

RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL



ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE THIÈS

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGÉNIEUR DE CONCEPTION

TITRE

Etude de l'usure des lignes de mouillage
du Port Autonome de Dakar

AUTEUR : Moussa Amadou Seck

DIRECTEURS : Maurice Duval
Nouhoum Diop

DATE : MAI 1987

Génie : Mécanique

Que tous ceux qui ont contribué à cette étude trouvent ici l'expression de mes remerciements.

Je pense notamment à Messieurs

- Maurice Duval, professeur à l'E.P.T.
- Nouhoum Diop, chef des Phares et Balises
- Jean Phillippe Bouchard, technicien à l'E.P.T.

Table des matières

- Introduction	1
Dynamique de la bouée	
Enoncé du problème et méthodes	4
Notation des paramètres	6
Remarques	11
Méthodes de résolution	14
Détermination des positions d'équilibre	15
Etude de l'usure	
L'usure adhésive	23
L'usure corrosive	35
L'usure érosive	33
L'usure abrasive	37
Etude économique de l'option retenue	50
Conclusion et Recommandations	55
Annexes	59

II -

INTRODUCTION

Nous avons entrepris d'étudier les possibilités de substitution du matériel des chaînes d'amarrage des bouées de signalisation maritime. En fait ces chaînes qui sont en acier sont de par les glissements continus des maillons les uns sur les autres suite au mouvement de la mer, exposées et sujettes à une usure rapide. Cette usure est plus prononcée à l'endroit des collets mais aussi dans les parties les plus sollicitées dynamiquement. La durée de vie des chaînes se trouve ainsi réduite à quatre années au maximum pour les chaînes les plus grosses alors que leurs coûts sont exorbitants et le nombre de bouées très élevé (environ 200). Ainsi avons nous entrepris en relation avec le service des phares et balises du Port Autonome de Dakar, d'essayer de trouver un ou plusieurs matériaux dont l'utilisation serait moins coûteuse. Notre démarche a consisté tout d'abord à cerner la dynamique combien complexe de la bouée et de sa ligne d'amarrage afin de connaître les différentes sollicitations; ensuite nous avons procédé à une étude théorique et expérimentale du

phénomène d'usure. Cette étude nous a permis de connaître les différents facteurs influençant l'usure et de faire notre choix en conséquence en tenant compte du coût.

Mais il faut dire que si le choix d'un matériau est une opération facile pour des usages courants il ne l'est pas pour de nouvelles applications; ainsi avons nous jugé imprudent de suggérer l'utilisation de matériaux nouveaux tels que les matériaux synthétiques, composites et autres sans les tester au préalable; ces mêmes matériaux font actuellement l'objet d'études très avancées afin de mieux cerner leurs propriétés. C'est pour cette raison que nous avons limité notre choix à la gamme des matériaux classiques tout en suggérant de tester certains nouveaux matériaux ou dispositifs d'amarrage.

Il est bien évident que les résultats de ces tests ne seront connus qu'à long terme et le recours à ces matériaux se fera après.

II - ETUDE DYNAMIQUE DE LA BOUEE ET DE SA LIGNE D'AMARRAGE

L'étude de la dynamique du système est extraite du document intitulé "Dynamique linéaire des bouées et de leurs lignes d'amarrage". Ce document est publié par le service des Phares et Balises de France.

L'étude faite par le document quoiqu'encore incomplète, permet par une bonne approche d'obtenir des résultats assez précis.

Nous ne ferons pas ici d'étude complète ayant permis d'aboutir aux résultats parce que la méthode de résolution utilisée est une méthode numérique à substitution progressive faisant usage de nombreux sous-programmes. Nous montrerons cependant la méthode d'approche et d'obtention des différentes équations qui régissent le système.

Pour ceux qui souhaiteraient prolonger cette étude afin d'aboutir aux résultats, les méthodes et techniques de résolution des équations sont jointes en annexe à ce document et ceci à leur intention.

Énoncé du Problème et méthodes

Caractéristiques Géométriques

le système représenté à la figure 1 est constitué d'une chaîne et d'une bouée du Service des Phares et Balises de type courant.

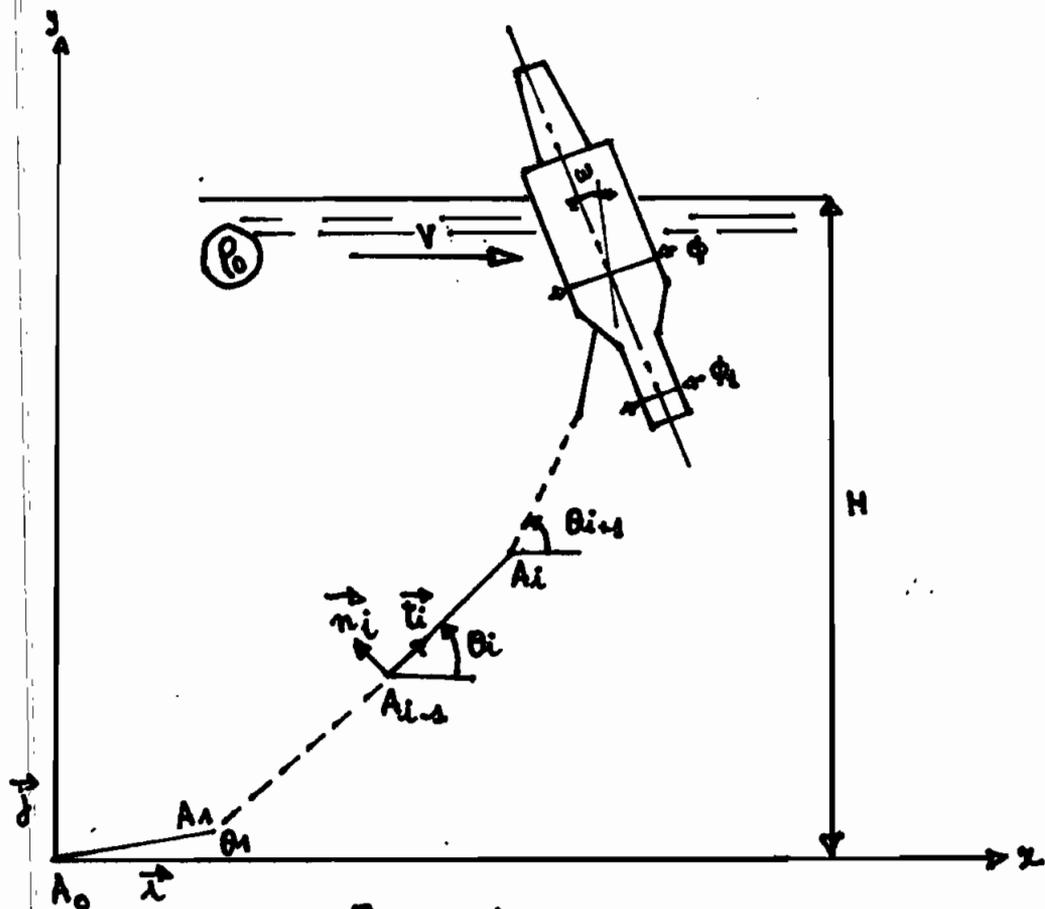


Figure 1

Hypothèses

1. les dimensions transversales de la chaîne sont supposées suffisamment faibles pour que l'on puisse l'assimiler à un polygone. De plus on admet que le nombre de

maillons de la chaîne est suffisamment grand pour que celle-ci puisse être assimilée à $n-1$ points matériels A_1, A_2, \dots, A_{n-1} pesants reliés par des portions de fil de longueur égale à celle d'un maillon.

2. la bouée est représentée par un solide de révolution et on néglige alors les masses de la barre d'attelage et du gouvernail.

Dans ces conditions il est intuitif et l'on peut prouver que sous l'action de son poids et des traînées dues à un courant de vitesse et de direction constantes

- i) le système prend une position d'équilibre stable
- ii) le plan défini par la verticale du point d'attache de la chaîne et la direction du courant contient toute la chaîne à l'équilibre ainsi que l'axe de révolution de la bouée.

On considèrera dans ce cas-ci des équilibres particuliers dans lesquelles :

- a) l'axe de révolution de la bouée est verticale
- b) la chaîne est tangente au fond

et l'on étudiera des mouvements au voisinage de cette position d'équilibre dans lesquels la chaîne toute entière et les points de la bouée situés dans le plan d'équilibre restent constamment dans ce plan.

Notations

A- Notations relatives à la mer

Vitesse du courant V

Masse volumique de l'eau de mer ρ_0

Profondeur H

B- Chaîne

Nombre de maillons : n

Longueur d'un maillon : l

Longueur de la chaîne : $L = nl$

Masse linéique de la chaîne : μ

Masse d'un point A_i : $m = \mu \frac{L}{n-1}$

Coefficient de traînée : k

Coordonnées des points A_{k_0} : (x_{k_0}, y_{k_0})

Angles : $(\vec{u}, \overrightarrow{A_{k_0} A_{k_0+1}}) = \theta_{k_0+1}$

On appellera :

$$t_{k_0} = \frac{\overrightarrow{A_{k_0-1} A_{k_0}}}{|\overrightarrow{A_{k_0-1} A_{k_0}}|}$$

n_{k_0} le vecteur unitaire formant avec t_{k_0} un repère direct.

On notera \mathcal{L} le rapport $\frac{L}{H}$

On notera \mathcal{H} le rapport :

$$\mathcal{H} = \frac{L}{A_0 A_n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \sin \theta_k}$$

B₂ . Notations relatives à la chaîne en mouvement

Composantes des déplacements des points A_k :

sur \vec{x} : $\xi_k = x_k - x_{k0}$

sur \vec{y} : $\eta_k = y_k - y_{k0}$

Variation angulaire : $\varepsilon_k = \theta_k - \theta_{k0}$

C . Bouée

C₁ . Caractéristiques géométriques

Centre de gravité : G

Masse de la bouée : M

Diamètre du corps de bouée : ϕ

Diamètre de la queue : ϕ_1

Inclinaison de la barre d'attelage par rapport à l'horizontale : ψ

Surface de flottaison : $s = \frac{\pi \phi^2}{4}$

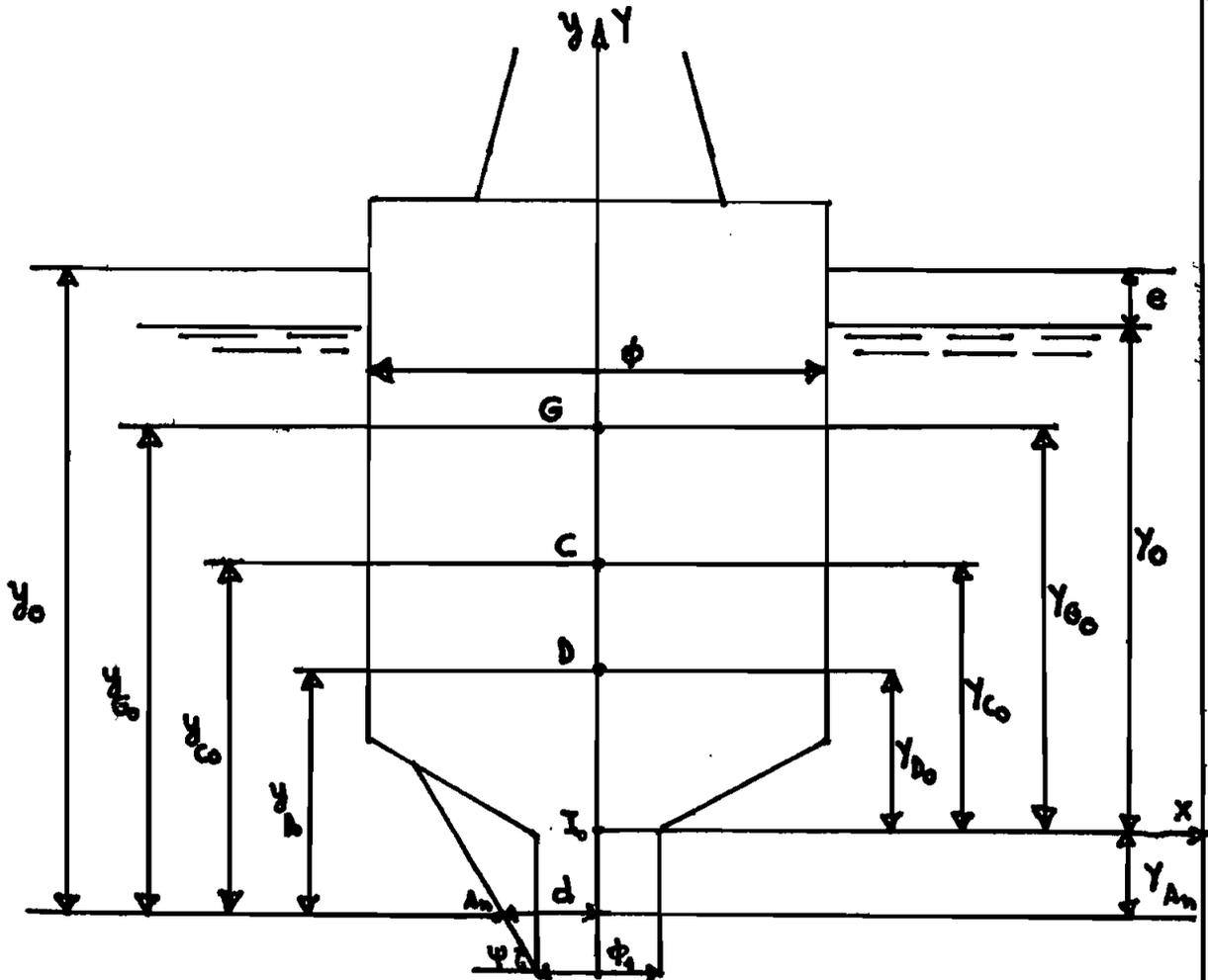
Moment d'inertie de la bouée par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de la figure et passant par le point d'attache : I

Moment d'inertie géométrique de la surface de flottaison par rapport à un diamètre

$$I_s = \frac{\pi \phi^4}{64}$$

Coefficient de traînée : K

C2. Caracteristiques de la bouée seule flottant sur un plan d'eau en équilibre



Soit I_0 un point lié à l'axe de la bouée

Repère (I_0, \vec{i}, \vec{j})

Axes de coordonnées $(I_0 x, I_0 y)$

Ordonnée du centre de gravité : y_{Go}

Ordonnée du centre de carène : y_{Co}

Ordonnée du centre de dérive : y_{Do}

Ordonnée de la surface de flottaison : y_0

Volume immergé : $V_0 = \frac{M}{\rho}$

Surface du maître couple : S_0

On posera en outre :

$$Y_{p_0} = \frac{V_0}{s}$$

Y_{p_0} est la hauteur d'un cylindre de diamètre ϕ soumis à la même force de poussée d'Archimède que la bouée.

$$Y_{F_0} = \frac{S_0}{\phi}$$

Y_{F_0} est la hauteur d'un cylindre de diamètre ϕ soumis à la même force de trainée que la bouée.

C₃ - Caractéristiques de la bouée avec chaîne en position d'équilibre verticale (figure 2)

la position d'équilibre est définie dans le repère (I_0, \vec{i}, \vec{j}) par l'enfoncement : e ;

les coordonnées du point d'attache : $\begin{cases} X_{An} = -d \\ Y_{An} \end{cases}$

Projection de A_n sur l'axe Y : point I .

Dans le repère (I, \vec{i}, \vec{j}) on définira :

ordonnée du centre de gravité : $Y_{G_0} = Y_{G_0} - Y_{An}$

ordonnée du centre de carène : Y_{C_0}

ordonnée du centre de dérive : Y_{D_0}

ordonnée de la surface de flottaison :

$$y_0 = Y_0 - (Y_{An} - e)$$

On posera : $Y_{p_0} = Y_{p_0} + e$, $Y_{F_0} = Y_{F_0} + e$

y_{p0} et y_{r0} s'interprètent mutadis mutandis comme ci-dessus, y_{p0} et y_{r0} .

Rayon métacentrique: $\rho = \frac{I_s}{S y_{r0}}$

C₄ - Bouée en mouvement

Angle de l'axe de la bouée avec la verticale: ω

D - Forces

D₁ - Forces appliquées à la chaîne

Tension dans le maillon $A_{k-1} A_k = T_k \vec{e}_k$

On notera \vec{c} la tension réduite

$$\vec{c} = \frac{T_k}{\mu g L} \vec{e}_k = c \vec{t}_k$$

Force de traînée répartie sur le maillon $A_{k-1} A_k$:

$$\vec{D}_k = k v^2 l \vec{F}(\theta_k)$$

si $\vec{F}(\theta_k)$ est une fonction vectorielle mesurée expérimentalement.

$$\text{Posons } \bar{k} = \frac{k v^2}{2 \mu g}$$

la force de traînée réduite est alors

$$\vec{D}_k = \frac{\vec{D}_k}{\mu g l} = 2 \bar{k} \vec{F}(\theta_k)$$

D₂ - Liaison Bouée - Chaîne

Réaction de la bouée sur la chaîne: T_k^{\rightarrow}

Angle avec l'horizontale de la réaction de la bouée sur la chaîne $\varphi = (\vec{u}, \vec{e})$

On notera σ la tension réduite

$$\sigma = \frac{T}{\mu g L}$$

Rapport de la masse de la bouée à la masse de la chaîne: $u = \frac{M}{\mu L}$

D3 - Forces appliquées à la bouée

Poussée d'Archimède à l'équilibre en position verticale: $\Pi_0 \vec{j} = \rho_0 g s (Y_{F_0} + e) \vec{j}$

Force de traînée à l'équilibre en position verticale $F_0 \vec{i} = k v^2 \phi (Y_{F_0} + e) \vec{i}$.

Poussée d'Archimède au cours du mouvement: $\Pi \vec{j}$.

On notera \mathcal{F} et l'on appellera force de traînée réduite par rapport à la bouée:

$$\vec{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \vec{i} = \frac{k v^2 \phi}{M g} Y_{F_0} \vec{i}$$

On notera \mathcal{F}_1 la force de traînée réduite par rapport à la chaîne:

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_1 \vec{i} = \frac{k v^2 \phi}{\mu g H} Y_{F_0} \vec{i}$$

I-3. Remarques

1) le système bouée-chaîne est complètement caractérisé.

sé du point de vue géométrique par $n+1$ paramètres : à savoir les n angles θ_i et l'angle w

2) les forces extérieures prises en compte dans le présent problème sont :

- les poids des divers éléments du système
- l'action de l'eau sur le système qui y est partiellement immergé.

* Il n'y a rien à dire sur les poids des éléments du système sauf à noter que dans les cas courants de la pratique le poids de la chaîne est nettement plus faible que celui de la bouée (des rapports de 1 à 10 sont fréquents).

* Il faut souligner en revanche que devant l'extrême complexité des actions de l'eau sur le système, même en supposant que le courant dans lequel il est immergé est de vitesse V constante en grandeur et direction à grande distance de la bouée on a admis ici des simplifications très larges.

- On a supposé en effet que l'action de l'eau peut être représentée :

1) par la poussée d'Archimède s'exerçant sur la chaîne et sur la bouée.

2) par des forces de traînée appliquées soit à la chaîne soit à la bouée.

Une telle représentation n'offre pas d'inconvénients pour la détermination des positions d'équilibre. Mais elle est tout à fait contestable en régime dynamique.

L'extension au cas des mouvements envisagés plus loin, des résultats de mesures faites à l'équilibre n'est a priori pas justifiée.

On notera enfin que l'effet du vent n'a pas été pris en considération.

1-4. Enoncé du Problème et méthode de résolution

Le système considéré dépendant des $n+1$ paramètres θ_k, w , on se propose

- 1) de formuler les $n+1$ équations des petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre.
- 2) de déterminer les $n+1$ mouvements propres du système c'est à dire les mouvements dans lesquels tous les paramètres sont des fonctions du temps de la forme $a e^{\sigma t}$ avec $\sigma \neq 0$
- 3) de calculer les tensions dans les maillons de la chaîne en régime dynamique.

La méthode consiste

- à déterminer la position d'équilibre du système
- à écrire les équations de la dynamique (au nombre de $n+1$) et à linéariser ces équations
- à trouver les valeurs propres et les vecteurs propres du système auquel on est conduit lorsqu'on recherche des solutions particulières du type ci-dessus.
- enfin à calculer les tensions dans la chaîne par une nouvelle application de la loi fondamentale de la dynamique.

2. Formulation des équations du mouvement

Dans cette partie on expose comment sont déterminées les positions d'équilibre du système, puis sont obtenues les équations linéarisées de la dynamique.

2.1 - Détermination des positions d'équilibre

Résoudre le problème d'équilibre du système boué. chaîne consiste à déterminer les valeurs à l'équilibre des paramètres de position, lorsque l'on se donne l'ensemble des forces extérieures appliquées au système.

Il s'agit donc étant donné :

- une chaîne et une bouée
- une vitesse de courant V
- une profondeur de la mer H

de déterminer les n angles θ_i et l'angle w .

Mais on est également intéressé par les forces intérieures du système à savoir les n tensions de la chaîne et la force de contact au point d'attache de la chaîne sur la bouée. La résolution complète du problème conduit donc à déterminer au total $n+1 + n+2 = 2n+3$ inconnues

Il convient d'autre part d'examiner comment on a restreint l'étude des équilibres possibles à ceux pour lesquels sont réalisées les conditions

(a) $w=0$ et (b) $\theta_2=0$

Imposer a priori $w=0$ et $\theta_2=0$ revient à imposer deux relations entre les données.

Or en un lieu de mouillage déterminé (H_0 donné) pour une vitesse de courant donnée V et pour une bouée donnée les seules grandeurs sur lesquelles l'ingénieur puisse agir pour réaliser les conditions ci-dessus sont:

- la longueur de la chaîne
- son poids par unité de longueur
- le point d'amarrage de la chaîne (qui peut être déplacé le long de la barre d'attelage).

On a supposé en accord avec les habitudes de la pratique que les conditions $w=0$ et $\theta_1=0$ sont réalisées en ajustant convenablement la longueur de la chaîne et son point d'amarrage, le poids par unité de longueur étant maintenu fixe a priori.

Dans un problème d'équilibre satisfaisant aux conditions (a) et (b), les données sont en résumé la profondeur de la mer au lieu de mouillage, la vitesse

du courant, la bouée, le poids de la chaîne et son calibre, les inconnues sont $n-1$ angles θ_i , la longueur de la chaîne, la position sur la barre d'attelage du point d'amarrage, les n tensions des fils $A_{i-1}A_i$, enfin l'action de contact au point d'amarrage soit au total $2n+2$ inconnues.

On étudie ci-après successivement l'équilibre de la chaîne et l'équilibre de la bouée.

2.1.1 - Chaîne

a) Forme algébrique des forces de traînée. Les résultats d'essais au bassin des carènes permettent d'explicitier la constante k et la fonction vectorielle $\vec{F}(\theta)$.

Soit $\theta \in [0, \pi/2]$

et soit l_0 la dimension transversale d'un maillon de la chaîne.

On pose $k = \rho_0 \frac{l_0}{2}$

et l'on a alors :

$$\vec{F}(\theta) = f(\theta)\vec{t} + g(\theta)\vec{n} \text{ avec :}$$

$$f(\theta) = \cos \theta (a_1 + a_2 \sin \theta) \text{ ou } a_1 = 0,069$$

$$a_2 = 0,124$$

$$g(\theta) = -\sin \theta (b_1 + b_2 \sin \theta + b_3 \sin^2 \theta) \text{ ou}$$

$$b_1 = 0,049$$

$$b_2 = 1,273 \text{ et } b_3 = 0,637.$$

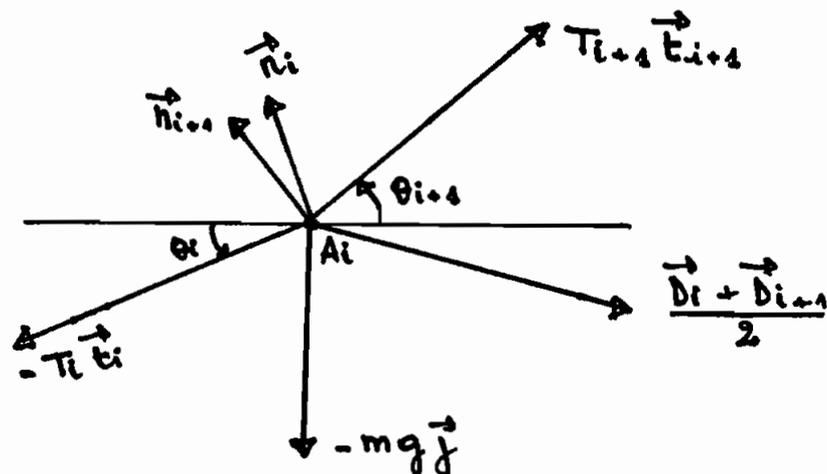
On suppose que la traînée qui s'exerce sur le maillon $A_{i-1} A_i$ se répartit également entre le nœud A_{i-1} et le nœud A_i .

On suppose donc que du fait des forces de traînée chaque nœud est soumis à la force :

$$\frac{D_i + D_{i+1}}{2} \quad (i \in \{1 \dots n-1\})$$

b) Equations de l'équilibre

Considérons d'abord les nœuds A_i ($i \in \{1 \dots n-1\}$).



l'équilibre du nœud A_i est :

$$-T \vec{e}_i + T_{i+1} \vec{e}_{i+1} - mg \vec{j} + \frac{D_i + D_{i+1}}{2} = 0$$

Projetons ces équations sur la direction des vecteurs \vec{n}_i et \vec{n}_{i+1} et posons

$$A_i = \tan \theta_{i+1} - \tan \theta_i \quad (i \in \{1 \dots n-1\}).$$

$$A_i = -\frac{n}{k} \epsilon_i \sin \theta_i - \frac{n}{n-2} \frac{1}{k} + (f(\theta_i) - g(\theta_i)) \sin \theta_i \cos \theta_i$$

$$R_i = \frac{n}{R} C_i \cos \theta_i + f(\theta_i) \cos^2 \theta_i + g(\theta_i) \sin^2 \theta_i + b_2$$

On obtient après quelques calculs les deux systèmes de chacun $(n-1)$ équations suivantes :

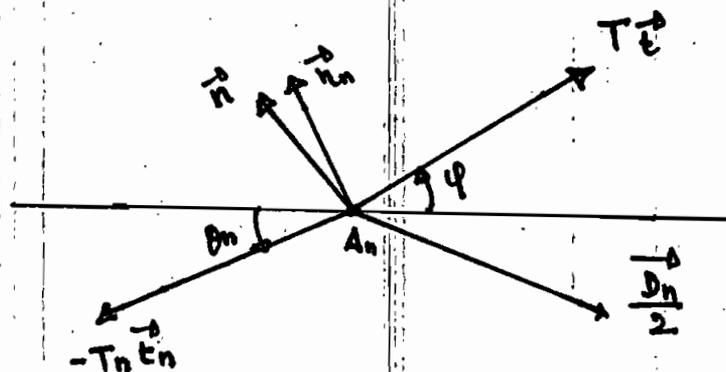
(II 1.1.) $E_1(i)$

$$C_{i+1} = \frac{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} g(\theta_i) \operatorname{tg}(\theta_i)}{\Delta_i \cos \theta_i} + \frac{1}{n} \left[-f(\theta_{i+1}) \cos \theta_{i+1} + g(\theta_{i+1}) \sin \theta_{i+1} \frac{1 + \operatorname{tg} \theta_{i+1} \operatorname{tg} \theta_i}{\Delta_i} \right]$$

(II 1.2.) $E_2(i)$

$$\operatorname{tg} \theta_{i+1} = \frac{R_i}{R_{i+1}} - \frac{b_1 + b_2 \sin \theta_{i+1}}{R_{i+1} \sin \theta_{i+1} \operatorname{tg} \theta_{i+1}}$$

Considérons à présent le noeud A_n
 Soit T_n^{\rightarrow} l'action de la bouée sur le point d'attache A_n . Cette force passe par le point A_n mais sa direction est a priori inconnue.



l'équilibre du noeud A_n est :

$$- T_n \vec{e}_n + \vec{T}_E + \frac{\vec{D}_n}{2} = 0$$

Projetons cette équation sur les directions respectives des vecteurs \vec{n}_n et sur la direction du vecteur \vec{n} normal au vecteur \vec{E} .

On obtient les deux équations suivantes :

$$(II.1.3.) E_1(n)$$

$$C = \frac{\bar{k}}{n} \frac{g(\theta_n) \operatorname{tg}(\theta_n)}{\cos \varphi (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta_n)}$$

$$(II.1.3) E_2(n): \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_n + \frac{n}{n-2} \frac{1}{k}}{B_n - b_1}$$

2.1.2. Equilibre de la bouée

Les équations de l'équilibre de la bouée en position verticale s'écrivent :

$$(II.1.5.) -Mg + \pi_0 - T \sin \varphi = 0$$

$$(II.1.6.) F_0 - T \cos \varphi = 0$$

Ces équations expriment que la somme géométrique des forces extérieures est nulle

$$(II.1.7.) y_{D_0} = d \operatorname{tg} \varphi$$

cette équation exprime que les forces passent par le centre de poussée.

