



école polytechnique de thiès

GM.0562

## PROJET DE FIN D'ETUDES

TITRE : APPLICATION DE L'ÉQUATION DE  
von-KÁRMÁN À LA DÉTERMINATION  
DU FROTTEMENT PARIÉTAL.

Auteur SACOURA BADIANE

Génie MÉCANIQUE

Date JUIN 78

ECOLE POLYTECHNIQUE THIES

Département Genie Mécanique

Projet de fin d'études  
présenté par

SACOURA BADIANE

pour l'obtention du grade d'Ingénieur

Sujet : APPLICATION DE L'EQUATION DE  
VON KARMAN  
A LA DETERMINATION DU FROTTEMENT  
PARIETAL

Jury : V. NGUYEN DUY (Directeur de projet)  
DINH VO NGOC  
CHRISLAIN MORIN

# REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de projet, Monsieur VINH NGUYEN-DUY qui m'a constamment guidé tout au long de ce travail

Ma reconnaissance va aussi à Monsieur DINH VO-NGOC pour l'intérêt particulier qu'il a montré pour ce sujet et pour son apport à l'établissement du programme de l'approximation polynomiale.

Les discussions stimulantes sur la résolution mathématique du problème avec Monsieur CHRISLAIN MORIN sont aussi très appréciées

Je remercie par ailleurs le Commandant Sidy Bouya NDiaye qui a bien voulu mettre à ma disposition ses notes de cours de l'I.P.G.

Enfin je ne saurais terminer sans souligner la précieuse participation de Mademoiselle Assiétou Gaye à la présentation finale de ce projet

JOHN 78

# TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	-----	i
Table des notations	-----	ii
INTRODUCTION	-----	1
CHAPITRE I: CONSIDERATIONS THEORIQUES DU PROBLEME		
I-1	Notion de couche limite	5
I-2	Révision de quelques grandeurs utiles	6
I-3	Equation de VON KÁRMÁN	9
CHAPITRE II : REVISION DES TECHNIQUES DE MESURE DU FROTTEMENT PARIÉTAL		
II-1	Introduction	14
II-2	Méthode des traces de teinture	15
II-3	Mesures directes	15
II-4	Application de la loi de la paroi	
II-4-1	historique	17
II-4-2	Mesures de vitesse	19
II-4-3	Dispositifs immergés	
	1/ languette pariétale	22
	2/ le tube de stanton	22
	3/ le tube de Preston	23
	4/ Prise de pression statique	25
II-4-4	Méthode par analogie	
	1/ transfert de chaleur	26

2/ transfert de masse	28
3/ cristaux liquides	29
II-4-5 Méthode de DICKINSON	30

## CHAPITRE III : DETERMINATION ANALYTIQUE DU

### FROTTEMENT PARIETAL

méthode et résultats	32
CONCLUSION	36
Bibliographie	38
Tables	41
figures	48
Annexes 1. approximation polynomiale	61
2. methode de SIMPSON	62

## SOMMAIRE

Dans le but de calculer le développement du frottement pariétal dans une couche limite turbulente soumise à un gradient de pression défavorable, nous avons fait recours à l'équation de VON KÁRHÁN dans sa forme complète.

Il nous a été nécessaire de refaire la considération théorique du problème et aussi une revue des techniques de mesure de  $Z_0$ . Par ailleurs une confrontation des résultats calculés de  $C_f$  et ceux obtenus par la méthode de Dickinson et du tube de Preston est aussi établie.

# TABLE DES NOTATIONS

$A(n)$	:	fonction universelle de DICKINSON
$C_f$	:	coefficient de frottement = $\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_e^2}$
$H$	:	facteur de forme = $\frac{\delta^*}{\theta}$
$p$	:	pression statique locale
$q$	:	pression dynamique locale.
$u, v, w$	:	composantes de vitesse instantanée
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	:	composantes de vitesse moyenne
$u', v', w'$	:	composantes turbulente de vitesse.
$U_e$	:	vitesse à l'extérieur de la couche limite
$U_z$	:	vitesse de frottement = $\sqrt{\tau_0/\rho}$
$x, y, z$	:	coordonnées longitudinale et transversale
$\delta$	:	épaisseur de la couche limite.
$\delta^+$	:	épaisseur de déplacement = $\int_0^{\infty} (1 - \frac{u}{U_e}) dy$
$\theta$	:	épaisseur de quantité de mouvement
$\mu$	:	viscosité dynamique
$\nu$	:	viscosité cinématique
$\rho$	:	masse volumique.
$y_{+lim}$	:	limite extérieure de la loi de la paroi
$\tau_0$	:	frottement pariétal
$\tau$	:	contrainte tangentielle
$-\rho \overline{u'v'}$	:	contrainte tangentielle turbulente
$\Delta = \frac{\nu}{\xi U_e^3} \cdot \frac{dp}{dx}$	:	coefficient de pression

# INTRODUCTION GENERALE

Le présent projet a pour but de calculer analytiquement le frottement pariétal par l'application de l'équation de VON KÁRHÁN aux mesures\* recueillies par VINH N'GUYEN DUY [1] dans une couche limite turbulente avec gradients de pression adverses modérés ( $\Delta_{max} = 0,01$ ) Il permet aussi une meilleure connaissance des problèmes complexes associés à la détermination du frottement par une revue des techniques existantes.

Dans la plupart des applications de la mécanique des fluides, la connaissance de la force de frottement de l'écoulement à la surface solide est essentielle pour l'évaluation précise de la performance d'un système, qu'il s'agisse d'un bateau, d'un avion ou d'une conduite. C'est ainsi que le frottement pariétal demeure un des paramètres les plus importants dans une large étendue de problèmes d'écoulement de fluide comme l'illustrent les diverses études entreprises pour différentes combinaisons de surfaces, de fluides et de conditions.

Les écoulements considérés peuvent être par exemple :

- \* la couche limite qui se développe sur un avion, un missile, un bateau, un sous-marin ou un train
- \* la couche limite atmosphérique au niveau des terres



et des eaux.

\* l'écoulement interne dans les machines, les paliers, les conduites, les pipelines, au niveau des pâles d'un ventilateur, d'une turbine, etc...

Les fluides sont l'air, l'eau, le pétrole, l'huile, des fluides visqueux et élastiques, des gaz hétérogènes.

Enfin les conditions d'études sont variées :

écoulement permanent ou instationnaire, bi ou tridimensionnel, compressible ou incompressible, sur surface lisse ou rugueuse, avec et sans transfert de masse ou de chaleur, etc...

Comme nous allons le voir au deuxième chapitre, la plupart des méthodes expérimentales de détermination du frottement pariétal dépendent de l'universalité de la loi de la paroi qui s'écrit :

$$u_+ = \frac{u}{u_\tau} = f\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) = f(y_+) \quad (1)$$

et pour la région turbulente, on la représente par la loi semi-logarithmique suivante :

$$u_+ = C \log y_+ + D \quad (2)$$

où  $C$  et  $D$  sont supposés constants

Cependant il existe une controverse sur l'universalité de cette loi, mettant ainsi en doute l'application des techniques indirectes, en ce sens que les valeurs de  $C$  et  $D$  établies par plusieurs chercheurs étaient

dispersées.

Pour éviter un tel doute, il s'avère donc judicieux de calculer analytiquement le frottement pariétal par l'équation de quantité de mouvement de VON KÁRMÁN qui, comme nous le montrerons au premier chapitre, peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d\theta}{dx} + (H+2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{z_0}{\rho U_e^2} + \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{\bar{u}^2 - \bar{v}^2}{U_e^2} dy \quad (3)$$

L'application de cette forme de l'équation suppose une bidimensionalité de l'écoulement, ce qui devient impossible dans le cas de gradients de pression défavorables sévères, ou dans une région de décollement où la méthode devient impraticable. Dans notre cas, la bidimensionalité est parfaitement vérifiée par les vitesses moyennes (fig 11b) et aussi par les variations de l'épaisseur de quantité de mouvement d'après le critère de NEWMAN (fig 11a)

Par ailleurs ce travail devient intéressant dans la mesure où les applications de l'équation dans sa forme complète (c'est à dire sans omettre les termes de turbulence) sont rares car les mesures de turbulence ne sont pas nombreuses.

Dans le premier chapitre nous posons les considérations théoriques nécessaires à l'introduction du frottement pariétal

Le deuxième chapitre est une brève revue des techniques de mesures de  $\tau_0$ . Il permet ainsi une meilleure connaissance du phénomène et des problèmes complexes qui en découlent.

Le troisième chapitre est l'essence même d'une telle étude en ce sens qu'il montre les différentes étapes de la détermination analytique du frottement pariétal.

Enfin nous confrontons les résultats trouvés à ceux obtenus par les méthodes indirectes (tube de PRESTON, méthode des profils de vitesse, ...) et directe (la balance à élément flottant) (cf [1])

# CHAPITRE PREMIER : CONSIDERATIONS THEORIQUES DU PROBLEME

## I-1 NOTION DE COUCHE LIMITE

Dans le cas d'un écoulement de fluide pour lequel la distribution de pression mesurée vérifie la théorie d'un fluide parfait (cas d'un écoulement sur une aile du type JOUKOWSKI), l'influence de la viscosité à nombre de REYNOLDS élevé est matérialisée par une très mince couche au voisinage de la surface solide. Si la condition de non glissement n'était pas satisfaite dans le cas d'un fluide réel, il n'y aurait pas eu de différence appréciable entre le champ d'écoulement du fluide réel et celui du fluide parfait. Le fait que le fluide adhère à la surface signifie toutefois que les forces visqueuses retardent l'écoulement du fluide au niveau de la mince couche à la surface. Dans cette mince couche, la vitesse d'écoulement passe de la valeur que l'adhérence exige, valeur nulle si les axes de coordonnées sont liés à l'obstacle, jusqu'à la valeur finie qui correspond au mouvement sans frottement, soit à l'écoulement d'un fluide parfait.

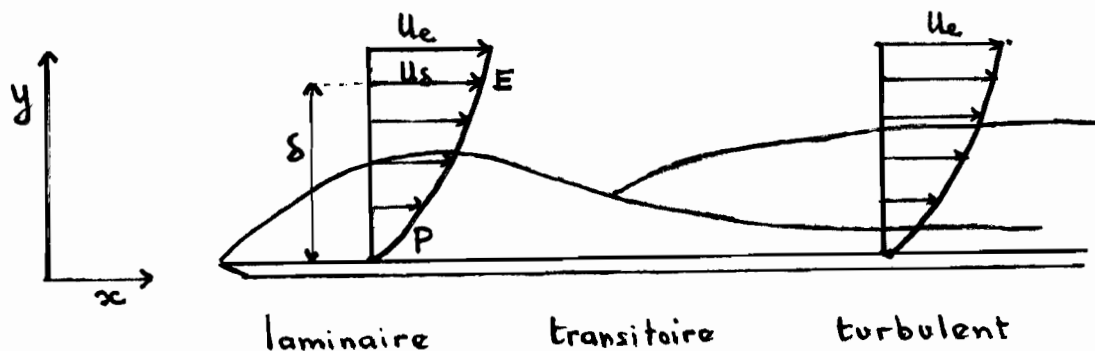
Cette couche ainsi définie est la couche limite; le concept a été introduit pour la première fois par

LUDWIG PRANDTL .

Cette notion est extrêmement importante . Fort souvent le problème mathématique de l'écoulement d'un fluide réel est très complexe . La notion de couche limite de PRANDTL permet alors de contourner la difficulté en séparant l'espace de mouvement du fluide en deux régions : le fluide libre qui obéit aux équations du fluide parfait , la couche limite où les effets de viscosité sont prépondérants

## I-2 REVISION DE QUELQUES GRANDEURS UTILES

Prenons par exemple le cas simple d'une couche limite qui se développe sur une plaque plane



### I-2-1 Epaisseur de la couche limite

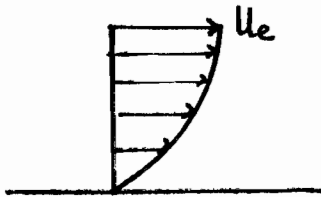
Etant donnée la variation continue de vitesse le long de la normale à la plaque , on ne saurait définir avec précision l'épaisseur de la couche limite . Pour fixer les idées , on convient souvent d'appeler l'épaisseur de la couche limite dynamique au point P,

la distance  $\delta$  à la plaque mesurée sur la normale au point P, du point E, où la composante  $u$  de la vitesse a une valeur  $u_\delta$  égale à 0,99 fois la valeur  $u_e$

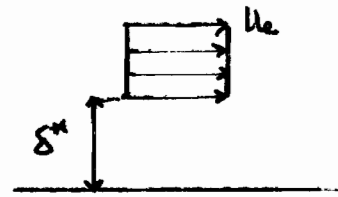
### I-2-2 Epaisseur de déplacement

L'effet de la couche est de déplacer les lignes de courant de la paroi vers l'extérieur.

Donc on peut s'imaginer une surface solide déplacée à une distance  $\delta^*$  pour obtenir le même débit massique d'un écoulement sans frottement



(a)



(b)

Considérons d'abord une couche limite d'épaisseur  $\delta$  rapportée dans le cas d'un écoulement plan, à l'unité de largeur de la paroi : cas (a)

On obtient un débit massique qui s'écrit :  $\int_0^\delta \rho u dy$

Dans le cas (b) de fluide visqueux, on peut assurer le même débit massique en épaississant la paroi vers l'extérieur, de la longueur  $\delta_1^*$ , définie par

$$(\delta - \delta_1^*) \rho u_\delta = \int_0^\delta \rho u dy \quad (4)$$

ainsi

$$\delta_1^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta}\right) dy$$

On peut très bien faire le calcul de l'intégrale précédente jusqu'à l'infini en extrapolant au-delà de l'épaisseur  $\delta$ , la loi de variation de  $(\rho u)$  en fonction de  $y$  qu'aura donnée l'expérience ou le calcul. On écrit alors :

$$\delta_1^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_s u_s}\right) dy \quad (5)$$

Dans le cas habituel où le fluide conserve dans la couche limite une masse volumique constante, l'expression devient :

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (6)$$

### I-2-3 Épaisseur de quantité de mouvement

Si d'une part on considère les débits de quantité de mouvement liés à l'existence même de la couche limite d'épaisseur  $\delta$ , on a la quantité :  $\int_0^{\infty} \rho u^2 dy$ .

D'autre part, si on considère le débit du fluide non visqueux, on obtient, en déplaçant la paroi vers l'extérieur de la longueur  $\delta_2^*$ , un débit de quantité de mouvement égal à :

$$(\delta - \delta_2^*) \rho_e u_e^2 = \int_0^{\infty} \rho u^2 dy + u_e \int_0^{\infty} (\rho_e u_e - \rho u) dy \quad (7)$$

où le dernier terme de droite correspond au débit du fluide qui, à l'amont du point considéré, a été progressivement éloigné de la région voisine de la paroi, en conservant la vitesse  $u_e$  et en traversant la droite parallèle à la plaque, définie par l'ordonnée  $\delta$

correspondant au point P

En résolvant l'équation (7)

$$\delta_2^* \int_0^\infty \rho_e u_e^2 dy = \rho_e \int_0^\infty \rho u dy - \int_0^\infty \rho u^2 dy = \int_0^\infty (\rho_e u - \rho u^2) dy$$

$$\delta_2^* = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (7a)$$

Dans le cas habituel où le fluide conserve, dans la couche limite, une masse volumique constante, l'épaisseur de quantité de mouvement s'écrit :

$$\delta_2^* = \theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (8)$$

### I-3 EQUATION DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT DE VON KÁRMÁN

Nous considérons une couche limite turbulente d'un écoulement bidimensionnel avec gradients de pression adverses modérés

A cause de la nature aléatoire de la turbulence, on a l'habitude d'écrire

$$u = \bar{u} + u' \quad \bar{u} = \text{vitesse temporelle moyenne}$$

$$v = \bar{v} + v' \quad u' = \text{composante fluctuante}$$

$$u = \text{vitesse instantanée}$$

$$\text{où } \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt$$

avec T comme temps pris suffisamment plus grand que l'échelle de temps de la turbulence.

