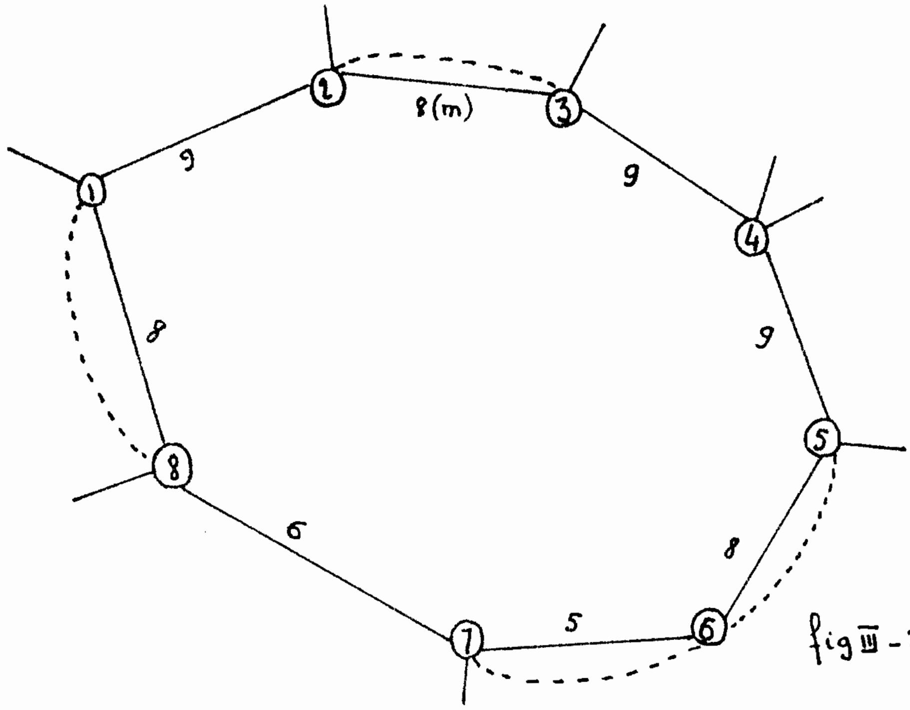



fig III - 2

- Après transformation, le graphe reste eulérien, et la longueur des arêtes traversées deux fois passe de 33m à 29m, ainsi donc la longueur du cycle a dimunié de 4m.

- Kwan a prouvé que si dans un cycle eulérien correspondant à un cycle du problème du postier chinois, il n'existe pas de cycle telle que la somme des longueurs des arêtes traversées plus d'une fois est supérieure à celle des longueurs des arêtes traversées exactement une fois; alors ce cycle est optimal. Ou sous une autre forme: si dans un graphe eulérien, il n'existe pas négatif, alors tout cycle correspondant au cycle du postier chinois est optimal. Dans ce cas les distances des arêtes traversées plus d'une fois sont considérées négatives et celles des arêtes traversées exactement une fois positives, et pour savoir si un cycle est positif ou négatif, il s'agit de faire la somme algébrique des longueurs des arêtes qui le composent. ce qui nous amène à décrire les étapes de l'algorithme de Kwan.

3) Algorithme de Kwan.

1°) Rendre le graphe eulérien en y ajoutant des arêtes telles que tous les sommets soient de degré pair

2°) Examiner tous les cycles du graphe, et s'il existe un cycle négatif, alors on doit faire un échange entre les arêtes traversées exactement une fois et celles traversées plus d'une fois.

3°) Continuer de cette façon jusqu'à ce que tous les cycles soient positifs ou qu'il n'y ait plus d'échange possible.

4°) Construire un cycle sur le graphe eulérien qui en résulte.

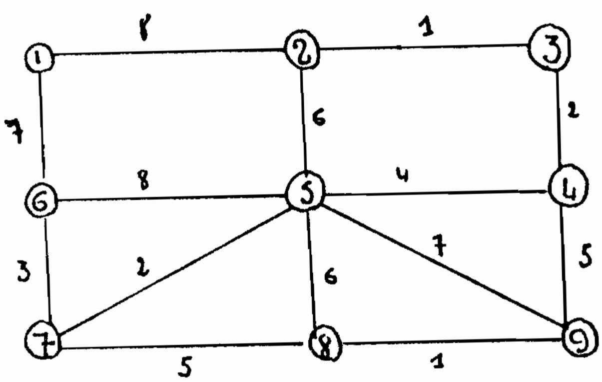
Certes, l'algorithme de Kwan est une technique efficace, mais elle peut s'avérer Laborieuse car le nombre de cycles peut être très élevé et l'inspection de tous les cycles (pour savoir s'ils sont positifs ou négatifs) devient extrêmement longue. Elle est cependant une technique facile à appliquer à la main et peut conduire à des améliorations de situations concrètes.

Pour contourner la difficulté, on ne considère que les nœuds de degré impair. On les relie par les plus courtes chaînes; le nouveau graphe obtenu est complet. Sur ce nouveau graphe, on applique l'algorithme de Kwan.

quand le graphe est rendu eulérien et que les arêtes à doubler trouvées, on reporte ces les résultats au graphe initial, qui sera lui aussi eulérien. Tous les cycles seront nécessairement positifs donc optimaux. Après il s'agit de construire le cycle qui en résulte.

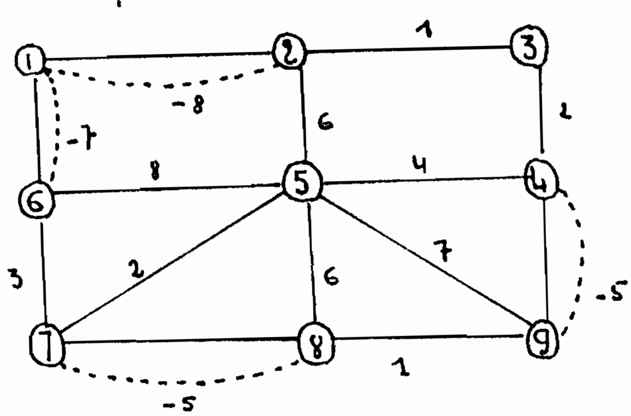
4°) Considérons un deuxième exemple où on appliquera les deux techniques.