Relations supplémentaires

Aux relations qui viennent d'être établies s'ajoute la relation qui définit la position du point d'attache

de long de la barre d'attelage:

$$(II.1.8.) \quad Y_{An} = d \operatorname{tg} \Psi - \phi_1 \operatorname{tg} \Psi$$

et celle qui relie la profondeur H à la hauteur du point d'attache:

$$(II.1.9.) \quad H = l \sum_{i=1}^n \sin \theta_i + Y_0 + e - Y_{An}$$

2.1.3. Résolution des équations d'équilibre

Les $2n+3$ inconnues sont reliées par les $2(n-1)+2$ équations de l'équilibre de la chaîne et par les 3 équations d'équilibre de la bouée dans lesquelles on suppose e remplacé par son expression en fonction des inconnues tirées des relations II.1.8 et II.1.9.

La complexité des équations est telle qu'il faut recourir au calcul sur machine pour les résoudre.

- Plusieurs circonstances favorables se présentent cependant.

- Observons d'abord que toute chose étant égale par ailleurs, deux chaînes de longueur différente L_1 et L_2 ont des figures d'équilibre homothétiques par rapport à l'origine O dans le rapport des longueurs. Cela résulte des équations II.1.2 à II.1.4 d'après lesquelles les tensions réduites ξ_i et ξ_0 et les angles θ_i et Ψ ne dépendent pas de la longueur l d'un maillon.

On peut donc raisonner sur des grandeurs réduites indépendantes de la longueur de la chaîne.

Remarquons, d'autre part que si l'on donne une valeur de \mathcal{E}_1 et la condition (a), la combinaison des équations II.1.1 et II.1.2. dans lesquelles on fait $i = 1$ permet de déterminer \mathcal{E}_2 et θ_2 .

Par récurrence on détermine ensuite, au moyen des équations II.1.1. et II.1.2. dans lesquelles on fait $i = 2 \dots n-1$ toutes les tensions réduites \mathcal{E}_i et les angles θ_i ($i = 2, 2 \dots n$).

Puis les équations II.1.3 et II.1.4. permettent de calculer la tension réduite \mathcal{E} et l'angle ψ .

On pourra donc exprimer \mathcal{E} et ψ en fonction de \mathcal{E}_1 .

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{E}_1) \quad \psi = \psi(\mathcal{E}_1)$$

et on déduira que \mathcal{E} et ψ sont liés par une relation de la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{R}_1(\psi)$$

Mais les équations II.1.5 à II.1.7. imposent 3 relations entre les quatre inconnues \mathcal{E}, ψ, e, d .

On déduit par élimination de e et d qu'il existe aussi une relation entre \mathcal{E} et ψ de la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{R}_2(\psi).$$

La résolution de l'équation $\mathcal{R}_1(\psi) = \mathcal{R}_2(\psi)$ donne le résultat.

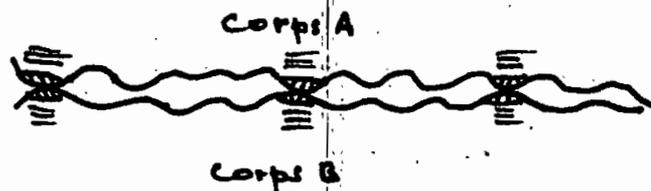
MECANISMES DE L'USURE

L'usure adhésive

Nous entreprenons là un rappel théorique des mécanismes de l'usure afin de cerner les différents facteurs dont dépend l'usure d'un matériau.

Definition

Les surfaces des corps réels comportent des aspérités dont les dimensions sont très grandes comparées à la maille atomique. Ces aspérités existent quelque soit le soin apporté à la finition des surfaces. Le contact de deux corps s'établit par l'intermédiaire de ces aspérités et l'aire réelle de contact n'est donc qu'une partie de l'aire apparente. Le contact s'établit en des zones discrètes. Le rapprochement des atomes de chacun des corps est suffisant pour donner naissance à des jonctions métalliques qui constituent de véritables soudures à froid.



Contact de deux corps métalliques

Si toutes les jonctions participent à la résistance au déplacement, certaines d'entre elles peuvent donner naissance à des débris d'usure.

Selon les propriétés mécaniques (résistance à la rupture) de la jonction par rapport à celle des matériaux A et B qui lui ont donné naissance on peut trouver les situations suivantes, principalement dans le cas du glissement.

- La jonction est plus faible que l'un et l'autre corps métallique; le glissement provoquera alors la rupture à l'interface, là où les jonctions ont été formées. La quantité de métal enlevé de l'une et l'autre surfaces sera négligeable même si la résistance au déplacement est relativement élevée.

- La jonction est plus résistante que l'un des deux métaux; la rupture aura dans la masse du métal plus faible et des fragments du métal le plus mou vont adhérer à la surface la plus dure. On dit qu'il y a transfert du matériau le plus mou sur le matériau le plus dur.

* Un cas intéressant est celui où les deux pièces en contact sont constituées de matériaux identiques. Les zones en contact sont écrouies; les jonctions possèdent des propriétés mécaniques supérieures à celles du métal original. Les ruptures se produisent rarement à l'interface et les destructions superficielles sont considérables.

* l'évolution de la perte de masse au cours du temps

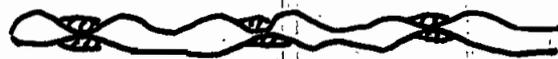
ne peut être complètement interprétée à l'aide de ces lois car d'autres phénomènes peuvent intervenir (oxydation, adsorption, lubrification) ainsi que les différents facteurs de l'usure (mode de contact, charge, vitesse, ambiance, nature des matériaux etc.). Essayons de voir rapidement l'influence de ces différents facteurs.

Influence de la charge

En faisant croître la charge à partir de valeurs faibles on observe généralement des variations très rapides du taux d'usure à partir de certaines charges. L'existence de ces seuils a été observée dans des conditions expérimentales variées sur les couples suivants acier doux/acier dur; or/or; cuivre/cuivre; acier/acier et fonte/acier.

Les seuils qui s'accompagnent de changements dans la taille et la nature des particules transférées sont dus à la destruction des surfaces sous l'effet de l'augmentation des contraintes ou leur transformation sous l'effet des échauffements superficiels.

(a) Contact sous faible charge



(b) Contact sous forte charge



Si l'on étudie en se plaçant au dessous d'un seuil de transformation la perte de masse résultant du glissement d'une surface sur une autre on observe que dans un grand nombre de cas le volume enlevé V est proportionnel à la charge P et à la distance de glissement L

$$V = k_1 P \cdot L \quad (1)$$

Cette équation a pu être établie par le calcul à partir d'hypothèses simplificatrices et s'écrit

$$V = k \frac{P \cdot L}{HB}$$

H.B (dureté Brinell)

k et k_1 : taux d'usure.

Burwell et Strang l'ont vérifié en mesurant le raccourcissement h d'un frotteur conique

$$(1) \quad V = k_1 P \cdot L$$

$$\frac{V}{A_0} = k_1 \frac{P \cdot L}{A_0}$$

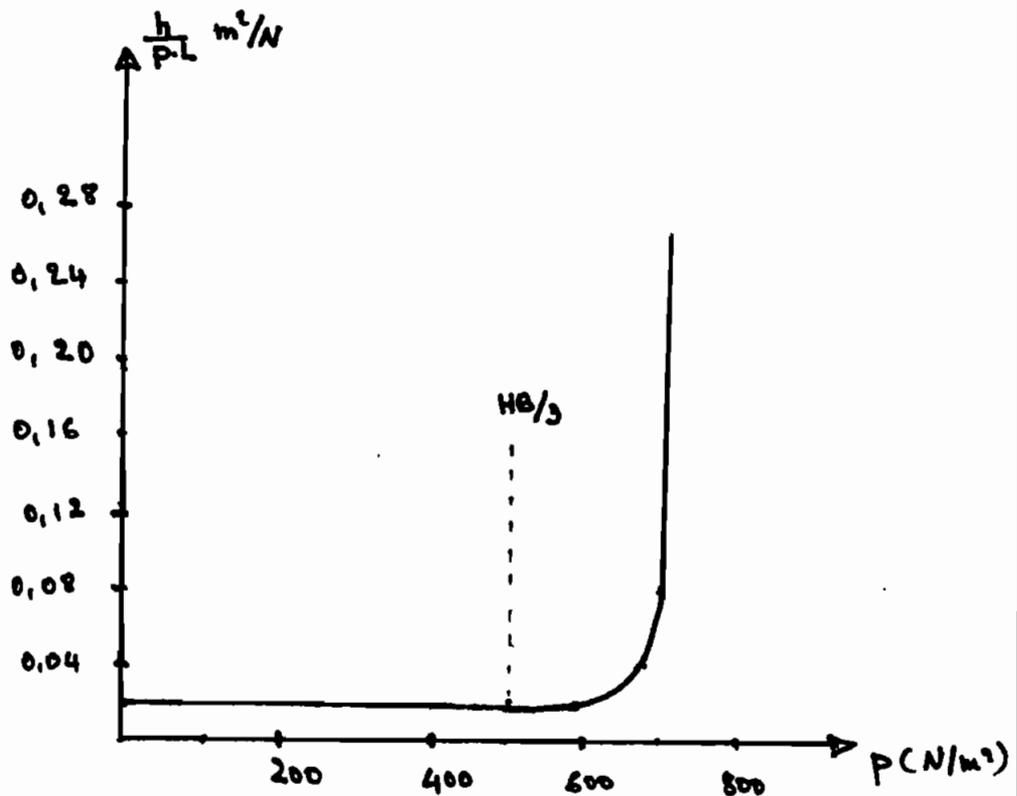
$$h = k_1 p \cdot L$$

$$\frac{h}{p \cdot L} = k_1 = \frac{k}{HB} = \text{constante.}$$

$$\frac{h}{L \cdot p} = \text{constante}$$

Or si l'on trace la courbe montrant la variation de $h/p \cdot L$ en fonction de p on constate qu'elle

se décompose en deux parties.



- Pendant la première moitié, la quantité $h/p.L$ est indépendante de p , alors V est proportionnel à P .
- Dans la deuxième partie de la courbe toutes les aspérités sont déjà en contact du fait de l'augmentation de la charge; alors un accroissement supplémentaire de la charge se traduit par un accroissement de la taille des jonctions.

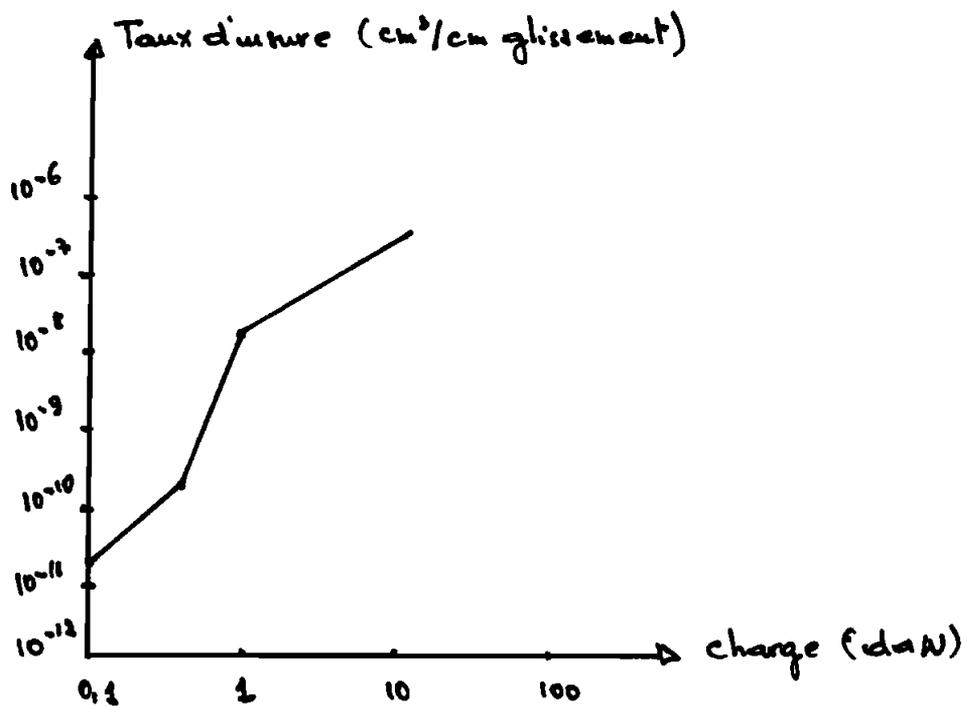
La pression critique est de l'ordre de $\frac{1}{3}$ de la dureté Brinell.

On suppose que dans de telles conditions les particules transférées qui sont d'une taille importante partici-

peut aller aussi à la destruction des surfaces.
De telles courbes montrent le danger que présentent certaines pressions exagérées lors du fonctionnement de certains dispositifs mécaniques.

Si certains seuils sont franchis le taux d'usure peut être multiplié par 1000 et les surfaces peuvent être irréremédiablement détruites.

En dessous d'une certaine charge critique l'usure est pratiquement nulle.



Evolution du taux d'usure en fonction de la charge pour un contact ponctuel entre un cône en laiton et un cylindre en saphire.

La figure ci-dessus montre l'allure générale de la variation du taux d'usure en fonction de la charge. Les pentes des différentes portions de droite varient d'un matériau à l'autre.

Influence de la vitesse de glissement

(à charge faible)

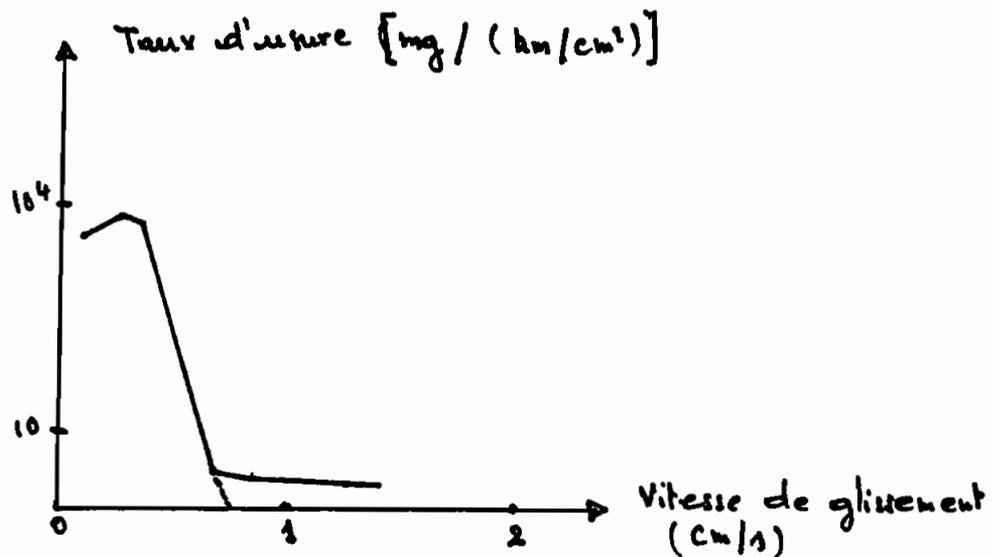
Le principal effet de la vitesse de glissement est d'agir sur la température superficielle, la température maximale atteinte étant celle du métal qui a le plus bas point de fusion. Si la charge était faible n'entraîne pas de destruction immédiate, l'accroissement de température aura pour effets :

- de créer des points chauds, ce qui accroît la réactivité des surfaces et des produits d'usure vis à vis du milieu environnant et donne de l'importance à toutes les réactions d'oxydation qui peuvent se produire au cours des glissements dans l'air.
- d'accroître (du fait des chauffages et refroidissements rapides) l'importance des changements structuraux et probablement la diffusion des éléments. Ainsi dans le cas des aciers on peut trouver des transformations de type martensitique.
- de favoriser (par la température élevée) la diffusion des éléments d'une pièce dans l'autre et la formation

d'alliages à l'interface.

- de produire, à haute température, des fusions de zones superficielles.

Sur la figure suivante on a montré les résultats concernant l'usure du fer lorsqu'il glisse sur lui-même



Fer Armco glissant contre lui-même

Dans l'air à partir de 0,9 m/s le taux d'usure est divisé par 500. En dessous de cette vitesse critique les surfaces sont endommagées et présentent de grands arrachements. Au dessus l'arrachement est remplacé par le polissage, à 0,9 m/s le calcul montre que le taux d'usure lorsque l'élévation de la température superficielle est de 1000°C, est très faible même en dessous de la vitesse critique déterminée ci-dessus. Mais si on refroidit les éprouvettes le taux d'usure

reste élevé au dessus de cette vitesse.

Influence de l'ambiance

La perte de masse d'une pièce frottante dépend du nombre de jonctions métalliques et de leur taille. Le milieu ambiant tend à accélérer ou ralentir le phénomène suivant qu'il favorise ou défavorise l'existence de jonctions métal-métal.

Certains gaz peuvent réagir avec des surfaces métalliques en formant des films d'oxyde qui souvent résistent à l'usure adhésive. Ainsi l'oxygène réagit avec les surfaces métalliques en donnant des films qui diminuent le taux d'usure.

Le frottement des organes mécaniques a lieu en général en présence de lubrifiants, dont l'un des rôles parmi les plus importants est de diminuer le nombre et la taille des jonctions métalliques en constituant des films protecteurs et en supportant une partie de la charge.

Influence de la structure et de la nature des matériaux

Les études concernant les corrélations entre l'endommagement et la solubilité ont permis de formuler les conclusions suivantes :

a) les métaux mutuellement solubles lorsqu'ils glissent

d'un sur l'autre grippent fortement par exemple les couples Al/Al, Al/Fe etc...

b) les métaux mutuellement insolubles ont une bonne résistance au grippage par exemple le couple Fe/Ag.

c) les métaux formant des composés intermétalliques ont une résistance, car ils forment des composés fragiles facilement cisillables. c'est le cas de l'étain, l'antimoine avec le fer.

Conclusion

Si l'on veut dans une situation donnée diminuer l'usure adhésive, on peut :

- régler la charge et la vitesse de glissement pour être en régime de glissement modéré.
- Choisir des métaux ayant une bonne dureté et qui soient mutuellement insolubles.
- Utiliser un lubrifiant efficace, c'est à dire pouvant former un film évitant les contacts métal-métal.

Nous allons exposer très brièvement deux formes d'usure qui semblent se superposer à l'usure adhésive que nous venons d'étudier.

Il s'agit de l'usure érosive et de l'usure corrosive.

A - L'usure érosive

L'usure érosive est la perte de matières d'une surface solide due au contact avec un fluide en mouvement contenant des particules solides.

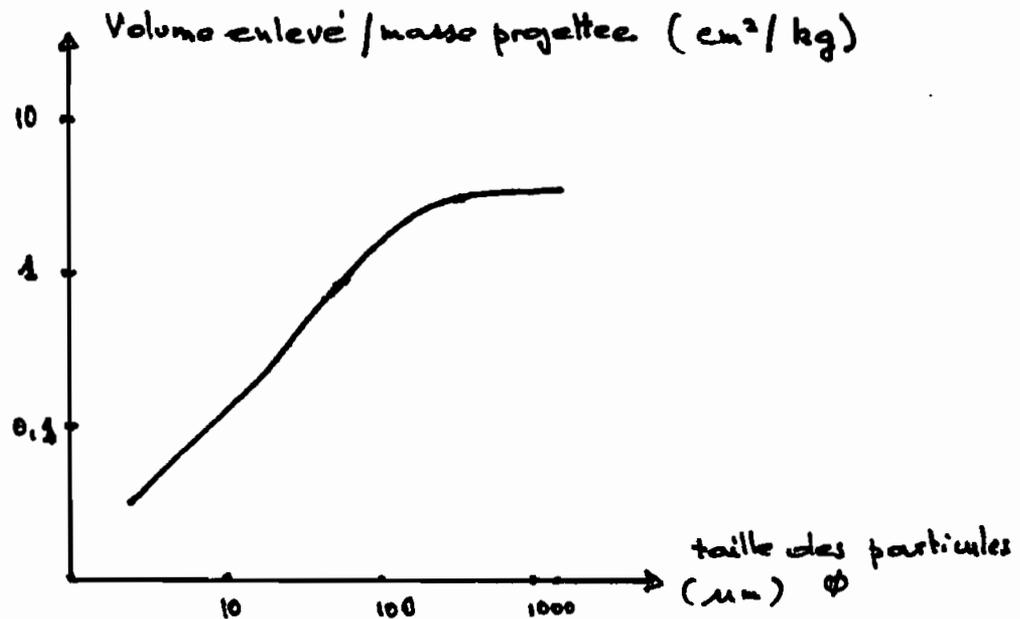
L'usure érosive se manifeste sur les matériaux fragiles par des éclats et des fissures et sur les matériaux ductiles par des piqures, des polissages, des rayures et des copeaux.

a - influence de la taille des particules

- Quand la taille des particules croît de 5 à 100 μm la perte de matière croît rapidement suivant une loi linéaire.

- Pour des particules dont la taille est supérieure à 100 μm la perte de masse est indépendante de la taille des particules.

Cette loi est intéressante car en pratique il est plus difficile de filtrer les petites particules que les grandes.



b- influence de la vitesse

- La perte de masse par érosion augmente lorsque la vitesse des particules augmente (Accroissement énergie cinétique)

c- influence de la nature du matériau

la perte de masse de différents échantillons métalliques par érosion diminue quand la dureté des matériaux augmente.

Conclusion

Pour lutter contre l'usure érosive il faut accroître la dureté des matériaux et filtrer le fluide porteur pour éliminer les particules de grande taille.

L'usure corrosive

Elle se définit comme un processus d'usure dominé par une réaction chimique ou électrochimique avec le milieu ambiant.

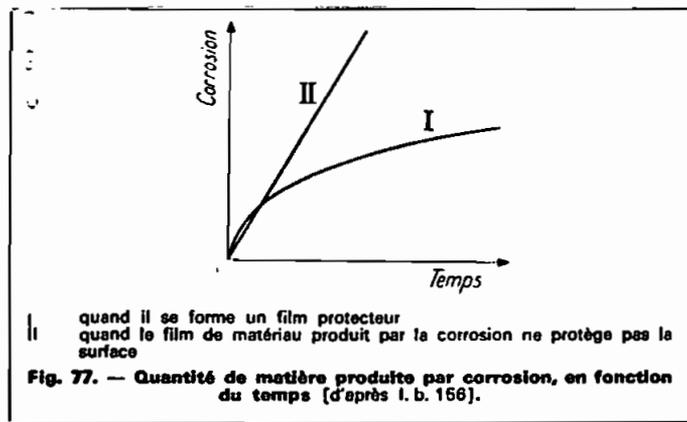
Cette forme d'usure qui a été peu étudiée est en général modérée. Elle peut cependant devenir très prononcée surtout aux températures élevées ou dans des atmosphères humides.

Dans certains cas, il y'a d'abord une réaction chimique suivie d'un enlèvement des produits de corrosion par une action mécanique. Le processus comprend donc deux stades distincts :

- a) il se produit une corrosion des surfaces métalliques selon les processus classiques de corrosion
- b) le film de matériau corrodé est enlevé lors du mouvement relatif des pièces en contact, le matériau sous-jacent est mis à nu et le processus recommence.

Selon la nature du film superficiel on peut schématiquement prévoir deux types de destruction :

- si le film est fragile, c'est le cas de nombreux oxydes, il est enlevé dès que son épaisseur devient grande.
- si le film est ductile, c'est le cas de certains sulfures, le cisaillement se produira dans l'épaisseur du film et le taux d'usure sera faible (fig 77)



Cette figure montre l'évolution du taux de corrosion selon qu'il se forme un film protecteur (courbe I) ou qu'il ne se forme pas de film protecteur (courbe II)

L'usure abrasive

L'usure abrasive est définie comme étant l'usure par déplacement de matières, produite par des particules dures ou des protuberances dures. Les particules dures peuvent se trouver entre les deux surfaces en mouvement relatif ou être encastrées dans l'une des surfaces.

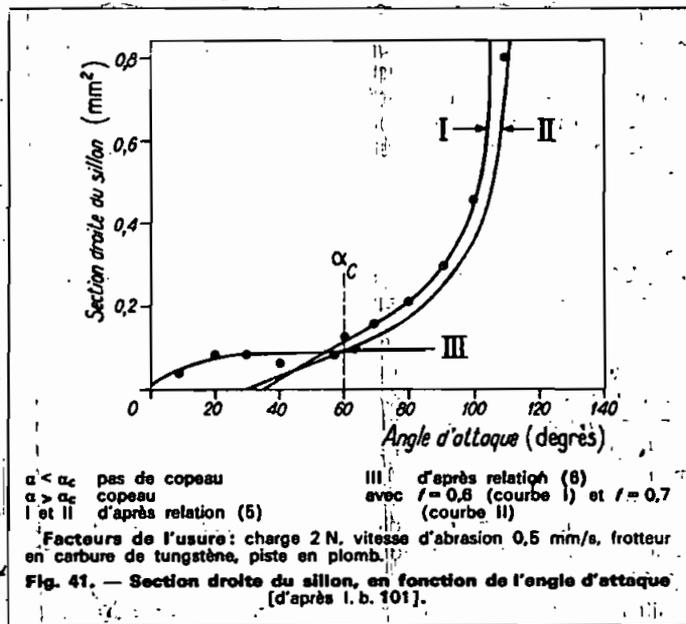
Elle se manifeste par des polissages, des griffures, des arrachements de copeaux. Les conditions principales d'obtention de l'abrasion sont les suivantes :

- a) les particules abrasives doivent être plus dures que la surface abrassée. L'usure abrasive se produit facilement si la dureté Vickers des particules est une fois et demi celle de la surface abrassée.
- b) la particule doit avoir des coins ou des angles aigus et être convenablement orientée.

Pour résumer les principaux résultats expérimentaux présentés dans la littérature nous allons voir l'effet des paramètres suivants : orientation géométrique, taille des particules, abrasion en circuit ouvert ou fermé, charge, vitesse, environnement, nature des matériaux.

1) Effet de l'orientation géométrique des particules abrasives

L'effet de l'orientation des particules est mis en évidence par l'expérience fondamentale suivante: Une tige à pointe pyramidale raye sous une charge donnée la surface plane d'un échantillon métallique. Le déplacement de la tige s'effectue parallèlement à la surface. On trace la courbe montrant l'évolution de la section droite de la rayure en fonction de l'angle d'inclinaison α de la face d'attaque du frotteur par rapport à la surface plane. On obtient alors la courbe suivante :



L'observation de la figure permet de constater:

- A partir d'un certain angle critique de une augmentation brusque de la largeur de la rayure se produit ainsi que l'apparition d'un copeau. On passe du repoussage à l'usinage, c'est à dire de la déformation par rayure à la production d'un copeau.

Les auteurs ont établi par le calcul les formules donnant l'aire de la section droite de la rayure.

Quand il y a production d'un copeau, on utilise la théorie de la coupe de Merchant dans laquelle on considère que le copeau est en équilibre stable sous l'action d'un système de forces qui est représenté sur la figure suivante:

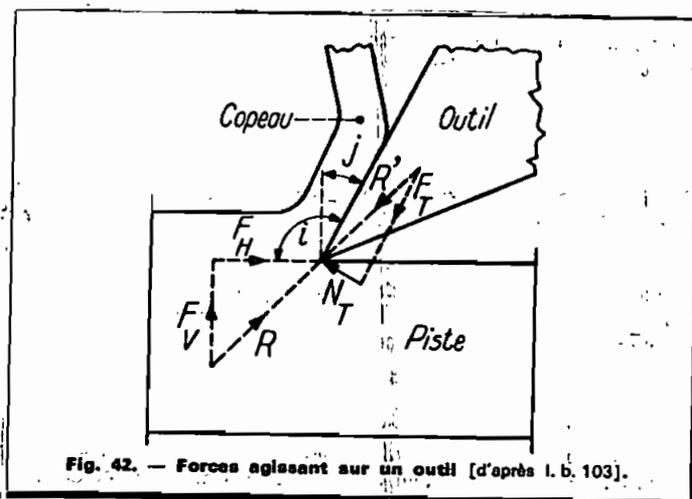


Fig. 42. — Forces agissant sur un outil [d'après I. B. 103].

En supposant que $F_v = P$ et que $F_H = C \cdot HM \cdot A$
comme $f = \frac{F_T}{N_T}$

la largeur de la rayure A s'écrit

$$A = \frac{P}{C \cdot HM} \left(\frac{1 + f \operatorname{tg} i}{f - \operatorname{tg} i} \right)$$

P = charge

C = constante géométrique

HM = dureté Meyer

f = coefficient de frottement.