Comme les fluctuations peuvent être positives et négatives alors :

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt \equiv 0$$



Une des grandeurs statistiques souvent employée est la valeur R.M.S. (root mean square) des fluctuations, elle est définie comme

$$\text{rms} = \sqrt{\bar{u'^2}} = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T u'^2 dt \right\}^{1/2}$$

qui représente l'intensité moyenne de toute composante de la turbulence.

Examinons tout d'abord l'équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Donc

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

En prenant la moyenne de chaque terme, on voit que :

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} = 0$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

et aussi

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Ainsi les composantes de l'écoulement moyen et les composantes de l'écoulement turbulent superposé doivent satisfaire les conditions de continuité

En prenant les équations générales de Reynolds :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (12)$$

Et en y introduisant les valeurs

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$P_x = \bar{P}_x + P_x'$$

et en prenant la moyenne, on arrive aux équations de NAVIER-STOKES qui pour une couche limite turbulente bidimensionnelle s'écrivent (cf [3])

$$\begin{cases} \int \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \int \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \int \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} & (13) \\ 0 = -\frac{\partial (\bar{P} + \int \bar{v}'^2)}{\partial y} & (14) \end{cases}$$

et l'équation de continuité

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

Tout d'abord l'équation (14) indique que théoriquement la pression statique n'est pas constante mais varie à travers la couche limite. On obtient en intégrant cette équation de la paroi jusqu'à  $\delta$  :

$$\bar{P} = \bar{P}_0 - \int \bar{v}'^2$$

où  $\bar{P}_0$  est la pression statique à la paroi

L'intégration de l'équation (13) donne

$$\int_0^\delta \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) dy = -\frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial p_0}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial x} dy - \int_0^\delta \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} dy + \frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \bar{u}'v' \right) dy \quad (16)$$

Comme

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} = U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (\text{équation de Bernoulli})$$

et que le frottement d'un écoulement turbulent s'écrit

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \bar{u}'v'$$

alors les intégrales suivantes peuvent se simplifier

$$-\frac{1}{\rho} \int_0^{\delta} \frac{\partial p_0}{\partial x} dy = \int_0^{\delta} u e \frac{d u e}{d x} dy$$

$$\frac{1}{\rho} \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (u \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \bar{u}' \bar{v}') dy = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

Par ailleurs

$$\int_0^{\delta} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy = \int_0^{\delta} \frac{\partial (\bar{u} \bar{v})}{\partial y} dy - \int_0^{\delta} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy$$

$$\text{ou } \int_0^{\delta} \frac{\partial (\bar{u} \cdot \bar{v})}{\partial y} dy = [\bar{u} \cdot \bar{v}]_0^{\delta} = u e v_{\delta}$$

L'équation de continuité permet d'écrire cependant

$$v_{\delta} = - \int_0^{\delta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy$$

mais aussi  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$

l'équation (16) devient ainsi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy - u e \int_0^{\delta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy - \frac{d u e}{d x} \int_0^{\delta} u e dy \\ = -\frac{\tau_0}{\rho} - \frac{d}{d x} \int_0^{\delta} (\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2) dy \quad (17) \end{aligned}$$

En regroupant

$$\int_0^{\delta} \left( 2\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - u e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - u e \frac{d u e}{d x} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho} - \frac{d}{d x} \int_0^{\delta} (\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2) dy \quad (18)$$

Le terme de gauche correspond à l'intégrale d'une dérivée de la forme  $\frac{d}{d x} (a^2 - ab)$

$$\text{En effet } \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2 - \bar{u} u e) = 2\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial u e}{\partial x} - u e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

On peut réécrire l'équation (18)

$$\int_0^{\delta} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2 - \bar{u} u e) + \bar{u} \frac{\partial u e}{\partial x} - u e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] dy = -\frac{\tau_0}{\rho} - \frac{d}{d x} \int_0^{\delta} (\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2) dy$$

Donc

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} [\bar{u} (\bar{u} - u e)] dy + \frac{d u e}{d x} \int_0^{\delta} (\bar{u} - u e) dy = -\frac{\tau_0}{\rho} - \frac{d}{d x} \int_0^{\delta} (\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2) dy$$

Il vient en multipliant chaque terme par -1 :

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} [\bar{u} (u e - \bar{u})] dy + \frac{d u e}{d x} \int_0^{\delta} (u e - \bar{u}) dy = \frac{\tau_0}{\rho} + \frac{d}{d x} \int_0^{\delta} (\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2) dy \quad (19)$$

Considérons maintenant les équations (6) et (8) d'où il ressort que :

$$\delta^* U_e = \int_0^{\delta} (U_e - \bar{u}) dy \quad \text{et} \quad \theta U_e^2 = \int_0^{\delta} \bar{u} (U_e - \bar{u}) dy$$

alors l'équation (19) s'écrit :

$$\frac{d}{dx} (\theta U_e^2) + \delta^* U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho} + \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) dy$$

En développant cette équation et en posant  $H = \delta^*/\theta$

$$U_e^2 \frac{d\theta}{dx} + 2\theta U_e \frac{dU_e}{dx} + \theta H U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho} + \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) dy$$

Divisons les 2 membres par  $U_e^2$  :

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{2\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} + \frac{\theta H}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U_e^2} + \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left( \frac{\bar{u}^2 - \bar{v}^2}{U_e^2} \right) dy$$

En introduisant  $C_f = \tau_0 / \frac{1}{2} \rho U_e^2$ , on obtient l'équation de VON KÁRMÁN dans sa forme complète :

$$\frac{d\theta}{dx} + (H+2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{C_f}{2} + \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left( \frac{\bar{u}^2 - \bar{v}^2}{U_e^2} \right) dy \quad (3)$$

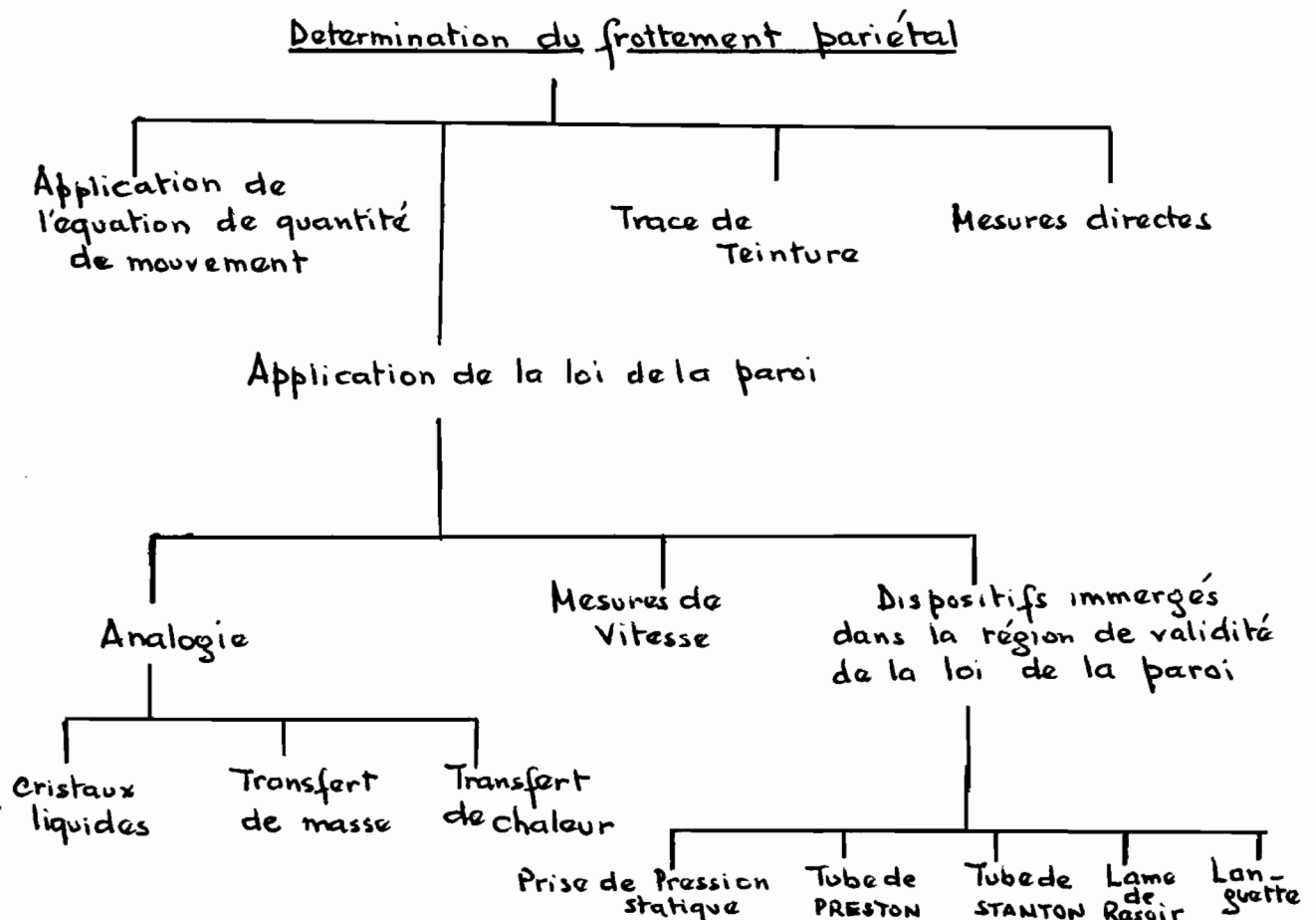
Avec les profils de vitesse moyenne et les profils de composantes fluctuantes qui ont été mesurés (cf [1]) l'application de cette équation nous servira à déterminer  $\tau_0$  au troisième chapitre.

# CHAPITRE II : REVISION DES TECHNIQUES DE MESURE DU FROTTEMENT PARIETAL

## II-1 INTRODUCTION

Depuis PRANDTL, les méthodes de détermination du frottement pariétal ont été l'objet de nombreuses recherches analytiques et expérimentales, tant du point de vue de la connaissance fondamentale que du point de vue de ses applications. De ce fait des efforts considérables ont été déployés pour sa mesure.

C'est ainsi que BROWN et JOUBERT proposent une classification qui permet de couvrir la diversité des situations rencontrées en pratique.



IL ressort donc clairement que la plupart des méthodes existantes dépendent de la loi "universelle" de la paroi

## II-2 METHODE DES TRACES DE TEINTURE

Il s'agit de visualiser les lignes de courant de l'écoulement en y introduisant des gouttelettes d'huile contenant de la teinture. On obtient ainsi une image exacte de l'écoulement de par le déplacement des minuscules gouttes d'huile qui peuvent de ce fait imprimer à la surface solide des traces de teinture. MEYER montre que si l'on procède aux étalonnages, le déplacement des gouttelettes d'une part, la longueur des traces de teinture imprimées d'autre part, peuvent être utilisés pour déterminer  $\tau_0$ .

Cette méthode donne des résultats pauvres au point de vue quantitatif. Toutefois elle est utile quant à l'indication des directions pariétales du frottement dans les écoulements aussi compliqués que ceux intervenant par exemple autour d'une ellipsoïde.

## I-3 MESURES DIRECTES

Si l'on met de côté les expériences de SCHULTZ et de GRUNOW en 1940, on peut dire que l'intérêt pour les mesures directes du frottement pariétal manqua jusqu'à ce qu'il devint indispensable de procéder à des mesures précises dans les écoulements compressibles à cause de la

vitesse sans cesse croissante des avions

Comme résultat, il y a eu de très nombreuses balances de frottement mises au point. Seulement, la difficulté réside à obtenir des mesures précises des forces de cisaillement qui sont très petites, trois fois moindres que les forces d'inertie

Le principe d'une balance de frottement est de pouvoir "peser" directement la traînée pariétale qui agit sur une partie de la surface isolée de la paroi principale. La partie isolée, que l'on appelle élément flottant, peut se déplacer librement sans frottement sous l'action de très petites forces. Le choix de base à faire est la taille de l'élément flottant qui détermine la sensibilité requise de la balance qui pourra être à déplacement positif ou à déplacement asservi. Pour illustrer la sensibilité requise voici la grandeur des forces à mesurer à la balance en fonction du nombre de MACH  $M$  :

Les conditions de mesure sont les suivantes :

Diamètre de la balance = 10 mm.

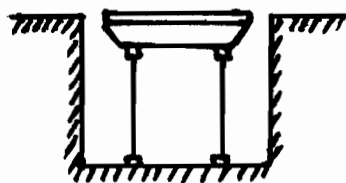
Pression d'arrêt = 1 atmosphère

$Re$  = 10.000.000

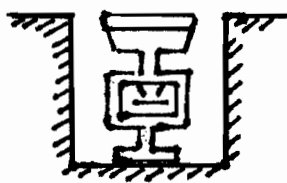
±  
Écoulement à gradient de pression nul

M	0,1	0,5	1	2	3
F(mg)	16	290	680	540	210

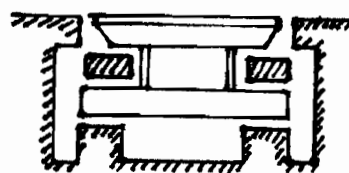
Les balances de frottement peuvent être groupées en trois types, dépendant de la forme du support de l'élément flottant comme l'illustrent les schémas suivants :



support à lames ou tiges flexibles



support à pivot



support à palier à air.

Enfin l'utilisation des balances posent de nombreux problèmes qui sont sources d'erreur [2] et [4] :

- écoulement à travers la fente
- influence de la variation de la pression autour de la tête flottante.
- effet de la pression du caisson
- variation transversale et longitudinale du frottement pariétal
- mauvais alignement de l'élément flottant
- influence de la géométrie de l'élément flottant...

## II-4 APPLICATION DE LA LOI DE LA PAROI

### II-4-1 Historique

L'histoire de la loi de la paroi peut être divisée en



quatre étapes distinctes (cf [5])

### Période 1 : la naissance

Ce sont d'abord PRANDTL et VON KÁRMÁN qui ont établi la loi en s'appuyant sur la théorie de la longueur de mélange et en supposant que la contrainte de cisaillement est constante le long de la région de validité de la loi. En 1938, MILLIKAN dérive la loi logarithmique sur la base d'analyse dimensionnelle et de suppositions de la concordance des régions de validité de la loi de la paroi et de la loi "déficitaire de vitesse"

### Période 2 : Concept de l'universalité

Cette période est marquée par la publication de LUDWIG et TILLMAN de données expérimentales concernant les écoulements sur plaques planes, dans les conduits et les tuyaux pour une large gamme de variations du gradient de pression externe et du niveau de turbulence, données qui satisfont toutes une loi logarithmique universelle. Il s'en est suivi 3 méthodes de déterminer le frottement pariétal d'un écoulement turbulent : la tabulation universelle de COLES, le tube de PRESTON et les courbes universelles de CLAUSER.

### Période 3 : controverse sur l'universalité

L'apparition des données contradictoires de la direction du N.P.L\* en 1958, ajoutée aux travaux de SMITH et WALKER qui niaient l'universalité de l'étalonnage du tube de PRESTON, est le début d'une longue controverse. De LANDWEBER en 1960 à V.C. PATEL en 1965, les chercheurs proposent plusieurs solutions en décelant les diverses causes d'erreurs

Période 4 : L'extension de la loi à des conditions sévères

C'est seulement durant ces dernières années que l'expérience a prouvé qu'un écoulement turbulent est beaucoup plus complexe que prévu.

On peut citer à titre d'exemple les travaux de POPOVITCH en 1968, qui montrent que le profil linéaire de la sous-couche visqueuse varie avec le temps à partir de photos prises tout près de la paroi

#### II - 4 - 2 Mesures de vitesse

On a accepté pendant longtemps que le profil de vitesse d'une couche limite turbulente, à moins que les gradients de pression ne soient modérés, a des sous couches pour lesquelles la vitesse a la grandeur limite de la vitesse de frottement  $u_\tau$

CLAUSER est le premier à montrer que l'universalité résultante de la partie inférieure du profil

\* : National Physical Laboratory (England)

limitée par  $u_z$ , permet la détermination du coefficient du frottement pariétal par la simple mesure du profil de vitesse

Cette partie inférieure peut être divisée en 3 régions :

- la sous couche laminaire, adjacente à la paroi
- la zone de transition
- la région turbulente ou logarithmique.

