

RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL



ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE THIÈS

Gm. 0212

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME D'INGÉNIEUR DE CONCEPTION

TITRE : Analyse cinéto-élasto-dynamique des mécanismes  
plans à l'aide de la méthode des éléments finis

DATE : JULN 1990

AUTEUR : BELENLIGA Dominique J.A.  
DIRECTEUR : Mohamadou Lamine DIALLO  
CO-DIRECTEUR :

à mes parents, à ma famille

à J.B

à mes amis

### REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à la mise en oeuvre de ce travail et plus particulièrement Mr MOHAMADOU LAMINE DIALLO Professeur à l'E.P.T pour m'avoir proposé ce projet et pour l'avoir dirigé.

## SOMMAIRE

L'objectif de ce projet est d'établir les équations aux dérivées partielles qui régissent le comportement des mécanismes plans à quatre membrures avec l'hypothèse que les membrures qui les constituent sont rigides.

Au chapitre I, un exposé est fait sur les concepts qui sont à la base de notre analyse: la théorie des mécanismes plans à quatre membrures, la théorie de l'élasticité. Il y est notamment démontré les équations fondamentales de l'élasticité linéaire symétrique et asymétrique; un accent particulier est mis sur l'élasto-dynamique asymétrique dont les équations constituent le fondement de notre analyse.

Au chapitre II, les équations cinéto-élasto-dynamiques sont établies. On commence par établir les équations cinétiques et élasto-dynamiques d'une membrure considérée comme un élément de poutre rectangulaire, puis l'équivalent de celles-ci pour un mécanisme à quatre membrures. Des hypothèses sont ensuite énoncées afin de simplifier les équations obtenues.

Au chapitre III, la modélisation par éléments finis à l'aide de la méthode de Galerkin est effectuée; ce chapitre contient également une analyse des types d'ondes possibles dans le cas de la cinéto-élasto-dynamique ainsi que l'exposé d'une méthode semi-analytique d'analyse. La détermination des modes et fréquences propres de vibration a été également introduite.

## TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE .....	i.
<b>Chapitre 0.</b> INTRODUCTION .....	ii
<b>Chapitre I.</b> RAPPELS - CONCEPTS FONDAMENTAUX .....	1
I.1. Eléments de théorie des mécanismes plans.....	1
I.2. Théorie de l'élasticité.....	2
I.3. Equations du mouvement d'un corps rigide dans un référentiel plan fixe .....	30
<b>Chapitre II.</b> EQUATIONS DE LA CINETO-ELASTO-DYNAMIQUE D'UN MECANISME PLAN .....	32
II.1. Dynamique d'une membrure rigide.....	33
II.2. Assemblage des membrures Dynamique d'un mécanisme plan rigide.....	40
II.3. Equations élastiques d'une membrure.....	45
II.4. Assemblage des membrures. Equations cinéto-élasto-dynamiques d'un mécanisme plan.....	53
II.5. Hypothèses simplificatrices. Equations simplifiées de la C.E.D d'un mécanisme plan .....	59

**Chapitre III. RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.**

ANALYSE VIBRATOIRE D'UN MECHANISME PLAN.....	66
III.1. Méthode des éléments finis.....	66
III.2. Modélisation par éléments finis des équations dynamiques de Lamé.....	69
III.3. Analyse vibratoire des mécanismes plans.....	90
CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS.....	100
ANNEXE.....	102
BIBLIOGRAPHIE.....	106

## CHAPITRE 0

### INTRODUCTION

Ce projet a pour objet l'analyse cinéto-élasto-dynamique des mécanismes plans à l'aide de la méthode des éléments finis. Le domaine d'étude appartenant au mouvement des mécanismes avec la considération de l'élasticité des membrures qui les constituent s'appelle la cinéto-élasto-dynamique.

L'étude des mécanismes plans s'effectue de façon classique en considérant que les membrures sont rigides. Cette étude se limite à la détermination des forces et des quantités cinématiques telles les vitesses et les accélérations, et ne permet pas de mettre en évidence certains phénomènes fondamentaux (déformations, déplacements, tensions, propagation d'ondes) dûs aux propriétés d'élasticité du matériau dont sont constituées les membrures.

Le but de ce travail est de combler ces lacunes en élaborant un modèle qui tient compte de l'élasticité des membrures. Nous nous limiterons dans ce travail au cas des mécanismes à quatre membrures; l'analyse consistera essentiellement à dégager les équations fondamentales et à construire un schéma aux éléments finis pour leur résolution.