Exemples



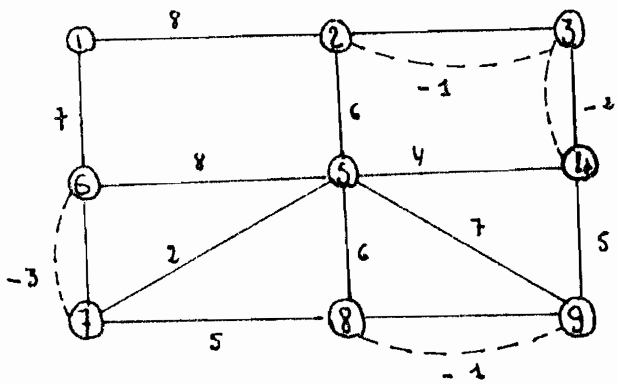

( fig III-3 )

les sommets ②, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨, ④ étant de degré impair le graphe (fig III-3) n'est pas eulérien; on le rend eulérien en rajoutant les arêtes en pointillées




( fig III-4 )

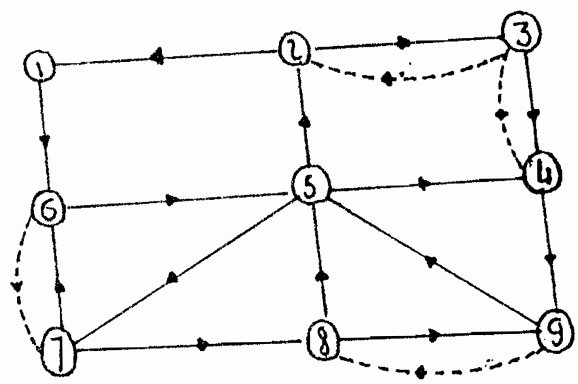
- Considérons le cycle (①, ②, ③, ④, ⑨, ⑧, ⑦, ⑥, ①);
la somme des longueurs des arêtes qui le composent est égale à : $-8+1+2-5+1-5+3-7 = -18 < 0$.
le cycle étant négatif, on procède à un échange des arêtes le long de ce cycle. Ce qui nous le graphe suivant.




(fig III-5)

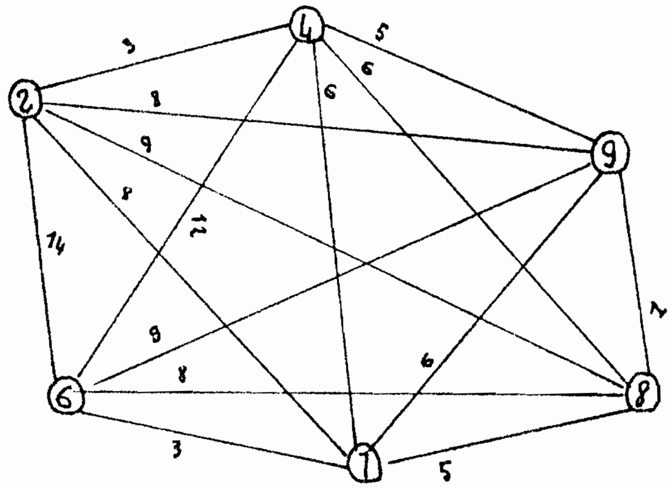
Tous les cycles étant positifs ; la solution est optimale.

- Construction d'un cycle:



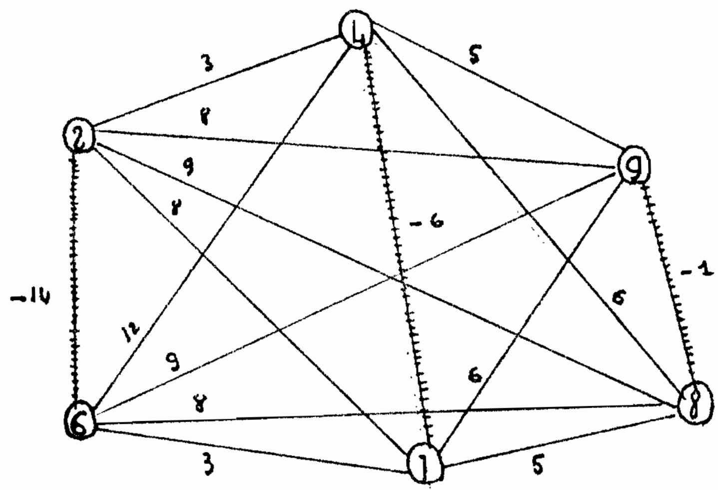
(fig III-6)

– Considérons maintenant uniquement les sommets de degré impair et relions les deux à deux par des arêtes de longueur égale à la distance minimale entre ces sommats. (voir figure



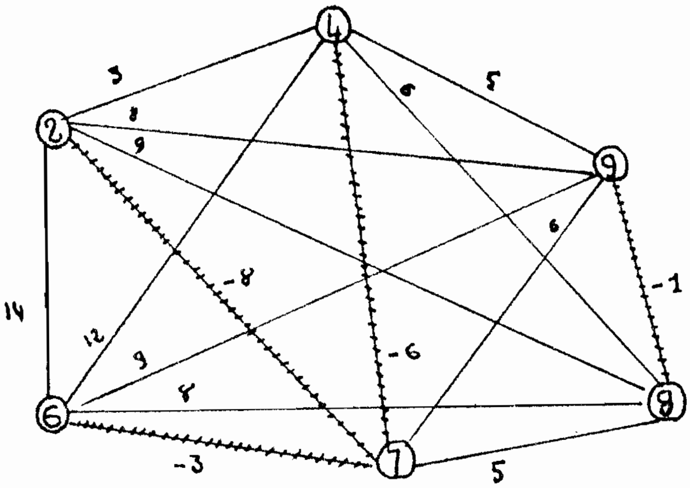

(fig III - 7)