Avec l'hypothèse d'un frottement moyen constant, on peut écrire pour la sous-couche laminaire que

$$\frac{u}{u_z} = \frac{y u_z}{\nu} \quad \text{c.a.d.} \quad u_+ = y_+ \quad (1)$$

Etant donné que  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , il suffit de faire au moins une mesure de vitesse pour déterminer  $\tau_0$ .

Suffisamment loin de la paroi ( $y_+ > y_{+, \text{lim}}$ ), on utilise la loi logarithmique appelé aussi "loi de la paroi".

Le profil de vitesse est le suivant :

$$\frac{u}{u_z} = C \log \frac{y u_z}{\nu} + D \quad (2)$$

Si cette équation représente une loi véritablement universelle avec C et D connues, alors on peut calculer  $u_z$ , puis  $\tau_0$  à partir de mesures de vitesse précises

À partir de l'équation (2) on a :

$$\frac{u}{u_e} \frac{u_e}{u_z} = C \log \frac{y u_e}{\nu} + C \log \frac{u_e}{u_z} + D.$$

c'est à dire qu'on peut écrire une série d'expressions donnant  $\frac{u}{u_e}$  en fonction de  $\frac{y u_e}{\nu}$

En posant  $\frac{u_e}{u_z} = \left(\frac{C}{2}\right)^{1/2}$  comme paramètre, on obtient

$$\frac{u}{u_e} = \left(\frac{C_f}{2}\right)^{1/2} \left\{ C \log \frac{y u_e}{\nu} + C' \log \left(\frac{C_f}{2}\right)^{1/2} + D \right\} \quad (20)$$

C'est l'équation de CLAUSER qui propose :

$$C = 5,6 \quad \text{et} \quad D = 4,9$$

Ainsi en traçant le profil de vitesse  $\frac{u}{u_e}$  vs  $y \frac{u_e}{\nu}$  sous la forme d'un abaque, on peut interpoler facilement  $C_f$ .

Il existe d'autres valeurs des constantes C et D notamment celles adoptées à la "Conférence de STANFORD" sur les couches limites turbulentes (5,62 et 5,0) et aussi celles trouvées par LUDWIG et TILLMAN (5,0 et 6,5), par WINTER et GAUDET (6,05 et 4,05), et récemment par OZARAPOLU (cf [4]) et N'GOYEN-DUY (cf [2]) (5,5 et 5,5)

#### II - 4 - 3 Dispositifs immergés dans la région de validité de la loi de la paroi

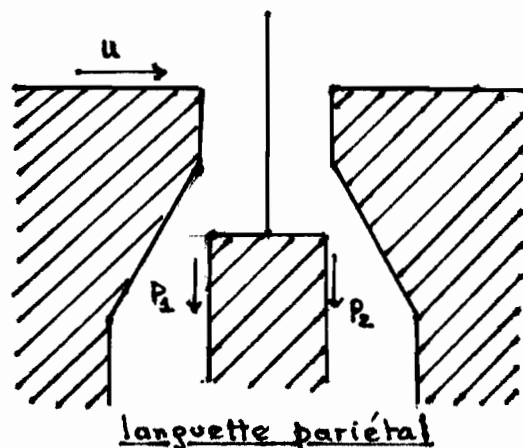
En fait il s'agit d'utiliser des dispositifs de dimensions suffisamment petites pour être totalement immergés dans la région de validité de la loi de la paroi. La différence de pression mesurée autour de cet obstacle peut être utilisée pour dériver le frottement pariétal dans une couche limite turbulente, eu égard de l'universalité de la loi de la paroi. L'utilisation des instruments de mesure exige évidemment un étalonnage avec un frottement pariétal connu

On peut citer en exemples :

### II-4-3-1/ la languette pariétale

Le dispositif est suggéré en premier par KONSTANTINOV avant d'être utilisé par HEAD, RECHENBERG, VAGT et FERNHOLZ

Tout en étant capable de donner une différence de pression relativement grande, il a l'avantage de rester dans la sous couche laminaire à cause de sa petite taille, donc

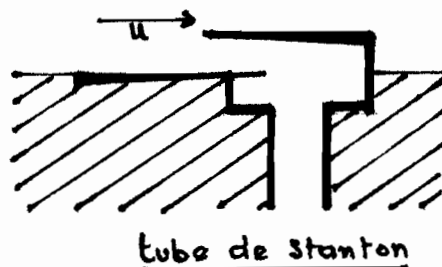


d'être utilisé avec précision dans les écoulements à forts gradients de pression. Enfin sa petite taille rend difficile la délimitation de sa géométrie si bien qu'il devient nécessaire d'étalonner chaque languette particulière à partir d'un tube de PRES-TON donnant des standards de la force de cisaillement.

### II-4-3-2/ le tube de STANTON

Il a été utilisé pour la première fois en 1920 par STANTON, MARSHALL et BRYANT

C'est HOOL qui a montré en 1955 que le dispositif pouvait être faite en attachant un



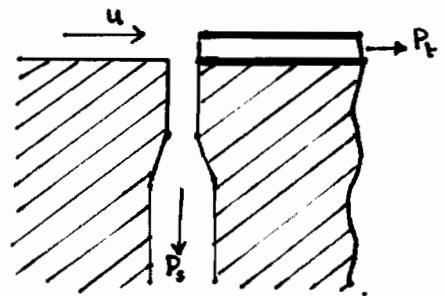
morceau de lame de rasoir au dessus d'un trou de

pression statique. Toutefois à cause de sa petite taille, à cause des fluctuations de l'écoulement, les lectures sont faibles, souvent imprécises et font recours au micromanomètre. Notons enfin que le dispositif est moins précis que la languette.

#### II-4-3-3 le tube de PRESTON

Un moyen d'utiliser une application du profil de vitesse mesuré à la loi de la paroi est de procéder au relevé d'une seule vitesse

à une distance donnée de la paroi. Cette mesure peut être faite à l'aide d'un tube pitot de section circulaire et de



diamètre extérieur  $d'$  reposant sur la surface :

c'est le tube de PRESTON, du nom de son inventeur en 1954.

Ce dernier a écrit après simple analyse dimensionnelle

$$\text{le que } \frac{\Delta p d'^2}{\rho \nu^2} = F \left( \frac{\tau_0 d'^2}{\rho \nu^2} \right) \quad (21)$$

où

$\Delta p$  est la différence entre la pression du pitot et la pression statique de la paroi

En dépit de la relation étroite entre l'équation précédente et la loi de la paroi, on ne doit pas s'attendre à ce que l'une puisse être obtenue par simple

dérivation de l'autre. Aussi bien la lecture de pression du tube que celle de la pression statique de référence sont soumises à des erreurs comme l'a montré SHAW. Ce dernier suggère que l'étalonnage se fasse d'une façon purement empirique sans recourir aux valeurs indiquées par l'échelle de la loi de la paroi.

Pendant la période suivant PRESTON, BRADSHAW, SMITH et WALKER ont fait naître un doute sur l'universalité de son travail en étudiant ses étalonnages. C'est ainsi que BRADSHAW et GREGORY du N. P. L ont obtenu une courbe d'étalonnage conduisant à des valeurs de  $\tau_0$  de 11% plus grandes que celles trouvées par PRESTON.

En comparant les résultats du tube et de la languette, HEAD et RECHENBERG ont résumé ce conflit en montrant l'universalité dans les 2 cas.

Utilisant essentiellement le même appareil, V. C. PATEL a effectué l'étalonnage définitif du tube, a trouvé les limites des gradients de pression, tout en couvrant une grande variété de conditions d'écoulement et de tailles du tube. Son étalonnage est régi par les équations suivantes :

$$x^* = \log \frac{\Delta p d'^2}{4 \rho v^2} \quad y^* = \log \frac{\tau_0 d'^2}{4 \rho v^2} \quad (22)$$

avec  $y^* = \frac{1}{2} x^* + 0,037$   $y^* < 1,5$

$$y^* = 0,8287 - 0,1381 x^* + 0,1437 x^{*2} - 0,0060 x^{*3} \quad 1,5 < y^* < 3,5$$

$$x^* = y^* + 2 \log(1,95 y^* + 4,10) \quad 3,5 < y^* < 5,3$$

La proposition sur la limitation du gradient de pression aussi bien adverse que favorable est basée sur les valeurs du paramètre  $\Delta = \frac{\nu}{\rho u_z^2} \frac{dp}{dx}$ ,

ainsi pour des gradients adverses :

$$\text{erreur max } 3\% \quad 0 < \Delta < 0,01 \quad \frac{u_z d'}{\nu} \leq 200 \quad (\text{A})$$

$$\text{erreur max } 6\% \quad 0 < \Delta < 0,015 \quad \frac{u_z d'}{\nu} \leq 250 \quad (\text{B})$$

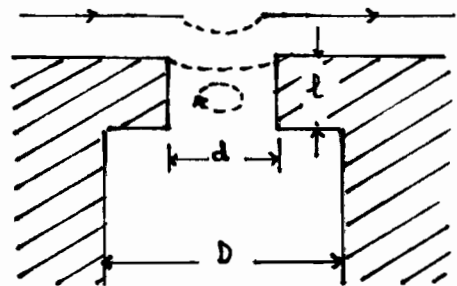
Pour des gradients de pression favorables :

$$\text{erreur max } 3\% \quad 0 > \Delta > -0,005 \quad \frac{u_z d'}{\nu} \leq 200 \frac{d\Delta p}{dx} < 0 \quad (\text{C})$$

$$\text{erreur max } 6\% \quad 0 > \Delta > -0,007 \quad \frac{u_z d'}{\nu} \leq 200 \frac{d\Delta p}{dx} < 0 \quad (\text{D})$$

#### II-4-3-4 / Prise de pression statique

Une autre possibilité de mesurer le frottement pariétal demeure l'utilisation d'une paire de trous de pression statique.



SHAW a montré l'erreur résultant de la mesure de cette pression à cause du cisaillement agissant à la paroi du trou.

Si l'on considère un trou de diamètre  $d$ , de profondeur  $l$ , une connection au manomètre de diamètre  $D$ , et une épaisseur de la couche limite  $\delta$ , l'erreur sur



la pression statique peut s'écrire :

$$\Delta p_s = H(z_0, \rho, \mu, d, l, D, \delta)$$

$$\text{ou } \frac{\Delta p_s}{z_0} = H\left(\frac{d}{\nu} \sqrt{\frac{z_0}{\rho}}, \frac{l}{d}, \frac{D}{d}, \frac{\delta}{d}\right) \quad (23)$$

Pour des conditions telles que :

$$\frac{\delta}{d} > 5, \quad \frac{l}{d} > 1,5 \quad \text{et} \quad \frac{D}{d} = \text{cte},$$

l'expérience montre que l'équation (23) se réduit à

$$\frac{\Delta p_s}{z_0} = H\left[\frac{d}{\nu} \sqrt{\frac{z_0}{\rho}}\right] \quad (24)$$

Donc la mesure de  $\Delta p_s$  permet de déterminer  $z_0$  en autant que  $H$  est supposée comme étant une fonction universelle.

#### II-4-4. Méthodes par analogie

##### II-4-4-1 / transfert de chaleur

C'est depuis 1931 que FAGE et FALKNER ont montré la relation existante entre le coefficient de frottement local et le transfert de chaleur résultant de bandes de platine collées sur une surface. Le premier instrument pratique utilisant cette analogie a été mise au point par LUDWIG en 1949. A partir d'essais sur un élément de surface chauffé, il a déduit l'équation suivante :

$$\frac{q l}{k \Delta T} = 0,807 \left( \frac{l^2 \rho Pr z_0}{\mu^2} \right)^{1/3} \quad (25)$$

à la condition que

$$\frac{1,86}{C} \left( \frac{C_f}{2} \right)^{1/6} \left( \frac{Re l}{Pr} \right)^{1/3} = \frac{\delta q}{\delta L} < 1$$

où  $q$  = flux de chaleur par unité de surface

$l$  = longueur de l'élément de surface

$\Delta T$  = différence de température entre l'élément chauffé et l'écoulement

$Pr$  = nombre de Prandtl =  $\frac{\mu C_p}{k}$

$C = \frac{u_e \delta_L}{\nu}$  = épaisseur adimensionnelle de la sous couche laminaire.

$\delta_q$  = épaisseur de la couche thermique.

$\delta_L$  = épaisseur de la sous couche laminaire.

$k$  = conductivité thermique de l'air

À partir de l'équation (25) on peut établir que

$$q = q [l, k, \rho, Pr, \tau_0, \mu]$$

$$\text{d'où } q = q [l, k, \rho, C_p, \tau_0, \mu]$$

donc

$$\frac{q}{lk\Delta T} = \frac{q}{lk\Delta T} [C_p, \mu, \tau_0, \rho]$$

$$\frac{q}{lk\Delta T} = \frac{q}{lk\Delta T} \left[ \frac{C_p \mu}{k}, \frac{l u_e}{\nu} \right]$$

on obtient :

$$Nu = Nu [Pr, Re] \quad (26)$$

$$\text{où } Nu = \frac{q}{lk\Delta T} = \text{nb de Nusselt}, Re = \frac{l u_e}{\nu} = \text{nb de Reynolds}$$

mais pour un fluide donné  $Pr = \text{cte}$

alors

$$Nu = Nu(Re) \quad (27)$$

Donc si on procède à l'étalonnage de l'élément

de surface de longueur  $l$ , on peut trouver  $z_0$  en réalisant uniquement des mesures de  $q$  et de  $\Delta T$ .

On déterminera la température de l'élément chauffé à partir de sa résistance et le flux spécifique de chaleur  $q$  à partir de la dissipation électrique dans l'élément.

#### II-4-4-2/ transfert de masse

L'utilisation qualitative d'une surface couverte qui va sublimer est une technique courante pour déterminer la transition entre l'écoulement laminaire et turbulent. Elle est basée sur le taux croissant de sublimation engendré par le frottement croissant dans la région de turbulence.

SWEN et ORMEROD ont fait des recherches quantitatives de la technique de sublimation et ont abouti à une relation semblable à celle de la méthode précédente

$$\frac{m l}{\rho_j \Delta \psi} = 0,54 \left( \frac{\rho^2 z_0}{\mu} \right)^{1/3} \quad (28)$$

$m$  = taux de transfert de masse par unité de surface

$j$  = coefficient de diffusion moléculaire.

$\Delta \psi$  = différence de concentration de la surface et du courant d'air

Généralement on prend la concentration à la sur-

face comme correspondant à la pression de vapeur saturée. L'équation (28) reste valable pour une diffusion dans une sous-couche laminaire.

KONSTANTINOV a dérivé l'équation (28) pour aboutir à une équation identique à l'équation (25) en remplaçant  $k$  par  $K = \frac{k}{\rho C_p}$

où  $K$  est le coefficient de diffusion thermique.

$$\text{Ainsi } \frac{q_l}{\rho C_p K \Delta T} = 0,807 \left( \frac{\rho^2 \tau_0}{K \mu} \right)^{1/3} \quad (29)$$

Lorsque la couche de diffusion a une épaisseur de l'ordre de celle de la couche limite turbulente, on utilise alors l'expression de VON KÁRMÁN qui s'écrit

$$\frac{1}{K_m} = \left( \frac{2}{C_f} \right)^{1/2} \left\{ \left( \frac{2}{C_f} \right)^2 + J \left( \frac{j}{D} \right) \right\} \quad (30)$$

$$\text{où } K_m = \frac{m}{\rho k_e \Delta \psi}$$

et  $J$  est une fonction analytique égale à 0 pour  $\frac{j}{D} = 1$

Donc comme l'ont montré MURPHY et SMITH et plus tard WAZZAN, le transfert de masse est proportionnel au frottement  $\tau_0$

Ainsi en réalisant des mesures du changement de l'épaisseur de la surface et de  $\Delta \psi$ , on peut trouver  $\tau_0$ .

#### II - 4 - 4 - 3 / les cristaux liquides

La plus récente des techniques de "surface couverte" est celle suggérée par KLEIN et MARGOZZI qui ont

fait des recherches sur l'utilisation des cristaux liquides. Ils ont découvert que pour un mélange de cristaux liquides donné, les propriétés du mélange dépendent essentiellement de la contrainte de cisaillement imposée au mélange. C'est ainsi que lorsqu'on les illumine avec de la lumière blanche à un angle d'incidence donné, les cristaux réfléchissent fortement seulement une longueur d'onde.

de raie, dépendant des conditions de cisaillement plus que de la température et de l'angle d'incidence.