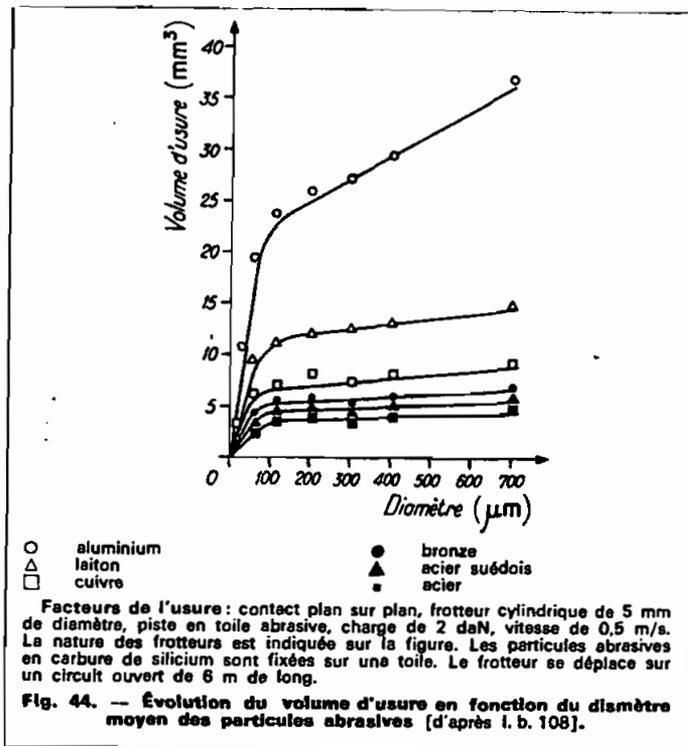
Quand il y a formation d'une rayure sans enlèvement de métal, la force de frottement est la somme de deux termes. Le premier représente la force nécessaire pour cisailer les jonctions superficielles, le second la force nécessaire pour produire une rayure. la largeur de la rayure dans ce cas est donnée par la formule:

$$A = \frac{f \cdot P}{C \cdot \sigma \operatorname{cotg} i + C \cdot HM}$$

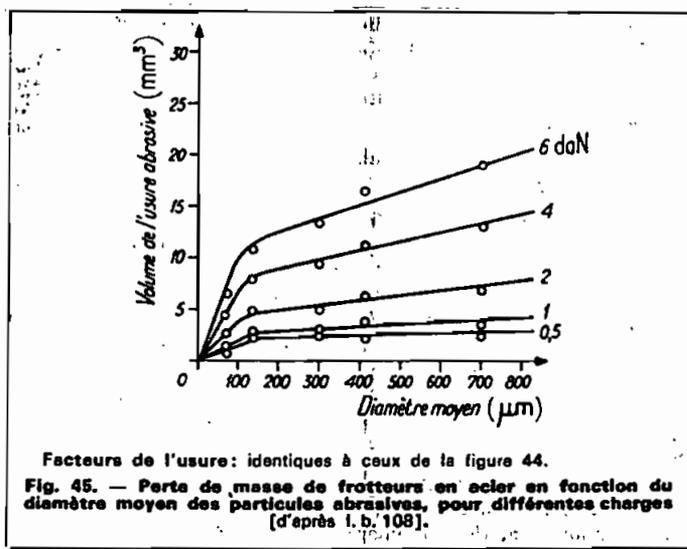
avec σ la résistance au cisaillement de la piste

2. Effet de la taille des particules abrasives

Si l'on étudie l'effet de la taille des particules abrasives sur l'abrasion des métaux, on observe pour une charge donnée deux parties principales linéaires sur la courbe qui représente le phénomène. Pendant la première partie, la perte de masse augmente rapidement quand la taille moyenne des particules croît de 35 à 70 μm ; puis au delà de 150 μm , la croissance est beaucoup plus lente. (voir figure ci-dessous). L'existence de particules d'usure diminue l'efficacité des particules abrasives, d'autant plus que ces dernières sont plus petites. (fig 44)



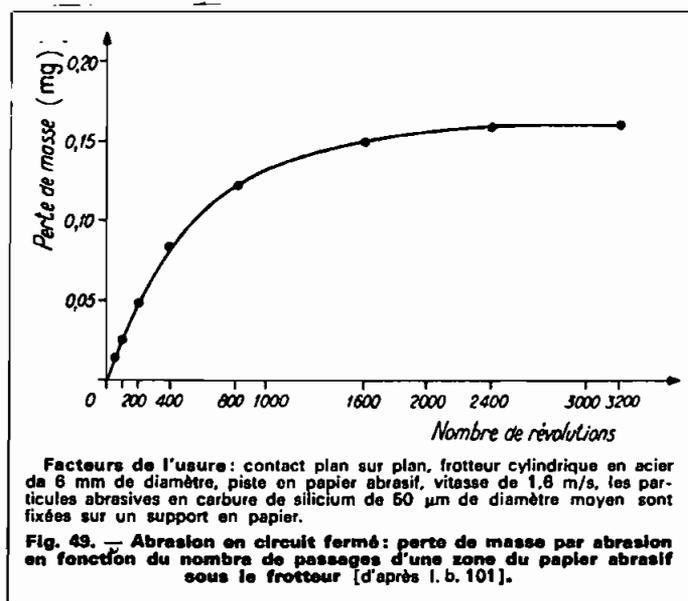
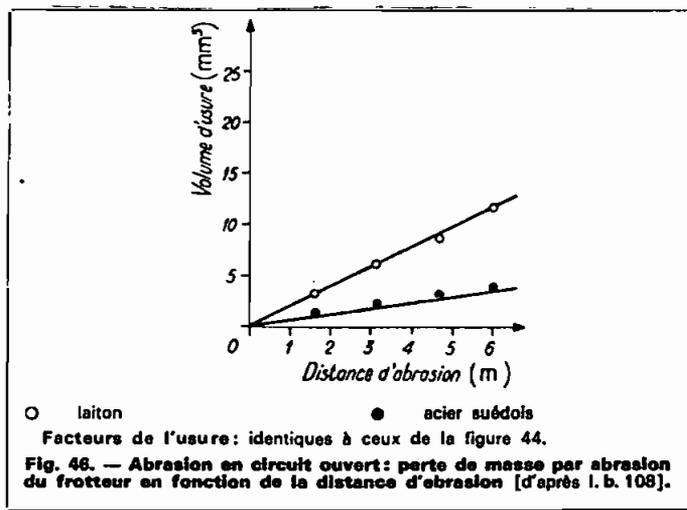
La différence de pente entre les deux parties des courbes de la figure ci-dessus augmente avec la charge comme on le voit sur la figure ci-dessous. Pour des faibles charges, l'usure abrasive est presque indépendante de la taille des grains. Il en résulte que si on veut faire des essais comparatifs de résistance des métaux à l'usure abrasive, il faut que la charge soit faible et la taille des particules grandes.



3) Comparaison entre l'abrasion en circuits ouverts et fermés

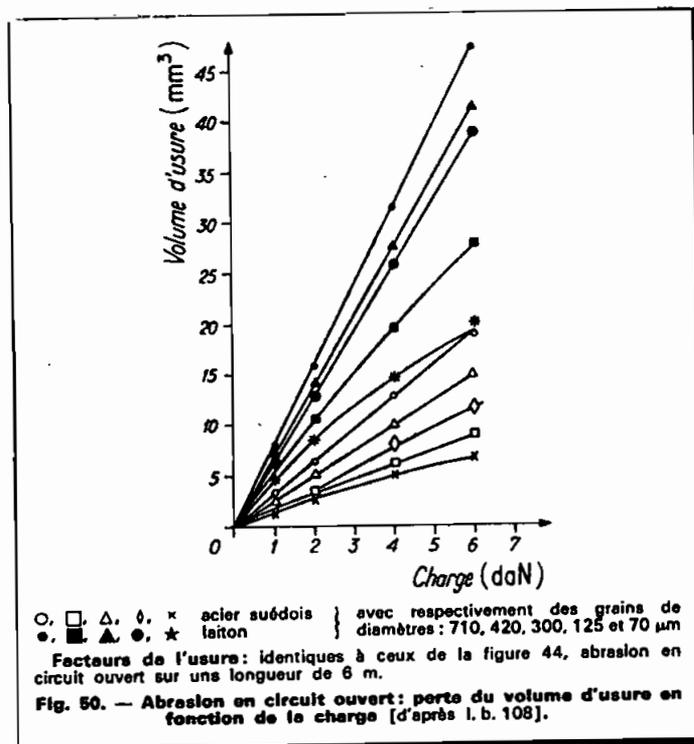
En circuit ouvert, la perte de masse par abrasion croît linéairement avec la distance d'abrasion, car le frotteur rencontre une surface fraîche dont les caractéristiques sont constantes. (voir fig 46)

En circuit fermé, les particules abrasives s'éroisent et les débris d'usure tendent à s'accumuler entre les particules abrasives, ce qui fait que l'abrasion diminue et finit par devenir très faible après plusieurs passages (figure 49). De plus les particules abrasives peuvent s'enfoncer dans le frotteur et accroître sa dureté superficielle.



4) Influence de la charge

Pour un grand nombre de matériaux, la perte de masse est une fonction linéaire croissante de la charge. Pour les fortes charges, cette observation n'est plus valable car les particules abrasives s'enfoncent trop profondément dans le frotteur et sont déchaussées sous l'effet du déplacement du frotteur, ce qui entraîne la détérioration de la toile abrasive et la diminution de l'usure abrasive du frotteur. (Voir figure 50) ci dessous



5 - influence de la vitesse

La perte de masse par abrasion augmente légèrement avec la vitesse d'abrasion. Cet accroissement est attribué à une baisse des caractéristiques mécaniques sous l'effet de l'échauffement provenant de l'accroissement de la vitesse

6 - influence de l'ambiance

Un liquide a pour effet de chasser les débris d'usure, ce qui favorise la conservation des particules d'usure abrasive. La vapeur d'eau aurait le même effet

7 - influence de la nature des matériaux

La résistance à l'usure est une fonction linéaire croissante de la dureté. Le coefficient de proportionnalité n'est pas le même pour les métaux purs et les aciers (voir figure

Sur la figure 53, on a porté la résistance relative à l'usure qui est le rapport de l'usure linéaire d'un échantillon standard δ_s à celui de l'échantillon étudié δ_e :
$$E = \frac{\delta_s}{\delta_e}$$

Si l'on cherche à augmenter la résistance à l'abrasion en accroissant la dureté, on observe que le meilleur résultat est obtenu en incorporant à l'acier

des éléments d'alliage (figure 54). Ce qui donne à ce résultat une grande importance économique pour nous qui cherchons à limiter l'usure.

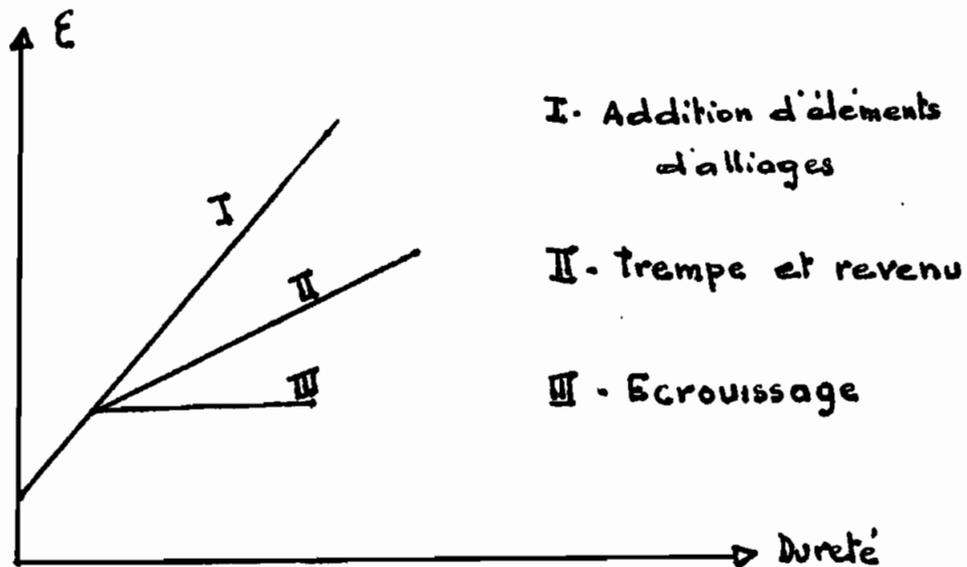


fig 54

8- Conclusion sur l'usure abrasive

Pour lutter contre l'usure abrasive, il faut utiliser des matériaux durs dont la dureté devrait être supérieure à celle des particules abrasives, et éventuellement diminuer la charge. Pour augmenter la résistance à l'usure en augmentant la dureté il est plus économique d'avoir recours à l'addition d'éléments d'alliages plutôt que des traitements thermiques ou autres durcissements mécaniques.

Conclusion générale sur l'usure

L'usure considérée dans son sens le plus large peut être due à plusieurs processus physiques, chimiques et mécaniques indépendants. Les chercheurs proposent des schémas différents parce que chacun veut mettre en évidence un point de vue particulier. En fait l'usure considérée comme un phénomène global est très difficile à décrire sous forme quantitative. Les différentes approches théoriques le sont à partir d'hypothèses très simplificatrices. L'une des principales difficultés dans l'étude de l'usure des matériaux couramment utilisés est que les couches superficielles sont mal connues. Le processus de glissement lui-même peut changer la nature des surfaces, soit par écrouissage, soit en modifiant leur rugosité, soit en produisant de nouvelles phases ou alliages, ou encore de nouvelles structures à l'interface.

Dans le cas qui nous concerne spécifiquement il est difficile de cerner le mode d'usure réel qui se produit tellement la dynamique du système est complexe. Cependant on peut affirmer avec certitude que c'est l'usure corrosive qui prédomine pour les raisons suivantes :

- D'après des tests effectués par la garde cotière

canadienne sur des matériaux ayant une plus grande dureté on n'a pas obtenu de meilleurs résultats. Ce qui signifie que nous sommes en présence d'un type d'usure qui est indépendant de la dureté du matériau

- Les taux d'usure relevés sur les maillons usés sont pratiquement constants pour tous les calibres de chaîne. Ce type d'usure apparaît donc comme étant indépendant de la tension dans la chaîne

- La partie de la chaîne qui repose au fond, donc presque immobile se corrode certes mais s'use beaucoup moins parce que les films de corrosion formés ne s'enlèvent pas faute de glissement.

Ces trois raisons nous amènent à dire que le type d'usure ne correspond ni à l'usure adhésive ni à l'usure abrasive, ni à l'usure érosive car les différents facteurs influençant ces modes d'usure n'affectent pas ce type d'usure.

Dès que nous nous sommes aperçus qu'il s'agissait d'usure corrosive, bien que tard, nous avons pensé à une autre approche du problème parce que le manque d'informations quantitatives sur ce mode d'usure.

Ainsi nous avons pensé compte tenu du taux d'usure presque constant sur les différentes chaînes et des coûts

d'omencé très élevés, à prévoir une allocation d'œuvre qui nous permettrait de renouveler ~~en~~ nous souvent les chaînes.

Cette allocation d'œuvre qui est en fait un surdimensionnement de la chaîne permet d'aboutir à des résultats économiquement très intéressants que nous allons vous présenter

Etude économique de l'allocation pour usure

L'idée consiste à mettre une chaîne de calibre plus grand là où il était prévu initialement une chaîne de calibre inférieur.

Présentons d'abord les coûts des chaînes selon leur calibre ainsi que les durées de vie constatées

Diamètre d_0 (mm)	Prix d'Achat par mètre	Frais Amortissement par mètre	Coût de la manille	Durée de vie
25	8510 ^F	11562 ^F	14.500 ^F	1,5 an
30	11500 ^F	11.562 ^F	16550 ^F	2 ans
35	14775 ^F	11.562 ^F	27.050 ^F	2 ans
40	20.000 ^F	11.562 ^F	40.000 ^F	3 ans

Notation

d_0 = diamètre initial nominal

d_f = diamètre limite

P.A. = Prix d'achat

F.A = Frais d'Aménage (transport + transit)

C.T. = coût total = PA + FA

CTM = coût total avec manille = PA + FA + CM

CM = coût manille.

D = durée de vie

ξ = taux d'usure

On étudie le cas où on n'utilise pas de manille d'abord.

Pour une brève donnée on connaît le calibre de la chaîne qui lui est prévue. On cherche maintenant un diamètre supérieur qui pourrait conduire à une charge annuelle plus basse. Soit d_f ce diamètre

d_f est égal à $3/5$ du diamètre initialement prévu.

$$\text{Durée de vie } D = \frac{d_o - d_f}{\xi}$$

$$CT = PA + FA$$

Le coût par an de la chaîne est C_{An}

$$C_{An} = \frac{CT}{D} = \frac{CT \cdot \xi}{d_o - d_f} = \frac{(PA + FA) \xi}{d_o - d_f}$$

PA est une fonction du diamètre d_o que l'on note $F(d_o)$

$$C_{An} = \frac{[F(d_o) + FA] \xi}{d_o - d_f}$$

et dans cette formule FA , G et df sont des constantes pour un type de bouée donné.

Cette formule de CA_n est une fonction de d_0 que l'on peut dériver pour essayer un minimum. Mais nous n'avons pas de relation exacte entre le coût de la chaîne et son diamètre ce qui nous aurait permis de savoir quel diamètre correspond à un coût annuel minimal. Nous pensons toutefois que la fonction $F(d_0)$ pourra être connue auprès des fournisseurs ou alors à partir de plusieurs valeurs essayer de tracer un polynôme de régression.

Mais nous avons voulu obtenir des estimations chiffrées de l'économie réalisée par un tel procédé.

Nous considérons pour cela l'exemple réel suivant:

Si au lieu d'utiliser une chaîne de calibre 25mm on utilise à la place une chaîne de 35mm. la chaîne de 25mm doit durer 1,5 an s'il n'y a pas de manille et 3ans avec une manille intermédiaire. la limite d'utilisation est atteinte lorsqu'on le diamètre aura atteint $\frac{3}{5}$ de sa valeur initiale soit 15mm. donc si on utilise une chaîne de 35mm la marge est de $(35-15) = 20mm$ soit le double de la marge qu'on a avec une chaîne de 15mm. donc avec un taux d'usure à peu près constant on devrait obtenir une durée de vie au moins égale

au double de celle qu'on a avec un calibre de 25mm.
Faisons à présent une comparaison économique.

$$\phi 25 \text{ mm} : CT = 8510^{\text{F}} + 11562^{\text{F}} = 20.072^{\text{F}}/\text{m}$$

$$\phi 35 \text{ mm} : CT = 14775^{\text{F}} + 11562^{\text{F}} = 26.337^{\text{F}}/\text{m}.$$

Pour une chaîne de longueur moyenne égale à 25m
ce qui est généralement le cas on a:

$$\phi 25 \text{ m} : CT = (8510^{\text{F}}/\text{m} + 11562^{\text{F}}/\text{m}) \times 25 \text{ m} = 501800^{\text{F}}$$

$$\phi 35 \text{ m} : CT = (14775^{\text{F}}/\text{m} + 11562^{\text{F}}/\text{m}) \times 25 \text{ m} = 658425^{\text{F}}$$

Donc

avec $\phi 25 \text{ mm}$ on dépense 501800^{F} pour 1,5 ans

avec $\phi 35$ on dépense 658425^{F} pour 3 ans

d'où

$$CA_n(\phi 25) = \frac{501800^{\text{F}}}{1.5} = 334530^{\text{F}}/\text{An}$$

$$CA_n(\phi 35) = \frac{658425^{\text{F}}}{3} = 219475^{\text{F}}/\text{An}$$

soit une économie de $\frac{334530^{\text{F}} - 219475^{\text{F}}}{334530^{\text{F}}} = 34\%$

Avec une manille intermédiaire on a

$$CTM = 501800^{\text{F}} + 14500^{\text{F}} = 516300^{\text{F}}/3 \text{ ans } (\phi 25)$$

$$CTM = 658425^{\text{F}} + 27050^{\text{F}} = 685475^{\text{F}}/6 \text{ ans } (\phi 35)$$

d'où

$$CA_n M(\phi 25) = \frac{516300^{\text{F}}}{3} = 172100^{\text{F}}/\text{an}$$

$$C_{AnM} (\phi 35) = \frac{685475}{6 \text{ an}} = 114245 \text{ F/an}$$

soit également une économie de : $\frac{172100 \text{ F} - 114245 \text{ F}}{172100 \text{ F}}$.

soit 34%

Donc nous voyons que par ce procédé très simple on parvient à réaliser des économies de 34%. Si l'on tient au nombre de heures (environ 180) ceci représente plusieurs millions de francs d'économie.

Conclusions et Recommandations

Il ressort de l'étude que nous avons faite que pour l'immediat les études doivent être orientées vers l'amélioration de la gestion et de l'utilisation des lignes d'amarrage plutôt qu dans la recherche systématique d'un matériau de substitution.

En effet la recherche d'un matériau de substitution ne peut faire l'objet d'une étude à court terme comme nous avons voulu le faire dans la plus grande partie de notre étude pour les raisons suivantes :

- le mode d'usure en question n'est pas étudié de façon quantitative et il le serait difficilement à cause du nombre élevé de paramètres aussi difficiles à saisir qu'à évaluer et qui ont une grande influence sur la corrosion des matériaux; la température, la pression, la nature du milieu, sa teneur en sel, la vitesse de glissement des maillons les uns sur les autres, les micro-organismes marins etc... en sont des exemples. l'absence de ces informations ne permet pas de prévoir le comportement du matériaux sous le temps et éventuellement faire un choix.
- la connaissance même théorique de ces informations n'aurait pas suffi. Il faut effectuer des tests sur les matériaux dont on a une présomption de résistance à l'usure corrosive et faire une évaluation des

résultats de ces tests. Ces tests devaient s'établir sur plusieurs années, à divers endroits et éventuellement pour différents matériaux.

Par contre une amélioration et de l'utilisation des chaînes peut aboutir à des économies considérables comme en témoignent les résultats que nous avons obtenus. Il est nécessaire d'étudier en fonction des coûts les diamètres optimaux pour chaque type de bouée même au prix d'un surdimensionnement.

On pourrait également voir si en augmentant le nombre de mailles intermédiaires certaines parties ne pourraient pas être utilisées plus longtemps.

Il faudrait aussi renoncer au remplacement systématique en procédant à une inspection maillon par maillon et éliminer seulement les parties usées.

On pourrait également penser à remplacer le système d'ancrage par un corps mort par un autre procédé qui nécessiterait moins de résistance pour la chaîne lors de la levée pour l'inspection.

Les types de maillons actuellement en service sont trop mobiles et il pourrait être intéressant de les changer. L'intervalle des inspections devrait être réduit parce qu'une seule inspection présente l'inconvénient de ne pas pouvoir laisser en service une chaîne qui pourrait

tenir encore quelques mois mais moins d'un an.
Il s'avère donc plus que nécessaire d'établir un plan d'inspection et de remplacement pour chaque chaîne ou portion de chaîne ce qui permettrait de savoir avec précision la période durant laquelle la chaîne devrait s'user suffisamment.

La méthode de cimentation nous paraît très bonne. En fait il ne s'agit pas de cimentation à proprement parlé, mais d'un simple renforcement par soudage et donc il n'y aurait rien à recommander à ce sujet.

Nous avons également pensé à la possibilité de remplacer les chaînes par des lignes continues comme des câbles. Cette solution présente beaucoup d'inconvénients liés à son manque de souplesse; ce qui induirait des contraintes plus grandes. Il y a aussi que les câbles sont constitués de plusieurs fils torsionnés très exposés à la corrosion surtout dans l'eau. La corrosion dans les câbles commence par les fils internes et ceci rend difficile les inspections. Par contre un câble présente l'avantage d'être moins cher que la chaîne à résistance égale. Il pourrait donc faire l'objet de tests.

Pour terminer nous dirons simplement que nos recommandations pour l'instant portent sur l'optimisation de l'utilisation des dispositifs d'amarrage. Par

conséquent il est indispensable de faire des tests sur différentes combinaisons de portions de chaînes et pour différents types de matériaux. Pour cela nous recommandons fortement au Service des Phares et Balises de se doter de quelques bouées d'essai. Ces bouées qui pourraient être en matériau bon marché (Polyester ou autre) seraient implantées dans un endroit facilement accessible et serviraient aux essais sur de nouveaux matériaux et aussi sur de nouveaux dispositifs. C'est ce qu'a sans doute compris la garde Côtière Canadienne qui confrontée aux mêmes problèmes ne s'est pas lancée dans la recherche systématique d'un matériau de remplacement comme elle pourrait le faire avec les moyens énormes dont elle dispose, elle s'efforce plutôt à améliorer ses dispositifs d'amarrage en associant à son expérience propre celle des autres institutions qui travaillent dans le domaine.

Bibliographie

- 1) Dynamique linéaire des bouées et de leurs lignes d'amarrage (Service des Phares et Balises)
- 2) Techniques de l'ingénieur (Volume B)
- 3) Influence of metallurgy on machinability (American Society for Metals)
- 4) Handbook of Materials

ANNEXES

Méthode de résolution des équations
régissant l'équilibre bouée-chaîne

Remarquons, d'autre part, que si l'on donne une valeur initiale de \mathcal{E}_1 et la condition (a), la combinaison des équations II.1.1. et II.1.2. dans lesquelles on fait $i = 1$ permet de déterminer \mathcal{E}_2 et θ_2 .

Par récurrence on détermine ensuite, au moyen des équations II.1.1. et II.1.2. dans lesquelles on fait successivement $i = 2, n - 1$ toutes les tensions réduites \mathcal{E}_i ($i = 3 \dots n$) et les angles θ_i ($i = 3 \dots n$).

Puis les équations II.1.3. et II.1.4. permettent de calculer la tension réduite \mathcal{E} et l'angle φ .

On pourra donc exprimer \mathcal{E} et φ en fonction de \mathcal{E}_1

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{E}_1) \quad \varphi = \varphi(\mathcal{E}_1)$$

et on déduira que \mathcal{E} et φ sont liés par une relation de la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{R}_1(\varphi)$$

Mais les équations II.1.5. à II.1.7. imposent 3 relations entre les quatre inconnues $\mathcal{E}, \varphi, e, d$. On déduit par élimination de e et d qu'il existe aussi une relation entre \mathcal{E} et φ de la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{R}_2(\varphi)$$

La résolution de l'équation $\mathcal{R}_1(\varphi) = \mathcal{R}_2(\varphi)$ donne le résultat.

2.2. - Formulation des équations des petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre

Le présent paragraphe est décomposé en six sous paragraphes :

- On montre d'abord qu'il existe un système de paramètres adapté au problème ;
- On étudie ensuite les forces extérieures appliquées à la chaîne puis à la bouée ;
- On écrit les équations des petits mouvements ;
- On examine l'influence d'une variation harmonique de faible amplitude du niveau de la mer ;
- On calcule les expressions des suppléments de tension pendant le mouvement.

2.2.1. - Choix des paramètres

On va d'abord former les expressions linéarisées des accroissements :

$$\varepsilon_k = \theta_k - \theta_{k0}$$

$$\xi_k = x_k - x_{k0}$$

$$\eta_k = y_k - y_{k0}$$

On a :

$$x_k = \sum_{j=1}^k l \cos \theta_j = \sum_{j=1}^k l \cos \theta_{j_0} + \sum_{j=1}^k l \sin \theta_{j_0} \varepsilon_j$$

$$y_k = \sum_{j=1}^k l \sin \theta_j = \sum_{j=1}^k l \sin \theta_{j_0} + \sum_{j=1}^k l \cos \theta_{j_0} \varepsilon_j$$

d'où :

$$\xi_k = - \sum_{j=1}^k l \sin \theta_{j_0} \varepsilon_j \quad (\text{II 2.1 1})$$

$$\eta_k = \sum_{j=1}^k l \cos \theta_{j_0} \varepsilon_j \quad (\text{II 2.1 2})$$

La résolution de ces équations où ε_k est inconnu donne :

$$\begin{aligned} (\text{II 2.1 2 bis}) \quad \varepsilon_k &= \frac{1}{l \cos \theta_{k_0}} (\eta_k - \eta_{k-1}) = \\ &\quad - \frac{1}{l \sin \theta_{k_0}} (\xi_k - \xi_{k-1}) \end{aligned}$$

On en déduit les relations :

$$\xi_k - \xi_{k-1} = - \operatorname{tg} \theta_{k_0} (\eta_k - \eta_{k-1})$$

$$(\text{II.2.1.3.}) \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Le point A_0 étant fixe on a $\xi_0 = \eta_0 = 0$, - Par suite en faisant la somme des k premières équations (II 2.1 3).

$$\xi_k = - \operatorname{tg} \theta_{k_0} \eta_k + \sum_{j=1}^{k-1} (\operatorname{tg} \theta_{(j+1)_0} - \operatorname{tg} \theta_{j_0}) \eta_j$$

Modifiant légèrement les notations du paragraphe 2.1.1.

posons à présent :

$$\begin{cases} \Delta_j = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_{(j+1)_0} - \operatorname{tg} \theta_{j_0}} & \text{avec } j \in \{1, \dots, (n-1)\} \\ \Delta_n = - \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_{n_0}} & \Delta_{n+1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_G} \end{cases} \quad (\text{II 2.1.4})$$

(3) Introduisons le "vecteur" :

on a :

$$\begin{pmatrix} \frac{\vec{n}_{A_0}}{\cos \theta_{1,0}} \\ \vdots \\ \frac{\vec{n}_{m_0}}{\cos \theta_{m_0}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta n \frac{\vec{n}_{m_0}}{\cos \theta_{m_0}} \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \frac{\vec{n}_{A_0}}{\cos \theta_{1,0}} \\ \vdots \\ \frac{\vec{n}_{m_0}}{\cos \theta_{m_0}} \\ \lambda \end{pmatrix}$

En effet :

$$\Delta_i \frac{\vec{n}_{i_0}}{\cos \theta_{i_0}} - \frac{\vec{n}_{(i+1)_0}}{\cos \theta_{(i+1)_0}} (\Delta_i + \Delta_{i+1}) + (\Delta_{i+1}) \frac{\vec{n}_{(i+2)_0}}{\cos \theta_{(i+2)_0}} = 0$$

2.2.2. - Chaîne - Linéarisation des forces de traînée :

La vitesse intervenant dans l'expression de la force de traînée est la vitesse relative du courant par rapport à un élément de chaîne.