Rendons ce graphe eulérien, en doublant les arêtes [(2 - 6), (4 - 7), (9 - 8)] (Voir Hachures )



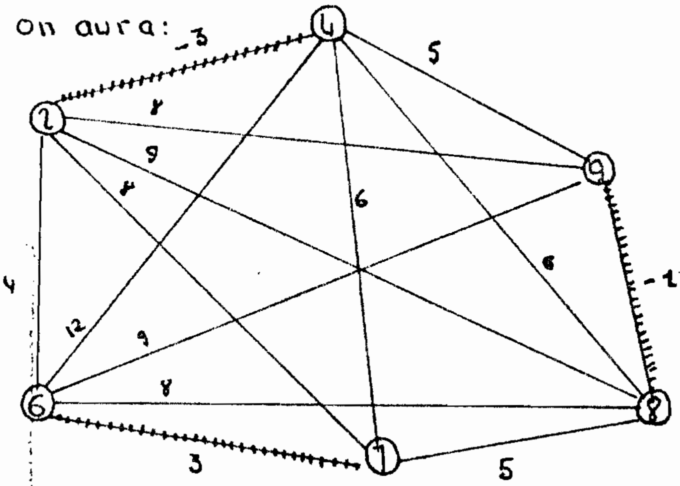

(fig III - 8)

Tous les cycles sont-ils optimaux ? C'est-à-dire Existe-t-il de cycle négatif ? En considérant le cycle [2, 6, 7], on remarque qu'il est négatif ; il faut procéder donc à un échange des arêtes le long de ce cycle.




(fig III - 9)

- Le cycle [②, ④, ⑦] étant également négatif, en faisant un échange le long de ce cycle on aura:




(fig III -10)

- en faisant une inspection de tous les cycles, on remarque qu'ils sont tous positifs, donc la solution obtenue est optimale.

- En reportant ces résultats au graphe initial, on aura les arêtes à doubler [(②-④), (⑨-⑧) (⑥-⑦)] ce qui correspond au résultat trouvé antérieurement.

- On pouvait également en considérant uniquement les sommets de degré impair, procéder à la théorie du couplage ; c'est-à-dire trouver dans le graphe des distances les plus courtes entre les sommets de degré impair un couplage de valeur minimale. C'est une méthode efficace et élégante pour la détermination de l'itinéraire du postier chinois.

Mais comme pour les autres méthodes, si on complique la formulation du problème en introduisant des contraintes supplémentaires comme interdiction de tourner à gauche à certains carrefours, possibilités ou interdiction de faire demi-tour, certaines à sens unique, obligation de parcourir certains tronçons (ou de visiter certains clients) avant d'autres, alors la théorie du couplage n'est plus applicable et aucune méthode n'a été proposée jusqu'à ce jour.

Mais Heureusement dans ce projet, le quartier considéré, ainsi que le type d'activité (ramassage des poubelles) ne présente aucune de ces contraintes supplémentaires, ce qui nous a permis d'appliquer une méthode heuristique qui utilise en grande partie la théorie du couplage.

- La solution du problème du postier chinois a certaines limites car dans les différentes méthodes utilisées, toutes les contraintes supplémentaires ne peuvent être prises en considération.

<u>Exemple:</u> dans la collecte des ordures ménagères ; Comment la col-

lecte doit-elle se faire ? Combien de personnes et de camions sont nécessaires ? faut-il procéder à une incinération ou à une décharge brute ? etc . . .

Il est à signaler également que le coût de collecte des ordures pour une rue donnée dépend de la fréquence de la collecte parceque plus la rue est servie, moins les ordures sont accumulées.

Même si cette optimisation n'est pas parfaite, il faut souligner l'importance de la minimisation des distances, comme l'ont révélé Ludwig et Black [7], car disent-ils 85% du prix total des systèmes de collecte (collecte, dépôt, incinération etc... ) reviennent exclusivement à la collecte.

- Par manque de renseignements, dû à des raisons évoquées dans le sommaire, nous sommes obligés de faire certaines hypothèses qui peut-être n'auront pas leur véritable portée pratique; mais le critère temps nous y oblige.

Ces Hypothèses sont les suivantes :

- les camions chargés de la collecte ne peuvent pas dépasser leur capacité
- Ils ne peuvent retourner au dépôt que quand ils sont pleins
- La collecte se fait f fois par semaine

Soit $q_o$ la quantité d'ordure par habitant et par jour

" $p$ le nombre de personnes par famille.

Soit n le nombre de familles par lot

" C la capacité d'un camion (Volume)

" $P_o$ le périmètre moyen d'un lot

" d la densité moyenne d'un lot

Soit $M_o$ la masse d'ordure par collecte et par lot

$$M_o = \frac{7}{f} p q_o n \quad (\text{kg}/\text{lot})$$

- Ramenons cette masse au périmètre moyen d'un lot.

Soit $M'_o$

$$M'_o = \frac{7 p q_o n}{f P_o} \quad (\text{Kg d'ordure}/\text{mètre linéaire})$$

Exprimons cette masse en volume car dans les pays en voie de développement la charge maximale des véhicules est rarement respectée

Soit V ce volume :

$$V = \frac{M'_o}{d} = \frac{7 p q_o n}{f P_o d} \quad (m^3/\text{m linéaire})$$

Pour être rempli un camion doit parcourir une distance D donnée par :

$$D = \frac{C}{V} = \frac{7 p q_o n}{f P_o d V} \quad (m)$$

Mais dans cette distance la longueur des arêtes -à doubler ne doivent être considérées qu'une fois car quand le camion passe une fois, on suppose que les ordures sont collectées.

