



école polytechnique de thiès

GM.0566

PROJET DE FIN D'ETUDES

titre CALCULS D'UNE COUCHE LIMITE TURBULENTE
SUR PAROI LISSE AVEC GRADIENT DE
PRESSION DÉFAVORABLE

auteur : LAURENT DIENE

génie : MÉCANIQUE

date : MAI - 1979

LE-- COLE POLYTECHNIQUE DE THIES.

PROJET DE FIN D'ETUDES.

ecole polytechnique
de thies

TITRE :

CALCULS D'UNE COUCHE LIMITE
TURBULENTE SUR PAROI LISSE
AVEC GRADIENT DE PRESSION
DEFAVORABLE.

AUTEUR : LAURENT DIENE

GENIE : MECANIQUE

DATE : MAI - 1979.

REMERCIEMENTS.

Je tiens à présenter ici mes vifs remerciements à mon directeur de projet Monsieur DUY VINH NGUYEN pour le soutien sans faille qu'il n'a cessé de m'apporter tout au long du parcours.

Ma gratitude va par ailleurs à Monsieur DENIS SAVAGE pour ses conseils précieux sur la résolution des équations différentielles.

Je désire remercier également Monsieur LAVOIE qui a bien voulu nous aider dans l'établissement des programmes à l'ordinateur.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à Mademoiselle ANHATA GAYE, d'avoir dactylographié ce travail avec beaucoup de soin.

11

SOMMAIRE.

=====

L'approche théorique que nous avons choisie pour faire des calculs de prévision du développement d'une couche limite turbulente bidimensionnelle soumise à un gradient de pression adverse modéré est celle suggérée par BURI [2, 3].

Les méthodes de calcul employées sont approximatives, semi-empiriques. Elles sont basées sur les formes d'intégration des équations de quantité de mouvement et des équations d'énergie.

Les résultats expérimentaux utilisés sont ceux mesurés par NGUYEN [1] dans une couche limite turbulente avec gradient de pression adverse modéré.

TABLE DES MATIÈRES

	<u>Page.</u>
Remerciements.....	i
Sommaire.....	ii
Table des matières.....	iii
Table des notations.....	v
Introduction.....	1
<u>CHAPITRE I</u> <u>CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.</u>	
	<u>INTRODUCTION A LA COUCHE LIMITE.</u>
I.1. Notion de couche limite.....	3
I.1.1. Définition.....	3
I.1.2. L'épaisseur de déplacement.....	5
I.1.3. L'épaisseur de quantité de mouvement...	6
I.2. Etude qualitative de l'écoulement turbulent;	
I.2.1 Différence fondamentale entre le mouvement laminaire et le mouvement turbulent.....	7
I.2.2. Effet du gradient de pression sur l'écoulement.	
I.3. Conclusion.....	12

CHAPITRE II CALCULS DE COUCHE LIMITE TURBULENTE SUR PAROI LISSE.

II .1. Calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement. 14

II .2. Calcul du facteur de forme..... 20

II .3. Calcul du coefficient de frottement..... 21

CHAPITRE III COMPARAISON DES RESULTATS.

III .1. Variations longitudinales de 23

III .2. Variations longitudinales de H..... 24

III .3. Variations longitudinales de C 26

CONCLUSION 28

BIBLIOGRAPHIE..... 30

TABLEAUX DES RESULTATS..... 31

FIGURES..... 40

ANNEXES : Organigramme et listing du Programme de calculs de la
couche limite..... 44

TABLE DES NOTATIONS.

C_f	:Coefficient de frottement
H	:Facteur de forme
p	:Pression statique locale
Re_θ	:Nombre de Reynolds basé sur θ
U_e	:Vitesse à l'extérieur de la couche limite
u	:Composante de vitesse moyenne locale
x	:Coordonnée longitudinale
u', v'	:Composantes turbulentes de vitesse
δ	:Epaisseur de la couche limite
δ^*	:Epaisseur de déplacement
θ	:Epaisseur de quantité de mouvement
ν	:Viscosité cinématique
ρ	:Masse volumique
τ_0	:Frottement pariétal
δ^{**}	:Epaisseur d'énergie
μ	:Viscosité dynamique

INTRODUCTION.

Ce projet consiste à faire des calculs de prévision du développement d'une couche limite turbulente bidimensionnelle soumise à un gradient de pression adverse modéré.

Grâce à la théorie suggérée par BURI [2, 3] et des données expérimentales recueillies par NGUYEN [1], on pourra confronter les résultats calculés à ceux mesurés et voir la concordance entre la théorie et l'expérience. La théorie de la couche limite a été un outil précieux dans le développement de la mécanique des fluides.

Elle trouve son application dans le calcul de la force de frottement qui agit sur les corps quand ces derniers se déplacent dans un fluide. On peut citer par exemple la couche limite qui se développe sur une plaque plane, sur les pâles d'une turbine, sur un bateau, sur l'aile d'un avion, sur un train, ect...

In ce qui nous concerne, on se limitera aux calculs de couche limite turbulente sur paroi lisse avec un gradient de pression défavorable ou positif.

Toutes les méthodes de calcul de couche limite turbulente sont approximatives. Elles sont basées sur les équations classiques de quantité de mouvement et d'énergie qui peuvent s'écrire respectivement sous la forme :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} \left(U_e^2 \theta \right) + \delta^* U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} (U_e^3 \delta^{**}) = 2\nu \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \quad (\text{laminaire}) \quad (2)$$

ou

$$\frac{d}{dx} (U_e^3 \delta^{**}) = 2 \int_0^{\infty} u_{\tau}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \quad (\text{turbulent}) \quad (2')$$

Plusieurs auteurs ont essayé de dériver les méthodes de calcul. Une des formules simples pour le calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement est celle donnée par Puri (voir chapitre 2)

Dans le but de mieux cerner le problème, il nous a été nécessaire de faire un rappel sur le concept de la couche limite et sur la définition de l'écoulement turbulent stationnaire dans le premier chapitre.

Le deuxième chapitre représente le corps même du sujet : le calcul de couche limite turbulente. Au dernier lieu, on fera une confrontation entre les valeurs calculées et les valeurs expérimentales.

I. 1 Notion de couche limite

Le Concept de la couche limite a été premièrement introduit par LUDWIG PRANDTL, aérodynamicien allemand en 1904.

Il a montré que la viscosité de certains fluides affecte l'écoulement par la formation au voisinage immédiat du corps solide d'une mince couche, responsable dans la majeure partie des cas de la résistance du corps à l'écoulement.

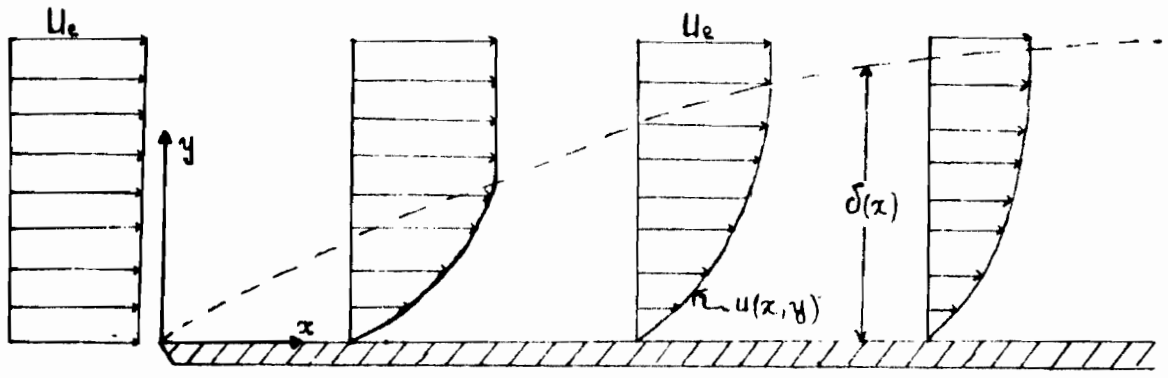
Plus tard, on a découvert que l'écoulement peut-être soit turbulent soit laminaire. C'est ainsi que des publications expérimentales et théoriques ont été faites sur le sujet - Néanmoins le problème de base de la couche limite turbulente dans un fluide incompressible est encore loin d'être résolu.

I. 1. 1. Définition

La couche limite est une région adjacente à une surface solide dans laquelle les forces visqueuses sont prédominantes.

Les phénomènes de viscosité se manifestent principalement au voisinage des parois solides dans une zone de faible épaisseur où le gradient de vitesse est important. Cette zone est appelée couche limite. En dehors de la couche limite, le fluide, dit libre, se comporte comme un fluide parfait, le gradient de vitesse croît très lentement, les forces de frottement deviennent minimes.

Preons le cas simple d'une couche limite qui se développe sur une plaque plane. On constate qu'il existe une mince couche près de la paroi dans laquelle la vitesse est beaucoup plus petite qu'aux autres endroits. L'épaisseur de la couche limite augmente au fur et à mesure qu'on avance sur la plaque. La figure ci-dessous représente graphiquement la distribution de vitesse le long de la plaque.

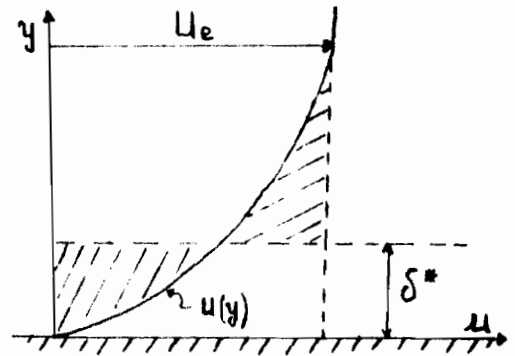


Cette distribution de vitesse, comme on le constate sur la figure, est uniforme au tout début de la plaque, le profil change au fur et à mesure que la couche limite s'épaissit.

La définition de l'épaisseur de la couche limite est à un certain point arbitraire puisque le profil de vitesse tend asymptotiquement vers la valeur de la vitesse potentielle U_e , d'où la difficulté de la mesurer. Cette épaisseur " δ " est souvent définie comme étant la distance de la surface solide au point où la vitesse est égale à $0,99$ de U_e .