Soit \vec{v}_i la vitesse moyenne du maillon $A_{i-1} A_i$. La force de traînée moyenne sur ce maillon est :

$$\vec{D}_i = k (V - \vec{v}_i)^2 \vec{F}(\theta_i)$$

$$\vec{v}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{dA_0 A_i}{dt} + \frac{dA_0 A_{i-1}}{dt} \right) = \frac{l}{2} \left(\sum_{j=1}^i \frac{d\vec{t}_j}{dt} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{d\vec{t}_j}{dt} \right)$$

$$= l \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j' \vec{n}_{j_0} + \frac{1}{2} \varepsilon_i' \vec{n}_{i_0} \right)$$

d'où :

$$\vec{v}_i = \frac{\ell}{2} \left(\sum_{j=1}^{i-1} 2 \sin \theta_{j_0} \mathcal{E}'_j + \sin \theta_{i_0} \mathcal{E}'_i \right)$$

L'expression linéarisée de $\vec{F}(\theta)$ est donc :

$$\vec{F}(\theta) = \vec{F}(\theta_0) + \mathcal{E} \vec{F}'(\theta_0) \text{ avec}$$

$$\vec{F}'(\theta) = (f'(\theta) - g(\theta))\vec{t} + (f(\theta) + g'(\theta))\vec{n}$$

L'expression linéarisée de \vec{D}_i est de son côté :

$$\begin{aligned} \vec{D}_i &= k V^2 \ell \vec{F}(\theta_{i_0}) + k V^2 \ell \vec{F}'(\theta_{i_0}) \mathcal{E}_i \\ &+ k V \ell^2 \vec{F}(\theta_{i_0}) \left(\sum_{j=1}^{i-1} 2 \sin \theta_{j_0} \mathcal{E}'_j + \sin \theta_{i_0} \mathcal{E}'_i \right) \end{aligned}$$

Nous utiliserons les notations matricielles suivantes :

$$\begin{array}{c} \vec{F} = \\ \vec{F}' = \\ \vec{J} = \end{array} \left| \begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c} \vec{F}(\theta_{1_0}) \\ \vdots \\ \vec{F}(\theta_{n_0}) \end{array} & \begin{array}{c} (0) \\ \vdots \\ (0) \end{array} & \begin{array}{c} \vec{F}'(\theta_{1_0}) \\ \vdots \\ \vec{F}'(\theta_{n_0}) \end{array} & \begin{array}{c} \sin \theta_{1_0} \\ \vdots \\ \sin \theta_{n_0} \end{array} \end{array} \right| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{c} (1) \\ \vdots \\ (1) \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \end{array} \right| \begin{array}{c} \vec{D}_1 \\ \vdots \\ \vec{D}_n \end{array}$$

Nous avons alors :

$$\mathbf{D} = k V^2 \ell \mathbf{F} \mathbf{I}_1 + k V^2 \ell \mathbf{F}' \mathbf{E} + 2 k V \ell^2 \mathbf{F} \mathbf{J}^t (\sin) \mathbf{E}' \quad (\text{II 2.2.1.})$$

2.2.3. - Bouée - Linéarisation des forces extérieures et calcul des moments -

1) Mouvement de la bouée -

A partir de la position d'équilibre, le déplacement de tout point de la bouée est déterminé lorsque l'on connaît :

- le déplacement du point A_n $\xi_n \vec{i} + \eta_n \vec{j}$

- la rotation d'angle ω autour du point A_n (notée $\vec{\omega}$).

L'expression linéarisée du déplacement $\vec{MM'}$ d'un point M quelconque est :

$$\vec{MM'} = \xi_n \vec{i} + \eta_n \vec{j} + \omega \wedge \vec{A_n M}$$

En particulier, l'expression linéarisée du déplacement du point I projection de A_n sur l'axe de la bouée est :

$$\vec{II'} = \xi_n \vec{i} + (\eta_n + \omega d) \vec{j}$$

2) Force de poussée -

A l'équilibre, la résultante des pressions exercées par l'eau de mer sur la bouée est une force :

$$\rho_0 v_0 g \vec{j}$$

appliquée au centre de carène.

Pour déterminer l'expression linéarisée du moment de la force de poussée appliquée à la bouée dans une position voisine de la position d'équilibre, nous étudierons successivement la variation du volume de carène et le déplacement du centre de carène. La variation du volume de carène donne l'expression linéarisée de la poussée dans le déplacement du centre de carène.

On en déduit l'expression linéarisée du moment de la poussée.

Variation du volume de carène -

Soit ΔV_0 la variation du volume de carène.

On a alors la proposition suivante :

Dans une rotation ω autour du point I, l'expression linéarisée de ΔV_o est 0 .

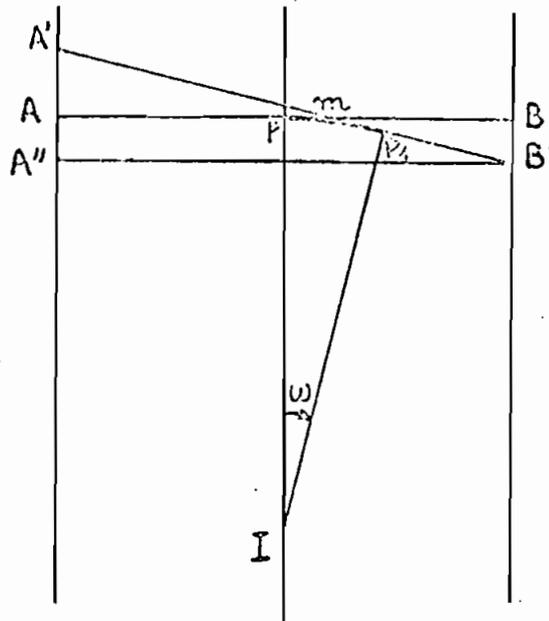


Figure 5

Pour déterminer l'expression de ΔV_o il revient au même d'étudier, la bouée restant fixe, l'effet sur V_o d'une rotation ω du plan d'eau dont le tracé sur le plan de la figure 5 est A B. Soit alors A' B' la trace sur le plan de figure du nouveau plan de flottaison.

A'' B' une parallèle à A B .

Soit V'_o le volume de carène défini par A'' B', l'expression linéarisée de ΔV_o est :

$$\Delta V_o = V'_o + \frac{s \Phi \omega}{2} - V_o$$

L'expression linéarisée de $V'_o - V_o$ est, d'autre part :

$$V_o - V'_o = \frac{s \Phi \omega}{2} \quad (*)$$

ce qui démontre la proposition.

(*) $B B' = m B \operatorname{tg} \omega$ et $m B = \frac{\Phi}{2} - I P \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$

L'expression linéarisée de B B' est :

$$B B' = \frac{\Phi}{2} \omega$$

Il est clair, d'autre part :

- qu'une translation horizontale de la bouée est sans effet sur le volume de carène,

- qu'une translation verticale de la bouée de valeur $\eta_n + \omega d$ diminue la poussée de $s (\eta_n + \omega d)$.

En définitive, l'expression linéarisée de la poussée est :

$$\rho_g \left[V_o - s (\eta_n + \omega d) \right]$$

Déplacement du centre de carène -

Il s'agit de déterminer, par rapport au point A_n , le moment d'une force verticale (poussée). Il suffit donc de déterminer le déplacement horizontal du centre de carène lors d'un déplacement de la bouée. Seule la rotation de la bouée autour du point A_n modifie l'abscisse du centre de carène.

Soit donc une rotation ω autour du point A_n . La figure précédente permet de déterminer la distance du nouveau centre de carène par rapport à l'axe de la bouée dans sa nouvelle position.

Le centre de gravité du volume délimité par les plans du tracé A' B' et A'' B' est à la distance $-\frac{\phi}{8}$ de l'axe de la bouée.

Le nouveau centre de carène est donc à une distance de l'axe de la bouée dont l'expression linéarisée est :

$$X_c = -\frac{\phi}{8} \frac{s \dot{\phi}/2 \omega}{V_o} = -\frac{s \phi^2}{16 V_o} \omega$$

L'expression linéarisée de la nouvelle abscisse du centre de carène dans le repère A \vec{i}, \vec{j} est donc :

$$d - \frac{s \phi^2}{16 V_o} \omega - Y_c \omega$$

Moment de la poussée par rapport à A_n

L'expression de ce moment est :

$$M_{A_n}^t \pi = \rho g \left[V_o - s (\eta_n + \omega d) \right] \left[d - \omega s \frac{\phi^2}{16 V_o} - Y_c \omega \right]$$

Soit :

$$I_s = s d^2 + \frac{\phi^2 s}{16}$$

le moment d'inertie géométrique de la flottaison à l'équilibre par rapport à un axe perpendiculaire au plan de l'équilibre situé dans le plan de flottaison et situé à la distance d de l'axe de la bouée.

L'expression linéarisée du moment de la poussée est :

$$M_{A_n}^t \pi = \rho g \left[V_o d - s d \eta_n - \omega (V_o Y_c + I_s) \right]$$

3) Force de traînée -

On ne dispose pas de théorie satisfaisante permettant de donner une expression de la traînée s'exerçant sur un flotteur animé d'un mouvement donné partiellement immergé dans un fluide incompressible.

On ne dispose pas davantage de résultats d'expériences suppléant à l'absence de la théorie.

La formule habituelle des hydrauliciens $F = K S V^2$ d'après laquelle on détermine à l'équilibre la force de traînée du courant sur la coque de la bouée, n'est valable que dans l'hypothèse d'une bouée immobile placée dans un courant de vitesse uniforme à l'infini, ou encore dans celle d'une bouée remorquée à vitesse uniforme dans un fluide restant au repos à l'infini.

Il n'est donc pas possible, a priori, de déterminer la force de traînée qui s'exerce sur la bouée dans un mouvement voisin de la position d'équilibre en admettant que l'expression analytique de la traînée est valable dans ces nouvelles circonstances,

Cette difficulté est aggravée par deux faits :

- d'une part au voisinage de la position d'équilibre, l'expression de la force de traînée n'admet pas nécessairement de développement en série de Taylor,

- d'autre part les tests d'application de la méthode conduisent dans certains cas à des résultats en désaccord avec l'expérience.

Nous avons donc pris le parti d'établir l'expression linéarisée du moment de la force de traînée dans des hypothèses extrêmement simplifiées.

Nous avons d'abord supposé que la bouée reçoit les mêmes efforts de traînée qu'une plaque plane dont le plan reste perpendiculaire au plan de la figure qui contient l'axe de révolution de la bouée.

Puis nous avons étudié les conséquences des deux hypothèses supplémentaires suivantes (exclusives l'une de l'autre).

Hypothèse (a)

Au cours du mouvement l'expression de la force de traînée est :

$$F = K \bar{S} \bar{V}^2$$

\bar{S} est la surface du maître-couple dans la position voisine de la position d'équilibre,

\bar{V}^2 étant la valeur moyenne de la vitesse relative du courant par rapport aux éléments de la plaque.

Hypothèse (b)

Au cours du mouvement l'expression de la force de traînée est la même qu'à l'équilibre :

$$F = K S V^2$$

On étudie ci-après les variations de S et de V .

Variations de S -

La translation $\xi_n \vec{i}$ est sans effet sur S .

La translation $\eta_n \vec{j}$ fait varier S de $-\Phi \eta_n$.

On admet que la rotation ω est sans effet.

Variation de V -

La translation $\xi_n \vec{i}$ fait varier la vitesse moyenne V de $-\xi_n' \vec{i}$.

La translation $\eta_n \vec{j}$ est sans effet sur V.

Étudions l'effet de la rotation ω de vitesse angulaire $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$. Soit y l'ordonnée par rapport à l'horizontale du point A_n , d'un point quelconque Q de la plaque à laquelle la bouée est assimilée.

La composante horizontale de la vitesse de Q est $-\omega' y \vec{j}$ et la composante horizontale de la vitesse relative du courant par rapport à ce point est donc :

$$V + \omega' y$$

On admet que la force de traînée a pour expression

$$K \int_S (V - \xi_n' + \omega' y)^2 ds$$

et que le moment de la force de traînée par rapport au point A_n est :

$$-K \int_S (V - \xi_n' + \omega' y)^2 y ds$$

L'expression linéarisée de cette expression est :

$$-K V^2 \int_S y ds - 2 V K \omega' \int_{S_0} y^2 ds + 2 K V \xi_n' \int_S y ds$$

Le premier terme est égal à :

$$-K V^2 \int_{S_0} y ds + \int_{S_0-S} y ds = -K V^2 \left[S y_{D_0} - \Phi \eta_n y_0 \right]$$

Le second est égal à :

$$- 2 K \omega' J$$

en posant

$$J = \int_{S_0} y^2 dS$$

L'expression linéarisée du moment des forces de traînée est ainsi (hypothèse (a)) :

$$(II.2.3.1.) - K S V^2 \left(y_{D_0} - \frac{\eta_n \Phi y_0}{S} \right) - 2 K V \omega' J + 2 K V S y_{D_0} \xi'_n$$

Dans l'hypothèse (b), l'expression linéarisée du moment de la force de traînée par rapport au point d'attache est simplement :

$$(II.2.3.2.) - K S V^2 \left(y_{D_0} - \eta_n \frac{\Phi}{S} y_0 \right)$$

4) Poids -

Au cours du mouvement l'expression linéarisée de l'abscisse du centre de gravité dans le repère $A_n x, A_n y$ est :

$$d - \omega y_G$$

Le moment du poids est donc :

$$(II.2.3.3.) \quad \overset{M}{M}_{A_n} \vec{P} = - Mg (d - \omega y_G)$$

$$\text{avec } Mg = \rho_0 V_0 g - K S V^2 \operatorname{tg} \varphi$$

5) Forces d'inerties d'entraînement

Le torseur des forces d'inertie d'entraînement est équivalent à une force unique :

$$\vec{F}_i = - M \left(\xi''_n \vec{i} + \eta''_n \vec{j} \right)$$

appliquée au centre de gravité de la bouée.

Le moment résultant en A_n de ce torseur est donc :

$$\mathcal{M}_{A_n}^t \vec{F}_i = M d (\xi_n'' \operatorname{tg} \theta_G - \eta_n'')$$

ce qui d'après (II.2.1.6.) et (II.2.1.7.) s'écrit :

$$\mathcal{M}_{A_n}^t \vec{F}_i = M d \Delta_n \left[(X_{n-1}'' - (1 + \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \theta_G) X_n'') \right]$$

2.2.4. - Equations de la dynamique

On montre dans le présent sous paragraphe comment sont formées les $n + 1$ équations du système.

Une première équation est obtenue en appliquant à la bouée seule le théorème du moment cinétique (paragraphe A).

On établit ensuite n équations supplémentaires indépendantes (paragraphe B).

On donne ensuite l'expression matricielle des $n + 1$ équations obtenues (paragraphe C).

A) Application à la bouée seule du théorème du moment cinétique par rapport au point A_n

L'équation du moment cinétique par rapport au point A_n s'écrit :

$$I \omega'' = \mathcal{M}_{A_n}^t \pi + \mathcal{M}_{A_n}^t F + \mathcal{M}_{A_n}^t P + \mathcal{M}_{A_n}^t F_i$$

On obtient, en utilisant les relations précédemment écrites :

$$I \omega'' - M d \Delta_n \left[X_{n-1}'' - (1 + \operatorname{tg} \theta_G \operatorname{tg} \theta_n) X_n'' \right] = - \rho_0 g s d \left[\eta_n + \omega y_G \frac{v (y_C - y_G) + I_S}{s d y_G} \right]$$

$$+ K V^2 \theta y_0 \eta_n - 2 K S V l y_{D_0} \left[\sum_{j=1}^n \sin \theta_j \mathcal{E}'_j + \sin \varphi \frac{J}{S y_{D_0}^2} \mathcal{E}'_{n+1} \right]$$

$$- K S V^2 \operatorname{tg} \varphi \omega y_G$$

Pour la commodité des calculs ultérieurs, on pose :

$$(II.2.4.1.) \quad q_{n+1} = M \cos \varphi \left[-\Delta_n X''_{n-1} + \Delta_n (1 + \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \theta_G) X''_n + \frac{I}{My_G^2} \Delta_{n+1} X''_{n+1} \right]$$

$$(II.2.4.2.) \quad r_{4_{n+1}} = -\rho_0 g s \cos \varphi \left[\eta_n + \left(\rho - a \right) \frac{y_P}{y_G} + \Delta_{n+1}^2 \right] \frac{\omega y_G}{\Delta_{n+1}}$$

$$(II.2.4.3.) \quad r_{5_{n+1}} = K \Phi V^2 \cos \varphi \left[\frac{y_0}{y_G} \frac{\eta_n}{\Delta_{n+1}} - \frac{y_F}{y_G} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\Delta_{n+1}} \omega^{g_G} \right]$$

$$(II.2.4.4.) \quad r_{6_{n+1}} = \begin{cases} \text{Hypothèse (a)} & \left[-2 K S V \ell \sin \varphi \left[\sum_{j=1}^n \sin \theta_j \varepsilon'_j + \sin \varphi \frac{J}{S y_{D_0}^2} \varepsilon'_{n+1} \right] \right. \\ \text{Hypothèse (b)} & \left. 0 \right] \end{cases}$$

$$\text{et } r_{n+1} = r_{4_{n+1}} + r_{5_{n+1}} + r_{6_{n+1}}$$

B) Formation des n équations supplémentaires indépendantes.

Considérons les systèmes S_i constitués par :

- la bouée,
- la partie de la chaîne située au-dessus du point de coupure compris entre A_{i-1} et A_i .

Nous allons écrire la loi fondamentale de la dynamique en écrivant que la projection sur les vecteurs \vec{n}_i ,

du torseur des forces extérieures, et des forces d'inertie de chaque système S_i est nul. On obtiendra ainsi n équations.

Pour chaque système S_i on calcule successivement :

- Les projections sur les vecteurs \vec{n}_i des quantités d'accélération $m \vec{\gamma}_k$ des points A_k $k \in \{i, \dots, n-1\}$

- Les projections sur les vecteurs \vec{n}_i de la quantité d'accélération de la bouée $M \vec{\gamma}_G$.

- Les projections sur les vecteurs \vec{n}_i des forces extérieures.

Projections sur les \vec{n}_i des $m \vec{\gamma}_k$ -

Définition du vecteur P

Nous avons :
$$\vec{\gamma}_k = \ell \sum_{j=1}^k \varepsilon_j'' \cdot \vec{n}_j$$

La projection des $m \vec{\gamma}_k$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$ sur \vec{n}_i a donc pour expression :

$$p_i = m \ell \sum_{k=i}^{n-1} \sum_{j=1}^k \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j \varepsilon_j''$$

Posons $p_n = p_{n+1} = 0$ et appelons P le vecteur de composantes p_i avec $i \in \{1, \dots, n+1\}$

Nous avons :

$$p_i = m \ell \cos \theta_i \sum_{k=i}^{n-1} \sum_{j=1}^k \cos \theta_j (1 + \operatorname{tg} \theta_j \operatorname{tg} \theta_i) \varepsilon_j''$$

On peut écrire :

$$P = m \ell (\cos) T (\cos) \varepsilon''$$
 avec $T = \sum_{k=1}^{n-1} T_k$ où les T_k sont des matrices carrées $(n+1, n+1)$ d'éléments

$$T_k(i, j) = 1 + \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_j \quad \text{pour } i \text{ et } j \leq k$$

Effectuons le changement de variables (II.2.1.10), on a :

$$P = m (\cos) T \Delta^t X''$$

que nous écrivons :

$$P = m (\cos) \Delta^{-1} \Delta T \Delta^t X'' = m (\cos) \Delta^{-1} H X''$$

Soit Q_1 le vecteur de composantes q_i avec $q_{n+1} = 0$.

Q_1 s'écrit :

$$Q_1 = M \ell (\cos) S_1 (\cos) \varepsilon'' = M (\cos) \Delta^{-1} \Delta S_1 \Delta^t X''$$

S_1 est une matrice $(n+1, n+1)$ constituée par la matrice T_n bordée par une colonne :

$$1 + \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_G \quad \text{et dont la } n+1 \text{ème ligne est nulle.}$$

Considérons maintenant la quantité q_{n+1} définie au (II.2.4.1.)

$$(II.2.4.1.) \quad q_{n+1} = M \cos \varphi \left[- \Delta_n X''_{n-1} + \Delta_n (1 + \operatorname{tg} \theta_G \operatorname{tg} \theta_n) X''_n + \frac{I}{M y_G^2} \frac{1}{\Delta_{n+1}} X''_{n+1} \right]$$

En introduisant le vecteur Q_2 à $n+1$ dimensions dont les n premières composantes sont nulles et dont la dernière composante est q_{n+1} on a :

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_{n+1} \end{bmatrix} = M (\cos) \Delta^{-1} \Delta \begin{matrix} (0) \\ \vdots \\ 1 + \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_G \dots \dots \dots 1 + \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \theta_n \frac{I}{M y_G^2} \frac{1}{\Delta_{n+1}} \end{matrix} \Delta^t X''$$

On pose $Q = Q_1 + Q_2$ et on voit que :

$$Q = M (\cos) \Delta^{-1} \Delta S \Delta^t X'' = M (\cos) \Delta^{-1} L X''$$

où S est maintenant une matrice symétrique et où $L = \Delta S \Delta^t$, d'après les propriétés de la matrice Δ démontrées au (2.2.1.) est la matrice :

$$L = \begin{pmatrix} \Delta_n^2 & -\Delta_n^2 & -\Delta_n \Delta_{n+1} \\ -\Delta_n^2 & \frac{\Delta_n^2}{\cos^2 \theta_n} & \Delta_n \Delta_{n+1} (1 + \tan \theta_n \tan \theta_G) \\ -\Delta_n \Delta_{n+1} & \Delta_n \Delta_{n+1} (1 + \tan \theta_n \tan \theta_G) & \frac{I}{M y_G} \end{pmatrix}$$

Projections sur les \vec{n}_i des forces extérieures -
Définition du vecteur R

Les forces extérieures appliquées à chaque système S_i sont :

- les poids des points A_k : $- mg_j \vec{j}$ avec $k \in \{1, \dots, (n-1)\}$

- le poids de la bouée : $- Mg_j \vec{j}$,

- la poussée π sur la bouée calculée en II.2.3.1.,

- la force de traînée sur la bouée calculée en II.2.3.3.,

- les forces de traînée sur la chaîne : $\frac{1}{2} D_i \vec{j} + \sum_{j=i+1}^n D_j \vec{j}$,

- la tension : $- T_i \vec{t}_i$

Lorsque l'on projette les forces sur les \vec{n}_i la tension T_i disparaît.

Soit r_i la projection des autres forces,

on a : $r_i = \sum F_{ei} \vec{n}_i$

Soient :

F_{eoi} le système des forces extérieures s'exerçant à l'équilibre sur le système

\vec{t}_{i0} et \vec{n}_{i0} les valeurs de \vec{t}_i et \vec{n}_i à l'équilibre;

on peut écrire :

$$T_i = \sum \left[F_{eoi} + (F_{ei} - F_{eoi}) \right] (\vec{n}_{i0} - \mathcal{E}_i \vec{t}_{i0})$$

À l'équilibre, on a :

$$\sum \vec{F}_{e_{oi}} \cdot \vec{n}_{i_0} = 0$$

L'expression linéarisée des r_i est donc :

$$r_i = -\sum \vec{F}_{e_{oi}} \cdot \vec{t}_{i_0} \varepsilon_i + \sum (\vec{F}_{e_i} - \vec{F}_{e_{oi}}) \cdot \vec{n}_{i_0}$$

Remarquons dès à présent que l'on a :

$$\sum \vec{F}_{e_{i_0}} = T_{i_0} \vec{t}_{i_0}$$

Le premier terme de l'expression de r_i se met donc sous la forme :

$$-\varepsilon_i T_{i_0} \vec{t}_{i_0} \cdot \vec{t}_{i_0} = -\varepsilon_i T_{i_0}$$

Afin de calculer les r_i il est utile d'introduire les notations suivantes.

On considère d'abord les r_i comme les composantes d'un vecteur de l'espace à $n+1$ dimensions.

$$R = \begin{vmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{n+1} \end{vmatrix}$$

Il convient d'autre part d'introduire le vecteur R' à $n+1$ dimensions dont les n premières composantes sont celles de R et la dernière composante est nulle.

$$R' = \begin{vmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ 0 \end{vmatrix}$$

On pose de plus :

$$T = \begin{vmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{vmatrix} \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{n}_1 \\ \vdots \\ \vec{n}_n \end{vmatrix}$$

Le vecteur R' est la somme de 6 vecteurs à $n+1$ dimensions

$$R' = R_1 + R_2 + R_3 + R'_4 + R'_5 + R'_6$$

R_1 représente la contribution des termes, $-T_{i0} \epsilon_i$. D'après ce que l'on vient de voir : $R_1 = -T\epsilon$

R_2 représente la contribution des termes en ϵ provenant de la linéarisation des traînées sur la chaîne.

R_3 représente la contribution des termes en ϵ' provenant de la linéarisation des traînées sur la chaîne.

R'_4 représente la contribution provenant de la linéarisation de la poussée sur la bouée.

R'_5 représente la contribution du terme en ϵ provenant de la linéarisation de la traînée sur la bouée.

R'_6 représente la contribution du terme en ϵ' provenant de la linéarisation de la traînée sur la bouée.

Vecteur R_1

$$R_1 = -T\epsilon$$

Effectuons le changement de variables :

$$R_1 = -\frac{1}{l} T (\cos)^{-1} \Delta^t X = -\frac{1}{l} (\cos) \Delta^{-1} \Delta (\cos)^{-1} T (\cos)^{-1} \Delta^t X$$

Posons :

$$A_1 = -\frac{1}{l} \Delta (\cos)^{-1} T (\cos)^{-1} \Delta^t$$

Nous obtenons :

$$R_1 = (\cos) \Delta^{-1} A_1 X$$

Les propriétés de Δ nous permettent de voir que A_1 est pentadiagonale symétrique.

Posons :

$$z'_i = \frac{T_i \Delta_i}{l \cos^2 \theta_i}$$

Les coefficients $a_1(i, j)$ de la matrice A_1 sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(i, i-2) = a_1(i-2, i) = -z'_i \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \\ a_1(i, i-1) = a_1(i-1, i) = z'_i \left(1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}\right) + z'_{i+1} \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}\right) \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \\ a_1(i, i) = -z'_i - z'_{i+1} \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}\right)^2 - z'_{i+2} \left(\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}}\right)^2 \\ a_1(i, n+1) = a_1(n+1, j) = 0 \end{array} \right.$$

Vecteur R_2

$$R_2 = k v^2 \ln J F' E$$

Effectuons le changement de variables :

$$R_2 = k v^2 \ln J F' (\cos)^{-1} \Delta^t X = k v^2 (\cos) \Delta^{-1} \Delta (\cos)^{-1} \ln J F' (\cos)^{-1} \Delta^t X$$

Posons :

$$A_2 = k v^2 \Delta (\cos)^{-1} \ln J F' (\cos)^{-1} \Delta^t X$$

on a :

$$R_2 = (\cos) \Delta^{-1} A_2 X$$

Les propriétés de Δ nous permettent de voir que A_2 est pentadiagonale.