Faisons maintenant un exemple de calcul numérique pour avoir une idée de ce qu'il faut faire et pour déterminer l'itinéraire au camion chargé de la collecte des ordures de l'Ex-base Arianne.

Pour cela posons.

$f =$ 2 fois par semaine [*]

$q_0 = 0.25$ Kg/ht/jour

$p =$ 15 habitants/famille

$n =$ 7 familles/lot

$C = 4\ m^3$

$d = 150\ Kg/m^3$

$P_0 = 418m$

donc on a: $M_0 = 0.25$ Kg/ht/jr x 35 jr x 15 hts/famille x 7 familles/lot

$= 91,875$ Kg/m linéaire

$$M'_0 = \frac{91,875}{418} = 0.22 \text{ Kg/m linéaire}$$

$$V = \frac{0.22}{150} = 1,46\,10^{-3}\ m^3/\text{m linéaire}$$

$$D = \frac{5}{1{,}46\,10^{-3}} = 3,4\ Km$$

$$\underline{\underline{D = 3,4\ Km.}}$$

Appliquons ces résultats au réseau de l'Ex. Base Aérienne, et déterminons pour le camion chargé de la collecte des ordures son itinéraire et par où il doit passer pour se rendre au dépôt en minimisant la distance à parcourir.

- Il faut noter que la minimisation de la distance à parcourir doit se faire exclusivement entre le point où le camion est plein et le point de dépôt car le réseau considéré étant eulérien et que la solution obtenue optimale ; quelque soit la direction prise par le camion, il va parcourir la même distance qui est par ailleurs minimale.

- Pour le réseau considéré, le camion doit faire trois voyages où il sera plein et un quatrième voyage pour compléter la collecte.

Pour le Premier voyage :

il fera l'itinéraire 1 , 2 , , , 20 et pour aller au dépôt, il fera : 20 , 24 , Dépôt , pour la sortie (voir fig III-12)

Pour le second voyage :

le camion fera pour rentrer dans le réseau l'itinéraire :

Dépôt, 24 , 20 où il doit recommencer la collecte, et pour être plein il partira de 21 , 22 , 23 , , , 45.

Pour trouver la distance minimale à parcourir pour la sortie faisons des essais.

i°) 45 , 44 , Dépôt : la distance étant : 1,03 Km.

ii°) 45 , 42 , Dépôt : " " 1,02 Km

iii°) 46, 40, 38, Dépôt ; la distance est: 1,03 Km.

Donc pour la sortie le camion devra faire l'itinéraire :

45, 42, 39, Dépôt. (voir fig III-12)

Pour le troisième voyage:

Pour la rentrée dans le réseau il fera la même itinéraire que pour la sortie lors du second voyage : c'est-à dire: Dépôt, 38, 42, 45.

Pour la collecte il fera: 46, 47, 48, , , 63'

et pour la sortie : 63', Dépot

_ Pour le quatrième voyage

_la rentrée se fait par: Dépôt, 63' même itinéraire que celle de la sortie lors du 3e voyage.

_ Pour la collecte : 64, 65, 66

_ Pour sortie : 0, Dépôt.

Remarque :

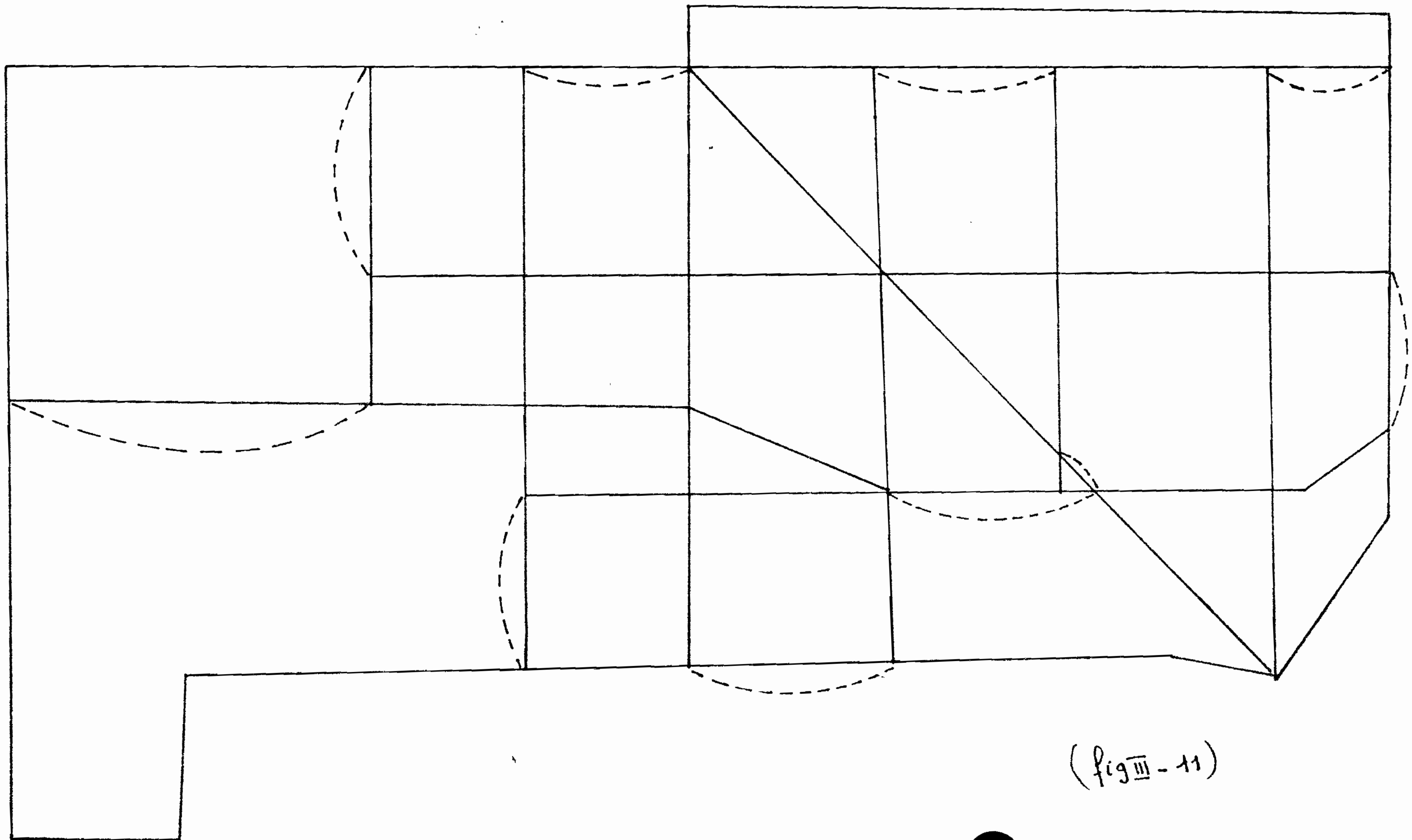
_ Cette solution purement accadémique et peut fausser en partie la planification car certaines familles pour des raisons sociales et autres peuvent produire plus d'ordures que d'autres ce qui fait que le camion peut se remplir avant d'atteindre la fin de l'itinéraire prévue.