Pour un écoulement cisailé entre 2 anneaux dont l'un est fixe et l'autre tourne, on obtient un étalement changeant de sens pour  $\tau_0 > 300 \text{ N/m}^2$  (fig 13)

En pratique cette inversion dans la "variation de la couleur" pour  $\tau_0 > 300 \text{ N/m}^2$  n'est pas significative parce que les contraintes de cisaillement réelles excèdent rarement cette valeur.

De nombreuses recherches et applications sont requises dans ce domaine avant que la technique ne puisse être vulgarisée.

#### II - 4 - 5 Méthode de Dickinson

Pour Dickinson, la loi de la paroi peut prendre la forme :

$$\frac{u}{u_r} = A(n) \left[ \frac{y}{\delta} \right]^{1/n} \quad (30a)$$

$$\text{où } n = \frac{u}{y} / \frac{du}{dy} = \frac{d(\log y)}{d(\log u)}$$

et  $A(n)$  une fonction universelle (cf [6])

l'équation peut s'écrire

$$\frac{u}{u_c} = \left\{ \frac{u/u_c}{A(n) \left[ \frac{y}{s} \cdot \frac{u_c s}{\nu} \right]^{1/n}} \right\}^{n/n+1} \quad (30-b)$$

En fait on peut déterminer  $n$  soit par l'approximation du profil de vitesse par une fonction analytique, soit en traçant la courbe  $\log u$  vs  $\log y$

La méthode consiste donc à déterminer l'exposant  $n$  de la façon la plus précise possible (cf [1]) et par la suite à calculer  $u_c$  au moyen de l'équation (30-b)

# CHAPITRE III DETERMINATION ANALYTIQUE DU FROTTEMENT PARIETAL

Comme le montre le tableau de BROWN et JOUBERT au chapitre précédent, l'application de l'équation de quantité de mouvement demeure une des méthodes de trouver  $\tau_0$ . Dans ce cas la condition essentielle à satisfaire est la bidimensionalité de l'écoulement. Ce critère a été respecté et vérifié durant les essais en soufflerie (cf [1])

i) Determination du terme  $\frac{d\theta}{dz}$  :

On trace les valeurs de  $\theta$  en fonction des abscisses  $x$  des stations. On obtient une droite de pente constante (fig 1)

ii) Calcul du terme  $\frac{dU_e}{dx}$

Le graphique de  $U_e$  vs  $x$  donne une courbe dont la pente est variable (fig 2)

On utilise une approximation graphique ou mieux encore une approximation polynomiale d'ordre 3 :

$$U_e = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \quad (\text{annexe 1})$$

$$\text{donc } \frac{dU_e}{dx} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 \quad (31)$$

iii) Etablissement du terme de turbulence

Les courbes de  $\frac{\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2}{u_e^2}$  vs  $y$  ont toutes la même allure (fig 3 à 9)

Elles sont tracées à partir des tables (tab 1 à 7) où la valeur  $\frac{u}{u_e}$  est obtenue de la façon suivante :

$$\frac{u}{u_e} = P_1 + P_2 e^{(P_3 y/s)} + P_4 e^{(P_5 y/s)} \quad (32)$$

On utilise la méthode de SIMPSON (annexe 2) pour calculer la valeur de l'intégrale jusqu'à  $S$  de  $\frac{\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2}{u_e^2} dy$

On obtient une belle droite en traçant le graphique de ces valeurs en fonction de  $x$  (fig 10)

La pente est donc une constante de valeur :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2}{u_e^2} dy$$



STATIONS	2	3	4	5	6	7	8
$\theta_{cm}$	6,4016	0,4780	0,5573	0,6182	0,6982	0,7849	0,8590
$X_{cm}$	8,89	17,78	26,67	35,56	44,45	53,34	62,23
$U_e$ m/s	25,72	24,90	23,93	22,95	22,55	22,22	21,67
$10^2 \frac{\theta}{U_e}$	0,0156	0,0192	0,0233	0,0269	0,031	0,0353	0,0396
$H+2$	3,42	3,46	3,47	3,5	3,52	3,54	3,56
$10^2(H+2) \frac{\theta}{U_e}$	0,05335	0,06643	0,08085	0,09415	0,10912	0,12496	0,14098
$\frac{dU_e}{dx}$	-13,2971	-10,8592	-8,9426	-7,7333	-6,7492	-5,9002	-5,2801
$10^3(H+2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$	-0,70943	-0,72139	-0,72302	-0,72809	-0,73647	-0,73730	-0,74437
$\frac{d\theta}{dx}$	0,0086						
$\frac{d\theta}{dx} + (H+2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$	0,001506	0,001386	0,001369	0,001319	0,001235	0,001227	0,001156
$\int_0^6 \frac{U_e^2 - \bar{U}^2}{U_e^2} dy \times 10^3$	3,99662	5,2268	6,7344	7,3077	8,7949	9,9173	11,3427
$\frac{d}{dx} \int_0^6 \frac{U_e^2 - \bar{U}^2}{U_e^2} dy$	$33,2514 \times 10^{-5}$						
$10^5$ cf/2	117,3186	105,3502	103,7270	98,6566	90,2726	89,4465	82,3784
$10^3$ Cf	2,34	2,11	2,07	1,97	1,81	1,79	1,65



# CONCLUSION

Dans le tableau des résultats du coefficient de frottement pariétal, on note :

1/ l'importance relative du terme  $\frac{dU_e}{dx}$  : en effet une variation de 7% de celui-ci correspond à un changement de 46% dans la valeur de  $C_f$ . Cela justifie d'ailleurs l'emploi d'une approximation numérique soignée.

2/ la variation linéaire de  $\theta$  en fonction de  $x$  qui élimine des sources d'erreur sur le calcul de la pente.

3/ le terme de turbulence est négligeable dans le bilan, ce qui explique qu'en général l'équation est utilisée dans la littérature sans son dernier terme  $\left[ \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left( \frac{\bar{u}^2 - \bar{v}^2}{U_e^2} \right) dy \right]$ . Cependant nous remarquons qu'il demeure indispensable pour s'approcher des valeurs expérimentales de  $\tau_0$ .

4/ il existe bien une concordance entre nos résultats, ceux de la méthode exponentielle de DICKINSON utilisant les profils de vitesse moyenne, et ceux de la méthode du tube de Preston utilisant les équations d'étalonnage de V.C. PATEL.

Une telle concordance confirme l'universalité de

la loi de la paroi qui s'écrit d'après DICKINSON :

$$\frac{u}{u_\tau} = 5,5 \log \frac{y u_\tau}{\nu} + 5,5$$

# Bibliographie

- [1] V. N'GUYEN DUY "Mesures dans une couche limite turbulente avec gradients de pression adverses modérés" - Thèse de Maîtrise Université Laval - 1973
- [2] V. N'GUYEN DUY "Quelques contributions à l'étude de la détermination du frottement pariétal" Thèse de Doctorat - Laval - 1976
- [3] JAMES DAILY  
&  
DONALD HARLEMAN "fluids dynamics  
Edition ADDISON-WESLEY
- [4] OZARAGOGLU . V "Velocity and skin friction measurements in boundary layers" Thèse de Doctorat - Laval - 1973
- [5] DICKINSON . J "Turbulent skin friction techniques" Laval -
- [6] DICKINSON . J "The determination of skin friction in two-dimensional turbulent flows" Thèse de doctorat - Laval - 1965

- [9] SANTON . L "mouvements non permanents"  
notes de cours de L'I.P.G.
- [10] SILBER . R "mouvements permanents"  
notes de cours de l'I.P.G.
- [11] SCHLICHTING . H "Boundary layer theory"  
Edition Mc Graw-Hill 1960
- [12] WINTER . K. G "An outline of the techniques  
available for the measurement of  
skin friction in turbulent boundary  
layers"
- [13] BRUN "Mécanique des fluides" t.3  
MARTINOT-LAGARDE  
HATHIEU Edition Dunod Paris 1973

Tables

figures

Annexe

$y/\delta$	$y$	$\left(\frac{\sqrt{u'^2}}{u}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{v'^2}}{u}\right)^2$	$\frac{u'^2 - v'^2}{u^2}$	$\frac{\mu}{\mu_e}$	$\frac{\mu}{\mu_e^2}$	$\frac{u'^2 - v'^2}{\mu_e^2}$
0.03623	0.05999	0.02503	0.00456	0.02047	0.53574	0.28702	0.00587
0.04227	0.06999	0.02406	0.00491	0.01915	0.55447	0.30744	0.00589
0.04831	0.08	0.02335	0.00513	0.01822	0.56124	0.31499	0.00574
0.05435	0.09	0.02253	0.00523	0.01730	0.57235	0.32758	0.00567
0.06039	0.1	0.02241	0.00518	0.01728	0.58272	0.33956	0.00587
0.09058	0.15	0.02011	0.00483	0.01528	0.62809	0.39449	0.00603
0.12077	0.19999	0.01822	0.00458	0.01364	0.66727	0.44526	0.00607
0.15097	0.25001	0.01643	0.00422	0.01221	0.70228	0.49319	0.00602
0.18116	0.30000	0.01464	0.00397	0.01067	0.73371	0.53833	0.00574
0.21135	0.34999	0.01311	0.00379	0.00932	0.77258	0.59688	0.00556
0.24155	0.40001	0.01171	0.00362	0.00809	0.78739	0.61998	0.00502
0.30193	0.49999	0.00885	0.00269	0.00616	0.83080	0.69023	0.00425
0.36232	0.6	0.00658	0.00199	0.00459	0.86591	0.74980	0.00344
0.42271	0.7	0.00469	0.00142	0.00327	0.89431	0.79979	0.00261
0.48309	0.79999	0.00329	0.00106	0.00223	0.91727	0.84138	0.00188
0.60386	0.99999	0.00165	0.00056	0.00109	0.95087	0.90415	0.00098
0.72464	1.2	0.00083	0.00032	0.00051	0.97285	0.94644	0.00048
0.90580	1.5	0.00041	0.00017	0.00024	0.99242	0.98490	0.00024
1.20773	2.	0.00015	0.00011	0.00004	1.00679	1.01364	0.00004
1.50966	2.49999	0.00010	0.00004	0.00006	1.01177	1.02368	0.00006

Table 1 : POS 1 STATION 2



$y/s$	$y$	$\left(\frac{\sqrt{u'^2}}{u}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{v'^2}}{u}\right)^2$	$\frac{\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2}{u^2}$	$\frac{u}{u_e}$	$\left(\frac{u}{u_e}\right)^2$	$\frac{\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2}{u_e^2}$
0.03297	0.06001	0.02822	0.00319	0.02503	0.50448	0.2545	0.00637
0.03846	0.06999	0.02737	0.00303	0.02434	0.51578	0.26603	0.00647
0.04396	0.08001	0.02645	0.00403	0.02242	0.52444	0.27504	0.00617
0.04945	0.08999	0.02605	0.00394	0.02211	0.53529	0.28653	0.00633
0.05495	0.10001	0.02547	0.00411	0.02136	0.54415	0.29610	0.00632
0.08242	0.15001	0.02294	0.00469	0.01825	0.58453	0.34167	0.00623
0.10989	0.19999	0.02129	0.00504	0.01625	0.62104	0.38569	0.00627
0.13736	0.24999	0.0196	0.00483	0.01477	0.65451	0.42838	0.00633
0.16484	0.30001	0.01798	0.00462	0.01336	0.68526	0.46958	0.00627
0.19231	0.35001	0.01645	0.00433	0.01212	0.71348	0.50905	0.00617
0.21978	0.39999	0.01533	0.00404	0.01129	0.73939	0.5467	0.00617
0.27473	0.50001	0.01223	0.00314	0.00909	0.78502	0.61626	0.0056
0.32967	0.59999	0.00992	0.00243	0.00749	0.82348	0.67812	0.00508
0.38462	0.70001	0.00748	0.00199	0.00548	0.85591	0.73258	0.00401
0.43956	0.79999	0.00552	0.00162	0.0039	0.88324	0.78011	0.00304
0.54945	0.99999	0.00324	0.00079	0.00245	0.92571	0.85694	0.0021
0.65934	1.19999	0.00168	0.00043	0.00126	0.95589	0.91372	0.00115
0.82418	1.50001	0.00058	0.00021	0.00037	0.98561	0.97143	0.00036
1.09890	1.99999	0.00024	0.0001	0.00014	1.01111	1.02234	0.00014
1.37363	2.50001	0.00009	0.00009	0.	1.02195	1.04438	0.

Table 2 : POS 1

STATION 3

$y/g$	$y$	$\left(\frac{\sqrt{u'z}}{u}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{v'z}}{u}\right)^2$	$\frac{\bar{u}'z - \bar{v}'z}{u^2}$	$\frac{u}{u_e}$	$\left(\frac{u}{u_e}\right)^2$	$\frac{\bar{u}'z - \bar{v}'z}{u_e^2}$
0.03035	0.06	0.03163	0.00295	0.02867	0.48445	0.23469	0.00673
0.03541	0.07001	0.02982	0.00359	0.02622	0.49552	0.24554	0.00644
0.04047	0.08001	0.02908	0.00377	0.02531	0.50514	0.25517	0.00646
0.04552	0.08999	0.02786	0.00442	0.02344	0.51394	0.26413	0.00619
0.05058	0.09999	0.02721	0.00469	0.02251	0.52224	0.27273	0.00614
0.07587	0.14999	0.02509	0.00526	0.01983	0.56018	0.3138	0.00622
0.10116	0.19999	0.02365	0.00553	0.01811	0.59484	0.35383	0.00641
0.12645	0.24999	0.02196	0.00548	0.01648	0.62693	0.39304	0.00648
0.15175	0.30001	0.02045	0.00518	0.01526	0.65668	0.43123	0.00658
0.17704	0.35001	0.01874	0.00493	0.01381	0.68425	0.46818	0.00647
0.20233	0.40001	0.01783	0.00463	0.01319	0.70977	0.50377	0.00665
0.25291	0.5	0.01513	0.0037	0.01143	0.75536	0.57057	0.00652
0.30349	0.59999	0.01312	0.00289	0.01023	0.79451	0.63125	0.00646
0.35407	0.69999	0.01040	0.0025	0.0079	0.82813	0.6858	0.00542
0.40465	0.79999	0.00814	0.00203	0.00611	0.85701	0.73447	0.00448
0.50582	1.00001	0.00479	0.00103	0.00377	0.90309	0.81557	0.00307
0.60698	1.19999	0.00271	0.00054	0.00217	0.93707	0.8781	0.00191
0.75878	1.50001	0.00158	0.00024	0.00135	0.97207	0.94492	0.00127
1.01163	1.99999	0.00034	0.00014	0.00019	1.00428	1.00858	0.00019
1.26454	2.49999	0.00017	0.00006	0.00011	1.01933	1.03903	0.00011