Posons :

$$x'_i = \frac{k v^2}{2} \vec{F}_i \vec{n}_i \frac{\Delta_i^2}{\cos^2 \theta_i}$$

$$\text{et } y'_i = \frac{k v^2}{2} \vec{F}_i \frac{\Delta_i}{\cos \theta_i} \left[\vec{n}_{i-1} \frac{\Delta_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} - \vec{n}_{i+1} \frac{\Delta_i}{\cos \theta_{i+1}} \right]$$

Les coefficients $a_2(i, j)$ de la matrice A_2 sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2(i, i-2) = -a_2(i-2, i) = x'_i \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \\ a_2(i, i-1) = -x'_i \left(1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}\right) + y'_{i+1} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \\ a_2(i, i) = x'_i - y'_{i+1} \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}\right) - x'_{i+2} \left(\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}}\right)^2 \\ a_2(i, i+1) = y'_{i+1} + x'_{i+2} \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}} \left(1 + \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}}\right) \\ a_2(i, n+1) = a_2(n+1, j) = 0 \end{array} \right.$$

Vecteur $R_1 + R_2$

Soit : $A = A_1 + A_2$

nous avons : $R_1 + R_2 = (\cos) \Delta^{-1} A X$

Nous avons :

$$a(i, i-2) = (x'_i - z'_i) \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$$

$$a(i, i-1) = -(x'_i - z'_i) \left(1 + \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}\right) + \left[y'_i + z'_{i+1} \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}\right) \right] \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}$$

$$a(i, i) = (x'_i - z'_i) - \left[y'_{i+1} + z'_{i+1} \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}\right) \right] \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}\right) - (x'_{i+2} + z'_{i+2}) \left(\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}}\right)^2$$

$$a(i, i+1) = \left[y'_{i+1} + z'_{i+1} \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}\right) \right] + (x'_{i+2} + z'_{i+2}) \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}} \left(1 + \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}}\right)$$

$$a_{(i, i+2)} = - (x'_{i+2} + y'_{i+2}) \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}}$$

Posons :

$$x_i = z'_i - x'_i$$

$$y_i = z'_i \left(1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \right) + y'_i$$

$$z_i = (z'_i + x'_i) \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$$

C'est-à-dire :

$$x_i = \frac{\Delta_i^2}{\cos^2 \theta_i} \left(\frac{T_i}{\ell} - \frac{kV^2}{2} \vec{F}'_i \vec{n}_i \right)$$

$$y_i = x_i \left(1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \right) + kV^2 \vec{F}'_i \vec{n}_{i-1} \frac{\Delta_i \Delta_{i-1}}{\cos \theta_i \cos \theta_{i-1}}$$

$$z_i = \frac{\Delta_{i-1} \Delta_i}{\cos^2 \theta_i} \left(\frac{T_i}{\ell} + \frac{kV^2}{2} \vec{F}'_i \vec{n}_i \right)$$

Dans ces conditions nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{(i, i-2)} = -x_i \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \\ a_{(i, i-1)} = x_i \left(1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \right) + y_{i+1} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \\ a_{(i, i)} = -x_i - y_{i+1} \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \right) - z_{i+2} \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}} \\ a_{(i, i+1)} = y_{i+1} + z_{i+2} \left(1 + \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}} \right) \\ a_{(i, i+2)} = -z_{i+2} \\ a_{(i, n+1)} = a_{(n+1, j)} = 0 \end{array} \right.$$

Vecteur R_3

$$R_3 = 2 k v \ell^2 n J F J^t (\sin) E'$$

Effectuons le changement de variables :

$$R_3 = 2 k v \ell n J F J^t (\sin) (\cos)^{-1} \Delta^t X'$$

$$= 2 k v \ell (\cos) \Delta^{-1} \Delta (\cos)^{-1} n J F J^t (\sin) (\cos)^{-1} \Delta^t X'$$

Posons :

$$B = 2 k v \ell \Delta (\cos)^{-1} n J F J^t (\sin) (\cos)^{-1} \Delta^t$$

Nous avons :

$$R_3 = (\cos) \Delta^{-1} B X'$$

Les propriétés de Δ permettent de voir que la matrice B est pentadiagonale.

Posons :

$$a_i = k v \ell \vec{F}_i \vec{n}_i \frac{\Delta_i^2}{\cos \theta_i}$$

$$b_i = k v \ell \Delta_i \vec{F}_i \left(\vec{n}_{i-1} \frac{\Delta_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} - \vec{n}_{i+1} \frac{\Delta_i}{\cos \theta_{i+1}} \right)$$

et $S_i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \operatorname{tg} \theta_{i-1} - \operatorname{tg} \theta_{i+1}$

Les coefficients $b(i, j)$ de la matrice B sont alors :

$$b(i, i-2) = b(i-2, i) = -a_i \operatorname{tg} \theta_i \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$$

$$b(i, i-1) = a_i S_i - b_{i+1} \operatorname{tg} \theta_{i+1} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}$$

$$b(i, i) = a_i \operatorname{tg} \theta_i + b_{i+1} S_{i+1} + a_{i+2} \operatorname{tg} \theta_{i+2} \left(\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}} \right)^2$$

$$b(i, i+1) = b_{i+1} \operatorname{tg} \theta_{i+1} - a_{i+2} \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}} S_{i+2}$$

$$b(i, n+1) = b(n+1, j) = 0$$

Vecteur R_4

Les composantes du vecteur R'_4 sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{4i} = -s \rho_0 g (\eta_n + \omega d) \vec{j}_{n_i} \quad i \in \{1, \dots, n\} \\ r_{4n+1} = 0 \end{array} \right.$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{4i} = -s \rho_0 g \cos \theta_i (\eta_n + \omega d) \\ r_{4n+1} = 0 \end{array} \right.$$

Soit R_4 le vecteur dont les n premières composantes sont les r_{4i} et dont la $n+1$ ème composante r_{4n+1} est définie par (II.2.4.2.).

$$r_{4n+1} = -s \rho_0 g \cos \varphi \left[\eta_n + \left(\frac{(\rho - a) y_p}{y_G^2} + \Delta_{n+1}^2 \right) \frac{\omega y_G}{\Delta_{n+1}} \right]$$

or d'après (II.2.1.2.) :

$$\eta_n = l \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \varepsilon_j \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n+1} = \frac{\Delta_{n+1}}{l \cos \varphi} \omega y_G$$

On a donc :

$$r_{4i} = -s \rho_0 g l \cos \theta_i \left(\sum_{j=1}^n \cos \theta_j \varepsilon_j + \cos \varphi \varepsilon_{n+1} \right)$$

$$r_{4n+1} = s \rho_0 g l \cos \varphi \left[\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \cos \theta_j + \left(\frac{(\rho - a) y_p}{y_G^2} + \Delta_{n+1}^2 \right) \cos \varphi \frac{\varepsilon_{n+1}}{\Delta_{n+1}^2} \right]$$

Nous voyons que $R_4 = -s \rho_0 g l (\cos) V (\cos) \varepsilon$.

avec $V = \begin{vmatrix} (1) & \\ & \frac{(\rho - a) y_p}{y_G^2} + \Delta_{n+1}^2 \end{vmatrix}$

Effectuons le changement de variables :

$$R_4 = s \rho_0 g (\cos) \Delta^{-1} \Delta V \Delta^t X$$

Posons $D = \Delta V \Delta^t$. D est la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} \Delta_n^2 & -\Delta_n^2 & -\Delta_n \Delta_{n+1} \\ -\Delta_n^2 & \Delta_n^2 & \Delta_n \Delta_{n+1} \\ \Delta_n \Delta_{n+1} & \Delta_n \Delta_{n+1} & (\rho-a) \frac{y_P^2}{y_G^2} + \Delta_{n+1}^2 \end{pmatrix}$$

et l'on a :

$$R_4 = -s \rho_0 g (\cos) \Delta^{-1} D X$$

Vecteur R_5

Les composantes du vecteur R'_5 sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{5i} = -K \Phi v^2 \eta_n \vec{i} \cdot \vec{n}_i = K \Phi v^2 l \sin \theta_i \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \varepsilon_j \\ \text{avec } i \in \{1, \dots, n\} \\ r_{5n+1} = 0 \end{array} \right.$$

Soit R_5 le vecteur dont les n premières composantes sont les r_{5i} et dont la $n+1$ ème composante r_{5n+1} est définie par :
(II.2.4.3.)..

$$r_{5n+1} = K \Phi v^2 \cos \varphi \left[\frac{y_0}{y_G} \frac{\eta_n}{\Delta_{n+1}} - \frac{y_F}{y_G} \frac{\text{tg } \varphi}{\Delta_{n+1}} \omega_{y_G} \right]$$

qui s'écrit :

$$r_{5n+1} = K \Phi v^2 l \sin \varphi \left[\frac{y_0}{y_G \text{tg } \varphi \Delta_{n+1}} \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \varepsilon_j - \frac{y_F}{y_G} \frac{\cos \varphi}{\Delta_{n+1}^2} \varepsilon_{n+1} \right]$$

De même que pour R_4 nous pouvons écrire :

$$R_5 = K \phi V^2 \ell (\sin) W (\cos) E$$

(1)

avec $W =$

$$\begin{vmatrix} \frac{y_0}{y_G} & 1 & \dots & \frac{y_0}{y_G} & 1 & -\frac{y_F}{y_G} & 1 \\ & \Delta_{n+1} \operatorname{tg} \varphi & & \Delta_{n+1} \operatorname{tg} \varphi & & \Delta_{n+1}^2 & \end{vmatrix}$$

Effectuons le changement de variables :

$$R_5 = K \phi V^2 (\cos) \Delta^{-1} \Delta (\cos)^{-1} (\sin) W \Delta^t X$$

Posons :

$$E = \Delta (\cos)^{-1} (\sin) W \Delta^t$$

on a :

$$E = \begin{vmatrix} (0) & & & & & & \\ -\Delta_n^2 \operatorname{tg} \theta_n & \Delta_n^2 \operatorname{tg} \theta_n & \Delta_n \Delta_{n+1} \operatorname{tg} \theta_n & & & & \\ -\frac{y_0}{y_G} \Delta_n & \frac{y_0}{y_G} \Delta_n & -\frac{y_F}{y_G} \operatorname{tg} \varphi & & & & \end{vmatrix}$$

et l'on a : $R_5 = K \phi V^2 (\cos) \Delta^{-1} E X$

Vecteur R_6

Les composantes du vecteur R'_6 sont :

$$\begin{cases} r_{6i} = 2 K V S \ell \left(\sum_{j=1}^n \sin \theta_j \varepsilon'_j + \sin \varphi \varepsilon'_{n+1} \right) \vec{i}_i \vec{n}_i \\ r_{6n+1} = 0 \end{cases}$$

Soit :

(0)

D =

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_n^2 & -\Delta_n^2 & -\Delta_n \Delta_{n+1} \\
 -\Delta_n^2 & \Delta_n^2 & \Delta_n \Delta_{n+1} \\
 -\Delta_n \Delta_{n+1} & \Delta_n \Delta_{n+1} & (\rho - a) \frac{y_F}{y_G} + \Delta_{n+1}^2
 \end{array}$$

(0)

E =

$$\begin{array}{ccc}
 -\Delta_n^2 \operatorname{tg} \theta_n & \operatorname{tg} \theta_n \Delta_n^2 & \operatorname{tg} \theta_n \Delta_n \Delta_{n+1} \\
 -\frac{y_0}{y_G} \Delta_n & \frac{y_0}{y_G} \Delta_n & -\frac{y_F}{y_G} \operatorname{tg} \varphi
 \end{array}$$

(0)

G =

$$\begin{array}{cc}
 \Delta_n^2 \operatorname{tg}^2 \theta_n & \Delta_n \Delta_{n+1} \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \varphi \\
 \Delta_n \Delta_{n+1} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta_n & \frac{J}{S_{y_D}^2} \Delta_{n+1}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi
 \end{array}$$

avec :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \alpha_1 \quad \beta_1 \\ \beta_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \beta_{n-2} \quad \alpha_{n+1} \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \\
 \text{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \alpha_1 \quad \beta_1 \\ \beta_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \beta_{n-2} \quad \alpha_{n+1} \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \\
 \begin{array}{c} (0) \\ \vdots \\ (0) \end{array} \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} (0) \\ \Delta_n^2 \quad -\Delta_n^2 \quad -\Delta_n \Delta_{n+1} \\ -\Delta_n^2 \quad \frac{\Delta_n^2}{\cos^2 \theta_n} \quad \Delta_n \Delta_{n+1} (1 + \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \theta_G) \\ -\Delta_n \Delta_{n+1} \quad \Delta_n \Delta_{n+1} (1 + \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \theta_G) \quad \frac{I}{M y_G^2} \end{array} \\
 \text{L} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (0) \\ \Delta_n^2 \quad -\Delta_n^2 \quad -\Delta_n \Delta_{n+1} \\ -\Delta_n^2 \quad \frac{\Delta_n^2}{\cos^2 \theta_n} \quad \Delta_n \Delta_{n+1} (1 + \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \theta_G) \\ -\Delta_n \Delta_{n+1} \quad \Delta_n \Delta_{n+1} (1 + \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \theta_G) \quad \frac{I}{M y_G^2} \end{array} \\
 \begin{array}{c} (0) \\ \vdots \\ (0) \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

$$\alpha_i = \frac{\Delta_i^2}{\cos^2 \theta_i} + \frac{\Delta_{i+1}^2}{\cos^2 \theta_{i+2}} \quad \alpha_{n-1} = \frac{\Delta_{n-1}^2}{\cos^2 \theta_{n-1}}$$

$$\beta_i = -\Delta_{i+1}^2 (1 + \operatorname{tg} \theta_{i+1} \operatorname{tg} \theta_{i+2})$$

$$\Delta_i = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_{i+1} - \operatorname{tg} \theta_i} \quad \Delta_n = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta_n} \quad \Delta_{n+1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_G}$$

A

$$\begin{cases}
 a(i, i-2) = -x_{i-1} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \\
 a(i, i-1) = x_i \left(1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}\right) + y_{i+1} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \\
 a(i, i) = -x_i - y_{i+1} \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}\right) - z_{i+2} \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}} \\
 a(i, i+1) = y_{i+1} + z_{i+2} \left(1 + \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}}\right) \\
 a(i, i+2) = -z_{i+2} \\
 a(i, n+1) = a(n+1, j) = 0
 \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases}
 x_i = \frac{\Delta_i^2}{\cos^2 \theta_i} \left[\frac{T_i}{l} - \frac{hV^2}{2} \vec{F}_i \vec{n}_i \right] \\
 y_i = x_i \left(1 + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}\right) + hV^2 \vec{F}_i \vec{n}_{i-1} \frac{\Delta_{i-1} \Delta_i}{\cos \theta_{i-1} \cos \theta_i} \\
 z_i = \frac{\Delta_{i-1} \Delta_i}{\cos^2 \theta_i} \left(\frac{T_i}{l} + \frac{hV^2}{2} \vec{F}_i \vec{n}_i \right)
 \end{cases}$$

B

$$\begin{cases}
 b(i, i-2) = b(i-2, i) = -a_i \operatorname{tg} \theta_i \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \\
 b(i, i-1) = a_i S_i - b_{i+1} \operatorname{tg} \theta_{i+1} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \\
 b(i, i) = a_i \operatorname{tg} \theta_i + b_{i+1} S_{i+1} + a_{i+2} \operatorname{tg} \theta_{i+2} \left(\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}}\right)^2 \\
 b(i, i+1) = b_{i+1} \operatorname{tg} \theta_{i+1} - a_{i+2} \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{i+2}} S_{i+2} \\
 b(i, n+1) = b(n+1, j) = 0
 \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases}
 a_i = hV^2 \vec{F}_i \vec{n}_i \frac{\Delta_i^2}{\cos \theta_i} \\
 b_i = hV^2 \vec{F}_i \Delta_i \left(\vec{n}_{i-1} \frac{\Delta_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} - \vec{n}_{i+1} \frac{\Delta_i}{\cos \theta_{i+1}} \right) \\
 S_i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \operatorname{tg} \theta_{i-1} - \operatorname{tg} \theta_{i+1}
 \end{cases}$$

(0)

$$D = \begin{array}{ccc} \Delta_n^2 & -\Delta_n^2 & -\Delta_n \Delta_{n+1} \\ -\Delta_n^2 & \Delta_n^2 & \Delta_n \Delta_{n+1} \\ -\Delta_n \Delta_{n+1} & \Delta_n \Delta_{n+1} & (\rho - a) \frac{y_F}{y_G} + \Delta_{n+1}^2 \end{array}$$

(0)

$$F = \begin{array}{ccc} -\Delta_n^2 \operatorname{tg} \theta_n & \operatorname{tg} \theta_n \Delta_n^2 & \operatorname{tg} \theta_n \Delta_n \Delta_{n+1} \\ -\frac{y_0}{y_G} \Delta_n & \frac{y_0}{y_G} \Delta_n & -\frac{y_F}{y_G} \operatorname{tg} \varphi \end{array}$$

(0)

$$G = \begin{array}{cc} \Delta_n^2 \operatorname{tg}^2 \theta_n & \Delta_n \Delta_{n+1} \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \varphi \\ \Delta_n \Delta_{n+1} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta_n & \frac{J}{S_{y_{D_0}}^2} \Delta_{n+1}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \end{array}$$

2.2. .5. - Influence d'une variation harmonique de faible amplitude du niveau de la mer

On suppose que la profondeur varie selon une loi de la forme :

$$H = H_0 (1 + h \sin \Omega t)$$

$h H_0$ est supposé du même ordre de grandeur que le déplacement d'un point quelconque de la bouée.

Il suffit dans les calculs précédents d'ajouter à l'enfoncement $\eta_n + \omega_d$ du point d'attache de la bouée la quantité $h H_0 \sin \Omega t$. cela conduit à introduire au 2ème membre de l'équation (II.2.4.4.0.) un vecteur de composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i = (s \rho_0 g \cos \theta_i - K \phi V^2 \cos \theta_i) h H_0 \sin \Omega t \\ \text{avec } i \in \{1, \dots, n\} \\ f_{n+1} = (s \rho_0 g - K \phi V^2 \operatorname{tg} \varphi) h H_0 \sin \Omega t \end{array} \right.$$

Posons :

$$F = \Delta(\cos)^{-1} [f_i]$$

on a :

$$F = h H_0 \sin \Omega t \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -s \rho_0 g \Delta_n \\ \Delta_n (s \rho_0 g - K \phi V^2 \operatorname{tg} \theta_n) \\ \frac{s \rho_0 g - K \phi V^2 \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \end{vmatrix}$$

et l'équation du mouvement devient :

$$(m H + M L) X'' + (2 K S V G - B) X' + (s \rho_0 g D - K \phi V^2 E - A) X = F$$

2.2.6. - Calcul des suppléments de tension (figure 6)

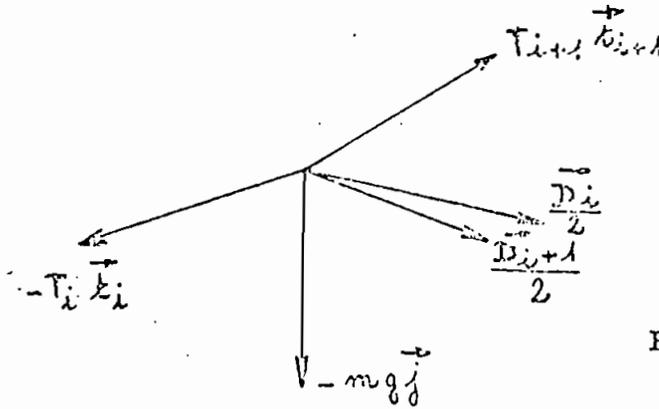


Figure 6

Aux nœuds A_i nous avons la relation ($i = 1, \dots, n-1$)

$$-T_i \vec{t}_i + T_{i+1} \vec{t}_{i+1} = m \vec{g}_j - \frac{\vec{D}_i}{2} - \frac{\vec{D}_{i+1}}{2} + m \sum_i'' \vec{i} + m \eta_i'' \vec{j}$$

Projetons sur \vec{n}_{i+1}

$$T_i \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) = mg \cos \theta_{i+1} - m \sum_i'' \sin \theta_{i+1} + m \eta_i'' \cos \theta_{i+1} - \frac{\vec{D}_i \cdot \vec{n}_{i+1}}{2} - \frac{\vec{D}_{i+1} \cdot \vec{n}_{i+1}}{2}$$

avec :

$$\vec{D}_i = k V^2 l \vec{F}_i + k V^2 l \vec{F}_i' \varepsilon_i + 2 k V l \vec{F}_i \sum_i' \quad (\text{d'après 4.3. 1ère partie})$$

Linéarisons en appelant δT_i le supplément de tension :

$$T_{i0} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + \delta T_i \sin(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

$$= -\varepsilon_{i+1} mg \sin \theta_{i+1} - m \sum_i'' \sin \theta_{i+1} + m \eta_i'' \cos \theta_{i+1}$$

$$- \frac{k V^2 l}{2} \left[\vec{F}_i \cdot \vec{n}_{i+1} \varepsilon_i + \vec{F}_{i+1} \cdot \vec{n}_{i+1} \varepsilon_{i+1} \right] - k V l \left[\vec{F}_i \cdot \vec{n}_{i+1} \sum_i' + \vec{F}_{i+1} \cdot \vec{n}_{i+1} \sum_{i+1}' \right]$$

d'où avec les notations ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 \delta T_i = & \varepsilon_i \left[T_{i0} (1 + \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_{i+1}) \Delta_i - \frac{k v^2 l}{2} \frac{\vec{F}_{i+1} \cdot \vec{n}_{i+1}}{\cos \theta_i \cos \theta_{i+1}} \Delta_i \right] \\
 & + \varepsilon_{i+1} \left[- T_{i0} (1 + \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_{i+1}) \Delta_i - mg \frac{\operatorname{tg} \theta_{i+1}}{\cos \theta_i} \Delta_i \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k v^2 l}{2} \frac{\vec{F}'_{i+1} \cdot \vec{n}_{i+1}}{\cos \theta_i \cos \theta_{i+1}} \Delta_i \right] \\
 & - \sum'_i k v l \frac{\vec{F}_i \cdot \vec{n}_{i+1}}{\cos \theta_i \cos \theta_{i+1}} \Delta_i - \sum'_{i+1} k v l \frac{\vec{F}_{i+1} \cdot \vec{n}_{i+1}}{\cos \theta_i \cos \theta_{i+1}} \Delta_i \\
 & - m \sum''_i \frac{\operatorname{tg} \theta_{i+1}}{\cos \theta_i} \Delta_i + m \sum''_i \frac{\Delta_i}{\cos \theta_i}
 \end{aligned}$$

En projetant sur \vec{n}_i nous obtenons de la même manière :

$$\begin{aligned}
 \delta T_{i+1} = & \varepsilon_i \left[T_{i+1} (1 + \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_{i+1}) \Delta_i - mg \frac{\operatorname{tg} \theta_i}{\cos \theta_{i+1}} \Delta_i \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k v^2 l}{2} \frac{\vec{F}'_i \cdot \vec{n}_i}{\cos \theta_i \cos \theta_{i+1}} \Delta_i \right] \\
 & + \varepsilon_{i+1} \left[- T_{i+1} (1 + \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_{i+1}) \Delta_i - \frac{k v^2 l}{2} \frac{\vec{F}'_{i+1} \cdot \vec{n}_{i+1}}{\cos \theta_i \cos \theta_{i+1}} \Delta_i \right] \\
 & - k v l \sum'_i \frac{\vec{F}_i \cdot \vec{n}_i}{\cos \theta_i \cos \theta_{i+1}} \Delta_i - \sum'_{i+1} k v l \frac{\vec{F}_{i+1} \cdot \vec{n}_{i+1}}{\cos \theta_i \cos \theta_{i+1}} \Delta_i \\
 & - m \sum''_i \frac{\operatorname{tg} \theta_i}{\cos \theta_{i+1}} \Delta_i + m y''_i \frac{\Delta_i}{\cos \theta_{i+1}}
 \end{aligned}$$

Pour $i = n - 1$, la formule qui vient d'être écrite donne δT_n .

3ème PARTIE

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT

3.1. - Résolution des équations de l'équilibre

Nous avons vu au paragraphe 2.1. que la position d'équilibre du système bouée chaîne pouvait être déterminée à partir de la connaissance de l'angle φ et que nous pouvions déterminer graphiquement une valeur approchée de cet angle par l'intersection de deux courbes :

$$\mathcal{E} = R_1 (\varphi) \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = R_2 (\varphi)$$

A partir des équations d'équilibre de la chaîne nous pouvons calculer numériquement les valeurs des fonctions :

$$3.1.1. - \mathcal{E} \cos \varphi = f (\mathcal{E}_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\text{tg } \varphi} = g (\mathcal{E}_0)$$

Ce calcul est fait par le programme Tange (option 1).

D'autre part les équations d'équilibre de la bouée peuvent s'écrire :

$$\mathcal{E} \cos \varphi = \frac{1}{1 - \frac{y_0}{H} - \frac{e - y_{AN}}{H}} \frac{F_1}{1 - F \frac{y_{P_0}}{y_{F_0}} \text{tg } \varphi}$$

e et y_{AN} étant du même ordre de grandeur et petits devant H , cette équation peut se mettre sous la forme approchée :

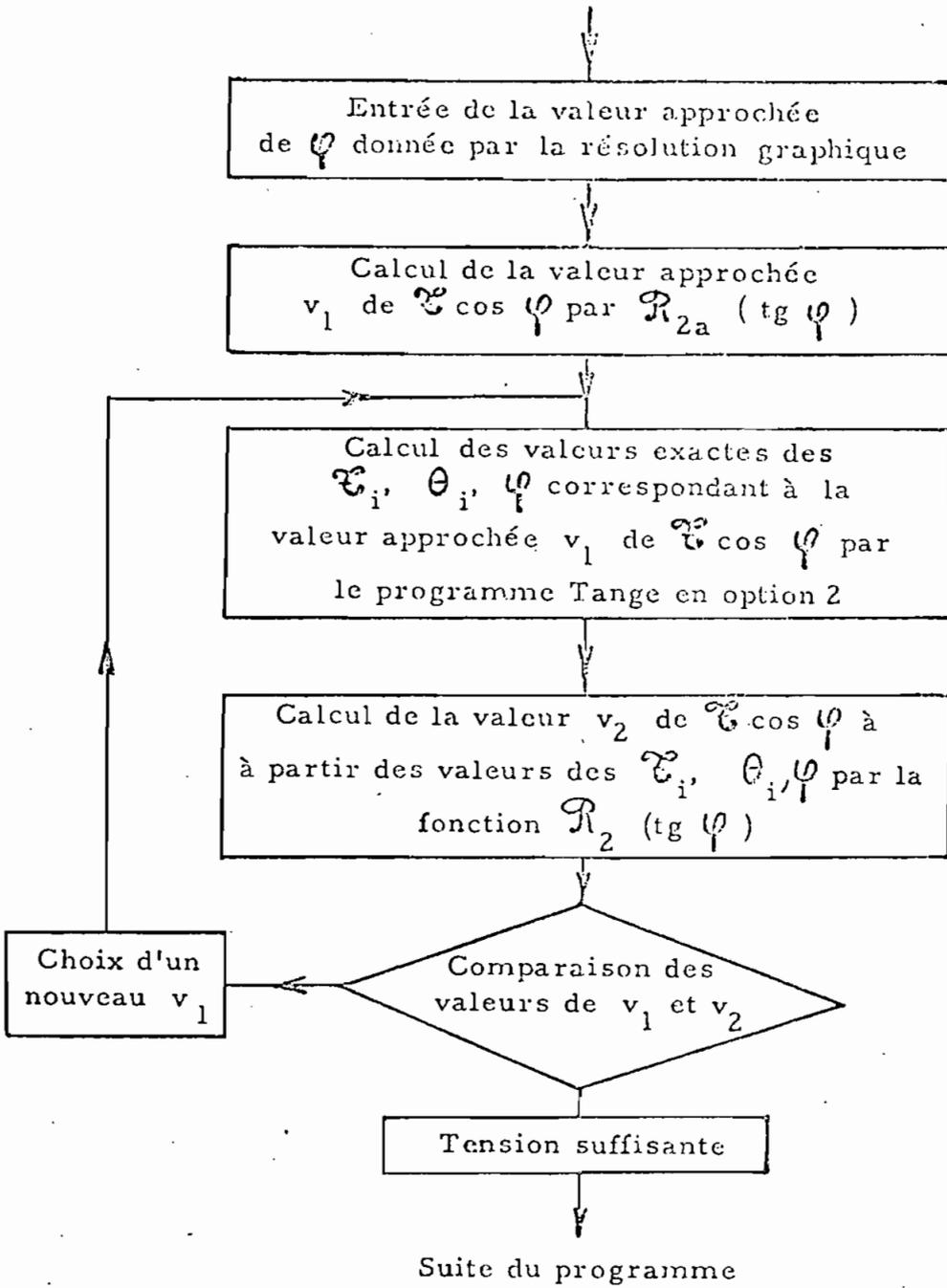
$$\mathcal{E} \cos \varphi = R_{2a} (\text{tg } \varphi)$$

avec :

$$R_{2a} (\text{tg } \varphi) = \frac{1}{1 - \frac{y_0}{H}} \frac{F_1}{1 - F \frac{y_{P_0}}{y_{F_0}} \text{tg } \varphi}$$

Cette fonction est connue lorsque l'on a choisi une bouée et une chaîne.