Une autre solution plus pratique et plus réaliste, serait d'instituer tout au long du trajet des dépôts à des distances régulières. Mais il faudrait dans ce cas faire une estimation des quantités d'ordures susceptibles d'être déposées à ces dépôts. Cette estimation doit être basée sur des enquêtes, et sur une longue période.

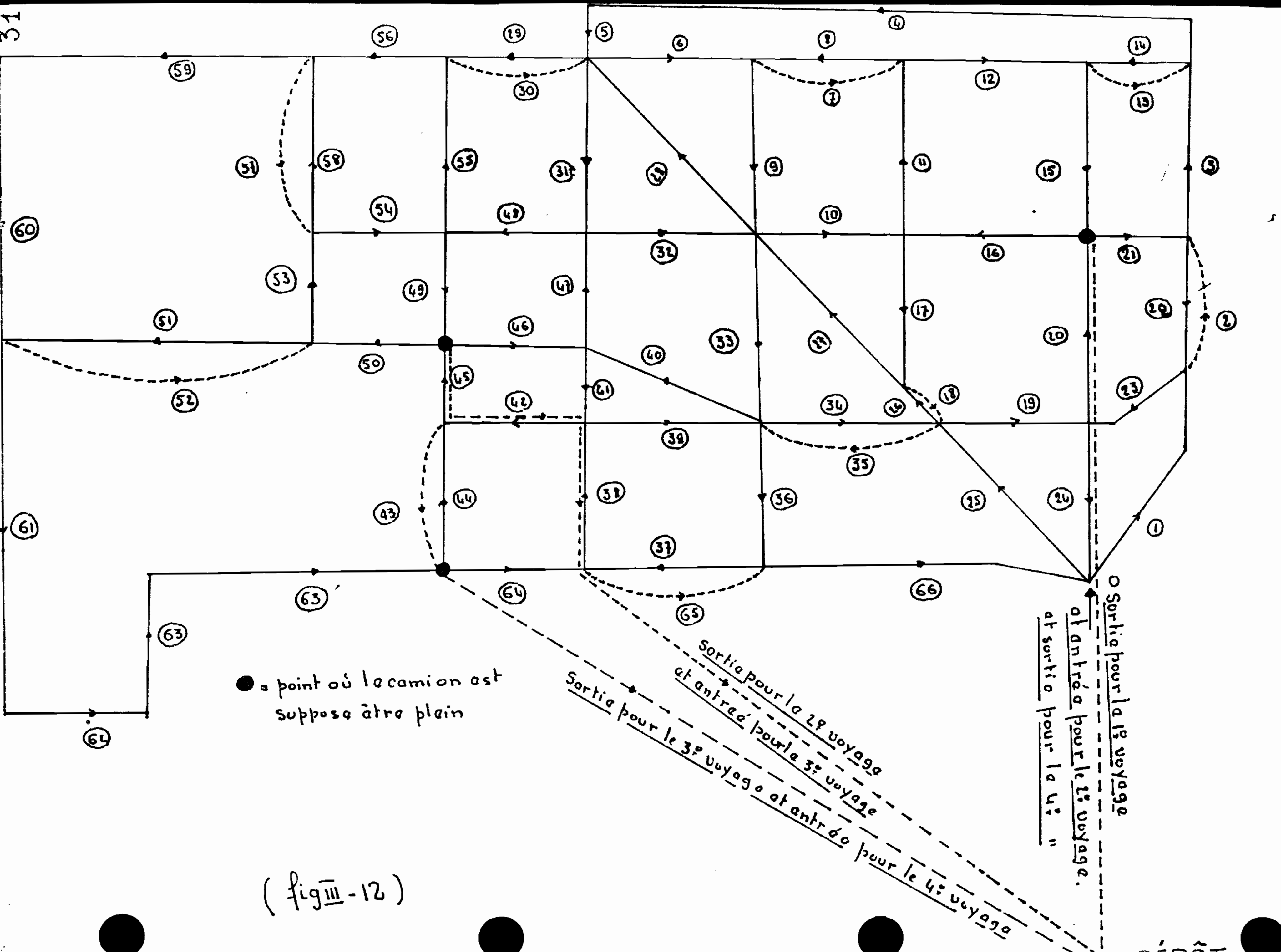
N. B:

– Pour la solution du problème du postier chinois appliqué à Grand-Thiès voir annexe.

5°) <u>algorithme de Kwan appliquée au réseau routier de l'Ex.Base aérienne</u>



(fig III - 11)



= point où le camion est supposé être plein
Sortie pour le 1er voyage
et entrée pour le 2e voyage.
et sortie pour le 4e "
Sortie pour le 2e voyage
et entrée pour le 3e voyage
Sortie pour le 3e voyage et entrée pour le 4e voyage


( fig III - 12 )

# CHAPITRE IV

## méthode heuristique.

L'application de l'algorithme de Kwan-Mei-Ko s'adapte aux graphes simples (c'est-dire des graphes qui ne disposent pas de beaucoup d'arêtes et de sommets).