Table 3 : POS. 1 STATION 4

$y/g$	$y$	$\left(\frac{\sqrt{u'^2}}{u}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{v'^2}}{u}\right)^2$	$\frac{u'^2 - v'^2}{u^2}$	$\frac{u}{u_e}$	$\left(\frac{u}{u_e}\right)^2$	$\frac{u'^2 - v'^2}{u_e^2}$
0.02848	0.06001	0.03422	0.00456	0.02966	0.45741	0.20922	0.00621
0.03322	0.06999	0.03272	0.00493	0.02779	0.46962	0.22054	0.00613
0.03797	0.08001	0.03201	0.00517	0.02683	0.48013	0.23052	0.00619
0.04271	0.08999	0.03129	0.00491	0.02638	0.48944	0.23955	0.00632
0.04746	0.09999	0.03057	0.00526	0.02531	0.49793	0.24793	0.00627
0.07119	0.14999	0.02806	0.00579	0.02227	0.53429	0.28546	0.00636
0.09492	0.19999	0.02624	0.00601	0.02023	0.5663	0.32069	0.00649
0.11865	0.24999	0.02468	0.00584	0.01884	0.59606	0.35529	0.00669
0.14238	0.29999	0.02335	0.00567	0.01768	0.62391	0.38926	0.00688
0.16611	0.34999	0.02196	0.00542	0.01654	0.65003	0.42254	0.00699
0.18984	0.39999	0.02076	0.00515	0.01561	0.67453	0.45499	0.0071
0.2373	0.49999	0.01825	0.00451	0.01374	0.71904	0.51702	0.00711
0.28477	0.60001	0.01613	0.00384	0.01229	0.75821	0.57488	0.00706
0.33223	0.70001	0.01334	0.00335	0.00999	0.79264	0.62828	0.00628
0.37969	0.80001	0.01115	0.00288	0.00827	0.82292	0.67720	0.0056
0.47461	1.	0.00716	0.00194	0.00522	0.87297	0.76208	0.00397
0.56953	1.19999	0.00384	0.00105	0.00279	0.9117	0.8312	0.00232
0.71191	1.49999	0.00141	0.00037	0.00104	0.95396	0.91004	0.00094
0.94922	2.	0.00046	0.00018	0.00028	0.99658	0.99317	0.00028
1.18652	2.49999	0.00009	0.00006	0.00003	1.01901	1.03838	0.00003

Table 4 : POS 1 STATION 5

$y/s$	$y$	$\left(\frac{\sqrt{u'^2}}{u}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{v'^2}}{u}\right)^2$	$\frac{\overline{u'^2} - \overline{v'^2}}{u^2}$	$\frac{u}{u_e}$	$\left(\frac{u}{u_e}\right)^2$	$\frac{\overline{u'^2} - \overline{v'^2}}{u_e}$
0.02697	0.06001	0.03548	0.00575	0.03073	0.44973	0.20226	0.00622
0.03146	0.06999	0.03459	0.00493	0.02967	0.46023	0.21181	0.00628
0.03596	0.08001	0.03275	0.00377	0.02898	0.469	0.21996	0.00637
0.04045	0.09	0.0325	0.00417	0.02833	0.47669	0.22723	0.00644
0.04494	0.09999	0.03156	0.00483	0.02673	0.4837	0.23396	0.00625
0.06742	0.15001	0.02955	0.00608	0.02347	0.51456	0.26477	0.00621
0.08989	0.20001	0.02822	0.00648	0.02174	0.54274	0.29457	0.0064
0.11236	0.25	0.02716	0.00634	0.02082	0.5694	0.32422	0.00675
0.13483	0.29999	0.02621	0.00616	0.02005	0.59471	0.35368	0.00709
0.1573	0.34999	0.02499	0.00597	0.01902	0.61873	0.38283	0.00728
0.17978	0.40001	0.02376	0.00578	0.01798	0.64156	0.4116	0.0074
0.22472	0.5	0.02173	0.00536	0.01637	0.68377	0.46754	0.00765
0.26966	0.59999	0.01926	0.00493	0.01433	0.72181	0.52101	0.00747
0.31461	0.70001	0.01702	0.00442	0.0126	0.75611	0.5717	0.0072
0.35955	0.79999	0.01469	0.00394	0.01075	0.78701	0.61938	0.00666
0.44944	1.	0.01032	0.00289	0.00743	0.83996	0.70553	0.00524
0.53933	1.20001	0.00618	0.00174	0.00444	0.88298	0.77965	0.00346
0.67416	1.50001	0.00284	0.00058	0.00226	0.93284	0.87019	0.00197
0.89888	2.00001	0.00062	0.00028	0.00035	0.98808	0.9763	0.00034
1.1236	2.50001	0.00033	0.00009	0.00024	1.02092	1.04228	0.00025

Table 5 : POS 1

STATION 6

$y/\delta$	$y$	$\left(\frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{u}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{\bar{v}'^2}}{u}\right)^2$	$\frac{\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2}{u^2}$	$\frac{u}{u_e}$	$\left(\frac{u}{u_e}\right)^2$	$\frac{\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2}{u_e^2}$
0.02449	0.06	0.03794	0.00526	0.03268	0.43694	0.19092	0.00624
0.02857	0.06999	0.03573	0.00515	0.03058	0.44733	0.2001	0.00612
0.03265	0.07999	0.03427	0.00559	0.02868	0.45571	0.20767	0.00596
0.03673	0.08999	0.03369	0.00555	0.02814	0.46285	0.21423	0.00603
0.04082	0.10001	0.03288	0.00582	0.02706	0.46923	0.22018	0.00596
0.06122	0.14999	0.03091	0.00654	0.02437	0.49645	0.24646	0.00601
0.08163	0.19999	0.02923	0.00681	0.02242	0.52119	0.27164	0.00609
0.10204	0.24999	0.02826	0.00687	0.02139	0.54483	0.29684	0.00635
0.12245	0.3	0.02722	0.00681	0.02041	0.56749	0.32204	0.00657
0.14286	0.35001	0.02631	0.00672	0.01959	0.58924	0.3472	0.0068
0.16327	0.40001	0.02557	0.00664	0.01893	0.61011	0.37223	0.00705
0.20408	0.49999	0.02372	0.00613	0.01759	0.64937	0.42168	0.00742
0.2449	0.60001	0.02181	0.00559	0.01622	0.68553	0.46995	0.00762
0.28571	0.69999	0.01918	0.00511	0.01407	0.71883	0.51672	0.00727
0.32653	0.79999	0.01726	0.00457	0.01269	0.74951	0.56176	0.00713
0.40816	0.99999	0.01324	0.00355	0.00969	0.80379	0.64608	0.00626
0.4898	1.20001	0.00912	0.00252	0.0066	0.84983	0.72221	0.00477
0.61224	1.49999	0.00489	0.00107	0.00382	0.90613	0.82107	0.00314
0.81633	2.00001	0.00102	0.00038	0.00064	0.97397	0.94862	0.00061
1.02041	2.5	0.00039	0.0001	0.00029	1.01893	1.03822	0.0003
1.22449	3.	0.00016	0.00007	0.00009	1.04872	1.09981	0.00011

Table 6 : POS 1

STATION 7

$y/s$	$y$	$\left(\frac{\sqrt{u'}}{u}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{v'}}{u}\right)^2$	$\frac{u'^2 - v'^2}{u^2}$	$\frac{u}{u_e}$	$\left(\frac{u}{u_e}\right)^2$	$\frac{u'^2 - v'^2}{u_e^2}$
0.02308	0.06001	0.04121	0.00593	0.03528	0.42308	0.179	0.00631
0.02692	0.06999	0.03969	0.00562	0.03406	0.43331	0.18776	0.00639
0.03077	0.08001	0.03765	0.00632	0.03133	0.44173	0.19512	0.00611
0.03462	0.09001	0.03756	0.00608	0.03148	0.44888	0.20149	0.00634
0.03846	0.09999	0.03746	0.00638	0.03108	0.45519	0.2072	0.00644
0.05769	0.14999	0.03404	0.00706	0.02698	0.48109	0.23145	0.00624
0.07692	0.19999	0.03191	0.00734	0.02457	0.50385	0.25386	0.00624
0.09615	0.24999	0.03031	0.00746	0.02284	0.52553	0.27618	0.00631
0.11538	0.29999	0.02921	0.00748	0.02173	0.54641	0.29856	0.00649
0.13462	0.35001	0.02802	0.00743	0.02059	0.56658	0.32101	0.00661
0.15385	0.40001	0.02715	0.00739	0.01976	0.58603	0.34343	0.00679
0.19231	0.50001	0.02589	0.00712	0.01877	0.62295	0.38807	0.00728
0.23077	0.6	0.02495	0.00684	0.01811	0.65735	0.43211	0.00782
0.26923	0.69999	0.02295	0.00638	0.01657	0.6894	0.47527	0.00787
0.30769	0.79999	0.02046	0.006	0.01446	0.71927	0.51735	0.00748
0.38462	1.00001	0.01652	0.00456	0.01196	0.77305	0.59761	0.00714
0.46154	1.2	0.01156	0.00327	0.00829	0.81973	0.67196	0.00557
0.57692	1.49999	0.00709	0.00149	0.00561	0.87848	0.77173	0.00432
0.76923	1.99999	0.00167	0.00046	0.00121	0.95256	0.90737	0.00109
0.96154	2.5	0.00051	0.00011	0.0004	1.0046	1.00922	0.00041
1.15385	3.00001	0.00023	0.00007	0.00016	1.04116	1.08401	0.00017

Table 7 : POS 1 STATION 8

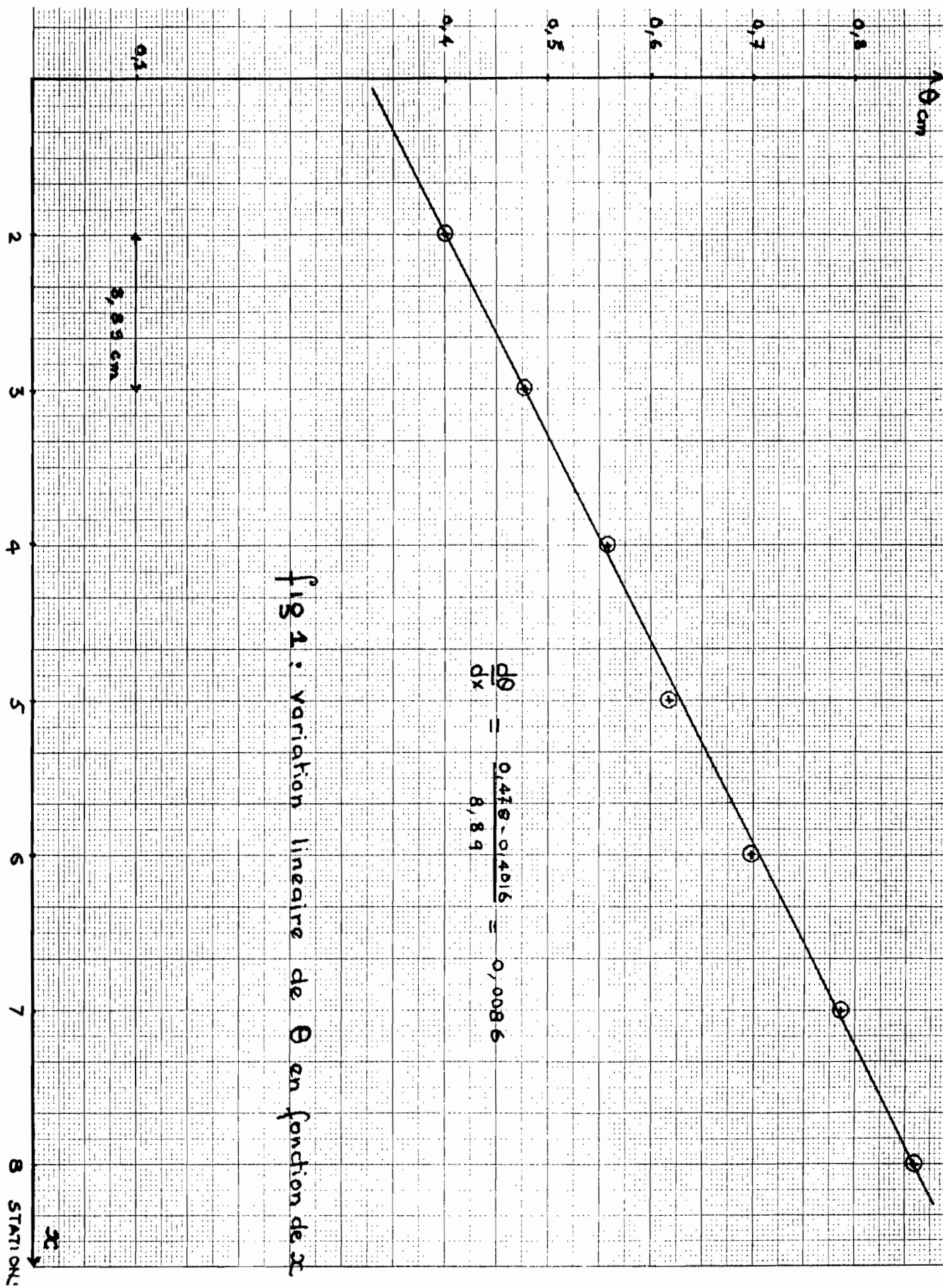


fig 1 : variation lineaire de θ en fonction de x

my A. U.S.