A la place de l'épaisseur de la couche limite une autre quantité est souvent employée, c'est l'épaisseur de déplacement qui peut se définir par l'équation suivante :

$$U_e \delta^* = \int_{y=0}^{\delta} (U_e - u) dy$$



On sait que l'effet de la couche limite est de déplacer les lignes de courant (ou les particules) dans l'écoulement en dehors de la couche limite. L'épaisseur de déplacement de la couche limite indique la distance avec laquelle la surface solide pourrait être déplacée pour obtenir le même débit massique d'un écoulement sans frottement.

Dans le cas d'un écoulement sur une plaque l'épaisseur de déplacement est à peu près égal à $1/3$ de l'épaisseur de la couche limite sur la plaque.

Comme tout fluide réel est visqueux, une couche limite va se développer sur une surface solide quand un écoulement va avoir lieu sur le corps. Ainsi au voisinage de la surface solide, il y a toujours une région où les forces visqueuses sont importantes.

La perte de quantité de mouvement dans la couche limite devient $\rho \int_0^{\delta} u (U_e - u) dy$ qui doit être égal au débit de quantité de mouvement: $\rho U_e^2 \theta$:

$$\rho U_e^2 \theta = \rho \int_{y=0}^{\delta} u (U_e - u) dy$$

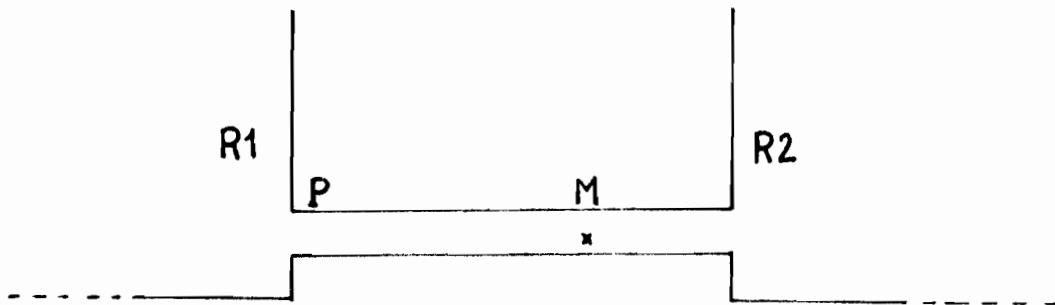
Cette équation nous permet de définir une nouvelle grandeur : l'épaisseur de la quantité de mouvement: θ

$$\theta = \int_{y=0}^{\delta} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$

- I. 2. . . Etude qualitative de l'écoulement turbulent.
- I. 2. 1. Différence fondamentale entre le mouvement laminaire et le mouvement turbulent.

Nous nous limiterons au cas où les conditions aux frontières sont stationnaires.

Prenons par exemple le problème suivant : Une conduite fixe fait communiquer 2 grands réservoirs R1 et R2 contenant un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ données. On maintient entre les réservoirs R1 et R2 une différence de pression rigoureusement constante.



Si \vec{U}_f désigne la vitesse du fluide, les conditions aux frontières s'expriment sous la forme $\vec{U}_f = 0$ sur les surfaces solides fixes qui limitent l'espace occupé par le fluide. Enfin dans les réservoirs R1 et R2 très loin des extrémités du tuyau de jonction les pressions P_{R1} et P_{R2} sont supposées rigoureusement constantes.

Si on mesure la vitesse en un point M du tuyau, 2 cas peuvent se présenter :

a) La vitesse du fluide en M est indépendante du temps, on dit alors que l'écoulement est laminaire et homogène en M.

b) La vitesse en M dépend du temps, dans ce cas l'écoulement est dit turbulent.

Conformément aux considérations générales sur la similitude, la nature de l'écoulement en M dépend d'un certain nombre de paramètres sans dimensions, R et \mathcal{F} par exemple avec

$$R = \frac{V D \rho}{\mu} \quad (\text{nombre de Reynolds})$$
$$\mathcal{F} = \frac{V}{\sqrt{gD}} \quad (\text{nombre de Froude})$$

avec ρ = masse volumique du fluide
 μ = viscosité dynamique
 g = l'accélération de la pesanteur
 V = vitesse de référence du fluide
 D = diamètre du tuyau

Le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent a lieu lorsque les paramètres de similitude dépassent les valeurs critiques.

Si par exemple, on fixe les valeurs de \mathcal{F} , il existe une valeur critique R_c du nombre de Reynolds telle que :

Pour $R < R_c$ l'écoulement est laminaire.

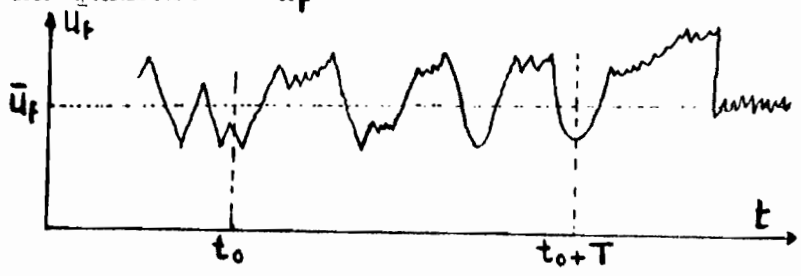
Pour $R > R_c$ l'écoulement est turbulent.

Lorsque R dépasse légèrement R_c , les vitesses en M sont des fonctions du temps aproximativement périodiques, mais lorsque R est très supérieur à R_c tout caractère de régularité disparaît: les vitesses deviennent des fonctions aléatoires du temps et c'est précisément lorsque le champ des vitesses a pris ce caractère aléatoire qu'on dit que l'écoulement est turbulent. Dans ce cas, il est bien évident que les contraintes qui sont liées au champ des vitesses sont elles aussi des fonctions aléatoires du temps.

Une des caractéristiques essentielles de l'écoulement turbulent stationnaire c'est que les moyennes dans le temps sont indépendantes du temps. En effet, dans un écoulement turbulent, le champ des vitesses à un instant donné n'est pas prévisible, seules les moyennes sont définies.

Prenez par exemple un axe Ox et soit u_f la projection sur cet axe de la vitesse du fluide en un point P , u_f est une fonction aléatoire du temps, mais cette fonction n'est pas absolument quelconque.

Si on calcule la moyenne dans le temps de u_f c'est-à-dire la quantité \bar{u}_f définie par l'égalité :



$$\bar{u}_f = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_f dt$$

Cette moyenne est indépendante de l'instant t_0 pourvu que l'intervalle de temps soit suffisamment grand. (voir figure)

I. 2. 2. Effet du gradient de pression sur l'écoulement.

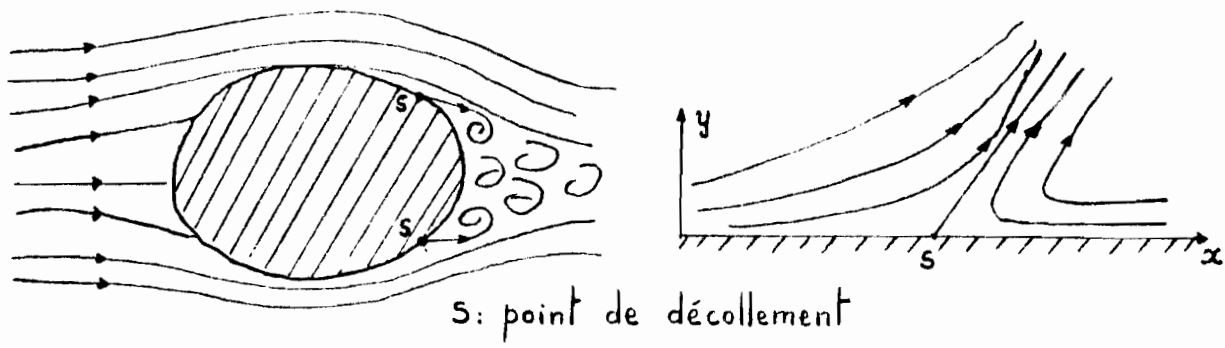
On peut étudier les couches limites soit avec gradient de pression ou sans gradient de pression. Le gradient de pression est dit adverse si la pression augmente dans la direction d'écoulement

c'est-à-dire si $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$

Quand $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ on dit que le gradient de pression est favorable.

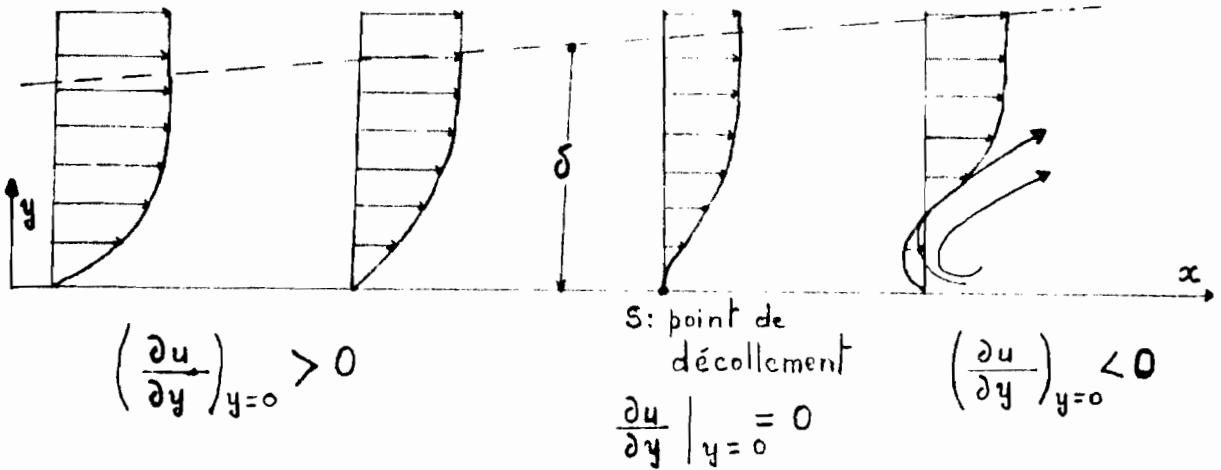
Dans le cas qui nous intéresse, le gradient de pression est positif (adverse ou défavorable). Lorsqu'il existe au voisinage de la paroi un gradient de pression adverse, les particules de fluide retardées peuvent pénétrer loin dans la région de pression élevée à cause de leur petite énergie cinétique. Alors la couche limite se sépare de la paroi : c'est le phénomène du décollement. Le point de décollement est défini comme étant le point au voisinage immédiat de la paroi où le gradient de vitesse est nul :

Considérons l'écoulement à travers quelques sections:



S: point de décollement

On pourrait voir comment se fait la distribution de vitesse pour ce phénomène.