Pour les graphes issus de grandes villes ou de grands quartiers (réseaux routiers, systèmes d'aqueduc ...) son application devient Laborieuse et surtout inadaptée.

La difficulté d'inspection de tous les cycles rend presque impossible l'obtention d'une solution optimale sûre.

Un calcul informatique pourrait résoudre le problème, mais le niveau de difficulté resterait constant car:

- pour les grands graphes, on a besoin d'un ordinateur puissant qui n'est pas toujours à la disposition de l'ingénieur
- Pour contourner la difficulté, nous nous proposons d'employer une méthode heuristique. Cette technique de résolution sera probablement plus simple; la solution obtenue sera suffisante, mais ne sera pas nécessairement la meilleure.

Dans son origine, cette méthode, ne peut pas être nouvelle car utilisant les principes du couplage.

### 1°) Principes de la méthode.

Pour un graphe donné à rendre eulérien, on considère tous les sommets de degré impair. Contrairement au cas général qui consiste à relier tous les sommets de degré impair entre eux par les plus courtes chaînes. On les relie aux deux, trois plus proches ou même quatre selon le cas.

Ensuite on cherche un couplage sur le nouveau graphe obtenu ; si le couplage est maximal c'est-à-dire s'il n'existe pas de chaîne augmentante, alors on peut considérer la solution obtenue bonne, bien qu'elle peut ne pas être optimale.

Si on ne parvient pas à trouver un couplage maximal dans le graphe, On les relie au point voisin le plus proche ; ainsi de suite.

## 2°) Résumé des étapes de la méthode.

1°) Considérer tous les sommets de degré impair

2°) les relier par les plus courtes chaînes (on relie les deux, trois ou quatre plus proches selon le cas.

3°) Vérifier s'il existe un couplage maximal dans le graphe obtenu si oui, la solution obtenue est bonne ; sinon faire un nouveau couplage.

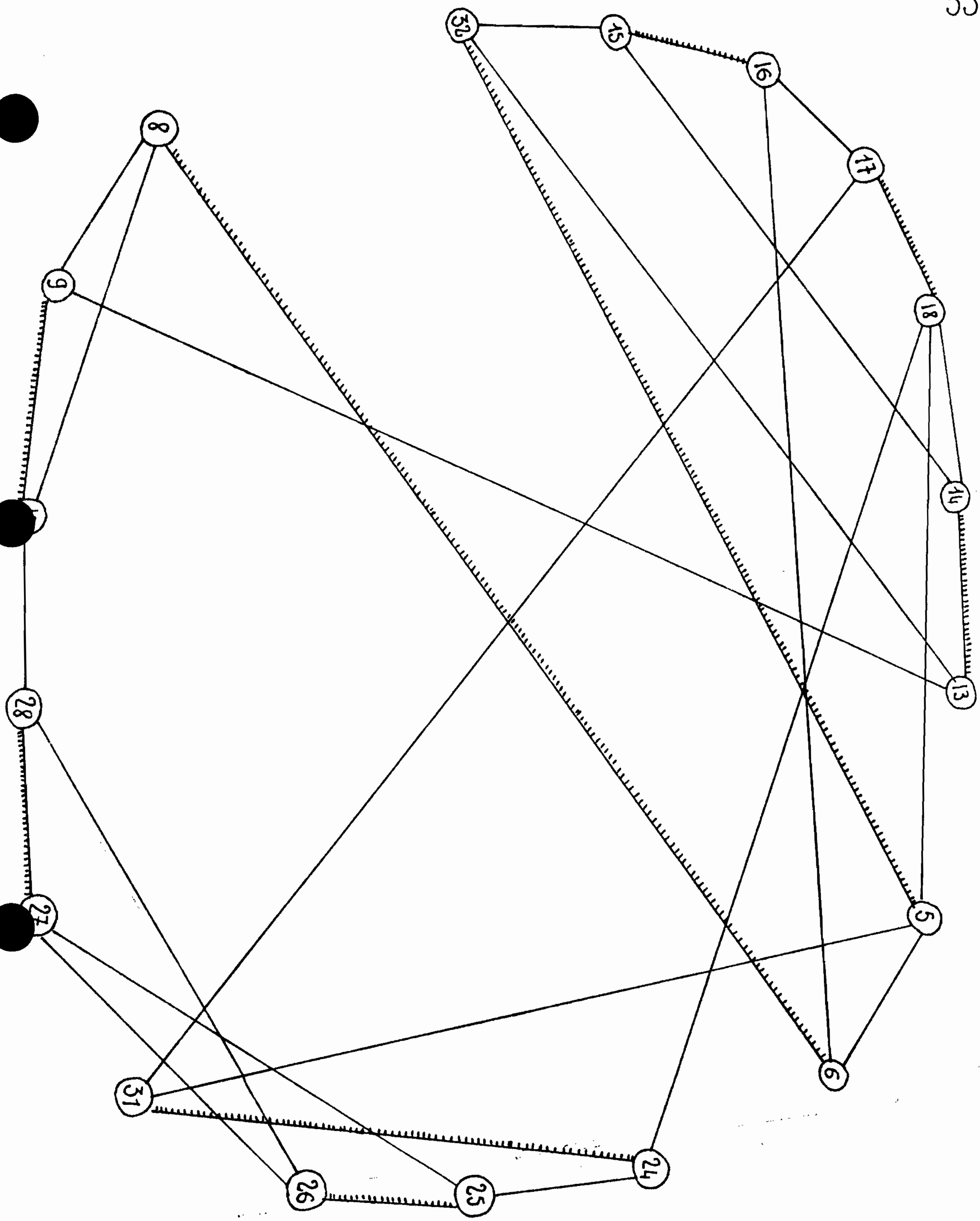
## 3°) Avantages de la méthode

On n'a pas à déterminer les plus courtes chaînes entre tous les sommets de degré impair, ce qui peut prendre énormément de temps pour les réseaux compliqués.