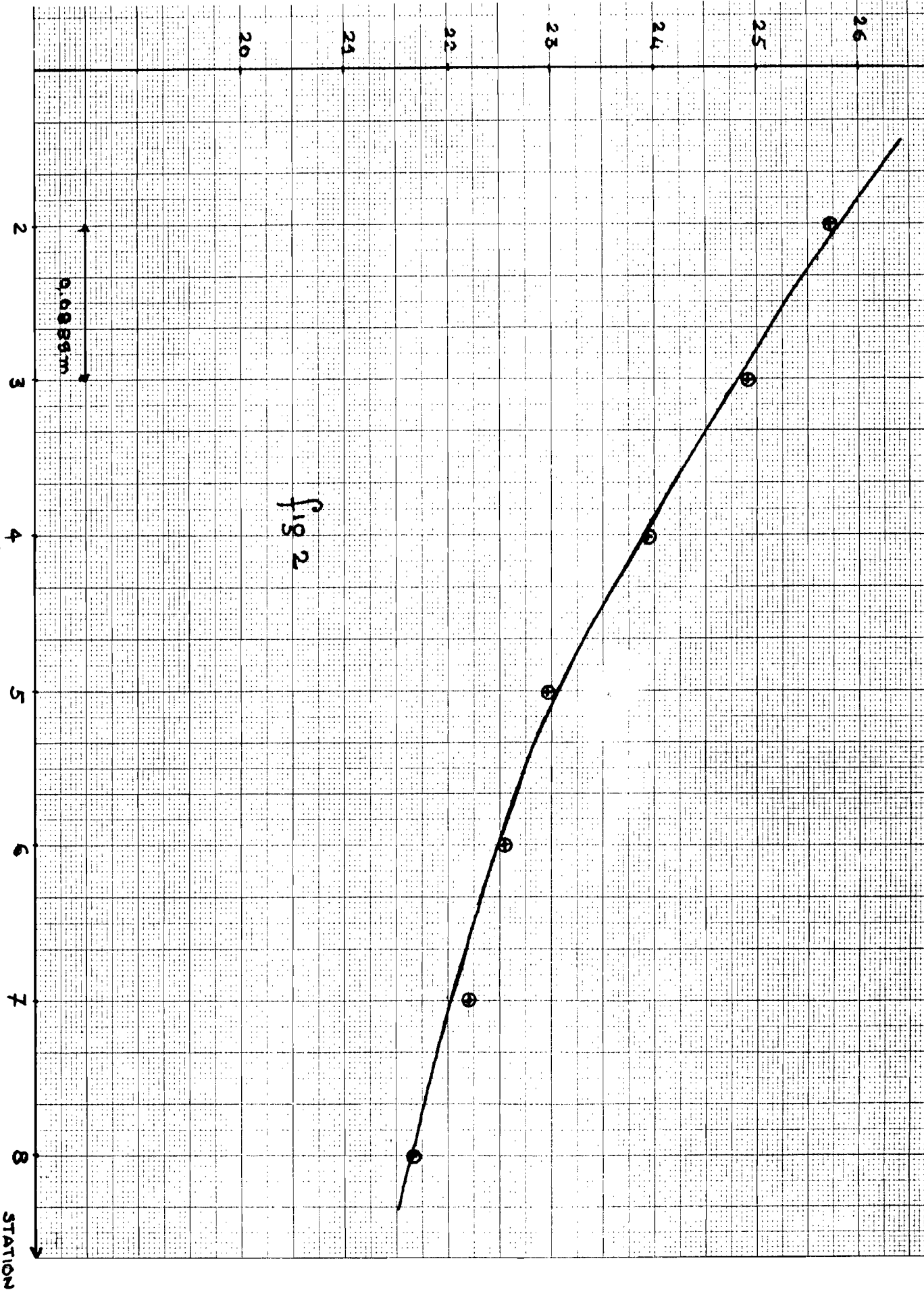


fig 2



$\frac{U^2 - V^2}{U^2}$

0,007

0,006

0,005

0,004

0,003

0,002

0,001

0

POS 1 STATION 2

fig 3

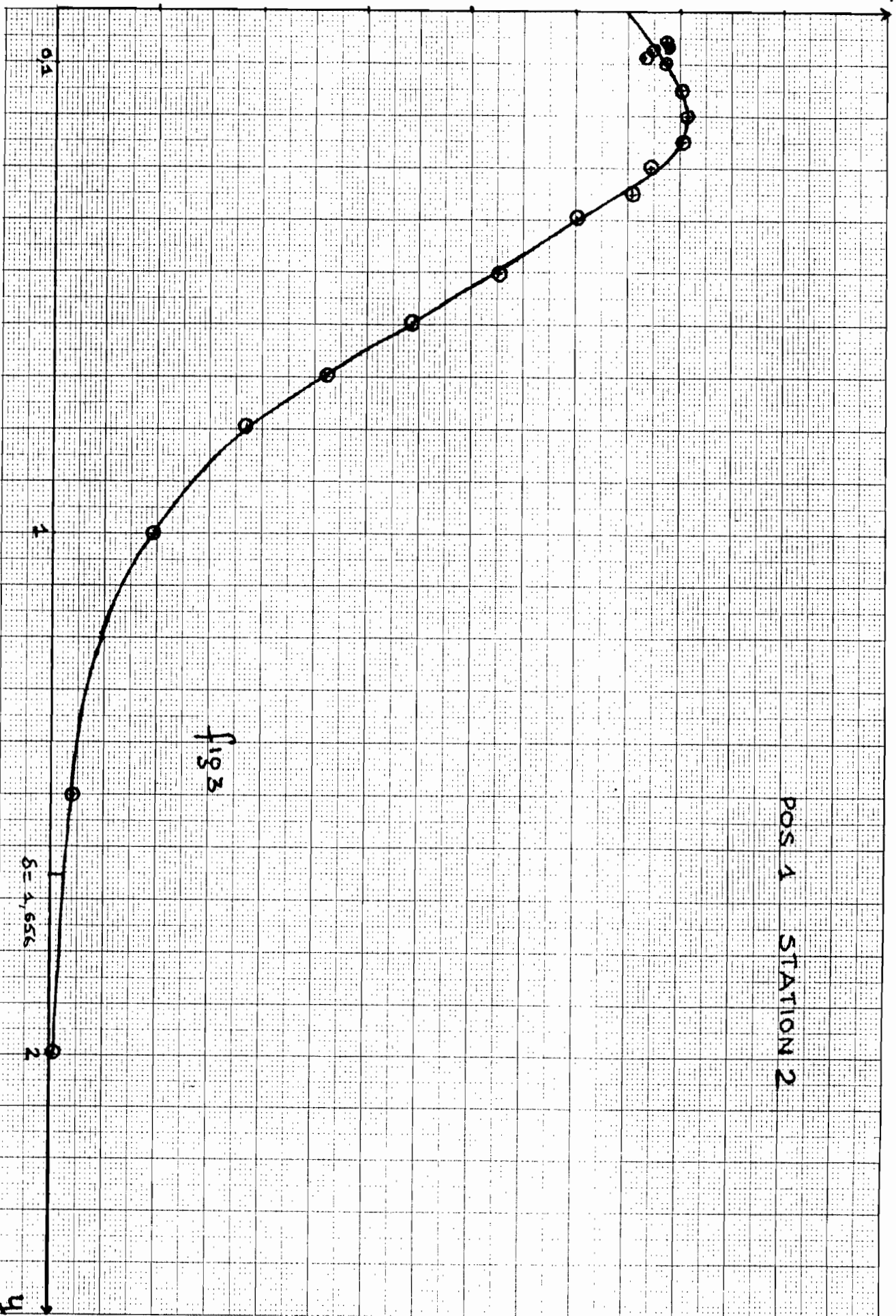
$\delta = 4,656$

0,1

1

2

$U$



$\frac{v'^2 - v'^2}{U^2}$

0,001

0,006

0,005

0,004

0,003

0,002

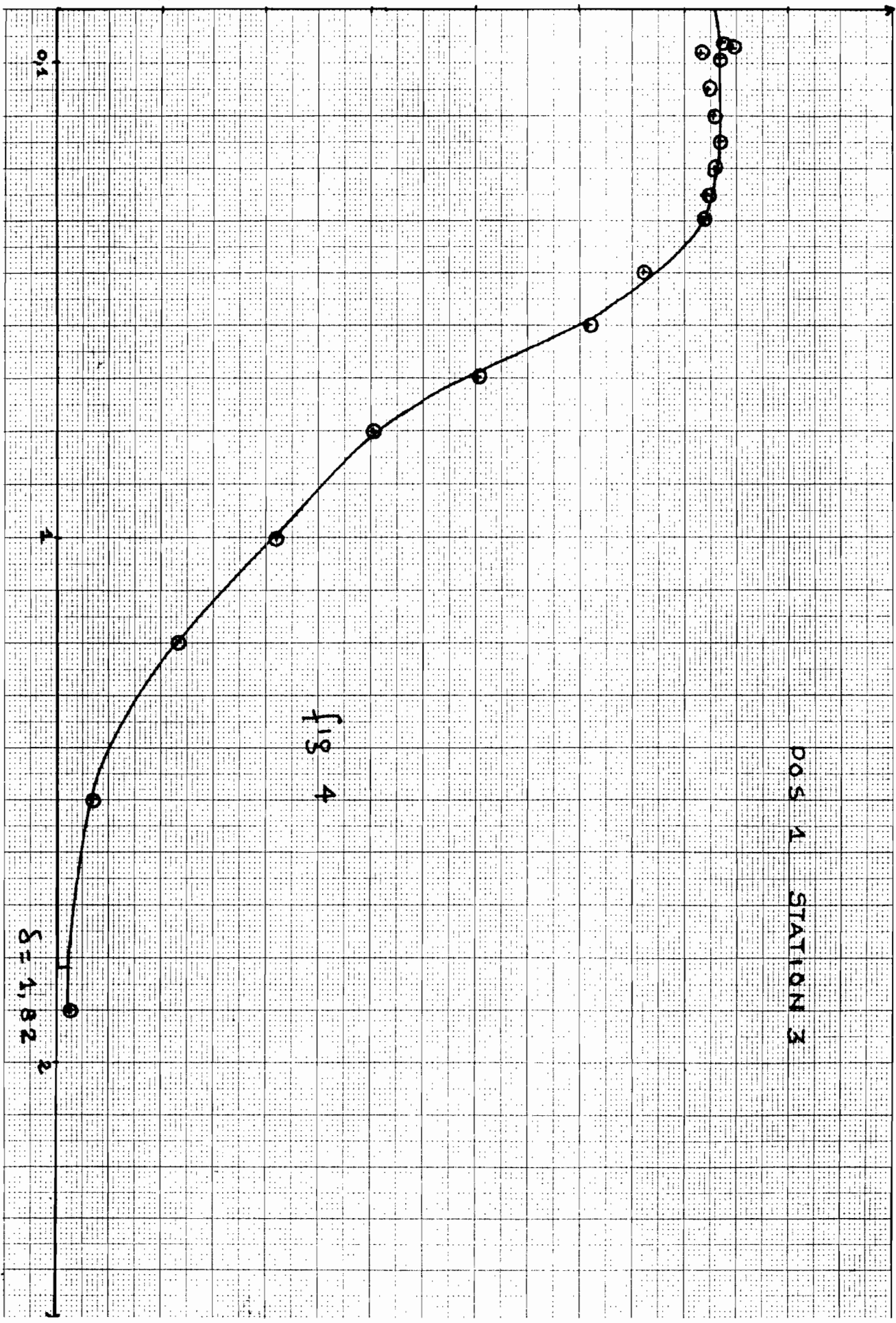
0,001

0

POS 1 STATION 3

fig 4

$S = 1,82$



$$\frac{U^2 - V^2}{U^2}$$

0,007

0,006

0,005

0,004

0,003

0,002

0,001

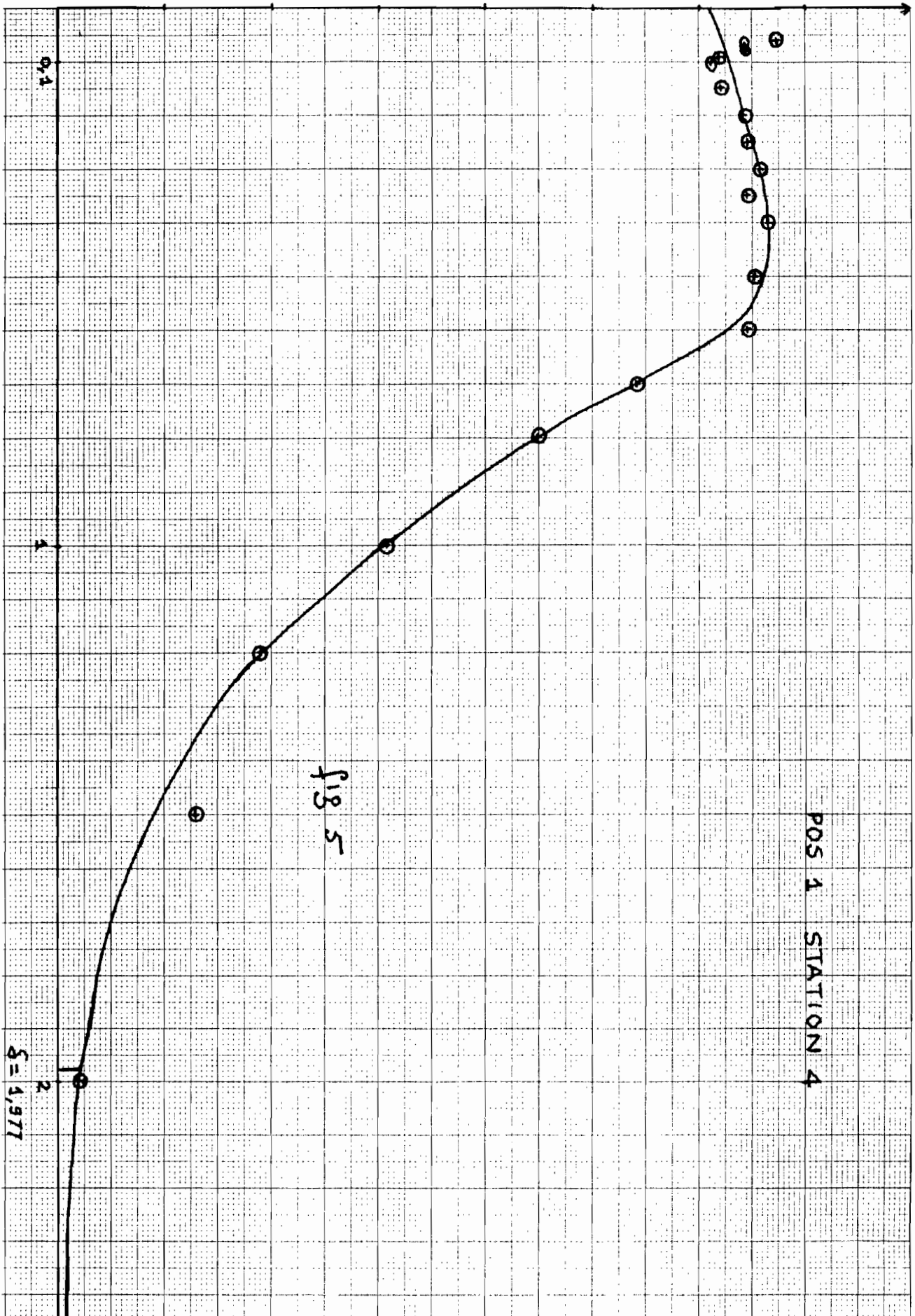
0

POS 1 STATION 4

fig 5

$\xi = 1,977$

R  
M  