Le choix de la méthode des éléments finis comme schéma de résolution est dû à la simplicité dans l'interprétation physique et dans la formulation mathématique qu'offre cette méthode. La méthode des éléments finis cumule les avantages des autres algorithmes utilisés dans la résolution des équations aux dérivées

partielles (méthodes variationnelles et méthodes aux différences finies [5]), et se prête bien à la programmation par ordinateur. Cette programmation n'est pas abordée dans ce travail, faute de temps.

Après avoir effectué quelques rappels de concepts fondamentaux sur les mécanismes plans et la théorie de l'élasticité, on établit les équations cinétiques d'un mécanisme (équations du mouvement) en vue de la détermination des forces, des vitesses et des accélérations; cette partie rejoint l'analyse classique car l'hypothèse de base de l'étude cinétique consiste en la rigidité des membrures.

Puis, on établit les équations élasto-dynamiques d'un mécanisme permettant de déterminer les déplacements, déformations et tensions résultant de l'élasticité des membrures à l'aide de la théorie de l'élasticité.

Après avoir simplifié les équations obtenues à l'aide d'hypothèses, les équations élasto-dynamiques sont modélisées par la méthode des éléments finis.

Enfin, une analyse des types d'ondes se propageant dans les membrures est effectuée.

## CHAPITRE I

### RAPPELS: CONCEPTS FONDAMENTAUX

Ces rappels seront essentiellement constitués de l'établissement des équations fondamentales de l'élasticité. En ce qui concerne la démonstration des formules fondamentales qui sont à la base de la formulation des équations cinétiques, le lecteur pourra consulter l'annexe.

#### I.1/ELEMENTS DE THEORIE DES MECANISMES PLANS

##### I.1.1°/MECANISMES A QUATRE (4) MEMBRURES-PRINCIPES DE BASE

###### I.1.1.a Définition

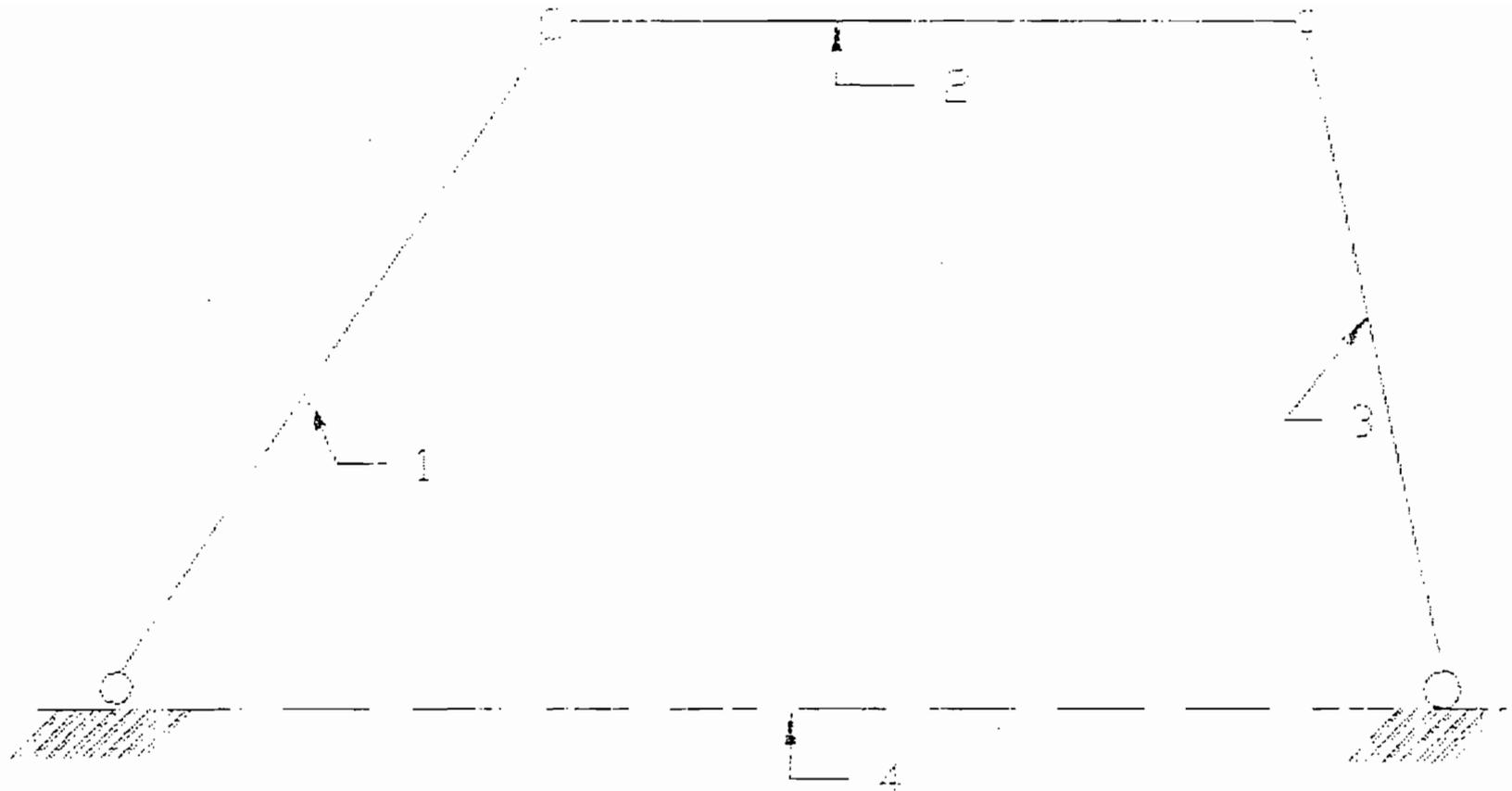
Le mécanisme à quatre membrures est une chaîne cinématique (c'est à dire un ensemble de corps rigides reliés entre eux ), à liaison forcée (le mouvement relatif entre les membrures est unique et se répète d'un cycle à l'autre) dont les quatre membrures sont jointes par des chevilles et dont l'une d'elles est fixe.