Le calcul des valeurs exactes des paramètres définissant l'équilibre se fait alors de la manière suivante :



3.2. - Remarque

La méthode qui précède permet de résoudre tout problème d'équilibre donné. Il suffit de faire varier les paramètres pour obtenir les résultats correspondant à telle notation particulière donnée.

Il est intéressant de noter dans cet ordre d'idées qu'une fois donné le nombre n de maillons de la chaîne les équations 3.1.1. qui définissent paramétriquement la fonction, $(\varphi \rightarrow \mathcal{R}(\varphi))$ ne dépendent que du paramètre \bar{k} (voir paragraphes 1.2. - D₁ et 2.1.1.).

Il est commode d'utiliser un paramètre λ proportionnel à \bar{k} et définit par la relation :

$$\lambda = \frac{CV^2}{\mu}$$

Les valeurs de λ étant calculées en prenant pour unité : pour C le mm, pour V le nœud et pour μ le daN/m on a :

$$\lambda = \alpha \frac{g}{\rho_0} \bar{k}$$

α est un coefficient purement numérique égal à :

$$\frac{2 \cdot 10^3}{3,3 \times 0,5144^2}$$

g et ρ_0 sont des constantes.

Alors les équations 3.1.1. s'écrivent :

$$\mathcal{C} \cos \varphi = f(\lambda, \mathcal{C}_0) \text{ et } \frac{1}{\text{tg} \varphi} = g(\lambda, \mathcal{C}_0)$$

Cette remarque sera utilisée plus loin.

3.2. - Résolution de l'équation des petits mouvements (II.2.4.5.)

3.2.1. - Principe de calcul

L'équation matricielle des petits mouvements est :

(II.2.4.5.) $(m \mathbb{H} + M \mathbb{L}) X'' + (2 K S V \mathbb{G} - \mathbb{D}) X' + (s \rho g \mathbb{D} - K \phi V^2 \mathbb{E} - \mathbb{A}) X = 0$

cette équation est de la forme :

(III.2.1.1.) $\mathcal{A} X'' + \mathcal{B} X' + \mathcal{C} X = 0$

où \mathcal{A} est la matrice symétrique associée à la forme quadratique définie positive de l'énergie cinétique.

Nous pouvons donc décomposer \mathcal{A} par la méthode de Choleski sous la forme :

$$\mathcal{A} = L L^t$$

où L est une matrice triangulaire, et inversible.

Posons :

$$B = L^{-1} \mathcal{B} L^t \quad C = L^{-1} \mathcal{C} L^t$$

l'équation (III.2.1.1.) s'écrit :

(III.2.1.2.) $I X'' + L X' + C X = 0$

Posons $Y = X'$, (III.2.1.2.) s'écrira :

$$I Y' + B Y + C X = 0$$

$$I X' = I Y$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} Y' \\ X' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B & -C \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}$$

Cherchons des solutions de la forme :

$$X = X_0 e^{-\mu t} \Rightarrow X' = Y = -\mu X_0 e^{-\mu t} \quad X'' = \mu^2 X_0 e^{-\mu t}$$

d'où :

$$\begin{vmatrix} B & C \\ -I & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\mu X_0 \\ X_0 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} -\mu X_0 \\ X_0 \end{vmatrix}$$

Le problème se ramène à l'extraction des valeurs propres et au calcul des vecteurs propres de la matrice d'ordre $(2n + 2)$:

$$\begin{vmatrix} B & C \\ -I & 0 \end{vmatrix} = T$$

La matrice T étant réelle nous trouverons des valeurs propres :

- soit complexes conjuguées $\mu_i = \alpha_i \pm j \beta_i$

- soit réelles en nombre pair.

Dans les deux cas pour que le système soit stable il faut que la partie réelle de μ_i soit positive.

Dans l'espace à $2n + 2$ dimensions un vecteur propre de la matrice T s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -\mu X_0 \\ X_0 \end{bmatrix}$$

Nous ne sommes intéressés que par le vecteur à $(n + 1)$ dimensions X_0 .

Les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres conjuguées sont eux-mêmes conjugués.

Posons :

$$X R_i = \operatorname{Re}(X_{oi}) \quad (*)$$

$$X I_i = \operatorname{Im}(X_{oi})$$

(*) Ces notations sont commodes pour l'écriture du programme.

A deux valeurs propres conjuguées de même indice correspondent deux solutions de la forme :

$$X_i = (X_{R_i} + j X_{I_i}) e^{-\alpha_i t} e^{-j\beta_i t}$$

$$X_i = (X_{R_i} - j X_{I_i}) e^{-\alpha_i t} e^{-j\beta_i t}$$

A ces solutions on peut faire correspondre les solutions réelles linéairement indépendantes suivantes :

$$X_{R_i} e^{-\alpha_i t} \cos \beta_i t \quad \text{et} \quad X_{I_i} e^{-\alpha_i t} \sin \beta_i t$$

Pour une pulsation β_i donnée, il existe donc deux mouvements d'amplitude différente en quadrature.

En général $\text{Re}(X_{oi})$ et $\text{Im}(X_{oi})$ sont linéairement indépendants. Il n'y a donc aucune relation de phase entre les 2 solutions réelles.

Nous appelons forme propre correspondant à la pseudo pulsation propre β_i le vecteur de composantes :

$$X_i = \mathcal{E} \sqrt{X_{R_i}^2 + X_{I_i}^2}$$

$\mathcal{E} = \pm 1$ suivant le signe de X_{R_i} , c'est-à-dire que nous fixons tous les déphasages :

$$\varphi_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

La forme propre caractérise donc les amplitudes maximales de chaque point, ces amplitudes n'ayant pas lieu au même instant.

Lorsque les X_i seront connus nous pourrons calculer les β_i , η_i , \mathcal{E}_i correspondant et les suppléments de tensions.

3.2.2. - Méthodes de calcul

Le calcul est fait sur ordinateur. A chaque étape de calcul correspond un ou plusieurs sous programmes. On décrit ci-après chacune de ces étapes.

3.2.2.1. - Formation de la matrice T

Les sous programmes CINET, POTAM, CHOLE et INVER sont classiques et n'appellent pas de commentaires particuliers.

On pourra se reporter à l'article de M. Rabechault précédemment cité.

3.2.2.2. - Recherche des valeurs propres de la matrice T

Les valeurs propres ont été déterminées par la méthode Q R, dont le principe est exposé plus loin.

Toutefois la méthode Q R n'est applicable qu'à des matrices dites d'Hesenberg telles que $a_{ij} = 0$ pour $i > j + 1$.

Il convient donc au préalable de trouver une matrice T_H d'Hesenberg semblable à la matrice T .

Cette opération s'effectue en deux temps :

- Balancement de la matrice T .
- Réduction à la forme d'Hesenberg.

3.2.2.2.1. - Balancement de la matrice T (sous programme BALAN).

Soient :

A une matrice carrée d'ordre n et de coefficients a_{ij}

$$\|A\|_E = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}$$

la norme euclidienne de cette matrice.

ϵ : la précision de la machine (*).

on sait que le calcul des valeurs propres conduit à des erreurs d'arrondi de l'ordre de $\epsilon \|A\|_E$.

(*) Pour une machine donnée ϵ est tel que le résultat de l'opération $1 + \epsilon$ est 1.

Balancer une matrice A consiste à trouver une matrice A_B semblable à A telle que les normes des éléments de la ligne et de la colonne de rang i soient approximativement égales et que sa norme soit égale à 1.

Dans les cas favorables (cette circonstance s'est présentée dans notre problème) on obtient ce résultat en :

- 1°) Multipliant A un nombre suffisant de fois, à droite par une matrice diagonale convenable et à gauche par la matrice inverse. On obtient ainsi une matrice A' .
- 2°) Multipliant A' par un scalaire convenable.

3.2.2.2.2. - Réduction de la matrice balancée T_B sous forme d'Hesenberg T_H (sous programme ORTHE)

Pour réduire la matrice T_B à la forme d'Hesenberg on a employé la méthode des matrices élémentaires de Householder.

La matrice est réduite en $(n - 2)$ itérations. La l ème itération annule tous les termes de la l ème colonne situés sous la sous diagonale et ainsi de suite.

Si T_{Br} est la matrice obtenue après la r ième itération on montre que :

$$T_{Br+1} = P_r T_{Br} P_r$$

où P_r est une matrice orthogonale symétrique de la forme :

$$P_r = I - U_r U_r^t / H_r$$

avec :

$$U_r^t = [0, \dots, 0, a_{r+1,r}^{(r)} \pm \frac{1}{2} \sigma_r, a_{r+2,r}^{(r)}, \dots, a_{n,r}^{(r)}]$$

$$\sigma_r = (a_{r+1,r}^{(r)})^2 + (a_{r+2,r}^{(r)})^2 + \dots + (a_{n,r}^{(r)})^2$$

$$\text{et } H_r = \sigma_r \pm a_{r+1,r}^{(r)} \sigma_r^{\frac{1}{2}}$$

3.2.2.3. - Recherche des valeurs propres de la matrice T par la méthode double QR avec translation d'origine (sous-programme HQRHM)

3.2.2.3.1. - Généralités

Principe de la méthode QR -

On se propose de rechercher les valeurs propres d'une matrice mise sous la forme d'Hessenberg.

La méthode consiste essentiellement à trouver une suite de matrices T_n semblables à la matrice donnée T , telle que :

- toutes les matrices T_n soient d'Hessenberg,
- l'élément $t_{n, n-1}$ de la sous-diagonale des matrices de la suite T_n tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Lorsqu'à l'approximation de la machine, on obtient après n_0 itérations une matrice T_{n_0} telle que t_{n_0, n_0-1} soit nul, le terme t_{n_0, n_0} est une bonne approximation de la valeur propre de la matrice T .

Il suffit alors de recommencer l'opération en prenant pour matrice de départ T' la matrice d'ordre $n-1$, obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de T_{n_0} .

Justification de la méthode -

Nous rappelons sommairement ci-après comment est justifiée théoriquement la méthode QR.

Proposition 1 -

Toute matrice A régulière réelle d'ordre $n > 1$ peut s'écrire sous la forme $A = Q^t R$ où Q est orthogonale et R triangulaire supérieure.

De plus, les éléments diagonaux de R peuvent être choisis tous > 0 .

Alors la décomposition ci-dessus est unique.

Remarques -

a) D'après l'énoncé de la proposition (1) R est réelle.

b) Nous ne donnons pas la démonstration de la proposition (1) dite théorème de Householder.

Le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage de Wilkinson cité en renvoi (*).

La démonstration donne le procédé de construction de la matrice Q .

Q se met sous la forme d'un produit :

$$Q = P_{n-1} \cdots P_2 P_1$$

avec :

$$P_r = I - 2 W_r W_r^t$$

W_r étant un vecteur dont les seules composantes non nulles sont les composantes de rang $r, r+1, r+2$.

On en déduit les corollaires suivants :

Corollaire 1 -

A est d'Hessenberg $\iff Q^t$ est d'Hessenberg.

La propriété est évidente dans le sens \Leftarrow .

Dans l'autre sens on montre d'abord que les termes de la première colonne de Q sont nuls pour $i > 2$ puis que ceux de la seconde colonne sont nuls pour $i > 3$ puis par récurrence que les termes de la j ième colonne sont nuls pour $i > j + 1$.

Corollaire 2 -

Posons $A_1 = A$ et soit Q_1 et R_1 respectivement orthogonales et triangulaire supérieure telles que :

$$A_1 = Q_1^t R_1$$

Posons :

$$A_2 = R_1 Q_1^t$$

(*) Wilkinson Algebraic Eigenvalues Problems Clarendon Press.

Comme :

$$R_1 = Q_1 A_1$$

on a :

$$A_2 = Q_1 A_1 Q_1^t$$

En décomposant A_2 sous la forme :

$$A_2 = Q_2^t R_2$$

et en réitérant le processus on forme une suite de matrice A_{k+1} définie par :

$$A_{k+1} = R_k Q_k^t$$

telles que :

$$A_{k+1} = R_k Q_k^t = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_k \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_k \end{pmatrix}^t$$

Alors :

1°) - la matrice A_{k+1} est semblable à la matrice A ,

2°) - Si A est d'Hesenberg, A_{k+1} est d'Hesenberg.

Le point 1 est évident.

Il est clair qu'il suffit de démontrer 2°) - pour la matrice :

$$A_2 = Q_1 A Q_1^t$$

Or A_2 est le produit d'une matrice triangulaire supérieure par une matrice d'Hesenberg. Le résultat est alors évident.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2 -

Lorsque l'entier k tend vers $+\infty$ le terme $a_{n, n-1}$ de la matrice A_k tend vers 0.

Nous ne démontrerons pas cette proposition (*).

Définitions -

On appelle algorithme Q R, le processus qui conduit en suivant la méthode décrite plus haut à former la matrice A_k à partir de la matrice donnée A ;

Méthode Q R, la méthode qui permet de trouver les valeurs propres successives de A au moyen de n suites de matrices A_k .

Principe de la méthode double Q R

Des recherches assez récentes (**) ont permis de mettre au point des méthodes permettant d'une part d'accélérer la convergence de la méthode Q R ; d'autre part d'éviter tout recours à l'emploi des nombres complexes lorsque les valeurs propres de la matrice A sont complexes conjuguées.

On va d'abord montrer comment on peut accélérer la convergence de la méthode Q R au moyen d'une "translation d'origine".

Proposition 3 -

Supposons que l'on connaisse deux valeurs approchées λ et ρ des valeurs propres d'une matrice d'Hessenberg A , soit alors s_k une suite de nombre réels ou complexes, s_k un nombre de la suite.

Supposons que \forall_k :

$$\left| \frac{\lambda - s_k}{\rho - s_k} \right| < a < 1$$

Alors, on peut former une suite de matrices A_k d'Hessenberg dont le terme $a_{n,n-1}^k$ tend vers 0 comme a^k .

(*) On trouve une démonstration de la proposition (2) dans Wilkinson ouvrage déjà cité.

(**) Cf. l'ouvrage de Wilkinson déjà cité.

Nous ne démontrons pas cette proposition (*). Nous rappelons seulement le mode de formation de la suite A_k .

(Supposons obtenue la matrice A_k et montrons le procédé de formation de la matrice A_{k+1}).

Posons :

$$B_k = A_k - s_k I$$

et décomposons B_k par la méthode QR.

$$B_k = Q_k' R_k'$$

Formons :

$$C_{k+1} = R_k' Q_k'^t$$

On a :

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= Q_k' B_k Q_k'^t = Q_k' (A_k - s_k I) Q_k'^t \\ &= Q_k' A_k Q_k'^t - s_k I \end{aligned}$$

$C_{k+1} + s_k I$ est une matrice semblable à $A_k = E_k + s_k I$

On posera

$$(a) \quad A_{k+1} = C_{k+1} + s_k I$$

Il est clair :

1°) - que si A_k est d'Hessenberg il en est de même de B_k .

2°) - que C_{k+1} est d'Hessenberg (Corollaire 2 ci-dessus) et que par suite A_{k+1} est d'Hessenberg.

Si l'on peut trouver une suite S_k tel que $\left| \frac{\lambda - s_k}{\rho - s_k} \right| \ll 1$ le processus converge donc rapidement.

(*) Cf. l'ouvrage de Wilkinson déjà cité.

Le nom de translation d'origine relative à S est donné à l'opération qui consiste à former les matrices A_k .

On examine à présent le moyen d'éviter le recours à l'emploi des nombres complexes lorsque les valeurs propres de A sont complexes conjugués.

On utilise à cet effet la proposition suivante.

Proposition 4 -

Soit Σ la suite de nombres complexes conjugués

$$(s_1, s_2 = \overline{s_1}, \dots, s_k, s_{k+1} = \overline{s_k}, \dots)$$

soit :

$$A_1, A_2, A_{2k}, A_{2k+1}, \dots$$

la suite de matrices construites comme il vient d'être montré.

Alors la sous-suite :

$$A_1, A_3, A_{2k+1}, A_{2k+3}$$

est une suite de matrices réelles.

Pour démontrer cette proposition, il faut s'appuyer sur le lemme suivant.

Lemme 1 -

Soit B une matrice régulière. Alors il existe Q unitaire et H d'Hessenberg telle que :

$$B Q = Q H$$

De plus, on peut choisir arbitrairement la 1^{ère} colonne de Q . Si l'on s'impose, en outre que les éléments sous-diagonaux de H soient réels positifs Q et H sont déterminées de manière unique (*).

(*) la démonstration de ce lemme est donnée dans l'ouvrage de Wilkinson déjà cité.

Démonstration de la proposition

Calculons à partir de la matrice A_k définie par le procédé ci-dessus, la matrice A_{k+2} .

On a :

$$A_{k+2} = Q_{k+1}' Q_k' A_k Q_k'^t Q_{k+1}'^t$$

ce que l'on peut écrire :

$$(a) \quad A_k Q_k'^t Q_{k+1}'^t = Q_k^t Q_k^t Q_{k+1}^t A_{k+2}$$

Si l'on pose :

$$Q_{k+1} Q_k = Q_{(k)}$$

La relation (a) ci-dessus s'écrit :

$$A_k Q_{(k)}^t = Q_{(k)}^t A_{k+2}$$

Soit $Q_{(k)}$ une matrice orthogonale telle que $\tilde{Q}_{(k)}^t$ ait la même première colonne que $Q_{(k)}^t$. On peut écrire d'après le lemme 1 :

$$(b) \quad A_k \tilde{Q}_{(k)} = \tilde{Q}_{(k)} H$$

Il résulte de l'unicité de la décomposition de A_k que l'on a de plus :

$$\tilde{Q}_{(k)} = Q_k^t \quad \text{et} \quad H = A_{k+2}$$

Pour démontrer la proposition, il suffira donc de démontrer :

$$A_k \text{ réel} \Rightarrow Q_{(k)} \text{ réel}$$

(Q unitaire sera donc orthogonale) A_1 étant réelle il s'ensuivra en effet que A_{2k+1} est réelle ainsi qu'il est annoncé.

Or, si l'on remplace dans (b) A_{k+2} par sa valeur (relation (a) proposition 3).

$$A_{k+2} = R_{k+1}' Q_{k+1}' + s_{k+1} I,$$

On obtient :

$$A_k Q_k' Q_{k+1}' = Q_k^t Q_{k+1}^t Q_{k+1}' + s_{k+1} I Q_k' Q_{k+1}'$$

En multipliant à gauche par Q_{k+1}' on a :

$$(A_k - s_{k+1} I) Q_k^t = Q_k^t Q_{k+1}' R_{k+1}$$

Mais comme la relation (a) donne aussi :

$$A_k = s_k I + Q_k^t R_k$$

ce qui entraîne :

$$Q_k^t = A_k - s_k I R_k^{-1}$$

On a :

$$(A_k - s_{k+1} I) (A_k - s_k I) = Q_k^t Q_{k+1}' R_{k+1} R_k$$

Les R_k sont, rappelons-le, des matrices triangulaires supérieures.

Posons :

$$R_{k+1} R_k = R$$

R est une matrice triangulaire supérieure.

Posons à présent :

$$(A_k - s_{k+1} I) (A_k - s_k I) = M$$

Supposons que A_k soit une matrice réelle si l'on choisit $s_{k+1} = \bar{s}_k$, M est une matrice réelle.

De l'égalité $M = Q R$ et de la proposition (1) on déduit que Q est réelle.

c. q. f. d.

Conséquence -

On évitera donc l'emploi des nombres complexes en formant la suite des matrices d'Hesenberg.

$$A_1 \quad A_3 \quad \dots \quad A_{2k+1}$$

La démonstration montre chemin faisant que le processus de formation des A_{2k+1} consiste à calculer la suite des matrices $Q_{(2k+1)}$

Il reste à se donner une suite convenable de nombres s_k et $s_{k+1} = \bar{s}_k$.

On montre que de bonnes valeurs de s_k et s_{k+1} sont les valeurs propres de la matrice d'ordre 2 qui forme le coin en bas et à droite de la matrice courante A_k . s_k et s_{k+1} sont donc définis par les relations :

$$s_k + s_{k+1} = a_{n-1, n-1}^{(k)} + a_{n, n}^{(k)}$$
$$s_k s_{k+1} = a_{n-1, n}^{(k)} a_{n, n-1}^{(k)} - a_{n-1, n-1}^{(k)} a_{n, n}^{(k)}$$

Définition

On appelle méthode double QR avec translation d'origine le processus de formation de la suite :

$$A_1 \quad A_3 \quad \dots \quad A_{2k+1}$$

3.2.4.3. - Recherche des vecteurs propres

Il s'agit de trouver les vecteurs propres de la matrice d'ordre $2n+2$.

$$T = \begin{vmatrix} B & C \\ -I & 0 \end{vmatrix}$$

Rappelons d'abord les transformations qu'elle a subi.

Balancement : cette opération a consisté à former la matrice.

$$T_B = \frac{1}{\|T\|_E} D T D^{-1}$$

où D est une matrice diagonale convenable.

Réduction à la forme d'Hesenberg : cette opération a consisté à former la matrice $T_H = P T_B P$ où P est une matrice orthogonale symétrique.

Soit à présent X_H la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de T_H , λ_i les valeurs propres de T_H .

Posons :

$$\Lambda = \text{diag} (\lambda_i) \quad \text{on a} \quad T_H X_H = X_H \Lambda$$

ce qui entraîne :

$$P T_B P X_H = X_H \Lambda$$

donc :

$$T_B (P X_H) = (P X_H) \Lambda$$

La matrice X_B , dont les colonnes sont les vecteurs propres de T_B , est donc :

$$X_B = P X_H$$

on en déduit :

$$\frac{1}{\|T\|_E} D T D^{-1} X_B = X_B \Lambda$$

$$\text{donc} \quad T (D^{-1} X_B) = \|T\|_E (D^{-1} X_B) \Lambda$$

Les vecteurs propres de T sont les colonnes de la matrice

$$X = D^{-1} X_B = D^{-1} P X_H$$

et ses valeurs propres sont : $\|T\|_E \lambda_i$

3.2.2.3.1. - Recherche des vecteurs propres de la matrice d'Hesenberg sous-programme HVEPR

Si aucun élément de la sous-diagonale de la matrice d'Hesenberg n'est nul, les composantes des vecteurs propres se déduisent par récurrence inverse à partir de la dernière composante.

Une difficulté se présente du fait que les valeurs propres de la matrice sont réelles ou complexes conjuguées. Dans ce 2ème cas le programme de calcul des valeurs propres donne à deux valeurs propres conjuguées deux indices consécutifs.

Soit donc $\lambda_i + j \mu_i$ une valeur propre complexe,

$\lambda_{i+1} + j \mu_{i+1} = \lambda_i - j \mu_i$ la valeur propre complexe conjuguée.

Les vecteurs propres étant définis à une constante multiplicative près. Il est loisible de se donner arbitrairement leur n ième composante. Il est commode de poser cette composante à $(1 + j)$ pour tout i . A la valeur propre $\lambda_i + j \mu_i$ correspondra le vecteur de composantes

$\alpha_{ki} + j \beta_{ki}$ et à la valeur propre $\lambda_{i+1} + j \mu_{i+1}$ le vecteur de composantes $\beta_{ki} + j \alpha_{ki}$. Il est ainsi possible de se contenter de

calculer les parties réelles des vecteurs propres. En effet la partie imaginaire du vecteur propre correspondante à la valeur complexe $\lambda_i + j \mu_i$ est la partie réelle du vecteur propre correspondant à la valeur complexe conjuguée et réciproquement. De plus si la valeur propre est réelle, les parties réelles du vecteur propre obtenues sont celles que l'on obtiendrait en donnant la valeur 1 à la dernière composante de ce vecteur.

Les colonnes de la matrice X_H sont formées des parties réelles des vecteurs ainsi calculés.

3.2.2.3.2. - Calcul de X

Le sous programme ORTBA forme $X_B = P X_H$

Il suffit enfin de former $X = D^{-1} X_B$

3.2.2.3.3. - Retour aux variables initiales et normalisation (sous programme FORMP)

Le retour aux déplacements des points A_k ainsi qu'aux rotations des vecteurs \vec{t}_k s'effectue au moyen des formules établies au paragraphe 2.2.1. (formules II.2.1.6., II.2.1.7., II.2.1.2. bis).

On s'est donné comme condition de normalisation des vecteurs propres :

$$\max [\xi_i(j)] = \sigma$$

σ est arbitraire.

Le sous-programme FORMP permet d'effectuer ce calcul.

3.2.3. - Calcul de la réponse à une excitation donnée

Il s'agit de trouver des solutions de la forme :

$$X = X_0 \sin \omega t + X_1 \cos \omega t$$

de l'équation :

$$AX'' + BX' + CX = F \sin \omega t$$

On vérifie facilement que l'on a :

$$X_0 = [C - \omega^2 A + \omega^2 B (C - \omega^2 A)^{-1} B]^{-1} F$$

$$X_1 = -\omega (C - \omega^2 A)^{-1} B X_0$$

Le calcul de X_0 et X_1 se fait au moyen d'un programme d'inversion de matrice de type classique.

3.2.4. - Calcul des suppléments de tensions sous programme TENSE

Le programme calcule au temps t les suppléments de tensions correspondants à un vecteur.

$$X = X_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

4ème PARTIE

RÉSULTATS

4.1.- Les résultats présentés ci-après concernent en tout ou en partie les bouées suivantes du Service des Phares et Balises :

- a) bouée de 9,3 kdaN en acier (dite bouée de 12 m³),
- b) bouée de 3,3 kdaN en alliage léger (dite bouée océanique),
- c) bouée de 70,6 kdaN en acier (dite bouée de 40 m³).

Les schémas et le tableau ci-dessous récapitulent les données relatives à chacune de ces bouées :

Paramètres caractérisant la bouée	Types de bouée		
	Bouée de 12 m ³	Bouée océanique	Bouée de 40 m ³
Masse	9,3 kdaN	3,3 kdaN	70,6 kdaN
Diamètre du corps de bouée	2,50 m	3,00 m	10,00 m
Moment d'inertie par rapport au centre de gravité	8400 kg/m ²	9300 kg/m ²	945000 kg/m ²
Ordonnée du centre de carène	2,12 m	0,97 m	0,60 m
Ordonnée du centre de dérive	1,13 m	0,75 m	0,55 m
Ordonnée de la surface de flottaison	3,59 m	1,21 m	1,10 m
Ordonnée du centre de gravité	1,66 m	1,47 m	2,26 m
Y _{Fo}	3,23 m	0,60 m	0,98 m
K	1100	400	400
Mode d'attache	par barre d'attelage	par patte d'oie	en un point situé sur l'axe de la bouée

Les caractéristiques des chaînes normalisées du Service des Phares et Balises sont d'autre part indiquées dans le tableau ci-après :

calibre (mm)	Masse linéaire (kg/m).
15	4,9
20	9,7
25	15
30	21
35	28

4.2. - Détermination des positions d'équilibre

La première opération consiste (voir paragraphe 3.1.) à déterminer le point d'intersection des courbes $R_1(\varphi)$ et $R_{2A}(\varphi)$.

Le nombre de paramètres caractérisant les bouées est élevé, le nombre de types de bouées relativement réduit, enfin l'expression analytique de la fonction $\varphi \rightarrow R_{2A}(\varphi)$ est très simple. Il est donc inutile de tracer à l'avance un réseau universel de courbes $R_{2A}(\varphi)$.

En revanche, les courbes $R_1(\varphi)$ sont d'expression analytique compliquée et le nombre de paramètres caractérisant la chaîne est petit.

Au moyen des équations paramétriques du numéro 3.2. on a tracé (fig. 7) les réseaux des courbes :

$$R_1(\varphi) \quad \lambda = \text{cte}$$

$$R_1(\varphi) \quad \mathcal{E}_0 = \text{cte}$$

Dans la pratique, λ étant connu, l'intersection des courbes $R_{2A}(\varphi)$ et $R_1(\varphi)$ fait connaître φ , \mathcal{E} , \mathcal{E}_0 .

Le réseau de courbes de la figure 2 représente par ailleurs les variations en fonction de $1/\text{tg } \varphi$ (voir page 5) pour des valeurs constantes de λ et de \mathcal{E}_0 du rapport \mathcal{H} de la longueur de la chaîne à la hauteur du point d'amarrage au-dessus du fond (*).

(*) Comme la distance du point d'amarrage à la surface libre est le plus souvent assez petite vis-à-vis de la profondeur, on peut obtenir rapidement sans recours à la machine, une valeur approchée de la longueur de la chaîne connaissant la profondeur d'eau.

Le tableau ci-dessous donne, pour les bouées de 12 m³ mouillées par une profondeur de 30 m, avec une chaîne de calibre 35 mm, les longueurs de chaîne, les valeurs, calculées à la machine, du rapport $\frac{H}{L}$ et les tensions maximales pour des vitesses de courant comprises entre 2 et 6 nœuds par palier de 1 nœud.