- Contrairement au cas général où tous les points sont reliés entre eux et où on obtient un graphe complet, ce qui peut compliquer le couplage; dans ce cas le graphe obtenu est clair et le couplage se fait plus aisément.

- L'idée principale de cette méthode est que les sommets éloignés ont une probabilité très faible d'être reliés entre eux.

- Cette méthode a été appliquée au réseau routier de l'Ex. Base Aerienne, et la solution obtenue coincide exactement avec celle obtenue par l'algorithme de Kwan qui est optimal; ce qui nous a amené à l'appliquer au réseau du quartier de Grand THiès.




4°) La méthode heuristique appliquée à l'Ex- Base aérienne

( fig IV - 1 )        Cardinalité = n

# CHAPITRE V

## autres applications de la théorie des graphes

Une des applications fondamentales de la théorie des graphes à la distribution physique consiste en la détermination d'itinéraires afin d'assurer un certain service; les applications sont nombreuses tant dans le domaine public que dans le domaine privé.

- Dans le secteur public, on peut citer en plus de la collecte des ordures développée dans le chapitre précédent, le nettoyage des rues, le déneigement des rues, ainsi que le ramassage scolaire, la collecte et la distribution postale, la collecte du lait à la campagne.

Dans le secteur privé se posent de nombreux problèmes de ce type.

Commençons d'abord par ceux auxquels les entreprises spécialisées dans le domaine du transport doivent faire face, puisqu'il s'agit là d'un aspect fondamental de leurs activités.

- Au Sénégal, une entreprise comme la SOTRAC (Société de Transport du Cap-Vert) dans le souci de desservir toutes les zones de la région avec un minimum de distance devrait dans leur politique d'investissement pour la recherche consacrer une certaine somme à une éventuelle étude (Optimisation) du réseau routier de la région.

La Grandeur du réseau de la région du Cap-Vert lui ferait économiser beaucoup de distance, donc d'énergie, de temps, et résoudre en partie le problème de personnel.

_ Des sociétés comme la SONEES (Societe Nationale d'Exploitation des Eaux du Sénégal ) et la SENELEC (Societe d'Energie Electrique) pour minimiser la distance à parcourir par leurs employés chargés du relevé des compteurs de leurs abonnés devraient également faire des études dans ce sens.

Dans les applications, on ne saurait obtenir le "Problème du voyageur de commerce" qui est sans nul doute le plus célèbre et qui a suscité aussi le plus de recherche, et permis d'importants développements dans le domaine de la distribution physique.

Etant donné un certain nombre de villes, reliées par des routes de longueur donnée, il s'agit de déterminer le plus court itinéraire qui visite au moins une fois chacune de ces villes avant de revenir à son point de départ.

Le problème du voyageur de commerce est ainsi un problème extrêmement difficile à résoudre ; c'est pourquoi depuis de nombreuses années, il a fait l'objet d'un très grand intérêt de la part des centres de recherche du monde entier. Une centaine de publications et plusieurs thèses de doctorat ont été consacrés à ce problème.

La formulation mathématique développée par Bellmore et Nemhausser est donnée par:

[6]

Minimiser: $$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{ij} X_{ij} \qquad (1)$$

Soumise aux contraintes :

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij} \geqslant 1 \qquad j = 1, \ldots, N \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_{ij} \geqslant 1 \qquad i = 1 \ldots, N \qquad (3)$$

$$\sum_{i\in\varphi}\sum_{j\in\bar{\varphi}} X_{ij} \geqslant 1 \quad \text{chaque } \varphi \subset V,\ \varphi \neq \emptyset$$

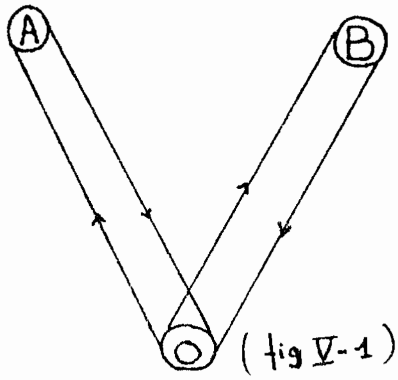
$$X_{ij} = 0, 1 \qquad i, j = 1, \quad , N$$

où N = nombre de sommets du graphe

V = Ensemble des " " "

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } (i,j) \text{ est dans le cycle} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$C_{ij}$ = distance (ou le coût) de l'arc $(i,j)$




(fig V-1)

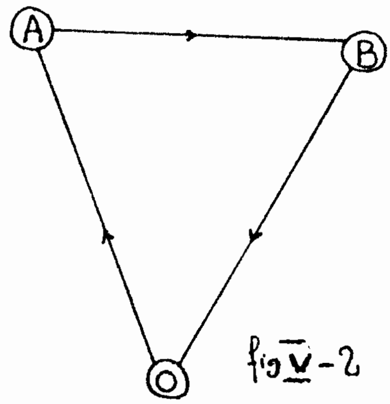



fig V-2

Si les quantités de marchandises commandées par les deux clients pourraient être transportées par un seul de deux camions, non seulement on économiserait un camion, mais également nous obtiendrons une économie sur la distance parcourue. (Voir figure $X_2$)

En effet la distance parcourue serait égale à :

$$d_{OA} + d_{OB} + d_{AB}$$

, d'où une économie sur la distance égale à :

$$2d_{OA} + 2d_{OB} - (d_{OA} + d_{OB} + d_{AB}) =$$

$$= d_{OA} + d_{OB} - d_{AB}.$$

cette quantité est appelée DSC (Distance Saved Coefficient).