La membrure fixe sert de référence: la position des autres membrures est donnée par rapport à celle-ci.

###### I.1.1.b Classification

Une façon de classifier les mécanismes à quatre membrures est de le faire selon le type de mouvement de ses membrures motrice et entraînée:

- Manivelle: lorsqu'elle peut faire un tour complet autour de son centre de rotation.



1.0

FIGURE 1: MECANISME A QUATRE MEMBRURES

- 1- membrune antrenatoare
- 2- membrune intermediara
- 3- membrune antrenata
- 4- membrune fixe

- Balancier: lorsqu'elle oscille une partie d'un tour.

- Coulisseau: lorsqu'elle fait un mouvement de translation guidé par la membrure fixe.

On utilise la loi de GRASHOFF pour identifier le type de transformation de mouvement effectué par les mécanismes dont les quatre membrures sont de longueur déterminée. Si  $l$  est la longueur de la membrure la plus longue ; si  $s$  est la longueur de la membrure la plus courte ; si  $p$  et  $q$  sont les longueurs des autres membrures; la loi de GRASHOFF stipule que:

\* Si  $l+s \leq p+q$  ;

la transformation de mouvement sera :

- Manivelle-balancier si  $s$  est la manivelle adjacente à la membrure fixe.

- Manivelle-manivelle (ou double manivelle) si  $s$  est la membrure fixe.

- Balancier-balancier (ou double balancier) si  $s$  est opposée à la membrure fixe.

\* Si  $l+s > p+q$  le mécanisme sera alors un mécanisme balancier - balancier.

Mais on distingue d'autres types de mécanismes à quatre membrures tels que les mécanismes manivelle-coulisseau (décalé et non décalé ), balancier-coulisseau et coulisseau-coulisseau.

## I.2/ THEORIE DE L'ELASTICITE

Cette section a pour but principal l'établissement des équations

fondamentales de la théorie de l'élasticité ainsi que leur application aux membrures et aux mécanismes plans. Ces équations serviront à effectuer l'assemblage des membrures et à en déduire les équations aux dérivées partielles de l'élasto-cinéto-dynamique d'un mécanisme à quatre(4) membrures.

Pour cela, nous effectuerons dans l'ordre les exposés suivants:

- modèle du corps élastique.
- analyse des déformations et des déplacements.
- analyse des forces et des contraintes.
- relations contraintes-déformations.
- équations de l'élasticité formées des équations géométriques, physiques et des équations élastiques.
- modèle élastique d'une membrure considérée comme un élément de poutre rectangulaire.

L'étude effectuée dans ce chapitre porte sur l'élasticité linéaire. L'élasticité non linéaire, la théorie de la plasticité et l'élasticité quasi-linéaire ne seront pas abordées ici. De même nous considérons que nous nous trouvons dans le champ dynamique avec présence de forces d'inertie non négligeables.

## I.2.1 MODELE DU CORPS ELASTIQUE

### I.2.1.a Hypothèses fondamentales: rappels

\* Hypothèse de l'espace-temps newtonnien:

L'espace est euclidien (à trois dimensions), le temps est indépendant des coordonnées spatiales, les lois de Newton sont valables. Cette hypothèse situe la mécanique des milieux déformables dans la "mécanique classique".