Équilibre en position verticale
Bouée de 12 m³

Longueur de la chaîne en mètres	Rapport $\frac{H}{L}$	Tension maximale en kdaN	Vitesse du courant en nœuds
54	1,785	1,85	2
75	2,497	3,28	3
98	3,278	5,39	4
124	4,113	8,28	5
150	4,995	12,04	6

Le tableau ci-dessous donne les mêmes résultats pour une bouée océanique mais pour une chaîne de calibre 20 mm.

Équilibre en position verticale
Bouée océanique chaîne 20 mm

Longueur de la chaîne en mètres	Rapport $\frac{H}{L}$	Tension maximale en kdaN	Vitesse du courant en nœuds
42	1,4	0,43	2
51,3	1,71	0,59	3
61,5	2,05	0,80	4
72,5	2,41	1,07	5
84	2,80	1,4	6

Le tableau ci-dessous donne les mêmes résultats pour une bouée de 40 m³ mais pour une chaîne de calibre 35 mm.

Équilibre en position verticale
Grosse bouée chaîne 35 mm

Longueur de la chaîne en mètres	Rapport $\frac{H}{L}$	Tension maximale en kdaN	Vitesse du courant en nœuds
44,2	1,47	1,33	2
56	1,87	1,92	3
68,9	2,30	2,73	4
82,3	2,74	3,76	5
96,2	3,21	5,01	6
110,4	3,68	6,5	7

Enfin le tableau ci-dessous donne, pour une bouée de 12 m³ et pour une vitesse de courant de 3 nœuds, diverses solutions d'amarrage avec des chaînes de calibre : 20 - 25 - 30 - 35 mm.

Longueur de la chaîne en mètres	Rapport $\frac{L}{H}$	Tension maximale en kdaN	Calibre de la chaîne
118	3,922	2,58	20
97	3,23	2,79	25
84	2,80	3,02	30
75	2,50	3,28	35

On se rend compte à l'examen du tableau que le rapport $\frac{L}{H}$ reste compris entre 1 et 5 .

On juge ainsi de la validité de la règle traditionnelle suivant laquelle la longueur de chaîne est égale à environ trois fois la profondeur de mouillage.

Il est également intéressant de remarquer que les tensions dans les lignes d'amarrage des bouées en alliage léger sont très inférieures aux tensions dans les lignes d'amarrage des bouées en acier.

Ce résultat n'est pas surprenant, il constitue une des raisons de la supériorité probable des bouées en alliage léger que le Service des Phares essaie de mettre au point.

On remarquera enfin que les tensions à l'équilibre des chaînes d'amarrage des grosses bouées de 40 m³ n'excèdent pas 6,5 kdaN ce qui reste très en deçà des efforts de traction admissible des chaînes utilisées en pratique (plus de 65 kdaN).

4.3. - Étude des périodes propres et des mouvements propres

Les résultats des calculs à la machine conduits pour des nombres de maillons croissants (on a fait varier le nombre de maillons de 5 à 30) n'ont pas fait apparaître de différences sensibles sur les fréquences propres les plus basses dès que n dépasse 10.

Les résultats ci-dessous ont été obtenus en limitant le nombre n de maillons à 10.

On a d'abord rassemblé dans un tableau les périodes propres et les coefficients d'amortissement pour les trois configurations-types suivantes :

configuration I - Bouée de 12 m³ - amarrée à une chaîne de 35 mm
pour une profondeur de 30 m

hypothèse a) de la page 71 Trainée variable, vitesse courant 4 nœuds

configuration II - Bouée océanique - amarrée à une chaîne de 20 mm
pour une profondeur de 30 m

hypothèse b) de la page 71 Trainée constante, vitesse courant 4 nœuds

configuration III - Bouée de 40 m³ - amarrée à une chaîne de 35 mm
pour une profondeur de 30 m

hypothèse c) de la page 71 Trainée constante, vitesse courant 4 nœuds

Type de configuration

I

II

Fréquences propres	Amortissement correspondant
1,283	0,022
1,234	0,041
1,155	0,081
1,049	0,134
0,912	0,186
0,759	0,249
0,574	0,280
0,395	0,344
0,336	0,091
0,232	0,406
0,129	0,455

Fréquences propres	Amortissement correspondant
1,256	0,238
1,180	0,222
1,100	0,456
0,983	0,732
0,825	0,969
0,685	0,028
0,664	1,195
0,478	1,969
0,369	0,017
0,077	0,121
0	1,478
0	4,665

III

Fréquences propres	Amortissement correspondant
1,250	0,118
1,176	0,122
1,102	0,193
1,081	0,049
0,996	0,367
0,857	0,519
0,705	0,667
0,530	0,789
0,526	0,002
0,334	1,186
0,034	0,012

On a, d'autre part, cherché à représenter les "formes propres" correspondant à chacune des fréquences propres de la configuration du type I.

Du fait de l'amortissement, les divers points de la chaîne et de la bouée ne sont pas animés d'un mouvement périodique. Ils ne vibrent pas en phase au voisinage de la position d'équilibre.

Le tracé de la configuration prise par le système à tout instant ayant paru déborder le cadre de cette étude (bien qu'il n'offre théoriquement aucune difficulté) on s'est contenté de déterminer les déplacements des points A_i dans l'hypothèse où il existerait un instant où les composantes du vecteur $X(t)$ représentant les mouvements du système seraient les valeurs X_i définies au paragraphe 3.2.1.

L'ensemble des figures 9 à 19 représente les mouvements propres au voisinage de l'équilibre du système décrit sous le nom de configuration I à la page précédente.

On obtient une série de lignes brisées représentant une position approchée du système en mouvement qui ont l'intérêt de faciliter l'identification des mouvements du système.

C'est ainsi que l'on retrouve le fait expérimental que la bouée ne prend des mouvements d'une amplitude notable que dans un tout petit nombre de cas (tangage, déplacement longitudinal et pilonnement).

En particulier, dans les mouvements propres du système qui se produisent à fréquences relativement élevées, l'amplitude des mouvements de la bouée restent indécibles à l'échelle du dessin.

L'importance du rapport de la masse de la bouée à celle de la chaîne explique ce phénomène. Une autre manifestation en est la quasi identité des $n - 2$ fréquences propres calculées comme il vient d'être exposé et des $n - 2$ fréquences propres correspondant au cas où la chaîne est attachée à ses deux extrémités.

Comme en mécanique linéaire les amplitudes des mouvements propres ne sont déterminés qu'à un facteur arbitraire près, on ne peut pas, a priori, déterminer les suppléments de tension induits dans la chaîne autrement qu'à un facteur près.

On a cependant calculé les suppléments de tension dans l'hypothèse où les déplacements sont tels (condition de normalisation) que l'angle d'un maillon avec la position qu'il occupe à l'équilibre est de 0,07 radian.

Pour le mouvement propre n° 11 (figure 19) dans lequel l'axe de la bouée prend une inclinaison notable par rapport à la verticale le supplément de tension maximale est de 5,51 kdaN alors que la tension nominale à l'équilibre est de 5,39 kdaN.

Ce résultat confirme que les suppléments d'efforts extérieurs dus au mouvement du système est très appréciable même pour des mouvements d'amplitude relativement réduits.

Dès que le supplément de tension qui peut avoir un signe quelconque atteint en valeur absolue, la valeur de la tension à l'équilibre, il peut donc se produire un décollement de deux maillons successifs. L'étude du comportement de la chaîne après un tel décollement se heurterait certainement à de sérieuses difficultés analytiques. Elle n'a pas été abordée.

On peut cependant conclure qu'au cours d'un mouvement les risques de choc de deux maillons les uns sur les autres sont élevés et cela confirme l'impression que les amarrages périssent principalement du fait des chocs plutôt que du fait de l'application continue d'une sollicitation trop grande.

4.4. - Influence d'une variation harmonique de faible amplitude du niveau de la mer.

La figure n° 8 représente les variations de l'amplitude du mouvement du paramètre (angle de l'axe de la bouée avec la verticale) en fonction de la fréquence d'une oscillation du plan d'eau.

On reconnaît sur la figure, 3 pics de résonance de hauteur très inégale.

Le pic central de loin le plus élevé correspond à la fréquence propre de tangage de la bouée précédemment déterminée.

CONCLUSION

Nous ne pouvons manquer en achevant cet exposé d'indiquer comment nous voyons aujourd'hui les directions qu'il faut prendre pour prolonger l'étude.

Il faut évidemment d'abord développer les résultats. Le recours à la machine va maintenant permettre d'étudier un nombre suffisant de systèmes pour que l'on puisse dans quelques mois songer à remplacer les règles empiriques de constitution des lignes d'amarrage de nos bouées par des tableaux ou abaques d'emploi facile.

Mais il faudra aussi confronter de près les résultats théoriques et l'expérience. On sera ainsi conduit à rechercher puis à développer des appareils permettant de mesurer le mouvement des bouées et de leur ligne d'amarrage. Ce sera une tâche difficile. Les systèmes dont il s'agit sont soumis à une ambiance très agressive. Au surplus l'on ne dispose pas de source d'énergie à bord des bouées.

Il est très tentant, d'un autre côté, de songer à étendre les méthodes qui viennent d'être exposées à des systèmes plus complexes. On peut penser par exemple à développer une théorie de la dynamique du remorquage.

Tous les marins connaissent les dangers des opérations de remorquage qui mettent en présence deux flotteurs reliés par un fil, mais il ne semble pas que le problème ait été abordé d'une façon analytique.

Cependant, la transposition des méthodes qui viennent d'être décrites à des cas plus complexes ne peut se faire de plano.

Du point de vue de la méthode mathématique, il faut se demander si le calcul "à la main" du système différentiel auquel satisfait le mouvement ne doit pas être remplacé par un formalisme beaucoup plus systématique accessible au calcul à la machine. La mise en œuvre des idées modernes de mécanique analytique est certainement susceptible d'apporter des améliorations dans ce sens.

Du point de vue des hypothèses physiques, les défauts de notre exposé apparaissent peut être plus clairement encore. Les principales difficultés résultent de l'insuffisance de nos connaissances des actions de l'eau sur un flotteur partiellement immergé et en mouvement. Il s'agit d'un domaine très vaste qui déborde très largement le cadre des préoccupations du Service des Phares et Balises.

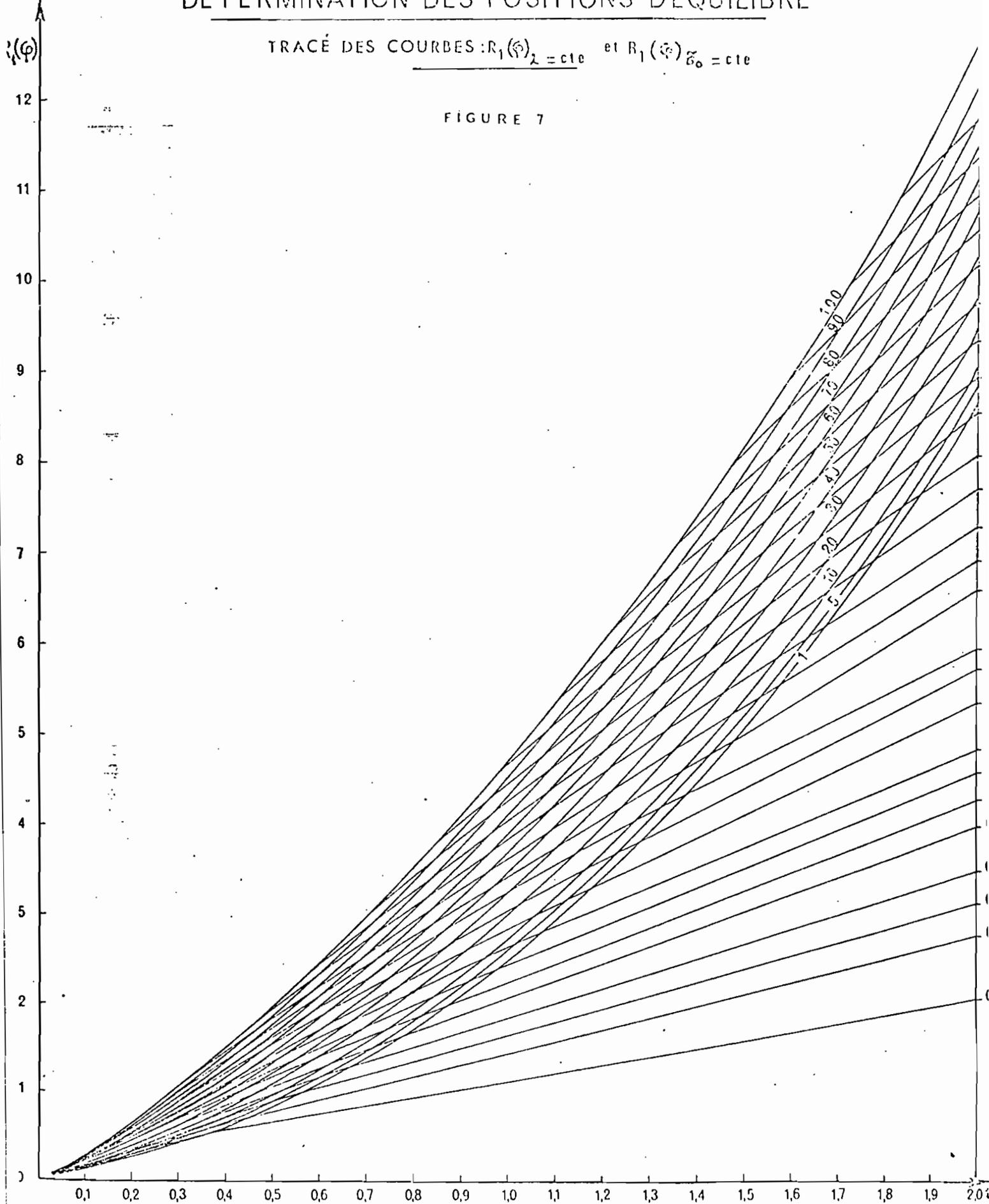
Le développement des recherches sur la dynamique des flotteurs ancrés est donc subordonné à la constitution d'équipes suffisantes.

C'est donc par cela qu'il faudra commencer.

DETERMINATION DES POSITIONS D'EQUILIBRE

TRACÉ DES COURBES: $R_1(\varphi)_{\lambda = cte}$ et $R_1(\varphi)_{\xi_0 = cte}$

FIGURE 7

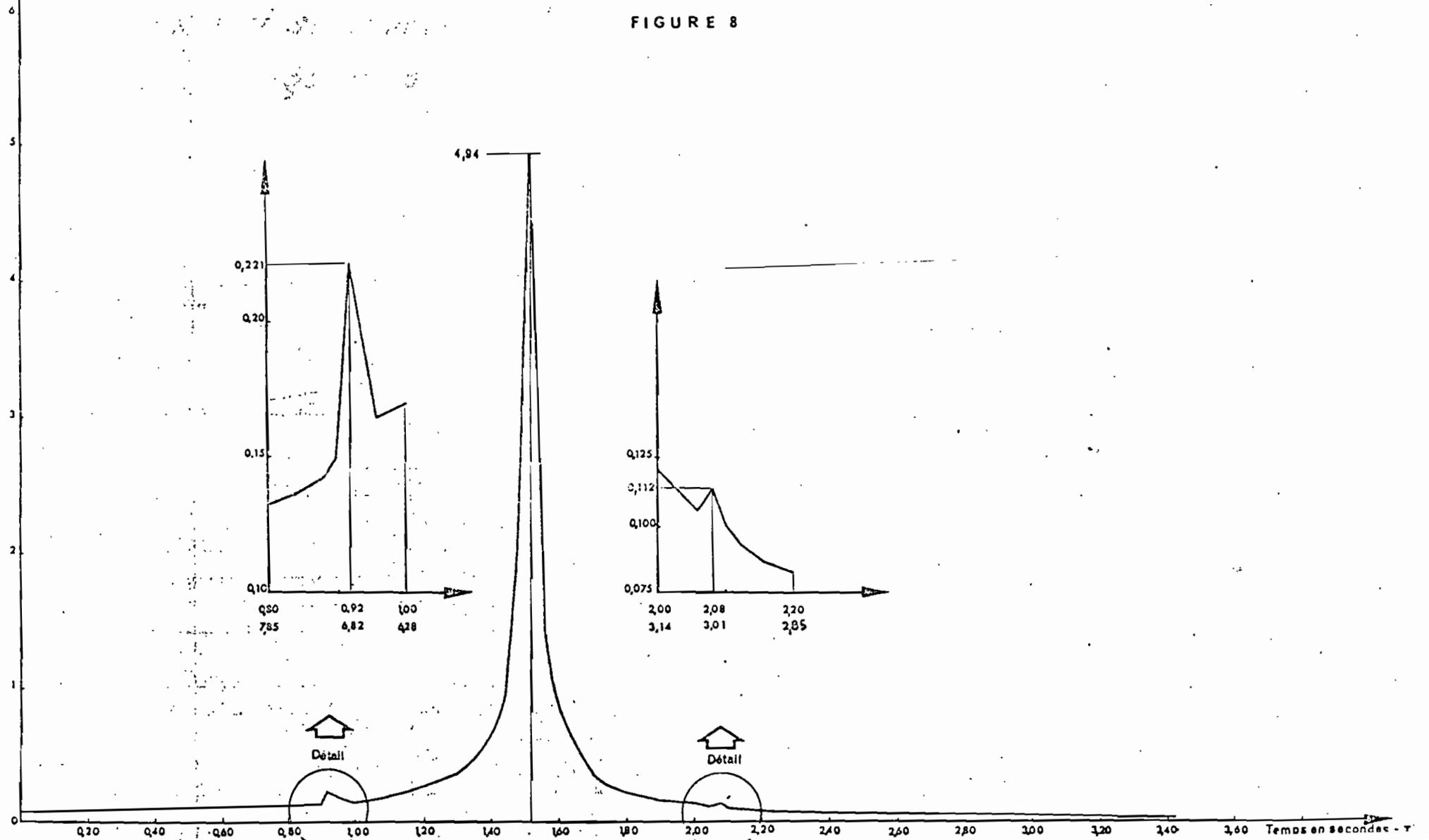


BOUÉE DE 12 M³

RÉPONSE A UNE VARIATION SINUSOÏDALE DU PLAN D'EAU
MOUVEMENT DE L'AXE DE LA BOUÉE

VARIATIONS
ANGULAIRES

FIGURE 8



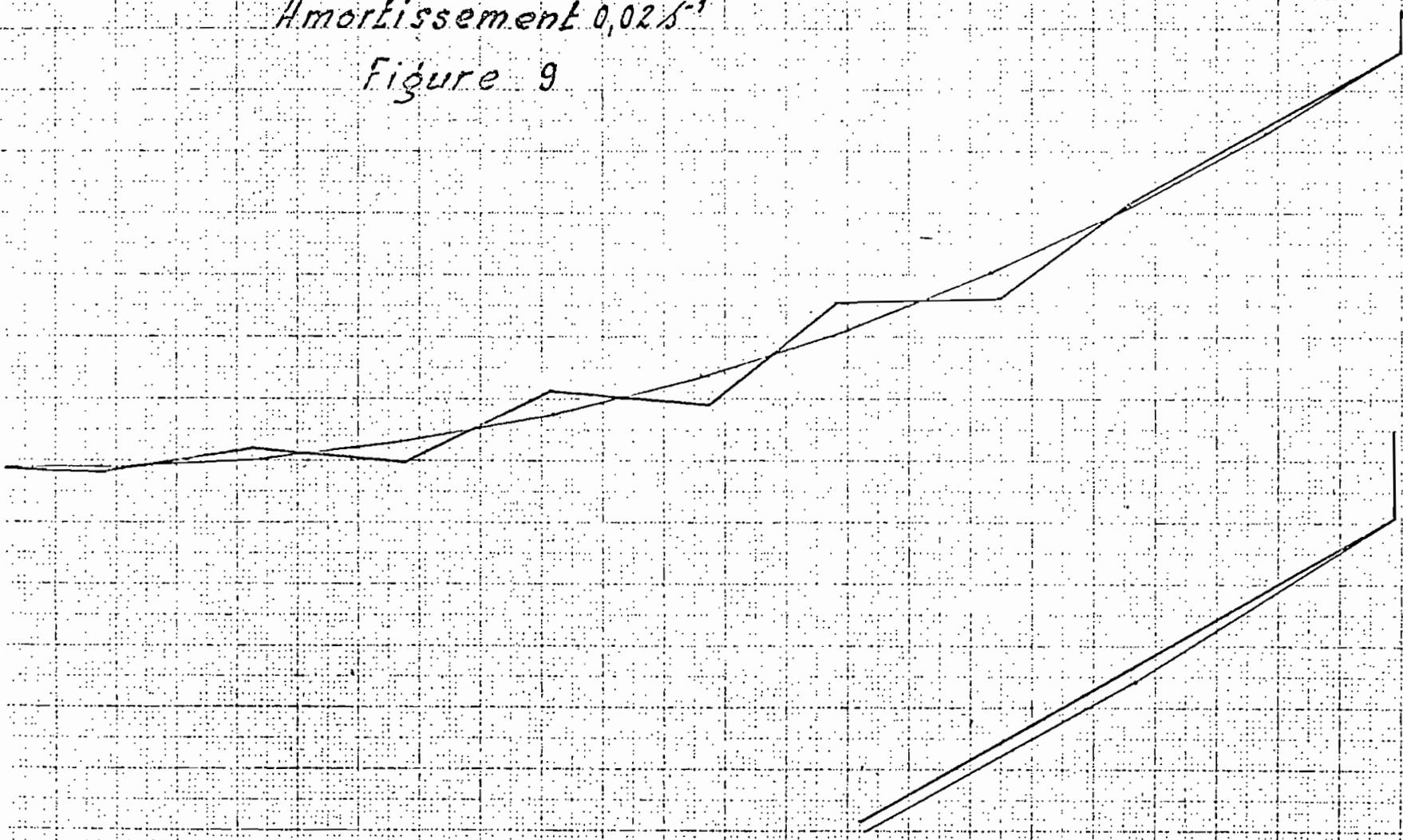
BOUEE DE 12M³ AVEC FORCE DE TRAINEE VARIABLE

Mouvement propre N°1

Periode 0,779s

Amortissement 0,025s⁻¹

Figure 9



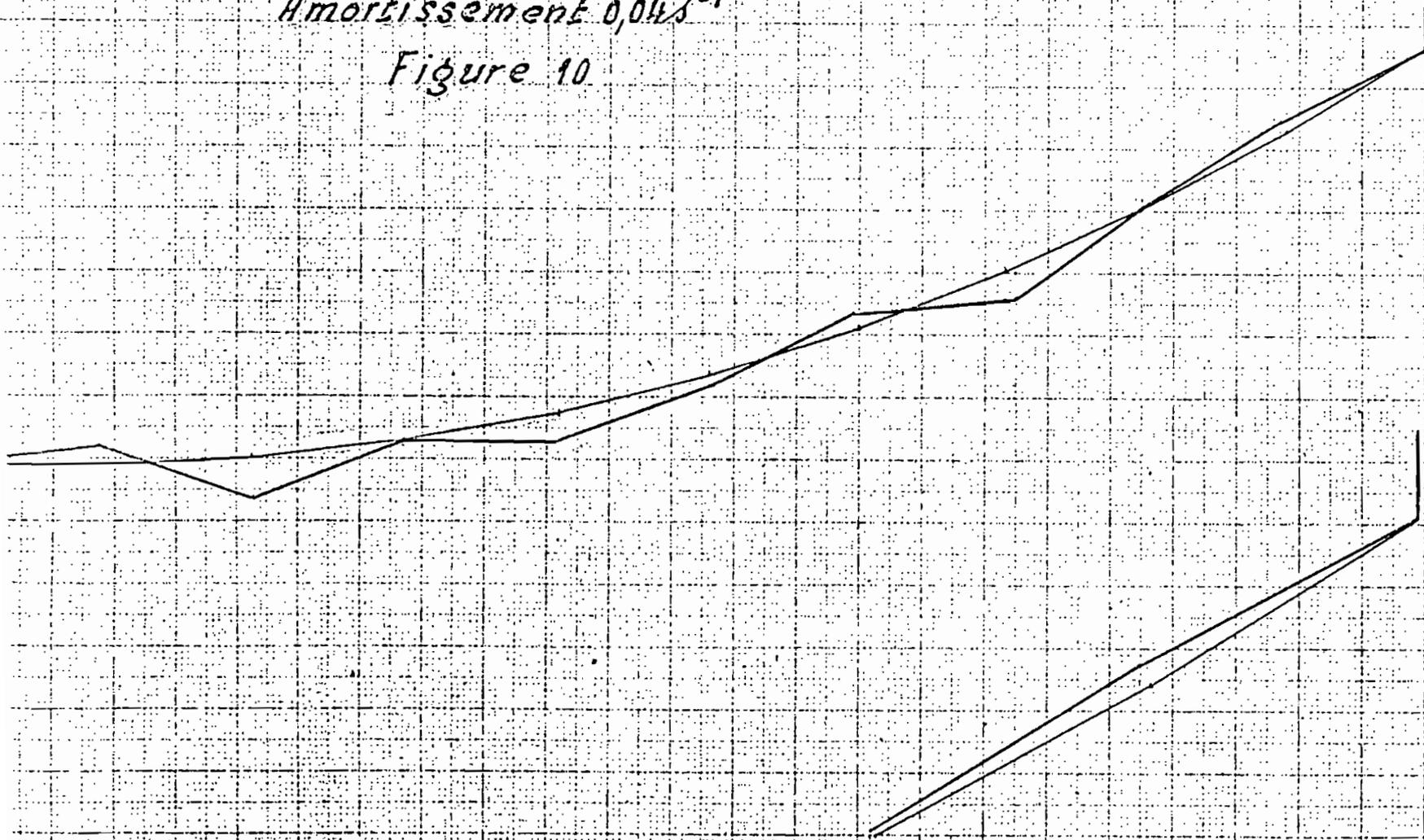
BOUÉE DE 12 M³ AVEC FORCE DE TRAINÉE VARIABLE

Mouvement propre N°2

Période 0,81 s

Amortissement 0,04 s⁻¹

Figure 10



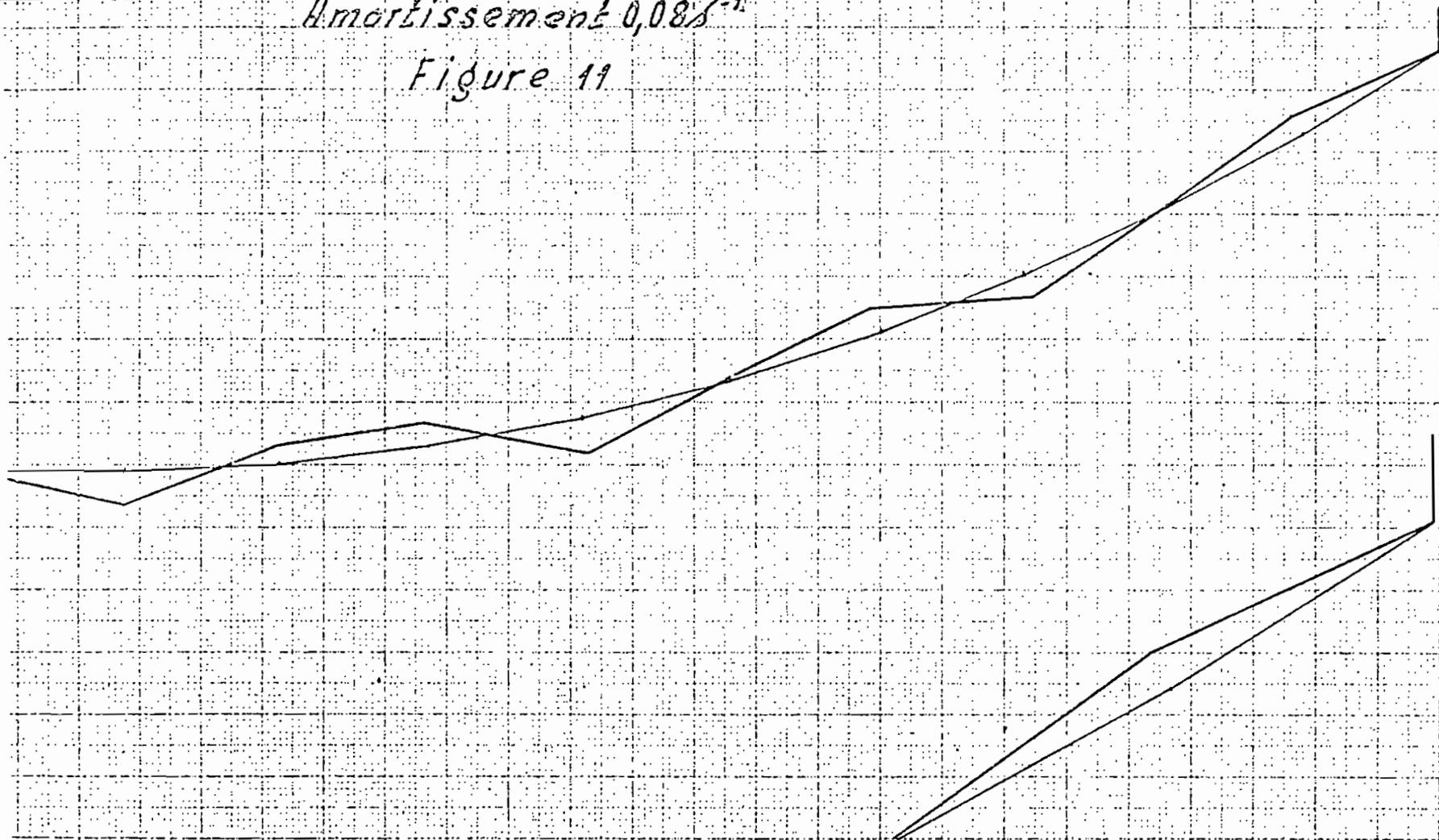
BOUEE DE 12M³ AVEC FORCE DE TRAINEE VARIABLE