Donc, si $\frac{\partial p}{\partial x}$ est suffisamment grand, il peut y avoir un décollement. Ainsi, on peut dire que le gradient de pression adverse est une condition nécessaire pour avoir un décollement. Mais ceci ne veut pas dire que dès que $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$, il y aura un décollement.

Pour le cas d'un écoulement turbulent, la quantité de mouvement étant plus grande, la résistance au décollement est plus élevée que dans un écoulement laminaire.

Le but final de la théorie de la couche limite est d'être capable de prédire d'une certaine façon le développement de la couche limite qui se forme sur une paroi dans un environnement quelconque.

Ce problème neut, dans l'état actuel de nos connaissances être attaqué seulement par des méthodes semi-empiriques. Ce fait crée une dualité dans le problème. D'abord, une analyse des données expérimentales est nécessaire pour développer les relations empiriques requises.

Le deuxième aspect est le problème inverse. Il concerne la prévision de la conduite de couches limites turbulentes qui n'ont pas été observées, mais qui se développent quand la distribution de pression et la nature rugueuse de la surface sont spécifiées.

Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette théorie de couche limite. L'on se contentera de faire une approche théorique en se servant d'équations empiriques pour faire un calcul approximatif de couche limite turbulente sur paroi lisse.

LITSE

Il y a en principe 2 méthodes pour étudier les problèmes de couche limite:

- Ou bien on simplifie les équations de mouvement et on cherche une solution de ces équations: malheureusement, le calcul est rapidement compliqué.

- Ou bien, on utilise une méthode approximative en écrivant des équations à partir du théorème des quantités de mouvement.

Nous emprunterons cette deuxième approche dans le cadre de la présente étude.

La première méthode de calcul de couches limites turbulentes avec gradient de pression a été trouvée par H. CRUSKIEWITZ [2]

- Les valeurs empiriques utilisés dans la théorie ont été plus tard améliorées par A. LITSE [1]- Presque à la même époque NURI [2,3] sortit une méthode de calcul basée sur des hypothèses fondamentales similaires. D'autres auteurs tel H.C. GAMMEL, TRUCKENBRODT, et bien d'autres établirent des méthodes simples d'intégration. Toutes ces méthodes ont 2 points essentiels en commun:

1 - L'épaisseur de la quantité de mouvement définie précédemment et considérée comme une dimension caractéristique de la couche limite.

13

2- Le facteur de forme du profil de vitesse qui dépend fortement du gradient de pression. BURI propose la quantité sans dimension suivante:

$$\Gamma = \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \left(\frac{u_e \theta}{\nu} \right)^{1/n} \quad (n = 4)$$

analogue au facteur utilisé pour un écoulement laminaire.

Pour $\Gamma > 0$ l'écoulement est accéléré

pour $\Gamma < 0$ l'écoulement est décéléré

D'autres auteurs utilisent dans leurs méthodes de calcul, le rapport de l'épaisseur de déplacement δ^* et de l'épaisseur de la quantité de mouvement comme étant égal au facteur de forme:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

II.1 CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

A l'exception de la méthode donnée par E. TRUCKENBRODT, toutes les méthodes de calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement θ utilisent l'équation de la quantité de mouvement de VON-KARMAN (cf. [2,3,4])

L'application de cette équation à l'écoulement turbulent nous servira à calculer l'épaisseur de la quantité de mouvement à diverses stations expérimentales.

L'équation de quantité de mouvement de Von Kármán peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\theta}{dx} + (H+2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U_e^2} + \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{\overline{u'^2} - \overline{v'^2}}{U_e^2} dy$$

Le dernier terme est souvent négligeable pour des gradients de pression non importants. Dans notre cas, cette hypothèse a été vérifiée par Badiane [4]. On peut donc écrire l'équation simplifiée suivante :

$$\frac{d\theta}{dx} + (H+2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U_e^2} \quad (1)$$

Afin de déterminer la variation de l'épaisseur de quantité de mouvement sur un corps quelconque, il est nécessaire de posséder des informations sur le rapport des épaisseurs, H , de la distribution de la vitesse extérieure U_e et du frottement pariétal

$\frac{\tau_0}{\rho U_e^2}$. Cette information est obtenue de diverses façons selon les auteurs. Pour TRI le frottement pariétal

τ_0 et le rapport des épaisseurs H , pour une couche limite turbulente sont fonctions du facteur de forme Γ :

$$\frac{\tau_0}{\rho U_e^2} = f_1(\Gamma) / \left(\frac{U_e \theta}{\nu} \right)^{1/n}$$

et

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = f_2(\Gamma)$$

Ceci nous permet d'intégrer l'équation de quantité de mouvement (1).

L'idée est que le coefficient de frottement pour une paroi lisse est supposé être égal à :

$$\frac{\tau_0}{\rho U_e^2} = \zeta Re_e^{-1/n} \quad (2)$$

où $Re_e = \frac{U_e \theta}{\nu}$ avec ζ et n constantes; l'équation (1) devient alors :

$$\frac{d\theta}{dx} + (H+2) \frac{\theta}{U_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} = \zeta Re_e^{-1/n}$$

Multiplions cette dernière équation par $Re_e^{1/n} \left(\frac{n+1}{n}\right)$:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) Re_e^{1/n} \frac{d\theta}{dx} + \left(\frac{n+1}{n}\right) \theta Re_e^{1/n} (H+2) \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \zeta \left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (3)$$

On sait par ailleurs que :

$$\frac{d}{dx} [\theta Re_e^{1/n}] = \left(\frac{n+1}{n}\right) Re_e^{1/n} \frac{d\theta}{dx} + \theta Re_e^{1/n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{dU_e/dx}{U_e}$$

L'équation (3) peut s'écrire :

$$\frac{d}{dx} [\theta Re_e^{1/n}] = -b \theta Re_e^{1/n} \cdot \frac{dU_e/dx}{U_e} + a \quad (4)$$

$$\text{où} \quad b = \frac{1+n}{n} (2+H) - \frac{1}{n}$$

$$a = \left(\frac{1+n}{n}\right) \zeta$$

L'équation (4) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre que l'on peut résoudre.

$$\text{Posons} \quad F = \theta Re_e^{1/n}$$

L'équation (4) devient :

$$\frac{dF}{dx} = -bF \frac{U_e'}{U_e} + a \quad \text{avec} \quad U_e' = \frac{dU_e}{dx}$$

ou

$$\frac{dF}{dx} + bF \frac{U_e'}{U_e} = a \quad \text{E.D.L. 1er ordre}$$

On peut écrire cette équation sous la forme :

$$U_e F' + bF U_e' = a U_e \quad (5) \quad \text{avec} \quad F' = \frac{dF}{dx}$$

$$\text{or} \quad U_e F' + bF U_e' = \frac{1}{U_e^{b-1}} \frac{d}{dx} [U_e^b F]$$

L'équation (5) devient :

$$\frac{d}{dx} [U_e^b F] = a U_e \cdot U_e^{b-1}$$

ou

$$\frac{d}{dx} [U_e^b F] = a U_e^b$$

Intégrant cette dernière expression, on obtient

$$\int_{x_i}^x \frac{d}{dx} [U_e^b F] = \int_{x_i}^x a U_e^b dx$$

$$\text{ou} \quad [U_e^b F]_{x_i}^x = a \int_{x_i}^x U_e^b dx \quad (6)$$

Si la couche limite débute à $x = x_i$, où l'épaisseur de quantité de mouvement $\theta = \theta_i$ est connue et où la vitesse externe est $U_e = U_{ei}$, on, aura pour l'expression (6)

$$U_e^b F_x - U_{ei}^b \theta_i \left(\frac{U_{ei} \cdot \theta_i}{\nu} \right)^{1/n} = a \int_{x_i}^x U_e^b dx \quad (7)$$

A la station x , on a l'épaisseur de quantité de mouvement θ et la vitesse externe U_e

L'équation (7) redevient :

$$U_e^b \theta \left(\frac{U_e \theta}{\nu} \right)^{1/n} - U_{ei}^b \theta_i \left(\frac{U_{ei} \theta_i}{\nu} \right)^{1/n} = a \int_{x_i}^x U_e^b dx$$

En développant l'expression on obtient

$$\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b \left[\frac{\theta^{1+\frac{1}{n}}}{\theta_i^{1+\frac{1}{n}}} \cdot \frac{U_e^{1/n+b} / \nu^{1/n}}{U_{ei}^{1/n+b} / \nu^{1/n}} - 1 \right] = a \int_{x_i}^x U_e^b dx$$

En arrangeant de nouveau, on a

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \left(\frac{U_{ei}}{U_e} \right)^{\frac{nb+1}{n}} \left\{ 1 + \frac{a \int_{x_i}^x U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b} \right\}$$

On obtient par la suite l'expression de Puri qui s'applique aux couches limites turbulentes sur paroi lisse :

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \left(\frac{U_{ei}}{U_e} \right)^{\frac{nb+1}{n+1}} \left\{ 1 + a \frac{\int_{x_i}^x U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b} \right\}^{\frac{n}{n+1}} \quad (8)$$

Cette expression peut-être évaluée numériquement.

Plusieurs essais qui conduisent aux mêmes résultats ont été effectués par quelques auteurs.

Voici quelques constantes empiriques pour le calcul simplifié de l'épaisseur de quantité de mouvement en utilisant l'expression de BURI (8)

Auteur	n	a	b	$\frac{nb + 1}{n + 1}$
BURI	4	0,017	4,15	3,52
MASKELL	4,64	0,1173	4,2	3,63
TRUCKENBRODT	6	0,0076	3,35	3
ROSS & ROBERTSON	-	0	-	4,8
SPENCE	5	0,0106	4,0	3,5

Le deuxième terme de l'expression (8) représente la contribution du coefficient de frottement. Pour un gradient de pression suffisamment faible cette contribution est relativement petite.

La relation simplifiée donnée par Ross et Robertson permet d'obtenir dans certains cas des résultats satisfaisants (par exemple couche limite ordinaire) :

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \left(\frac{U_{ei}}{U_e} \right)^{4,8}$$

En pression croissant modérément l'équation complète est dans ce cas utilisée.