1



$\frac{\bar{u}^2 - v^2}{U_e^2}$

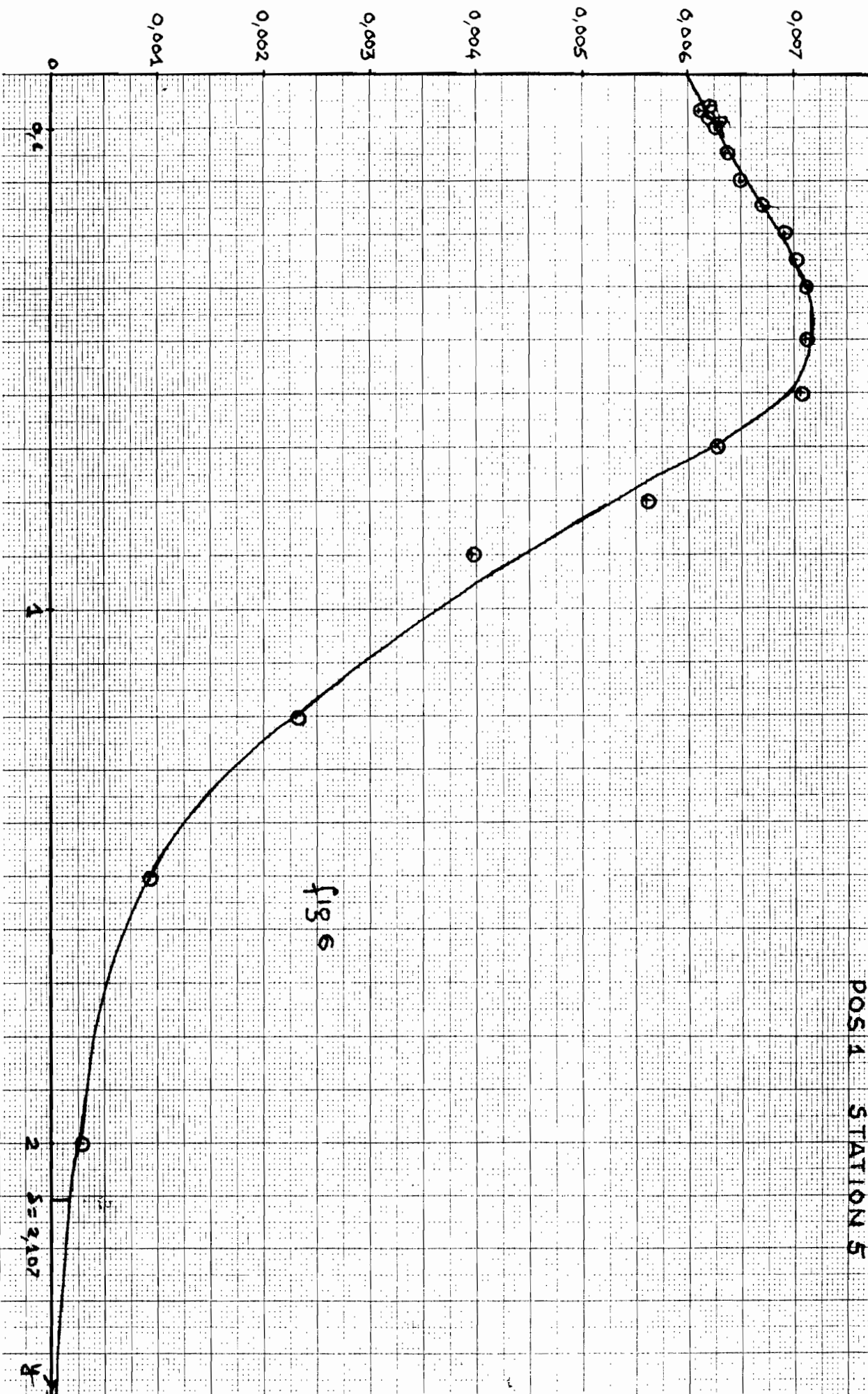


fig 6

2  
S = 2.107

R

$u_e^2 - v^2$

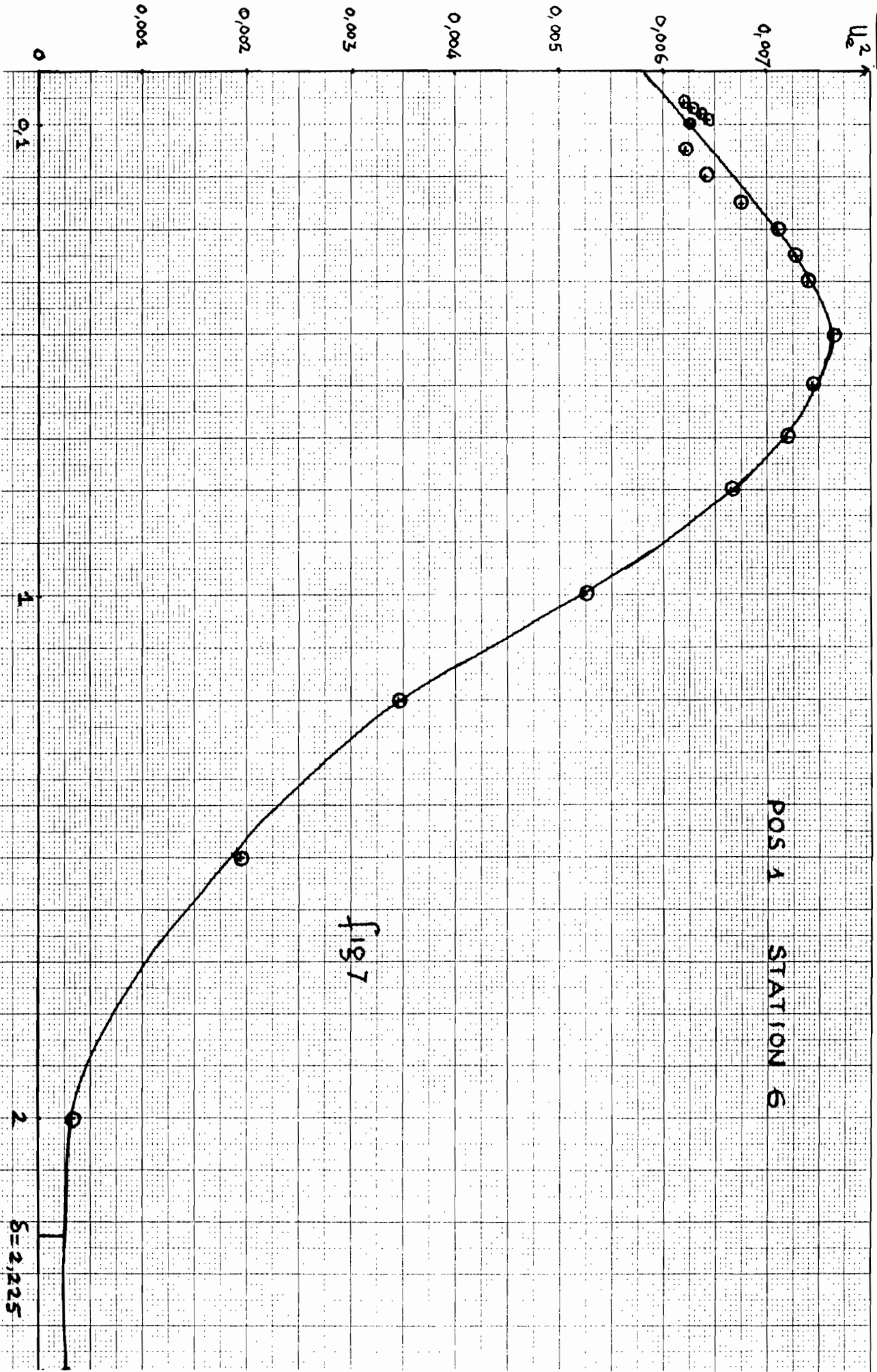
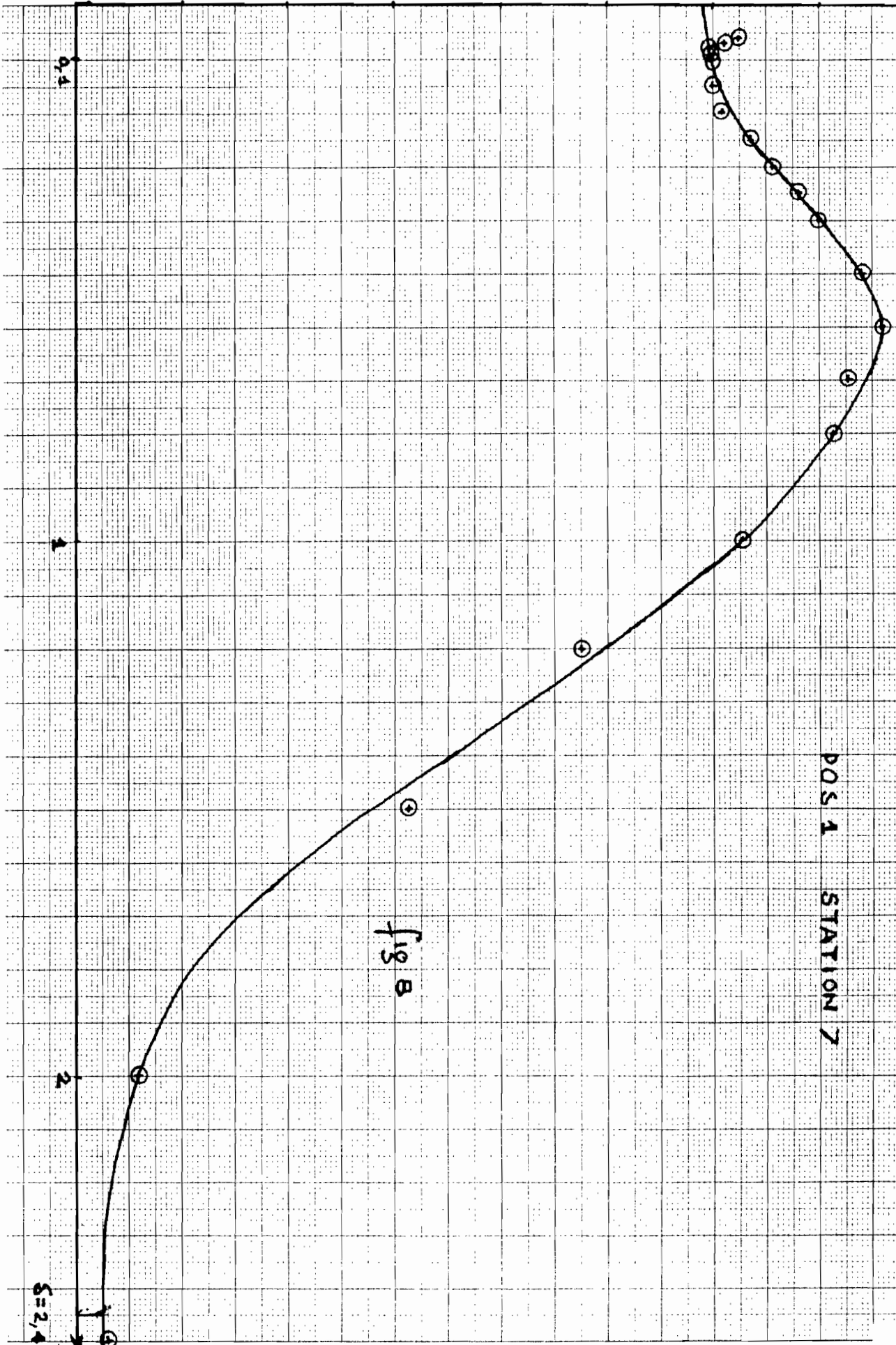


fig 7

POS 1 STATION 6

$S=2,225$

$\frac{U^2 - \bar{U}^2}{U^2}$

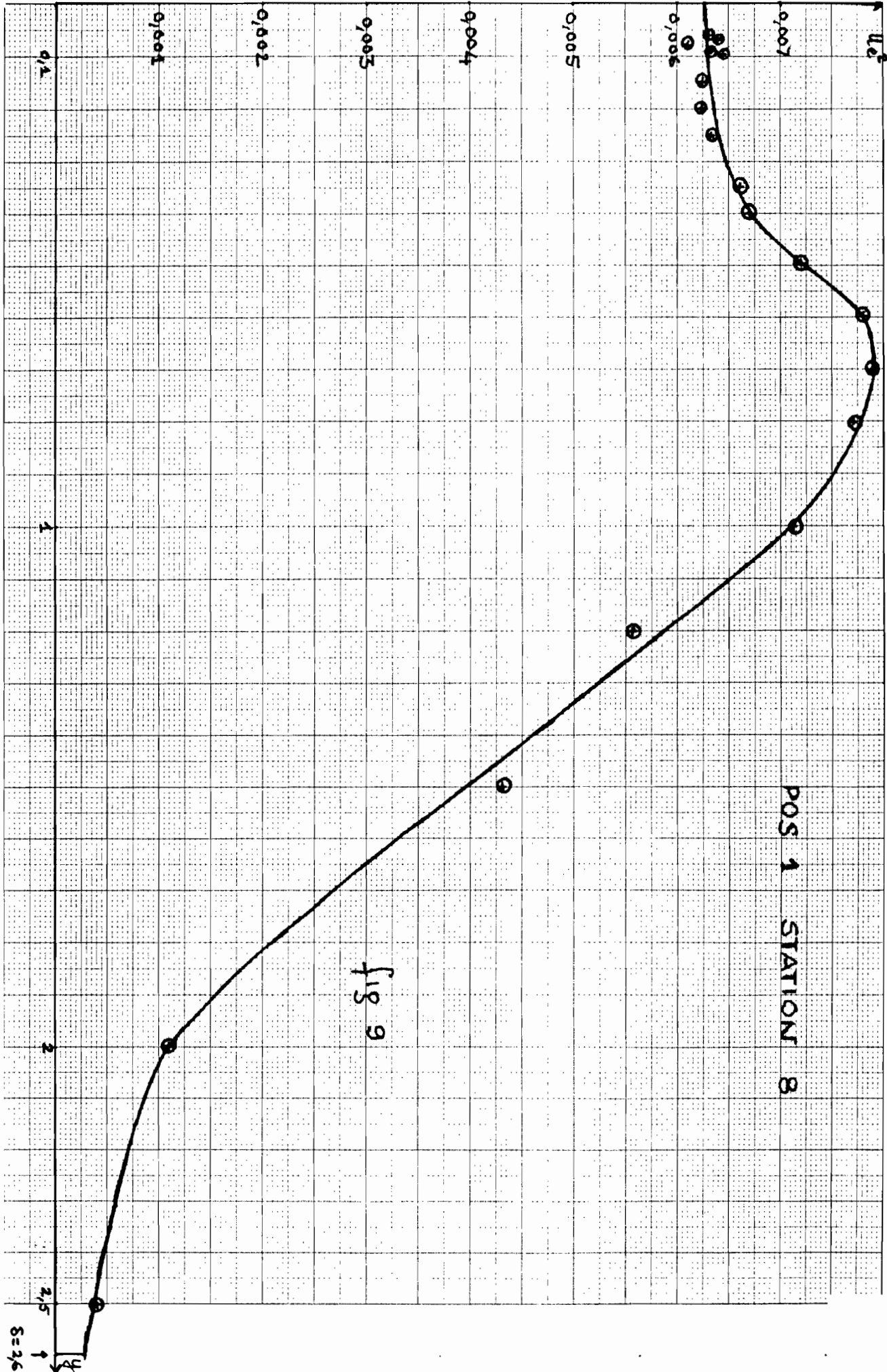


POS 1 STATION 7

fig B

S=2,45

$\frac{21.2 \sqrt{72}}{U_0^2}$



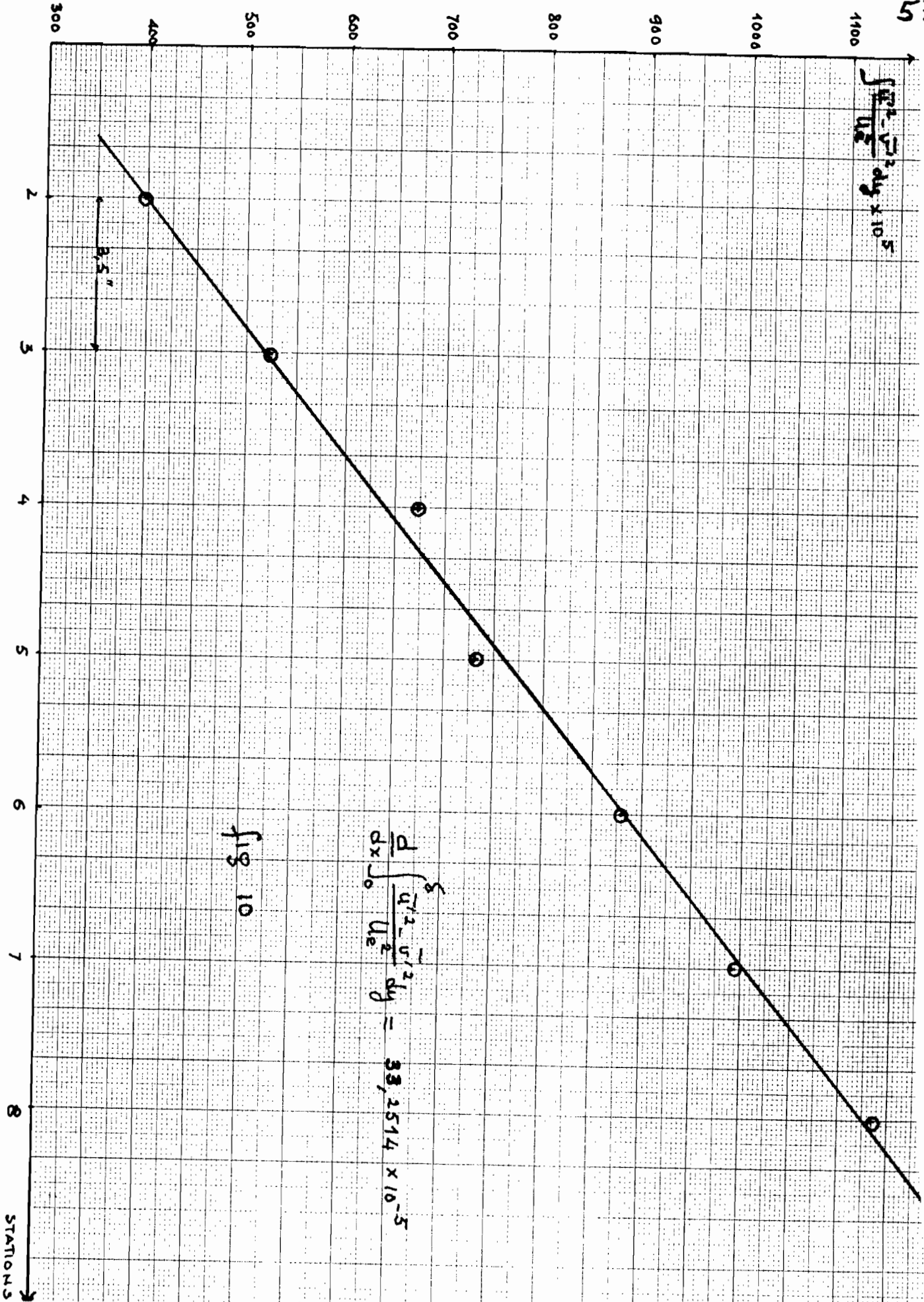


fig 10

$$\frac{P}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u^{1/2} - \bar{u}^{1/2}}{U_e} dy = 33,2514 \times 10^{-5}$$