\* Hypothèse du milieu continu:

Chaque domaine élémentaire contient de la matière. Cette hypothèse permet de considérer toutes les quantités comme fonctions du point dans le domaine occupé par le corps, et non comme des fonctions de la position des particules qui le composent. Grâce à elle, la mécanique des milieux déformables peut largement utiliser l'appareil de l'analyse classique.

\* Hypothèse de la rigidification des parties (ou de la solidification).

\* Hypothèse de la dépendance locale

Les forces intérieures (tensions) sont des fonctions du point, de la déformation, de la température, etc... mais ne dépendent pas explicitement du gradient (des dérivées spatiales) de ces grandeurs.

\* Hypothèse de l'élasticité idéale:

Il existe une correspondance bi-univoque entre les déformations et les tensions représentée par la loi de Hooke.

### I.2.2.b\*) Hypothèses simplificatrices

\* Hypothèse d'hyperélasticité:

Le travail mécanique nécessaire pour déformer le corps dépend seulement de son état initial et de son état final.

\* Hypothèse de linéarité géométrique :

\* Hypothèse de linéarité physique:

Les tensions sont des fonctions linéaires des déformations.

\* Hypothèse d'isotropie:

\* Hypothèse d'homogénéité:

L'ensemble de ces hypothèses conduit à la théorie de l'élasticité linéaire des corps isotropes et homogènes.

## I.2.2 ETAT DE DEPLACEMENT ET ETAT DE DEFORMATION DU MILIEU CONTINU - ANALYSE DES DEFORMATIONS ET DES DEPLACEMENTS

### I.2.2.a Déplacements et déformations

Supposons que le corps  $V$  ne soit soumis à aucune action extérieure.

Supposons maintenant que le corps soit sollicité par un système de forces et de liaisons géométriques. La matière contenue dans  $V$  vient occuper une autre position, que nous allons désigner par  $V^*$ , de frontière  $S^*$ . (Chaque élément gardera sa notation initiale, pourvue d'un astérisque.)

Afin que le corps se trouve en équilibre comme corps déformable, il faut d'abord que le système des forces appliquées (y compris les forces de réaction exercées par les liaisons géométriques) soit

statiquement nul.

Nous allons nous limiter au cas du passage du corps  $V$  d'une position d'équilibre à une autre. La position de chaque point de  $V$ , rapportée aux coordonnées fixes, subit donc une modification: ce processus sera appelé déplacement.

Les distances réciproques entre les points et les angles entre les éléments linéaires vont aussi être modifiées: ce processus sera appelé déformation.

### I.2.2.b Etat de déplacement

#### \* Systèmes de coordonnées

Pour étudier le comportement au voisinage d'un point  $x$  il faudra considérer un second point  $y$  assez proche de  $x$ , et examiner les positions occupées par les particules qui se trouvaient initialement en  $x$  et  $y$ . Toutes les quantités sont rapportées au système de coordonnées fixe. Nous adoptons ainsi une description Lagrangienne.

#### \* Vecteur déplacement

Considérons deux points  $x$  et  $y=x+r$ , et supposons connue une loi de correspondance entre les points de  $V$  et de  $V^*$ :

$$x_i^* = f_i(\mathbf{x}) \quad i=1,2,3 \quad (2.1)$$

avec  $f_i$  fonction vectorielle; si les déplacements des particules sont assez petits, les relations (2.1) peuvent s'écrire:

$$x_i^* = x_i + u_i(x) \quad i=1,2,3 \quad (2.2)$$

où les  $u_i$  sont petits, ou bien encore vectoriellement:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

Le vecteur  $\mathbf{u}$  est nommé vecteur-déplacement. La dimension de son

module est celle d'une longueur.

On suppose que le passage de l'état  $V$  à l'état  $V^*$  est réalisé par une transformation bi-univoque et bi-continue. Il faut et il suffit pour cela que  $f$  soit de classe  $C1$  et que le jacobien soit borné et non nul.

On dit alors que la transformation est régulière.

\* Transformation des composantes des vecteurs

Avec les notations choisies, les points  $x, y$  se transforment en  $x^* = x + u(x)$  et  $y^* = y + u(y)$  respectivement, et le vecteur  $\tau$  qui les joint devient  $\tau^* = \tau + \delta\tau$ . Evidemment, on a:

$\tau + u(y) = u(x) + \tau^*$ , d'où:

$$\tau_i^* = \tau_i + u_i(x+\tau) - u_i(x) \quad (2.4)$$

ou bien encore :

$$\delta\tau_i = u_i(x+\tau) - u_i(x) \quad (2.5)$$

Si  $u$  deux fois dérivable on peut écrire la formule de Taylor avec deux termes et son reste, de sorte que (2.5) devient:

$$\delta\tau_i = u_{i,j}\tau_j \quad i, j=1, 2, 3 \quad (2.6)$$

les dérivées étant calculées en  $x$ .