II.2 CALCUL DU FACTEUR DE FORME.

En général, dans l'étude de la couche limite, le profil de vitesse n'est pas seulement affecté par le nombre de Reynolds local et la nature rugueuse de la surface mais aussi par le gradient de pression externe. Bien qu'on arrive à trouver l'épaisseur de la couche limite à partir de l'équation de quantité de mouvement, par contre la détermination du facteur de forme requiert une deuxième équation ou équation auxiliaire. Ceci parce que l'état actuel de nos connaissances sur l'écoulement turbulent est incomplet, ce qui fait que l'équation donnant le facteur de forme relève entièrement ou en partie d'observations empiriques.

Un grand nombre d'équations ont été proposées par différents auteurs.

Certains utilisent le rapport des épaisseurs pour évaluer le facteur de forme $\left(H = \frac{\delta^*}{\theta} \right)$

D'autres affirment que le facteur de forme satisfait une équation empirique. C'est le cas de H. C. GARNER qui trouva que le facteur de forme H satisfait l'équation empirique suivante :

$$\left(\frac{U_e \theta}{\nu} \right)^{1/6} \theta \frac{dH}{dx} = e^{5(H-1,4)} \left[- \left(\frac{U_e \theta}{\nu} \right)^{1/6} \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{d\alpha} - 0,0135 (H-1,4) \right]$$

Cette équation va nous permettre de déterminer la variation du facteur de forme H(x) en fonction de la variation de $\theta(x)$ pour un certain nombre de stations.

II.3 CALCUL DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT

La contrainte de cisaillement à la paroi dépend du facteur de forme H .

- Les valeurs expérimentales de cette contrainte peuvent être évaluées assez bien par la formule empirique de H. LUDWIG et W. TILLMANN (cf. [3]) :

$$\frac{\tau_0}{\rho U_c^2} = \left(0,123 \times 10^{-0,678H} \right) \left(\frac{U_c \theta}{\nu} \right)^{-0,268} = C_f / 2$$

Un grand nombre de relations empiriques ont été proposées pour le calcul du coefficient de frottement sur une paroi lisse.

L'effet du facteur de forme H suscita beaucoup de controverses jusqu'à ce qu'une confirmation expérimentale vienne y mettre fin. Ludwig et Tillmann ont prouvé que le coefficient de frottement décroît au fur et à mesure que H croît.

Ces auteurs se basèrent sur leurs expériences les combinant avec la supposition de l'existence de la loi universelle de la paroi et des paramètres de profils de vitesse pour déduire la formule empirique précédente. Cette formule se vérifie pour $Re_\theta > 1000$ et $H < 2$ (voir résultats sur tableau).

Les calculs de couche limite turbulente à l'aide d'équations empiriques donnent des résultats intéressants qui peuvent servir à la prévision de formation de telles couches.

Le cas étudié ici nous permis d'obtenir des résultats dont une analyse critique permettrait de tirer des conclusions utiles à une éventuelle prévision de développement de couches limites turbulentes sur une paroi lisse avec gradient de pression positif.

Il s'avère cependant nécessaire de faire le rapprochement avec les valeurs expérimentales pour pouvoir juger l'approche théorique utilisée. La corrélation entre la théorie et l'expérience sera d'autant plus juste dans la mesure où les résultats trouvés se rapprocheront des valeurs mesurées. Si une concordance entre le développement théorique et l'expérience est effective, une contribution majeure sera apportée à la bonne compréhension de la conduite de la couche limite turbulente sur paroi lisse.

La comparaison des résultats sera facilitée par les courbes obtenues illustrant les variations des paramètres suivant les stations données.

III. 1. Variations longitudinales de θ

L'équation empirique de IRTI a permis de calculer l'épaisseur de quantité de mouvement à chaque station. On constate, comme le montre la courbe (figure 1) une certaine concordance entre les valeurs de θ trouvées. De IRTI en passant par TRUCLEBERG et SPENCER, les résultats obtenus se rapprochent sensiblement de ceux mesurés.

Un seul auteur, IASZEL, donne une mauvaise concordance entre les valeurs théoriques et pratiques. La déviation nette obtenue montre la caractère particulier de ses résultats. C'est ici qu'il va falloir noter l'influence des constantes utilisées dans le calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement.

Dans son développement, IRTI utilise des paramètres qui peuvent avoir des effets remarquables sur les résultats trouvés. Le choix des valeurs à attribuer à ces paramètres est d'une importance non négligeable.

Un des paramètres qui semble affecter les résultats est la constante "a" (voir section II.2). En comparant la valeur de la constante "a" utilisée par IASZEL et les autres auteurs, on constate qu'il y a une grosse différence. En effet la constante de IASZEL est presque 10 fois supérieur à celle de IRTI, TRUCLEBERG et SPENCER. La nature particulière de la déviation des résultats de IASZEL par rapport à ceux mesurés pourrait être attribuée à la valeur de cette constante "a".

Donc l'utilisation de l'équation empirique de BUNN doit être faite en tenant compte des dimensions des paramètres.

Mise à part cette petite anomalie dans l'application de l'équation de BUNN, on obtient des résultats qui peuvent concourir à une bonne prévision de développement de couche limite turbulente. En effet, on constate que les valeurs de θ augmentent progressivement le long de l'écoulement d'une façon presque linéaire dans notre cas. Au fur et à mesure que le nombre de Reynolds ($R_{e\theta}$) croît l'épaisseur de quantité de mouvement augmente.

La concordance entre théorie et expérience trouve une confirmation effective après l'analyse de ces résultats obtenus à partir d'une équation empirique.

Cet état de fait vient appuyer la thèse selon laquelle une des meilleures méthodes approchées du calcul de couche limite turbulente dans un écoulement incompressible est celle donnée par BUNN.

III. 2

Variations des paramètres de θ .

Le calcul du facteur de forme obtenu à partir de l'équation empirique de BUNN donne des résultats qui ne sont pas concordants à ceux mesurés.

On observe une même variation linéaire croissante que l'épaisseur de quantité de mouvement. Comparés aux résultats expérimentaux on constate que la différence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds devient plus grand ($R_{e\theta}$). La courbe obtenue (figure 2) montre bien la divergence entre les valeurs.

théoriques et mesurées.

Ceci montre le fait que les diverses suggestions pour le calcul du facteur λ à l'aide d'équations empiriques donnent les résultats différents qui peuvent avoir des causes multiples. Il est possible que l'équation donnant le facteur de forme ne soit pas adéquate, ou peut être les méthodes d'analyse utilisées soient sensibles aux irrégularités dans les mesures.

En général chaque auteur essaie d'apporter à son équation empirique les précisions nécessaires pour se rapprocher le plus près de l'information expérimentale disponible à lui. On s'attend donc à ce que chaque équation ait une zone de validité limitée à l'intérieur de laquelle elle pourra décrire d'une façon réelle le comportement prévisible de la couche limite.

Donc il paraît impossible de recommander une équation appropriée pour satisfaire les exigences de calcul de couche limite turbulente.

Pour avoir une solution satisfaisante pour les équations empiriques donnant le facteur de forme, il serait nécessaire de faire des mesures précises en tenant compte de la variation de pression, du coefficient de frottement, de la distribution de la contrainte de cisaillement et d'autres quantités inhérentes à la turbulence.

III. 3. Variations longitudinales de C_f

L'expression empirique de Ludwig et Tillmann (cf. [3]) basée sur l'existence de la loi universelle de la paroi nous a permis de trouver des résultats qui se rapprochent très sensiblement des résultats expérimentaux.

En effet la concordance des valeurs théoriques et expérimentales est plus nette dans ce cas (voir figure 3).

On constate que contrairement aux autres paramètres de couche limite turbulente, le coefficient de frottement décroît au fur et à mesure que le nombre de Reynolds croît.

Au vu des résultats obtenus et comparativement à l'expérience on peut dire que l'équation empirique utilisée concilie pratiquement tous les auteurs. C'est une manière simple d'estimer le coefficient de frottement dans une couche limite turbulente. On notera également l'effet non négligeable du facteur de forme sur le coefficient de frottement. On constate que le coefficient de frottement décroît lorsque le facteur de forme croît. Cette décroissance linéaire pourrait être d'un rapport positif à la prévision du développement de la couche limite turbulente.

Cependant, l'utilisation de l'équation de Ludwig et Tillmann nécessite la connaissance du facteur de forme de l'écoulement. Cette utilisation se limite dans une certaine zone c'est-à-dire pour un nombre de Reynolds supérieur à 1 000 et un facteur de forme inférieur à 2.

Notre étude ne dépassant pas ce cadre, on peut dire que Ludwig et Tillmann représentent ici les auteurs appropriés pour ce calcul de coefficient de frottement.

On remarque donc que le choix d'une méthode particulière de calcul de couche limite turbulente qui donne des résultats se rapprochant de l'expérience, s'avère difficile.

Pour faciliter le travail, les méthodes modernes de calcul à l'ordinateur seraient d'une utilité incontestable. Cet outil pourrait jouer un rôle déterminant dans la prévision du développement de couche limite turbulente, domaine dont l'exploration n'a pas fait grand chemin.

CONCLUSION

Les conclusions suivantes sont basées sur les résultats de calcul obtenus et sont applicables à tout écoulement turbulent sur paroi lisse avec gradient de pression adverse modéré.

1° Avec BURI, la théorie empirique de calcul de couche limite turbulente dans un écoulement incompressible est concordante avec l'expérience jusqu'à un certain niveau du nombre de Reynolds ($Re_0 \simeq 12000$) - Une telle concordance confirme l'efficacité de la formule approximative donnée par BURI et basée sur des suppositions sur le coefficient de frottement.

Mais pour une meilleure utilisation de cette formule empirique, il s'avère nécessaire de faire une réévaluation des constantes empiriques.

2° Pour la configuration explorée par NGUYEN, l'épaisseur de quantité de mouvement subit une variation croissante linéaire au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

3° Le facteur de forme prédit est environ 11, supérieur à celui obtenu par les mesures. La relation empirique de Garner accuse un léger défaut quant à sa concordance avec l'expérience.