Mouvement propre N°3

Periode 6,36s

Amortissement 0,08s⁻¹

Figure 11



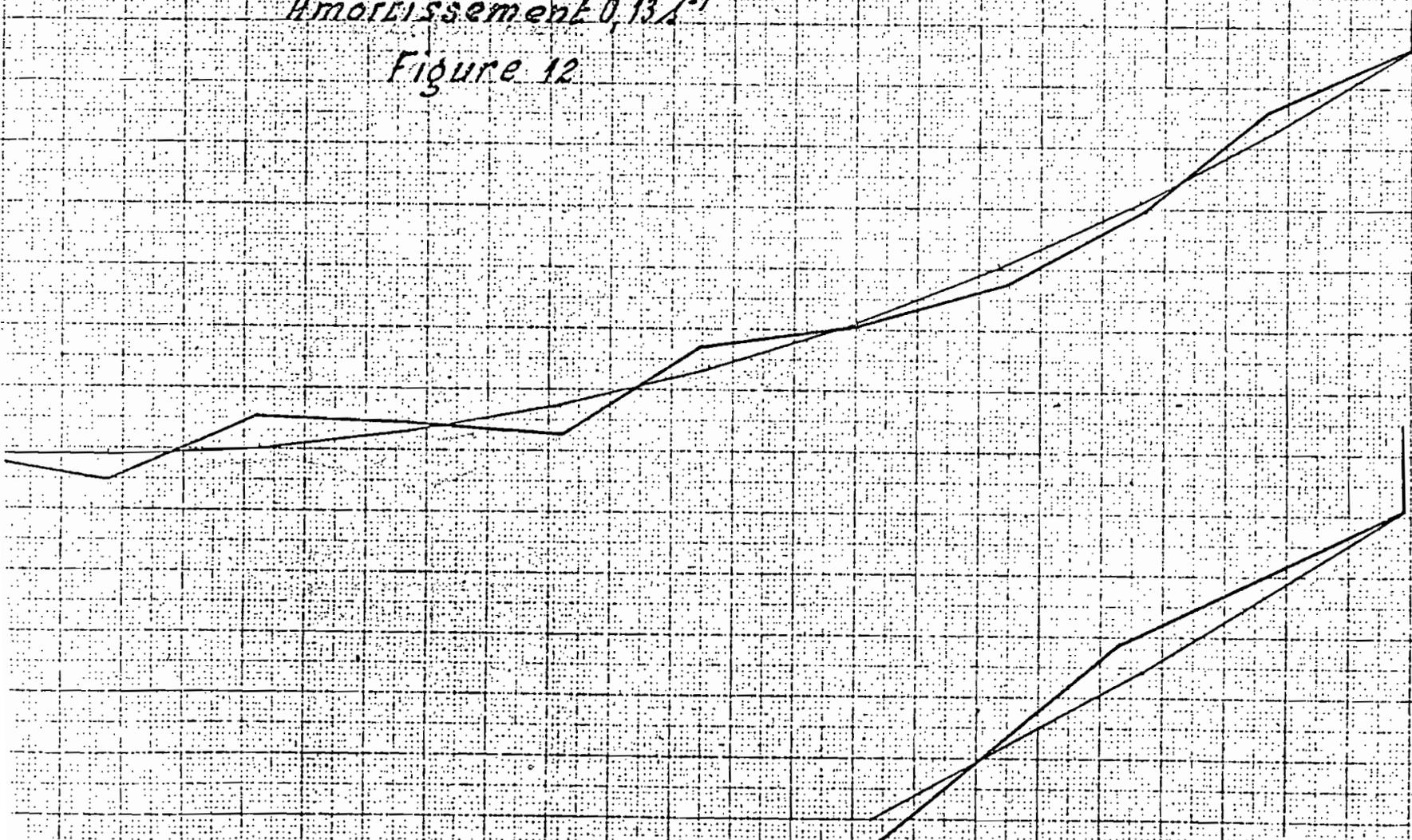
BOUÉE DE 12 M³ AVEC FORCE DE TRAINÉE VARIABLE

Mouvement propre n° 4

Période 0,25 s

Amortissement 0,13 s⁻¹

Figure 12



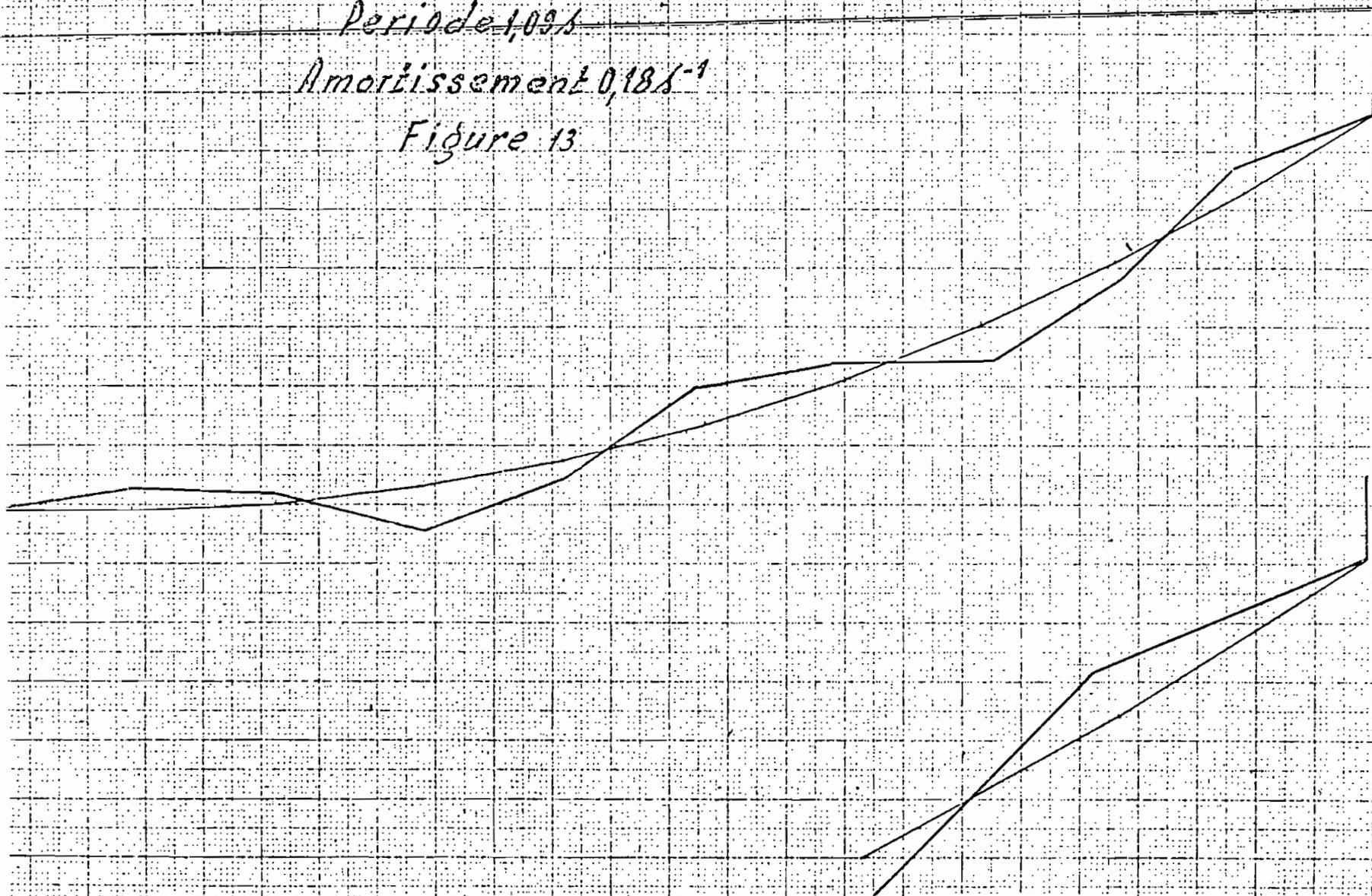
BONNE DE 12 M³ AVEC FORCE DE TRAINÉE VARIABLE

Mouvement propre N° 5

Période 1,09 s

Amortissement 0,18 s⁻¹

Figure 13



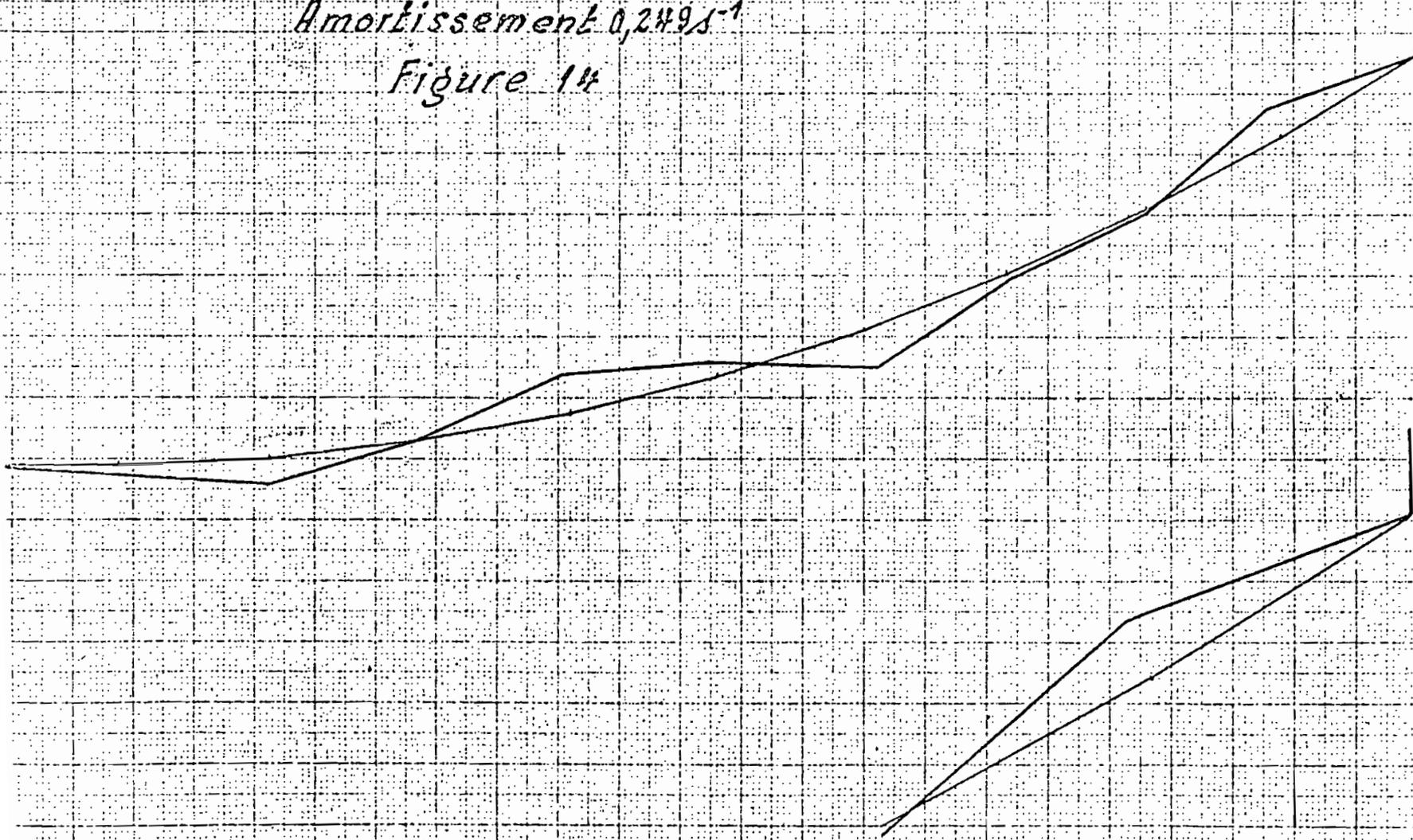
BOUÉE DE 12M³ AVEC FORCE DE TRAINÉE VARIABLE

Mouvement propre n° 6

Période 1,31s

Amortissement 0,249s⁻¹

Figure 14



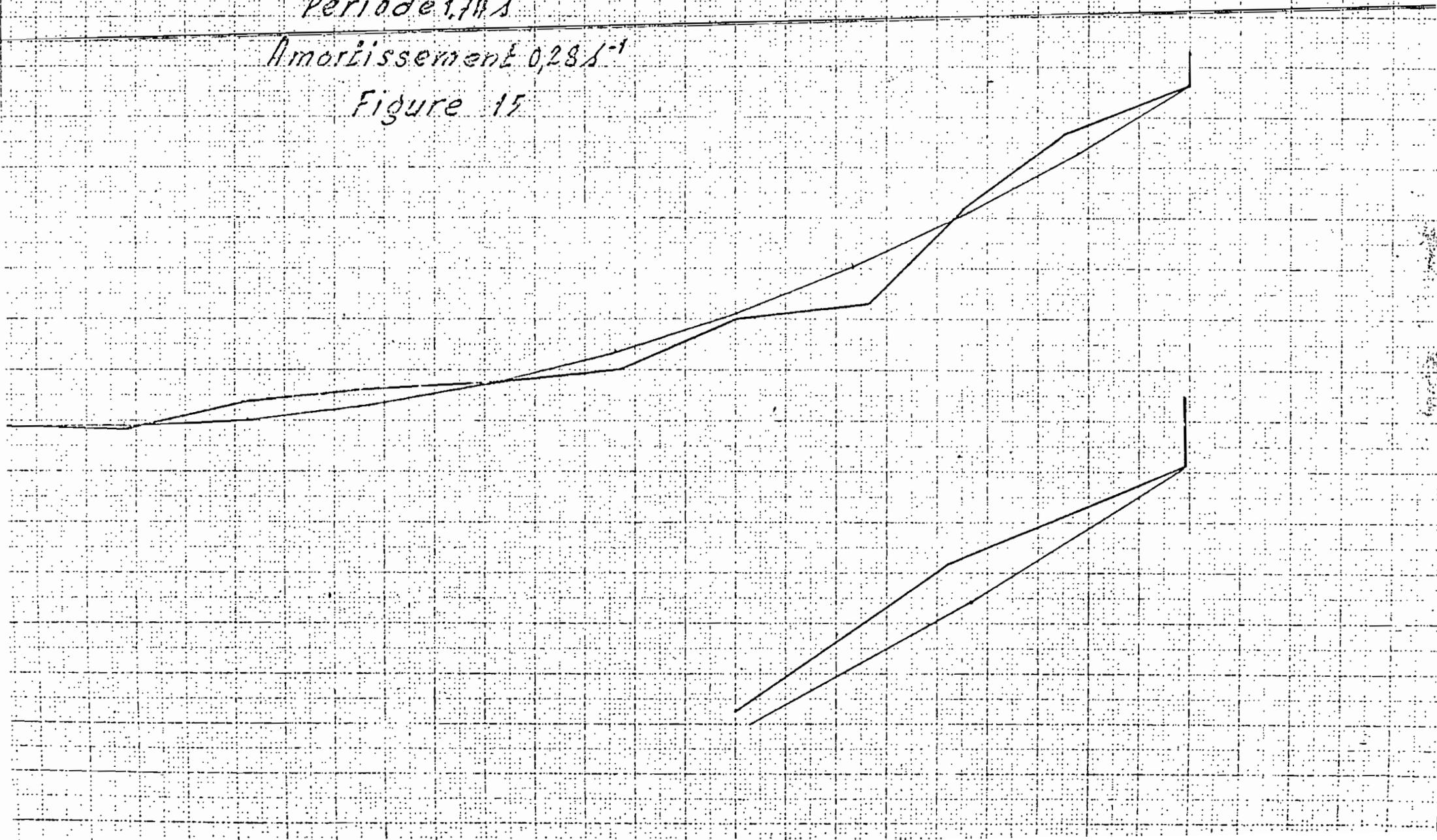
BOUEE DE 12M³ AVEC FORCE DE TRAINEE VARIABLE

Mouvement propre N°7

Période 1,74s

Amortissement 0,28s⁻¹

Figure 15



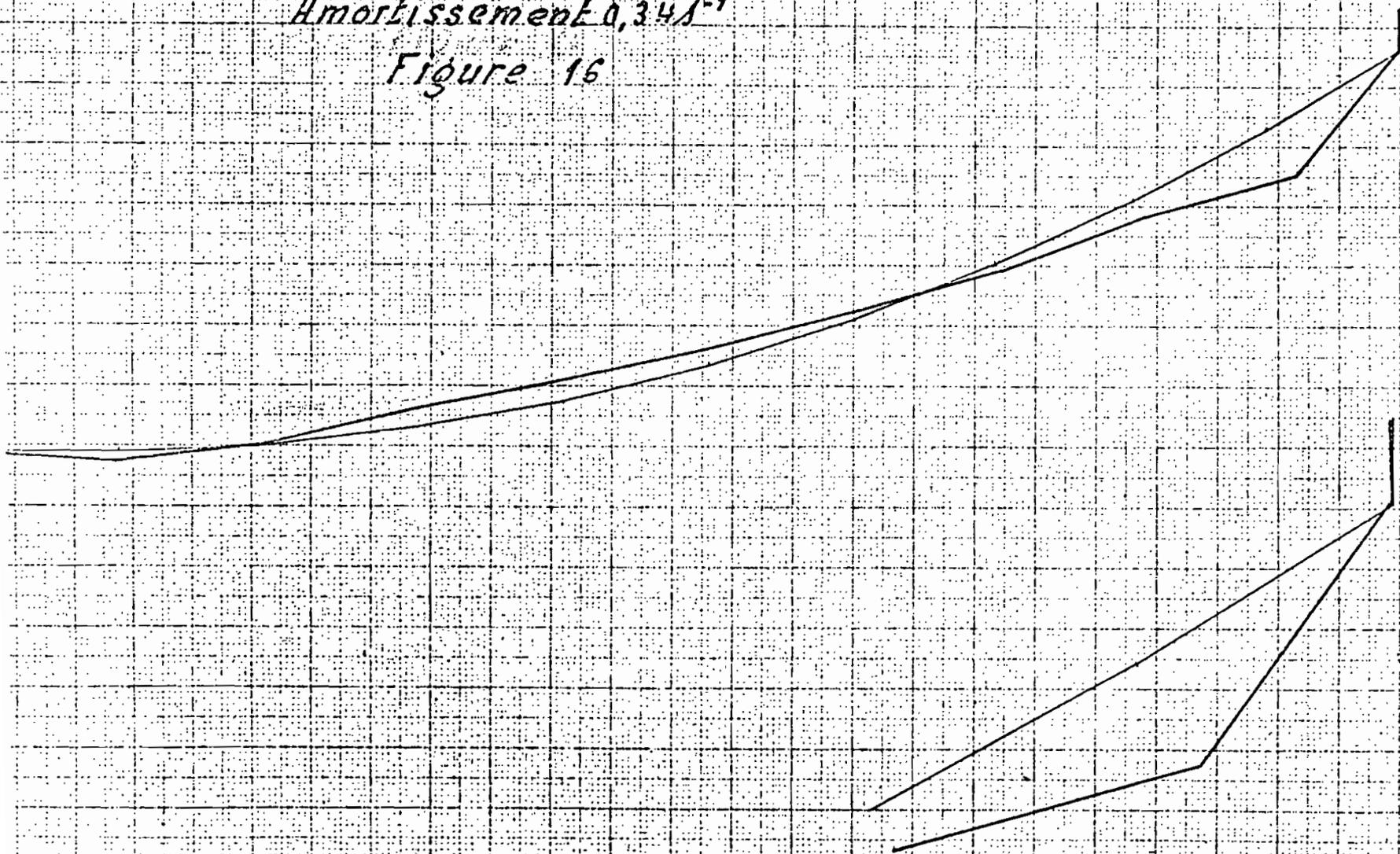
BOUEE DE 12M³ AVEC FORCE DE TRAINEE VARIABLE

Mouvement propre N° 8

Période 2,53 s

Amortissement 0,34 s⁻¹

Figure 16



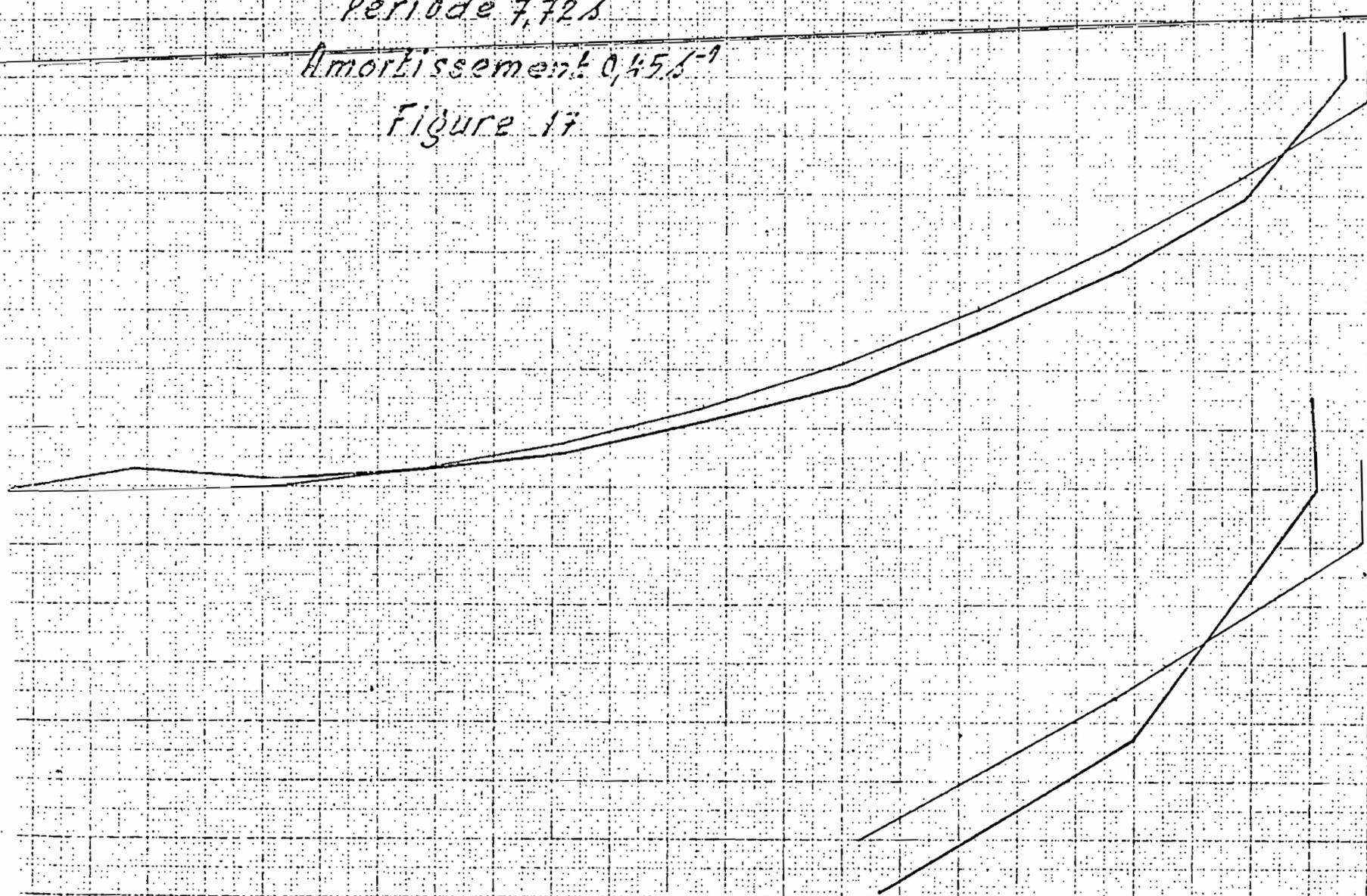
BOUEE DE 12M³ AVEC FORCE DE TRAINEE VARIABLE

Mouvement propre N° 9

Période 7,72s

Amortissement 0,45s⁻¹

Figure 17



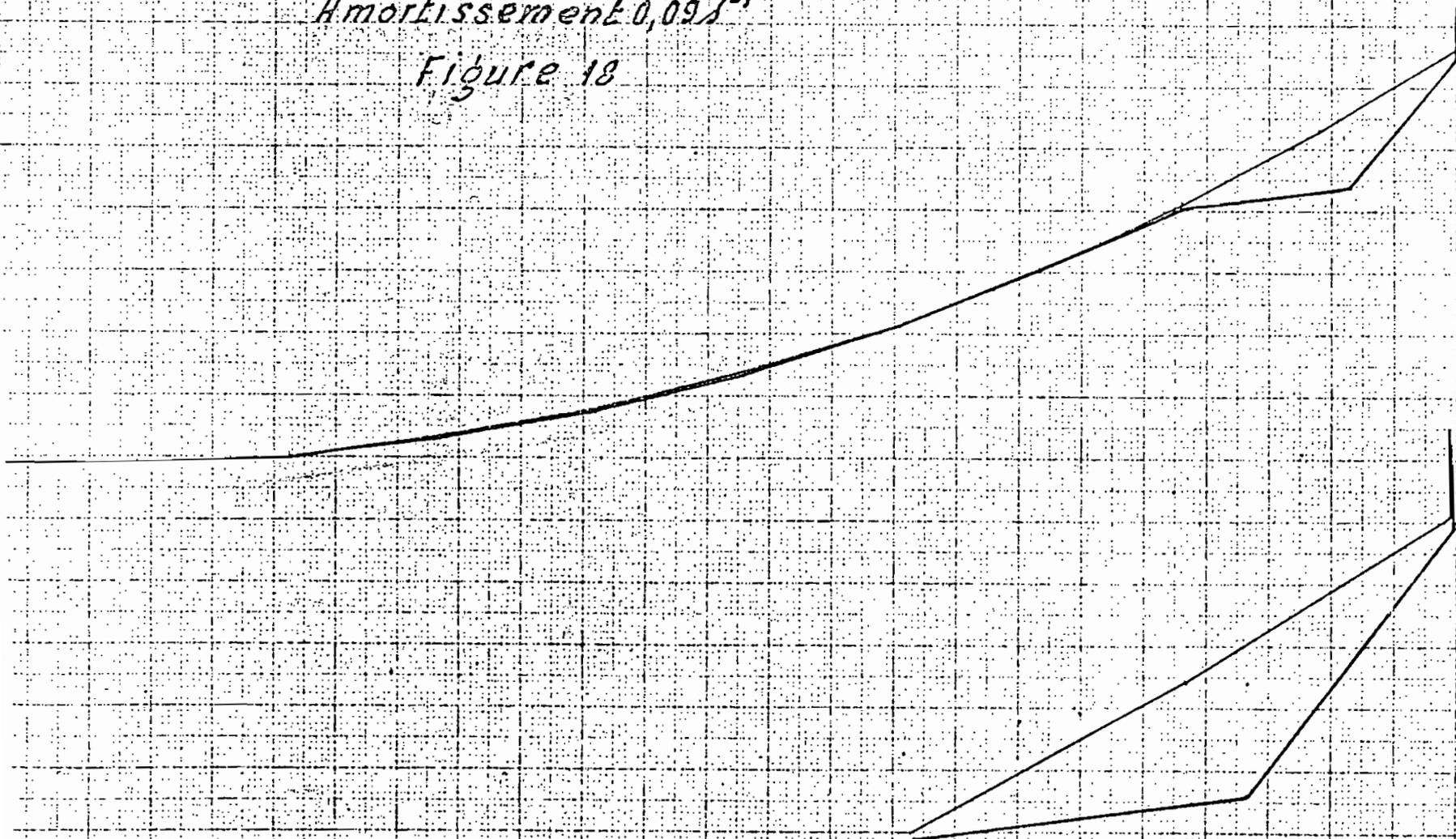
BOUÉE DE 12 M³ AVEC FORCE DE TRAINÉE VARIABLE

Mouvement propre N° 10

Période 2,97 s

Amortissement 0,09 s⁻¹

Figure 18



BOUEE DE 12 M³ AVEC FORCE DE TRAINEE VARIABLE

Mouvement propre N°11

Période 4,30 s

Amortissement 0,40 s⁻¹

Figure 19