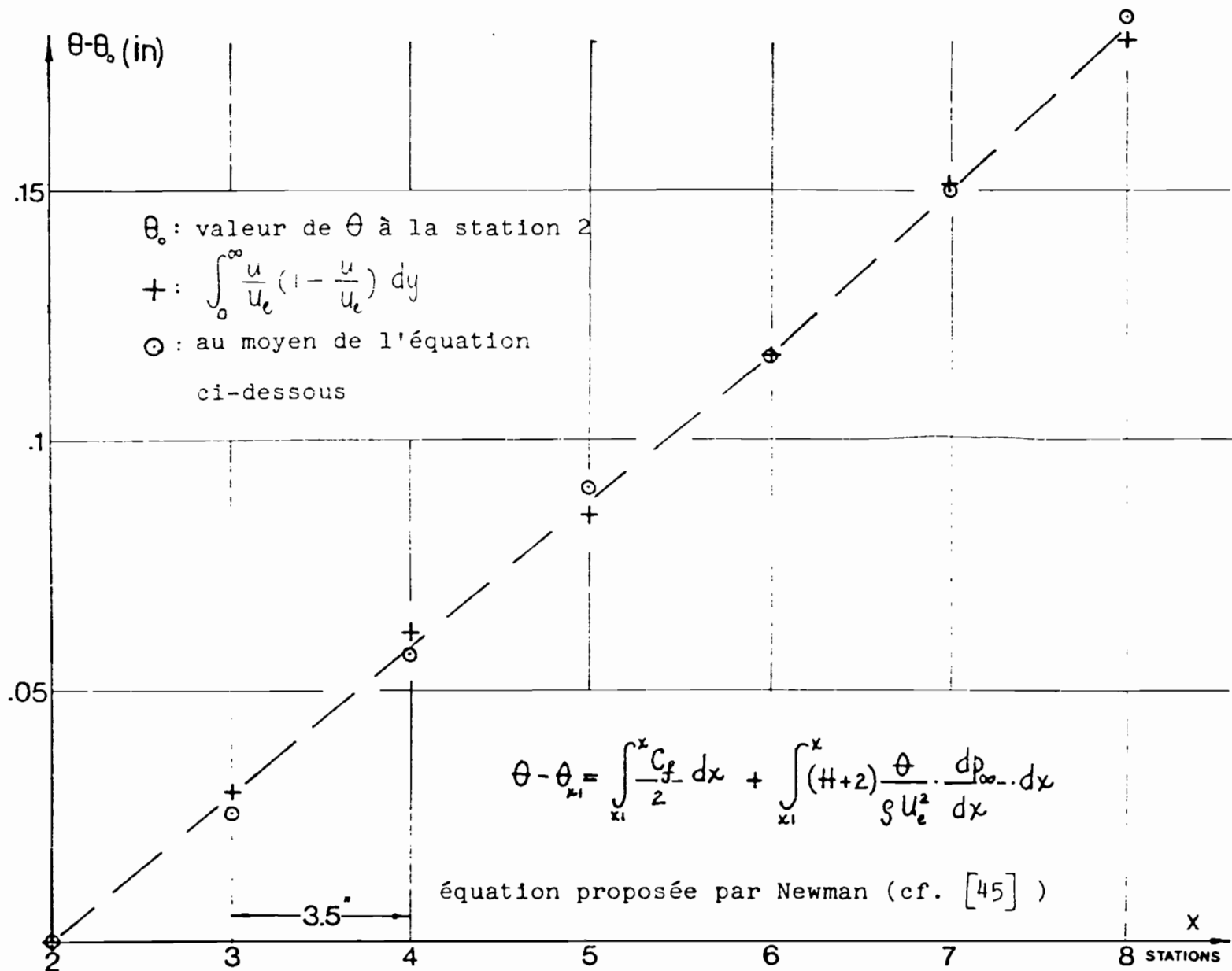


Fig 11a Comparaison du développement de  $\theta$  le long de l'écoulement (POS.1).

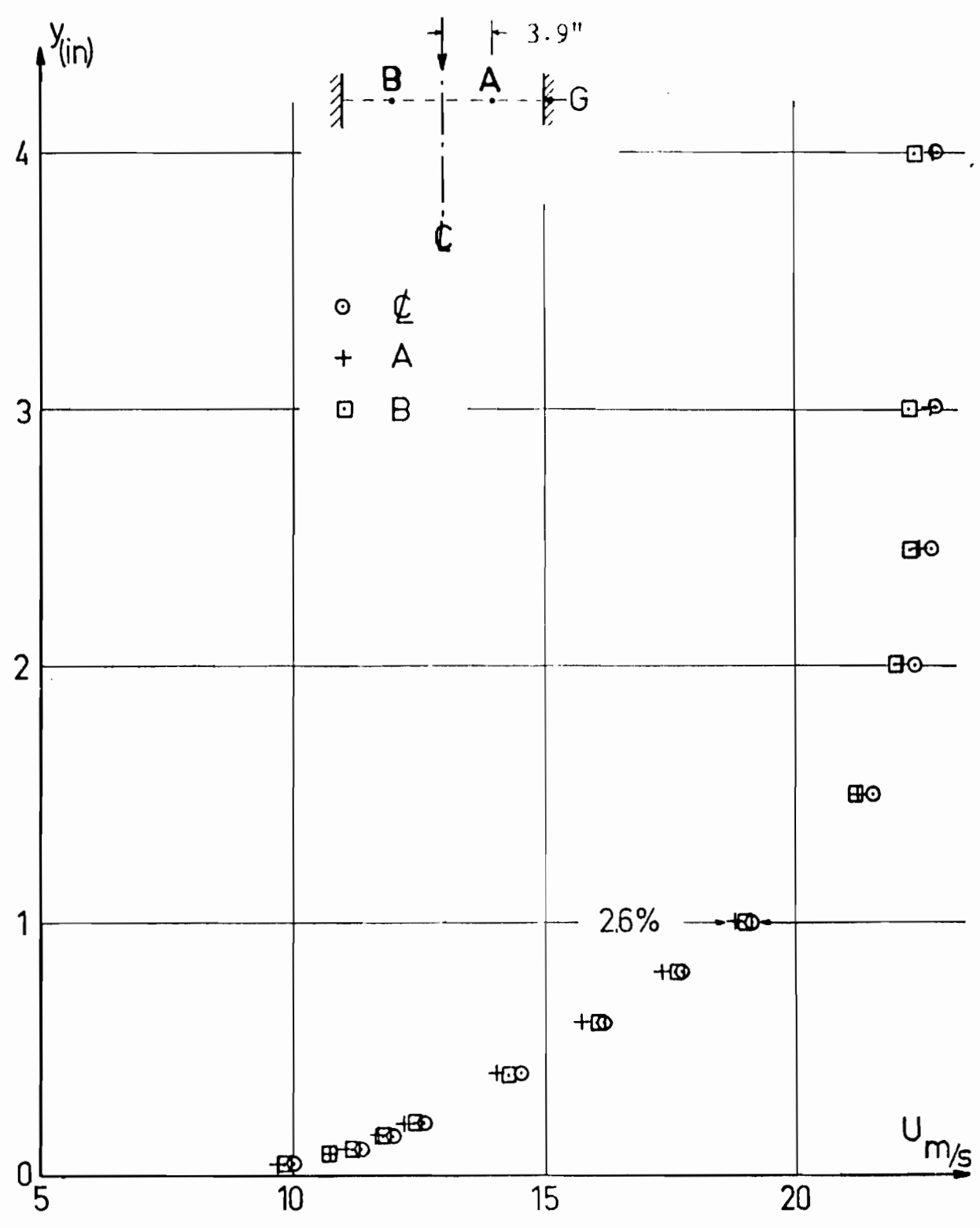


Fig 11b Profils dimensionnels de vitesse moyenne (station 6, POS.1)

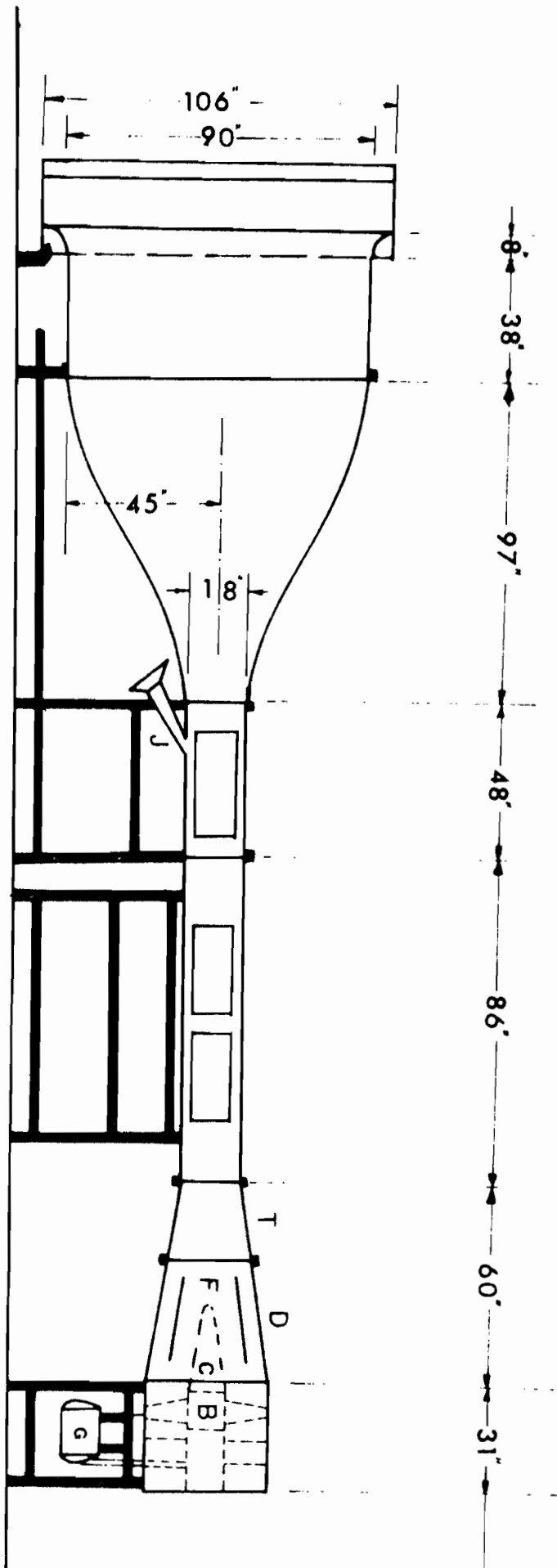


Fig 12: Vue d'ensemble de la soufflerie 24" x 18".

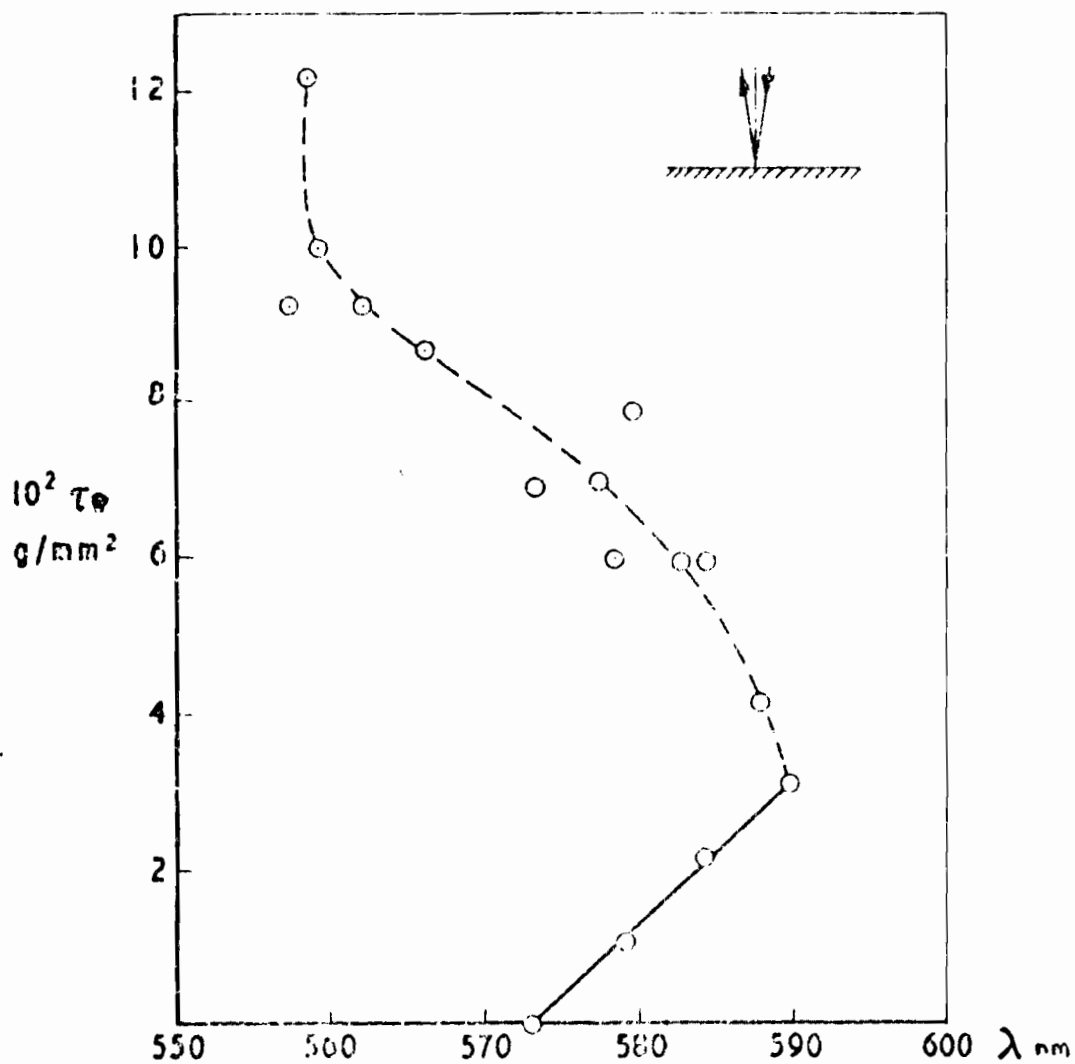


fig 13 : longueur d'onde de lumière au contact des "cristaux liquides" en fonction du frottement pariétal  
KLEIN & MARGOZZI

```
CLEAR WS
)OUTSEL OUT
* LOADED 1001 BV
```

```

V POLI[[]]V
V POL N;M;K;I;V;A;VECTEUR
[1] A LES VARIABLES X ET Y DES DONNEES EXPERIMENTALES
[2] A SONT DES VARIABLES GLOBALES A DEFINIR AVANT
[3] A L'EXECUTION DE CE PROGRAMME. N EST L'ORDRE
[4] A VOULU DU POLYNOME. LES RESULTATS SERONT COMME
[5] A SUIT : A0 A1 A2 A3... AN DU POLYNOME A0+
[6] A A1*X + A2*X2 + A3*X3 + ... + AN*XXN = Y(X).
[7] M+((2xN),K)ρI+ρρρA+((N+1),N+1)ρ0xV+ιNXρ,K+ρX
[8] →8xι(2xN)≥I+I+ρρ,MCI;]←X*I
[9] I+1
[10] →10xιN≥I+I+ρ,VCI]←+/Yx,MCI;]
[11] I+ρρVECTEUR←K,K,+/[2] M
[12] →12xι(N+1)≥I+I+ρρρACI;]←(N+1)†IϕVECTEUR
[13] ' COEFFICIENTS = ' ;((+/Y),V)BA
V
```

```

)OUTSEL ALL
)REWIND
X←.0889 .1778 .2667 .3556 .4445 .5334 .6223
Y←25.72 24.9 23.93 22.9 22.55 22.22 21.67
POL 3
```

```
COEFFICIENTS = 26.946 -13.792 8.4806 0.39536
```

```
0010 REM CE PROGRAMME CALCULE LA SURFACE SOUS UNE
0020 REM COURBE PAR LA METHODE DE SIMPSON
0030 DIM U(30),Y(30)
0040 PRINT FLP,'NOMBRE TOTAL DES POINTS ?'
0045 INPUT K
0048 PRINT FLP,'ENTREZ VOS ORDONNEES & ABSCISSES'
0050 FOR I=1 TO K
0060 INPUT U(I),Y(I)
0065 PRINT FLP,U(I),Y(I)
0070 NEXT I
0080 LET K2=K-(2*INT(K/2))
0090 IF K2=1 GOTO 0130
0100 N2=K-1
0110 S2=(U(K)+U(K-1))*(Y(K)-Y(K-1))/2
0120 GOTO 0150
0130 N2=K
0140 S2=0
0150 N3=N2-2
0160 FOR I=1 TO N3 STEP 2
0170 S2=S2+(Y(I+2)-Y(I))*(U(I)+4.*U(I+1)+U(I+2))/6
0180 S2=S2+(Y(I)-2.*Y(I+1)+Y(I+2))*(U(I+2)-U(I))/3.
0190 NEXT I
0200 S=S2
0210 PRINT FLP,'LA SURFACE SOUS LA COURBE EST = ',S
0220 END
```