4° Le coefficient de frottement obtenu à partir de l'équation de Ludwig et Tillman concorde avec celui mesuré. La corrélation entre la théorie et l'expérience est dans ce cas respecté.

5° L'utilisation des méthodes empiriques pour le calcul de couche limite turbulente semble donc méconnaître mais ces méthodes doivent être appliquées à l'intérieur de limites bien définies.

L'expérience étant virtuellement la seule source d'information à partir de laquelle les formules approximatives peuvent être dérivées, on doit toujours se garder des théories développées par des résultats expérimentaux. Ceci ne s'agit pas d'abandonner la théorie qui reste encore imparfaite dans ce domaine particulier de la mécanique des fluides.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] D.V. NGUYEN

" Mesures dans une couche limite turbulente
avec gradients de pression adverses modérés"
Thèse de Maîtrise - Université Laval 1973

[2] J. C. ROTTA

" Turbulent boundary layers in incompressible flows "
Progress in Aeronautical sciences, volume
2, édité par A. Ferri, D. HUGHES et
L. H. G. Sterne, 1962

[3] H. SCHLICHTING

" Boundary Layer Theory "
Edition Mc GRAW - HILL, 1960

[4] S. MADJANI

" Application de l'équation de Von KÁRMÁN
à la détermination du frottement pariétal"
Projet de fin d'études, 1978,
Ecole Polytechnique de Thiès.

Les tableaux suivants représentent
des résultats obtenus avec l'aide
d'une calculatrice de poche

(page.....**32**.....à.....**39**.....)

BURI

$$n = 4$$

$$a = 0,017 \quad \frac{n}{n+1} = 0,8$$

$$b = 4,15 \quad \frac{nb+1}{n+1} = 3,52$$

$$\xi = a \frac{n}{n+1} = 0,0136$$

STATION	2	3	4	5	6	7	8
U_{em} (m/s)	25,70	24,90	22,93	22,95	22,55	22,22	21,67
θ_m (cm)	0,4016	0,4780	0,5573	0,6182	0,6982	0,7849	0,8590
Re_{em}	6520	7421	8657	9497	10515	11241	11836
U_{em}^b	712237	622626	527973	443862	412627	388139	349795
X (cm)	8,89	17,78	26,67	35,56	44,45	53,34	62,23
U_{ei}/U_e		1,0329	1,0405	1,0427	1,0478	1,0449	1,0254
$(U_{ei}/U_e)^{\frac{nb+1}{n+1}}$		1,1208	1,1500	1,1565	1,0640	1,0534	1,0923
$\int_{x_i}^a U_e^b dx$		5933466	5114412	4319806	3807093	3559404	3280116
$\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b$	2570279	2062808	2776718	2871360	2934494	2969478	3014543
$\frac{\int_{x_i}^a U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b}$		2,3085	1,9206	1,5557	1,3850	1,2129	1,1046
$a \frac{\int_{x_i}^a U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b}$		0,0392	0,0326	0,0264	0,0225	0,0206	0,0187
$\left\{ 1 + a \frac{\int_{x_i}^a U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b} \right\}^{\frac{n}{n+1}}$		1,0312	1,0260	1,0211	1,0190	1,0164	1,1086
$\left(\frac{U_{ei}}{U_e} \right)^{\frac{nb+1}{n+1}} \left\{ 1 + \dots \right\}^{\frac{n}{n+1}}$		1,1558	1,1800	1,1839	1,0831	1,0707	1,1086
θ_c	0,4016	0,4641	0,5476	0,6477	0,7615	0,7511	0,8327
$10^5 \nu$ (m ² /s)	1,5839	1,6025	1,5402	1,4936	1,4873	1,5505	1,5727
$Re_{oc} = \frac{\theta_c \times U_{ei}}{\nu}$		7212	8508	9951	10563	10764	11473
$Re_{oc}^{-1/n}$		0,1085	0,1041	0,1001	0,0986	0,0982	0,0966
$C_f = 2\xi Re_{oc}^{-1/n}$	2,95 $\times 10^{-3}$	2,83 $\times 10^{-3}$	2,72 $\times 10^{-3}$	2,60 $\times 10^{-3}$	2,57 $\times 10^{-3}$	2,57 $\times 10^{-3}$	2,62 $\times 10^{-3}$

TRUCKENBRODT

n = 6
 a = 0,0076
 b = 3,33

$\frac{n}{n+1} = 0,857$
 $\frac{nb+1}{n+1} = 3$

$\xi = a \frac{n}{n+1} = 0,0065$

STATION	2	3	4	5	6	7	8
U_{em} (m/s)	25,72	24,90	23,93	22,95	22,55	22,22	21,67
θ_m (cm)	0,4016	0,4780	0,5573	0,6182	0,6582	0,7849	0,8590
Re_{em}	6520	7121	8657	9497	10515	11241	11836
U_{em}^b	49682,4	44600,9	39073,2	31994,3	32061,0	30525,1	28020,8
X (cm)	8,89	17,78	26,67	35,56	44,45	53,34	62,23
U_{ei}/U_e		1,0329	1,0105	1,0426	1,0178	1,0149	1,0254
$(U_{ei}/U_e)^{\frac{nb+1}{n+1}}$		1,1019	1,1261	1,1116	1,0543	1,0453	1,0781
$\int_{x_i}^x U_e^b dx$		419089	371931	324785	293016	278195	260503
$\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b$	86259	89246	92670	95674	97838	99380	101126
$\frac{\int_{x_i}^x U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b}$		4,8596	4,1674	3,5047	3,0702	2,8474	2,6213
$a \frac{\int_{x_i}^x U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b}$		0,0369	0,0317	0,0266	0,0233	0,0216	0,0200
$1 + a \frac{\int_{x_i}^x U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b}$		1,0369	1,0317	1,0266	1,0233	1,0216	1,0200
$\left\{ 1 + a \dots \right\}^{\frac{nb+1}{n+1}}$		1,0315	1,0271	1,0228	1,020	1,0185	1,0171
$\left(\frac{U_{ei}}{U_e} \right)^{\frac{nb+1}{n+1}} \left\{ 1 + \dots \right\}^{\frac{nb+1}{n+1}}$		1,1367	1,1569	1,1594	1,0753	1,0646	1,0965
θ_c		0,4565	0,5281	0,6584	0,6584	0,7009	0,7685
$10^5 v$ (m/s)	1,5839	1,6025	1,5102	1,4938	1,4975	1,5505	1,5727
$Re_{oc} = \frac{\theta_c \cdot U_{ei}}{v}$		7093	8205	9467	9914	10044	10589
$Re_{oc}^{-1/n}$		0,2281	0,2226	0,2176	0,2157	0,2153	0,2134
$C_f = 2,3 Re_{oc}^{-1/n}$		$2,96 \times 10^{-3}$	$2,89 \times 10^{-3}$	$2,83 \times 10^{-3}$	$2,50 \times 10^{-3}$	$2,79 \times 10^{-3}$	$2,77 \times 10^{-3}$

MASHELL

$$n = 1/0,2155 = 4,640 \quad \frac{n}{n+1} = 0,822 \quad \xi = \frac{an}{n+1} = 0,0964$$

$$a = 0,1173$$

$$b = 4,2 \quad \frac{nb+1}{n+1} = 0,63$$

STATION	2	3	4	5	6	7	8
$U_{em} (m/s)$	25,72	24,90	23,93	22,95	22,55	22,22	21,67
$\theta_m (cm)$	0,4016	0,4780	0,5573	0,6182	0,6902	0,7849	0,8590
Re_{em}	6520	7421	8657	9497	10515	11241	11836
U_{em}^b	837796	731201	618813	519144	482187	453236	407950
$X (cm)$	8,89	17,78	26,67	35,56	44,45	53,34	62,23
U_{ei} / U_e		1,0329	1,0405	1,0427	1,0178	1,0149	1,025
$(U_{ei} / U_e)^{\frac{nb+1}{n+1}}$		1,1246	1,1550	1,1639	1,0661	1,0551	1,025
$\int_{x_i}^x U_e^b dx$		6974191	6000812	5058218	4450916	4157955	38279
$\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b$	2233067	3041446	3775724	4396711	4916380	5363726	57943
$\frac{\int_{x_i}^x U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b}$		3,1231	1,9730	1,3396	1,0123	0,8457	0,7130
$a \frac{\int_{x_i}^x U_e^b dx}{\theta_i Re_{ei}^{1/n} U_{ei}^b}$		0,3663	0,2314	0,1571	0,1187	0,0992	0,083
$\{1 + a \dots\}$		1,3663	1,2314	1,1274	1,0966	1,0808	1,068
$(\frac{U_{ei}}{U_e})^{\frac{nb+1}{n+1}} \{1 + a \dots\}^{1/n+1}$		1,4535	1,3705	1,3122	1,1691	1,1404	1,170
θ_c	0,4016	0,5837	0,8000	1,0490	1,2273	1,3996	1,637
$10^5 \nu (m^2/s)$	1,5839	1,6025	1,5402	1,4938	1,4975	1,5505	1,572
$Re_{ec} = \frac{\theta_c \cdot U_{ei}}{\nu}$		9069	12429	16128	18481	20057	22565
$Re_{ec}^{-1/n}$		0,1403	0,1311	0,1239	0,1203	0,1183	0,115
$C_f = 2,3 Re_{ec}^{-1/n}$		$2,70 \times 10^{-3}$	$2,52 \times 10^{-3}$	$2,38 \times 10^{-3}$	$2,32 \times 10^{-3}$	$2,28 \times 10^{-3}$	$2,22 \times 10^{-3}$