- La méthode de clark et wright est une méthode itérative qui à chaque itération associe sur une même route le couple de clients qui correspond au plus grand D.S.C, pourvu bien entendu que ces deux clients satisfassent aux restrictions imposées (nombre de camions disponibles, capacités des camions etc ... )

- Il faut enfin souligner que les problèmes de distribution, ne concernent pas uniquement les questions de tournées, mais également

$Q$ = sous-ensemble des sommets

$\bar{Q}$ = $V - Q$

l'équation ① est la fonction objective à minimiser (coût ou distance)

" ② et ③ indiquent que chaque sommet doit avoir au moins une arête entrant et une arête sortant.

– Il faut remarquer que le problème du voyageur de commerce peut-être généralisé ; car dans les lignes précédentes, on supposait qu'un seul camion était suffisant pour faire toutes les livraisons ce qui n'est pas toujours le cas.

Pour être plus réaliste, on peut supposer que les livraisons nécessitent plusieurs camions de capacités non forcément égales ; là encore le problème consiste à minimiser la distance totale parcourue par les camions.

La méthode la plus connue pour résoudre un tel problème est celle de Clarke et Wright. C'est une méthode heuristique facile à appliquer et elle basée sur le principe suivant :

Supposons que deux camions quittent l'entrepôt O l'un pour livrer un client situé au point A et l'autre pour livrer un client situé au point B. La distance parcourue par les deux camions est donc égale à :

$$2d_{OA} + 2d_{OB} \quad \text{(Voir figure V-1)}$$

# CONCLUSIONS - DISCUSSIONS

- Dans la précédente étude on avait à appliquer le problème du postier chinois au quartier de "Grand-Thiès."

Pour cela on a abordé le problème sous différents angles

1°) On a étudié l'algorithme de Kwan qu'on a appliqué au réseau de l'Ex-base Aérienne.

2°) Pour les besoins de la cause, une méthode heuristique a été élaborée, puis appliquée au même réseau. Les résultats obtenus dans les deux cas ont coincidé ce qui nous prouve que les résultats obtenus par cette méthode sont satisfaisants.

- Généralement dans l'optimisation des réseaux (distribution physique), on estime à 15% le taux d'économie qu'on peut réaliser, mais malheureusement dans notre cas ce taux est de 3% ce qui est faible.

Cette différence est due à plusieurs raisons dont la principale est la petitesse du réseau; mais une étude du réseau complet de la ville de Thiès donnerait probablement un résultat meilleur.

- Il faut souligner que cette étude n'aurait sa véritable portée pratique que si on avait tenu compte de l'état des routes; car on a supposé que les rues étaient dans le même état; ce qui n'est pas le cas: certaines sont dans un état défectueux ou non bitumées, alors

que d'autres sont bitumées.
Et pour tenir compte de tout ceci, on devrait multiplier les longueurs des rues non bitumées par un facteur de correction (de l'ordre de 1,5 selon le cas). La cause de tout ceci est qu'on n'a pas pu obtenir à temps auprès des autorités l'identification des rues bitumées et des rues non bitumées.
– Signalons que le problème du postier s'applique aux graphes orientés et aux graphes non orientés, mais ne s'applique pas aux graphes mixtes. Cependant Edmonds et Johnson ont mis à jour un algorithme permettant d'appliquer le problème du postier chinois aux graphes mixtes ayant une certaine particularité.
– Enfin il est important de voir que la collecte des ordures est une équation à plusieurs variables qui est très difficile d'être cernée correctement ce qui fait que la création d'un centre de recherches spécialisé dans ce domaine est de première importance bien que cela nécessite de gros investissements.
Et pour saisir l'importance de cette recherche, il suffit de considérer que dans les pays hautement industrialisés, les municipalités consacrent jusqu'à 20% de leur budget à l'enlèvement et à l'élimination des ordures.
Dans cette optique, la municipalité de Thiès devait faire des

affots pour qu'il y'ait une collaboration antre l'E.P.T et alle.
dans le cadra dala définition das projets da fin d'étude.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] Procédures pour élaborer des tournées de livraison dans le domaine de l'alimentation par: Jeanclaude Picard. responsable de la section Recherche Opérationnelle dépt de Génie Industriel (E.P.M)

[2] Rapport final : subvention RD 804 par : Jean Claude Picard dépt Génie Industriel (E.P.M) avril 1976

[3] Chercheurs vol II N° 2 janvier 1976

[4] Analysis models for solid waste. James. F. Hudson, Donald S. Gross. Man, David H. Marks. M.I.T Department of civil engeneering september 73

[5] Demand for municipal services: Measuring the effet of service quality. James F. Hudson, M.I.T Dept of civil Eng June 1975

[6] Vehicle routing problems: Formulations and Heuristic

solution technique.
Bruce. L Golden. technical report N: 113
Operations Research Center, M.I.T august 1975.

[7] Finding an Optimal Edge Covering tour for a connected graph (The chinese postman's problem)
Fred Glover operations Research Center,
University of california Berkeley.

[8] Vehicle Scheduling algorithm.
J. W. Wrigth, Manchester of university, Institute of science and technology, England

[9] Efficient routing systems for retail milk delivery.
M.C. Hallberg and G.T Gentry
June 1970

[10] Routing a fleet of m vehicle to/from a central facility.
C.S. Orloff, Princeton University, Princeton New Jersey

[11] Mathematical Models of solid waste collection and disposal

John C. Liebman, Associate professor
Maryland 21218

[12] Techniques et applications de la Recherche Operationnelle. Alain Martel Gaëtan Morin éditeur

[13] Graph theory, an algorithmic approach
Nicos Christofides.

[14] Combinatorial Optimisation, Networks and Matroids
Eugene L. Lawler University of california at Berkeley

[15] Graphes et Hypergraphes
C. Berge.

[*] Certaines données ($q_0$, C) ont été prises des notes de Cours de Génie Municipal "les Gadoues vetes" et les autres ne sont que des valeurs moyennes.