SPENCE

n = 5
 a = 0,0106
 b = 4,0

$\frac{n}{n+1} = 0,833$
 $\frac{nb+1}{nb+1} = 3,5$

$\xi = a \frac{n}{n+1} = 0,0088$

STATION	2	3	4	5	6	7	8
U_{em} (m/s)	25,72	24,90	23,93	22,95	22,55	22,22	21,67
θ_m (cm)	0,4016	0,4780	0,5573	0,6182	0,6982	0,7849	0,8590
$Re_{\theta m}$	6520	7421	8657	9497	10515	11241	11836
U_{em}^b	437607	384412	327922	277416	258575	243768	220514
X (cm)	6,89	17,78	29,67	39,56	44,45	53,34	62,23
U_{ei}/U_e		1,0329	1,0405	1,0427	1,0179	1,0149	1,0254
$(U_{ei}/U_e)^{\frac{nb+1}{n+1}}$		1,1199	1,1490	1,1576	1,0637	1,0531	1,0917
$\int_{x_i}^x U_e^b dx$		3653874	3166324	2690727	2362479	2232914	2063733
$\theta_i Re_{\theta i}^{1/n} U_{ei}^b$	1017952	1058862	1095774	1131130	1155914	1171426	1189833
$\frac{\int_{x_i}^x U_e^b dx}{\theta_i Re_{\theta i}^{1/n} U_{ei}^b}$		3,5884	3,0019	2,4555	2,1063	2,0717	1,7617
$a \frac{\int_{x_i}^x U_e^b dx}{\theta_i Re_{\theta i}^{1/n} U_{ei}^b}$		0,0380	0,0319	0,0260	0,0223	0,0204	0,0186
$\{1 + a \dots\}$		1,0380	0,0319	0,0260	0,0223	0,0204	0,0186
$\{1 + a \dots\}^{\frac{n}{n+1}}$		1,0315	1,0264	1,0216	1,0185	1,0170	1,0155
$\left(\frac{U_{ei}}{U_e}\right)^{\frac{nb+1}{n+1}} \{1 + a \dots\}^{\frac{n}{n+1}}$		1,1552	1,1794	1,1826	1,0834	1,0710	1,1086
θ_c	0,4016	0,4639	0,5471	0,6170	0,7000	0,7506	0,8321
$10^3 \nu$ (m/s)	1,5839	1,6025	1,5402	1,4938	1,4979	1,5505	1,5727
$Re_{\theta c} = \frac{\theta_c U_{ei}}{\nu}$		7208	8500	9940	10554	10756	11465
$Re_{\theta c}^{-1/n}$		0,1692	0,1637	0,1587	0,1568	0,1562	0,1542
$C_f = 2 \xi Re_{\theta c}^{-1/n}$		$2,97 \times 10^{-3}$	$2,88 \times 10^{-3}$	$2,79 \times 10^{-3}$	$2,76 \times 10^{-3}$	$2,74 \times 10^{-3}$	$2,71 \times 10^{-3}$

H.C. GARNER : $\left(\frac{U\theta}{\nu}\right)^{1/6} \theta \frac{dH}{dx} = e^{5(H-1,4)} \left[-\left(\frac{U\theta}{\nu}\right)^{1/6} \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} - 0,0135(H-1,4) \right]$

H. LUDWIG § W. TILLMAN

$\tau_0/\rho U^2 = 0,123 \times 10^{-0,678H} \left(\frac{U\theta}{\nu}\right)^{-0,268} = \frac{1}{2} C_f$

	(Buri)						
STATION	2	3	4	5	6	7	8
X (cm)	8, 89	17,78	26, 67	35, 56	44, 45	53, 34	62,23
θ_c (cm)	0, 4016	0, 4641	0, 5476	0, 6477	0, 7015	0, 7511	0,8327
U_e (m/s)	25, 70	24, 90	23, 93	22, 95	22, 55	22, 22	21,67
$\frac{\theta}{U_e} \times 10^4$	1, 5626	1, 8638	2, 2893	2, 8222	3,1100	3,3802	3,8426
dU_e/dx	-13,2971	-10,8592	-8,9426	-7, 7333	-6,7492	-5, 9002	-5,2801
$Re^{1/6}$	4, 3222	4, 3955	4, 5183	4, 6380	4, 6641	4, 6989	4, 7491
H_c	1, 420	1, 469	1, 518	1, 567	1, 620	1, 675	1, 731
dH	0,0492	0, 0496	0,0536	0,0557	0, 0557	0,0563	0,0607
$\tau_0/\rho U^2$	$1,27 \times 10^{-3}$	$1,15 \times 10^{-3}$	$1,01 \times 10^{-3}$	$9,03 \times 10^{-4}$	$8,10 \times 10^{-4}$	$7,47 \times 10^{-4}$	$6,73 \times 10^{-4}$
$C_f = 2\tau_0/\rho U^2$	$2,54 \times 10^{-3}$	$2,30 \times 10^{-3}$	$2,02 \times 10^{-3}$	$1,80 \times 10^{-3}$	$1,63 \times 10^{-3}$	$1,49 \times 10^{-3}$	$1,34 \times 10^{-3}$
H_{mes}	1, 420	1, 460	1, 470	1, 500	1, 520	1, 540	1, 560

H.C. GARNER :

(Truckenbrodt)									
STATION	2	3	4	5	6	7	8		
X (cm)	8,89	17,78	26,67	35,56	44,45	53,34	62,23		
θ_c (cm)	0,4016	0,4565	0,5281	0,6123	0,6584	0,7009	0,7685		
U_e (m/s)	25,70	24,90	23,93	22,95	22,55	22,22	21,67		
$\frac{\theta}{U_e} \times 10^4$	1,5626	1,8333	2,2068	2,6679	2,9197	3,1543	3,5463		
dU_e/dx	-13,2971	-10,8592	-8,9426	-7,7333	-6,7492	-5,9002	-5,2801		
$Re^{1/6}$	4,3222	4,3833	4,4910	4,5945	4,6349	4,6450	4,6861		
H_c	1,420	1,469	1,518	1,567	1,619	1,673	1,728		
dH	0,0492	0,0489	0,0491	0,0526	0,0536	0,0532	0,0553		
$\tau_0/\rho U^2$	$1,27 \times 10^{-3}$	$1,15 \times 10^{-3}$	$1,02 \times 10^{-3}$	$9,17 \times 10^{-4}$	$8,34 \times 10^{-4}$	$7,64 \times 10^{-4}$	$6,91 \times 10^{-4}$		
$C_f = 2\tau_0/\rho U^2$	$2,54 \times 10^{-3}$	$2,30 \times 10^{-3}$	$2,04 \times 10^{-3}$	$1,83 \times 10^{-3}$	$1,66 \times 10^{-3}$	$1,52 \times 10^{-3}$	$1,38 \times 10^{-3}$		

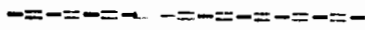
H. C. GARNER

(Maskell)

STATION	2	3	4	5	6	7	8
X (cm)	0,59	17,70	27,67	35,56	44,45	53,34	62,23
θ_c (cm)	0,4016	0,5837	0,8000	1,0490	1,2273	1,3956	1,6377
U_e (m/s)	25,70	24,90	23,90	22,95	22,55	22,22	21,67
$\frac{\theta}{U_e} \times 10^4$	1,5626	2,3441	3,3430	4,5742	5,4425	6,2988	7,5574
dU_e/dx	-13,2971	-10,8592	-8,5425	-7,7333	-6,7492	-5,9002	-5,2801
$Re^{1/6}$	4,3222	4,5666	4,8129	5,0261	5,1418	5,2125	5,3158
H_c	1,420	1,469	1,519	1,572	1,633	1,704	1,729
dH	0,0492	0,0503	0,0534	0,0615	0,0710	0,0850	0,1138
$\tau_0/\rho U_e^2$	$1,27 \times 10^{-3}$	$1,07 \times 10^{-3}$	$9,17 \times 10^{-4}$	$7,87 \times 10^{-4}$	$6,90 \times 10^{-4}$	$6,04 \times 10^{-4}$	$5,13 \times 10^{-4}$
$C_f = 2\tau_0/\rho U_e^2$	$2,54 \times 10^{-3}$	$2,14 \times 10^{-3}$	$1,83 \times 10^{-3}$	$1,57 \times 10^{-3}$	$1,38 \times 10^{-3}$	$1,20 \times 10^{-3}$	$1,02 \times 10^{-3}$

	(Spence)							
STATION	2	3	4	5	6	7	8	
X (cm)	8, 89	17, 78	26, 67	35, 56	44, 45	53, 34	62, 23	
θ_c (cm)	0,4016	0,4639	0,5471	0,6470	0,7009	0,7506	0,8321	
U_e (m/s)	25, 70	24, 90	23, 93	22, 95	22, 55	22, 22	21, 67	
$\frac{\theta}{U_e} \times 10^4$	1,5626	1,8630	2,2862	2,8191	3,1082	3, 3780	3,8398	
dU_e/dx	-13,2971	-10,8592	-8,9426	-7,7333	-6,7492	-5,9002	-5,2801	
$Re^{1/6}$	4, 3222	4, 3951	4, 5175	4, 6369	4, 6835	4, 6983	4, 7485	
He	1, 420	1, 469	1, 518	1, 567	1, 620	1, 675	1, 731	
dH	0,0492	0,0489	0,0485	0,0536	0,0557	0,0562	0,0607	
$\tau_0/\rho U_e^2$	$1,27 \times 10^{-3}$	$1,14 \times 10^{-3}$	$1,10 \times 10^{-3}$	$9,04 \times 10^{-4}$	$8,18 \times 10^{-4}$	$7,47 \times 10^{-4}$	$6,73 \times 10^{-4}$	
$C_f = 2\tau_0/\rho U_e^2$	$2,54 \times 10^{-3}$	$2,28 \times 10^{-3}$	$2,02 \times 10^{-3}$	$1,80 \times 10^{-3}$	$1,63 \times 10^{-3}$	$1,49 \times 10^{-3}$	$1,34 \times 10^{-3}$	

F I G U R E S .



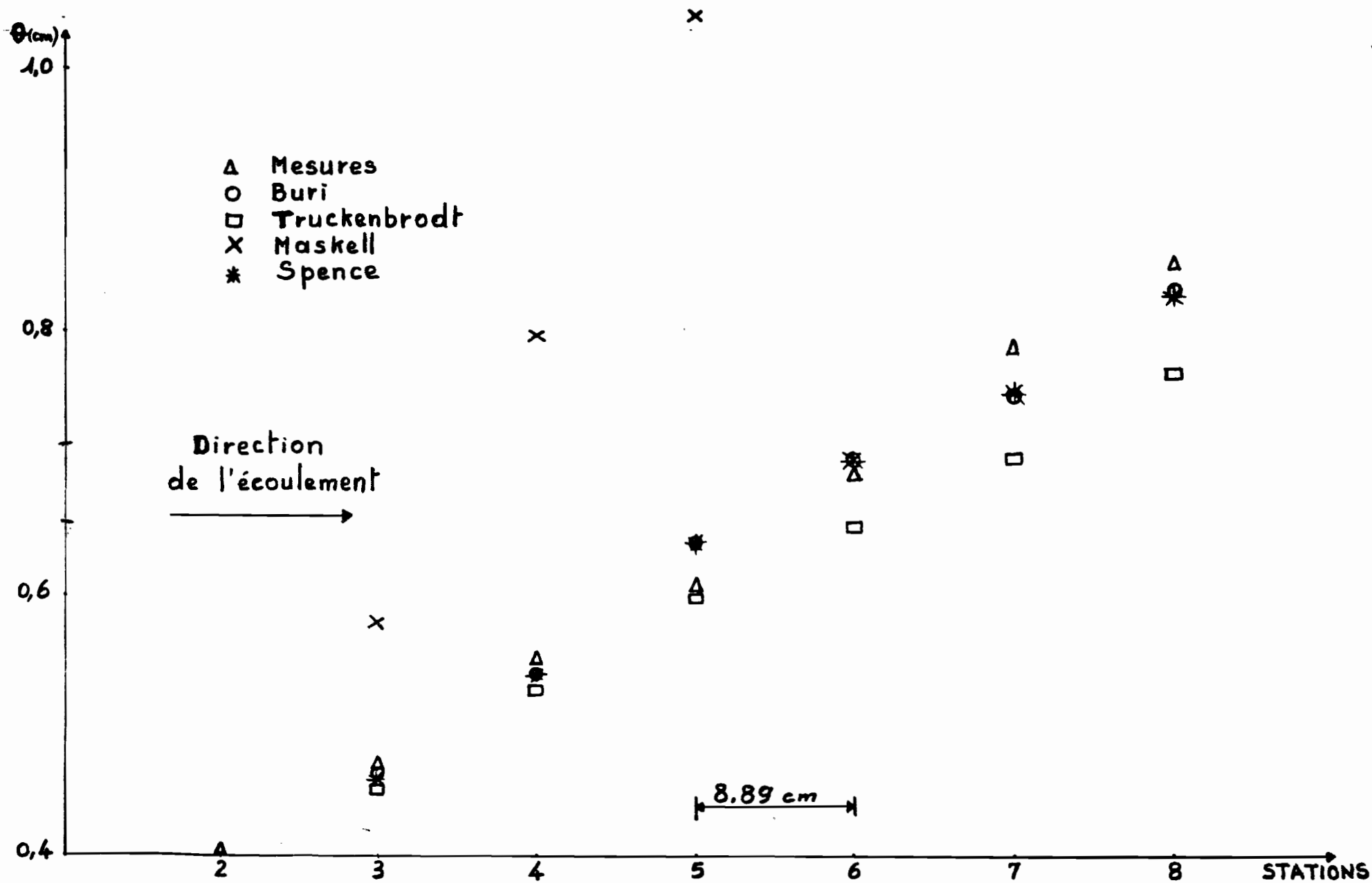


Fig. 1 : Variation longitudinale de l'épaisseur de quantité de mouvement

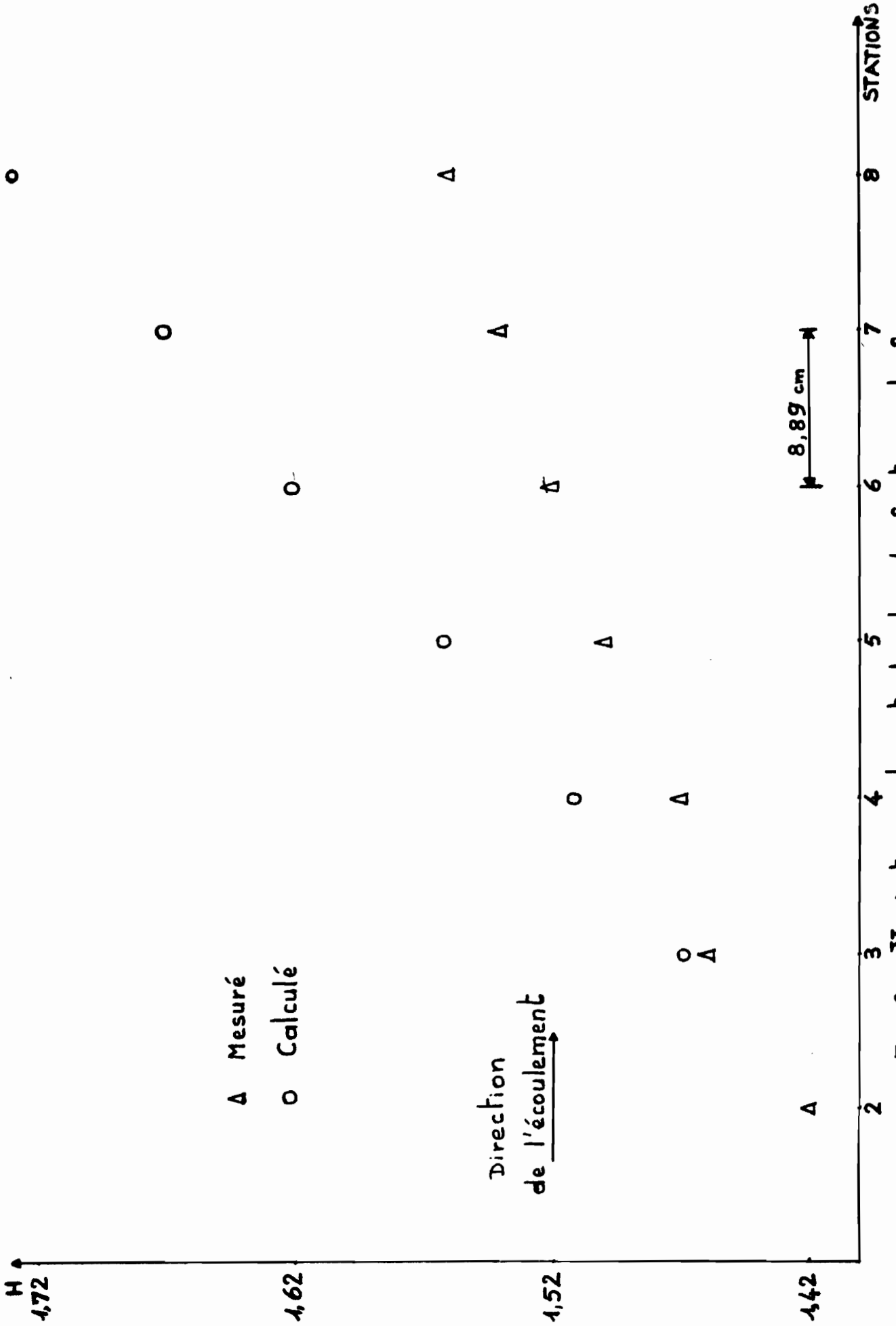


Fig. 2 : Variation longitudinale du facteur de forme

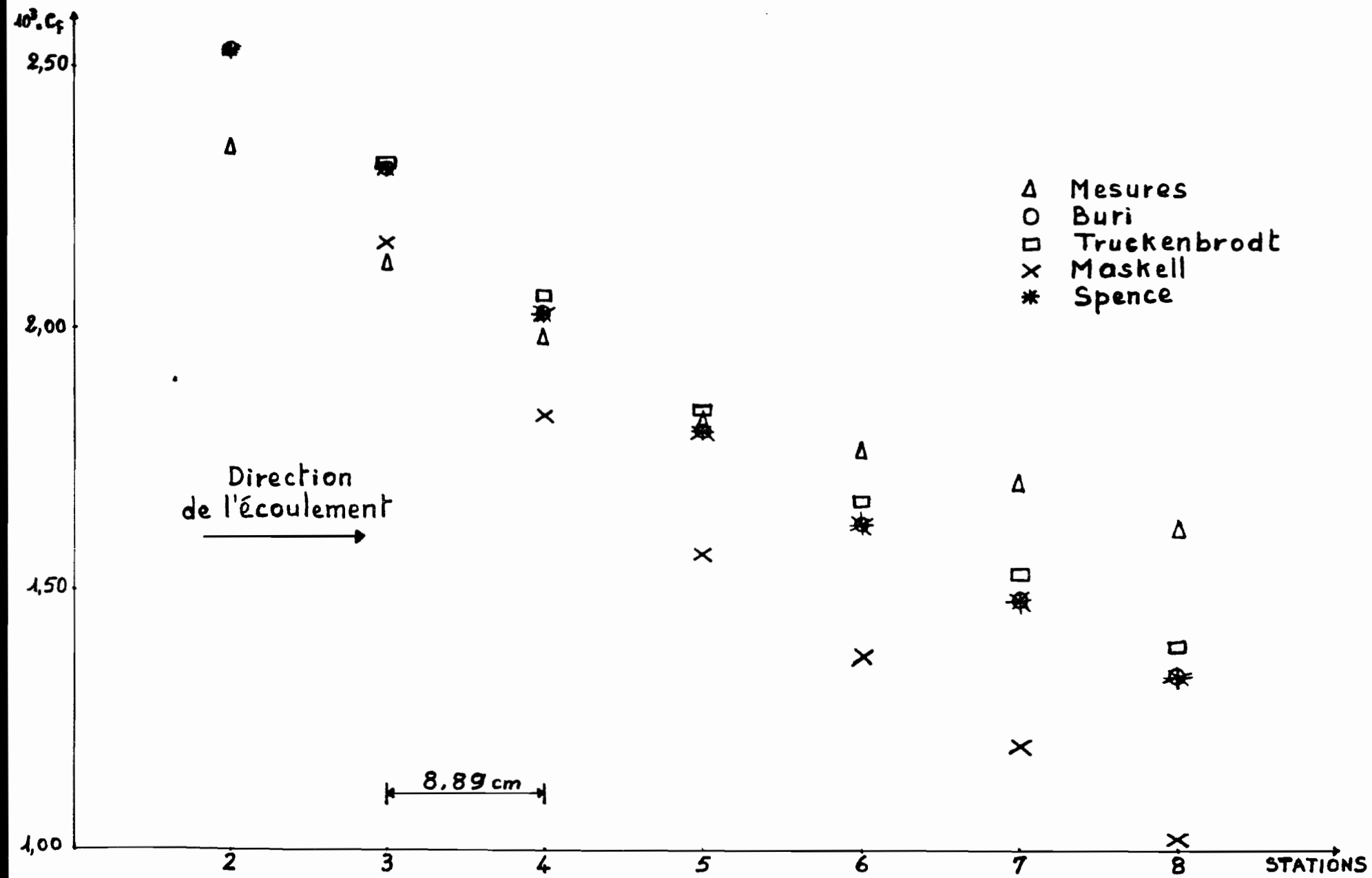


Fig. 3 : Variation longitudinale du coefficient de frottement pariétal

ANNEXES :

Organigramme et listing du programme
de calcul de la couche limite.

Les tableaux suivants représentent les résultats obtenus à l'aide du programme d'ordinateur.

NOMENCLATURE :

I = station

X = coordonnée longitudinale

U = Vitesse à l'extérieur de la couche limite

V = viscosité cinématique

D = du/dx

F = dH

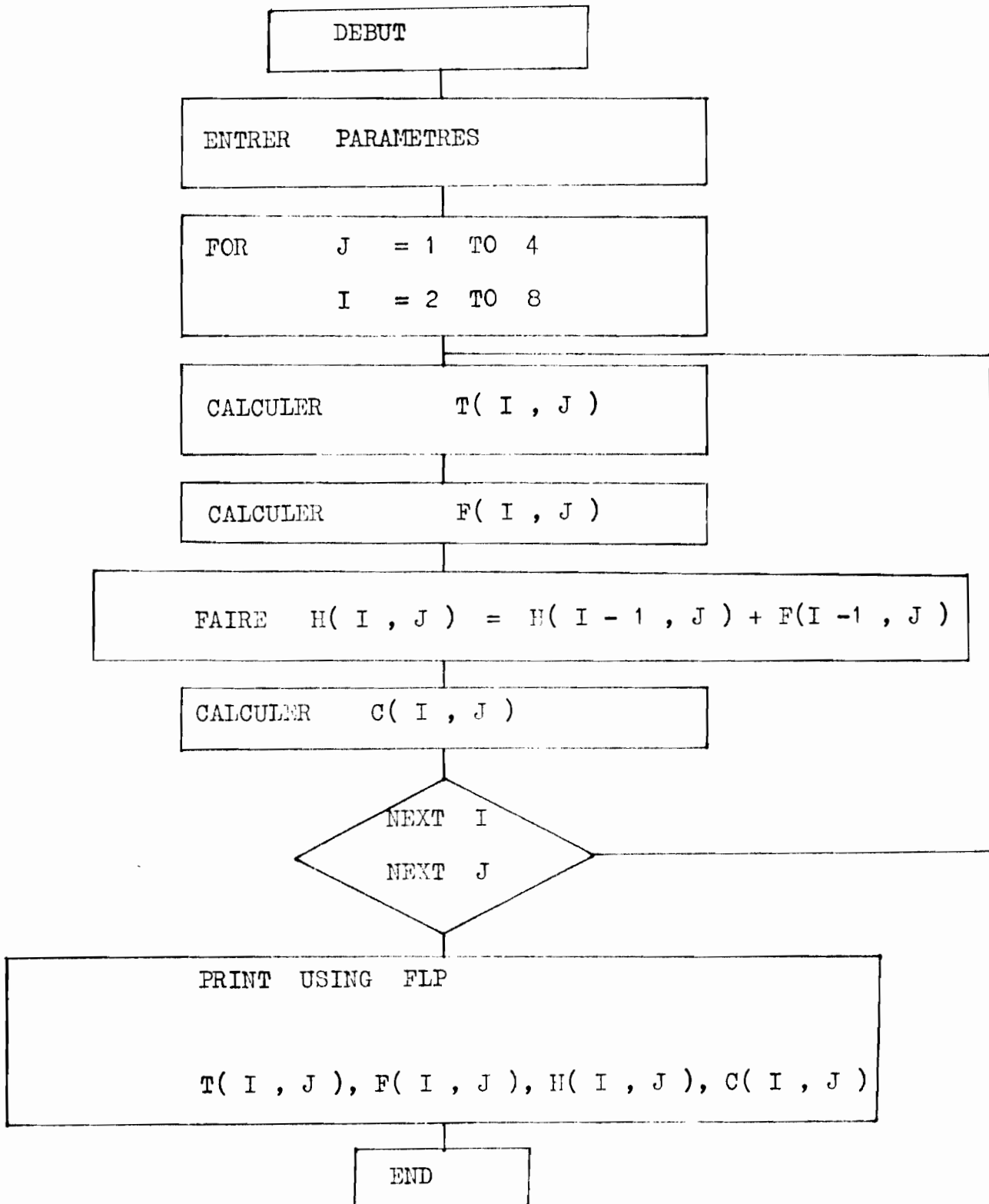
T = épaisseur de quantité de mouvement

H = facteur de forme

C = coefficient de frottement

DO = dx

ORGANIGRAMME



```

0010 REM PROGRAMME POUR LE CALCUL DE L'EPAISSEUR DE LA QUANTITE
0020 REM DE MOUVEMENT , DU FACTEUR DE FORME ET DU COEFFICIENT
0030 REM DE FROTTEMENT.
0040 DIM X(10),V(10),U(10),D(10),T(10,4),H(10,4),C(10,4)
0050 DIM N(4),A(4),B(4),F(10,4)
0060 FOR J=1 TO 4
0070 INPUT N(J),A(J),B(J),T(2,J),H(2,J),C(2,J),F(2,J)
0080 NEXT J
0090 INPUT D0
0100 FOR I=2 TO 8
0110 INPUT X(I),U(I),V(I),D(I)
0120 NEXT I
0130 FOR J=1 TO 4
0140 FOR I=3 TO 8
0150 W=(U(I-1)/U(I))↑((N(J)*B(J)+1)/(N(J)+1))
0160 R=U(I-1)*T(I-1,J)/V(I-1)
0170 Z=((U(I-1)↑B(J)+U(I)↑B(J))*D0)/2
0180 S=T(I-1,J)*W
0190 K=1+A(J)*Z/(T(I-1,J)*R↑(1/N(J))*U(I-1)↑B(J))
0200 T(I,J)=S*K↑(N(J)/(N(J)+1))
0210 H(I,J)=H(I-1,J)+F(I-1,J)
0220 L=(EXP(S*(H(I,J)-1,4)))*D0
0230 M1=((U(I)*T(I,J)/V(I))↑(1/6))*T(I,J)*D(I)/U(I)
0240 M=M1+.0135*(H(I,J)-1,4)
0250 F(I,J)=-M*L/((U(I)*T(I,J)/V(I))↑(1/6)*T(I,J))
0260 C(I,J)=(.246*10↑(-.678*H(I,J)))*(U(I)*T(I,J)/V(I))↑(-.268)
0270 NEXT I
0280 NEXT J
0290 FOR J=1 TO 4
0300 GOSUB 0450
0310 GOSUB 0480
0320 GOSUB 0450
0330 FOR I=2 TO 8
0340 PRINT USING FLP,0350,I,X(I),U(I),V(I),D(I),F(I,J);
0350 : * ## * ##.## * ##### * #.##### * ###.#### * #.#### *
0360 PRINT USING FLP,0370,T(I,J),H(I,J),C(I,J)
0370 : #.#### * #.### * #.##### *
0380 NEXT I
0390 GOSUB 0450
0400 PRINT FLP,
0410 PRINT FLP,
0420 PRINT FLP,
0430 NEXT J
0440 END
0450 PRINT FLP, ' *****';
0460 PRINT FLP, ' *****'
0470 RETURN
0480 PRINT FLP, ' * I * X * U * V * D *';
0490 PRINT FLP, ' F * T * H * C *';
0500 RETURN

```

BURT

I	X	U	V	D	F	T	H	C
2	8.89	2570	.15839	-13.2971	.0492	.4016	1.420	.00254
3	17.78	2490	.16025	-10.8592	.0490	.4629	1.469	.00230
4	26.67	2393	.15402	-8.9426	.0496	.5464	1.518	.00204
5	35.56	2295	.14938	-7.7333	.0538	.6464	1.568	.00181
6	44.45	2255	.14975	-6.7492	.0560	.7001	1.622	.00163
7	53.34	2222	.15505	-5.9002	.0567	.7495	1.678	.00149
8	62.23	2167	.15727	-5.2801	.0611	.8310	1.734	.00134

TRUCKENBRODT

I	X	U	V	D	F	T	H	C
2	8.89	2570	.15839	-13.2971	.0492	.4016	1.420	.00254
3	17.78	2490	.16025	-10.8592	.0489	.4555	1.469	.00231
4	26.67	2393	.15402	-8.9426	.0492	.5270	1.518	.00206
5	35.56	2295	.14938	-7.7333	.0526	.6110	1.567	.00184
6	44.45	2255	.14975	-6.7492	.0539	.6570	1.620	.00167
7	53.34	2222	.15505	-5.9002	.0530	.6994	1.674	.00153
8	62.23	2167	.15727	-5.2801	.0550	.7669	1.727	.00139

MASKELL

I	X	U	V	D	F	T	H	C
2	8.89	2570	.15839	-13.2971	.0492	.4016	1.420	.00254
3	17.78	2490	.16025	-10.8592	.0504	.5826	1.469	.00216
4	26.67	2393	.15402	-8.9426	.0536	.7990	1.520	.00183
5	35.56	2295	.14938	-7.7333	.0618	1.0489	1.573	.00157
6	44.45	2255	.14975	-6.7492	.0717	1.2263	1.635	.00138
7	53.34	2222	.15505	-5.9002	.0860	1.3986	1.707	.00120
8	62.23	2167	.15727	-5.2801	.1157	1.6367	1.793	.00102

SPENCE

I	X	U	V	D	F	T	H	C
2	8.89	2570	.15839	-13.2971	.0492	.4016	1.420	.00254
3	17.78	2490	.16025	-10.8592	.0490	.4628	1.469	.00230
4	26.67	2393	.15402	-8.9426	.0496	.5460	1.518	.00204
5	35.56	2295	.14938	-7.7333	.0538	.6457	1.568	.00181
6	44.45	2255	.14975	-6.7492	.0560	.6995	1.622	.00163
7	53.34	2222	.15505	-5.9002	.0566	.7491	1.678	.00149
8	62.23	2167	.15727	-5.2801	.0611	.8305	1.734	.00134