Les composantes de l'élément linéaire  $\tau$  deviennent:

$$\tau_i^* = (\delta_{ij} + u_{i,j})\tau_j \quad i, j=1, 2, 3 \quad (2.7)$$

où  $\delta_{ij}$  sont les composantes du tenseur de Kronecker .

$$\delta_{ij} = 1 \text{ pour } i=j \quad \delta_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \quad (2.8)$$

On arrive donc à des relations linéaires entre les composantes avant, et celles après la déformation, d'un élément linéaire  $\tau$ . La seule condition de validité de ces relations est que les  $\tau$  soient petits. Sous une forme développée, (2.7) s'écrit:

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= (1+u_{1,1})\tau_1 + u_{1,2}\tau_2 + u_{1,3}\tau_3 \\ \tau_2^* &= u_{2,1}\tau_1 + (1+u_{2,2})\tau_2 + u_{2,3}\tau_3 \\ \tau_3^* &= u_{3,1}\tau_1 + u_{3,2}\tau_2 + (1+u_{3,3})\tau_3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

#### I.2.2.c Déformation homogène

Si nous choisissons pour (2.1) la forme la plus simple possible une transformation affine:

$$x_i^* = a_{ij}x_j + a_i \quad (3.1)$$

avec  $a_{ij}$  et  $a_i$  constantes.

On déduit alors de (2.2):

$$u_i = x_i^* - x_i = (a_{ij} - \delta_{ij})x_j + a_i \quad (3.2)$$

Il en résulte que les  $u_i$  sont également linéaires. D'autre part si l'on pose :

$$u_i = \alpha_{ij}x_j + a_i \quad (3.3)$$

avec  $\alpha_{ij}$  et  $a_i$  constantes on obtient:

$$x_i^* = x_i + u_i = (\alpha_{ij} + \delta_{ij})x_j + a_i \quad (3.4)$$

où  $\alpha_{ij} + \delta_{ij} = a_{ij}$ .

Dans le cas d'une telle transformation, toutes les parties du corps se modifient de la même manière d'où le nom de déformation homogène attribué à la déformation caractérisée par (3.1) et (3.3).

#### I.2.2.d Déformation pure infinitésimale et déplacement rigide infinitésimal

##### \* Déplacement rigide

Les relations (2.6) et (3.3) conduisent à la formule:

$$\delta\tau_i = \tau_i^* - \tau_i = \alpha_{ij} \tau_j \quad (4.1)$$

On peut considérer la variation  $\delta\tau$  comme étant composée de deux parties: la première, due à un déplacement rigide du voisinage de  $\mathbf{x}$  dans son ensemble; la seconde, due à la variation des distances réciproques entre les points de ce voisinage. On a évidemment :

$$\tau^* = \tau + \delta\tau, \quad |\tau^*|^2 = \tau^* \cdot \tau^* = |\tau|^2 + 2\tau \cdot \delta\tau + |\delta\tau|^2$$

la variation de la longueur de  $\tau$  est donc caractérisée par:

$$\delta|\tau|^2 = |\tau^*|^2 - |\tau|^2 = 2\tau \cdot \delta\tau + |\delta\tau|^2. \quad (4.2)$$

Si la déformation est infinitésimale le terme quadratique est négligeable.

Dans le cas d'un déplacement rigide infinitésimal, la longueur des vecteurs ne varie pas et de (4.2) il vient:

$$\tau \cdot \delta\tau = \tau_i \delta\tau_i = \alpha_{ij} \tau_i \tau_j = 0$$

ce qui équivaut à la condition d'anti-symétrie:

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0, \quad i, j=1, 2, 3 \quad (4.4)$$

Désignons les composantes de la partie anti-symétrique de la matrice  $\alpha_{ij}$  par :

$$p_1 = \frac{1}{2}(\alpha_{23} - \alpha_{32}) \quad p_2 = \frac{1}{2}(\alpha_{31} - \alpha_{13}) \quad p_3 = \frac{1}{2}(\alpha_{12} - \alpha_{21}) \quad (4.5)$$

En considérant encore (4.4), les formules (4.1) deviennent:

$$\delta\tau_1 = p_3\tau_2 - p_2\tau_3 \quad \delta\tau_2 = -p_3\tau_1 + p_1\tau_3 \quad \delta\tau_3 = p_2\tau_1 - p_1\tau_2 \quad (4.6)$$

ou bien encore, en notant avec  $p$  le vecteur de composantes  $p_i$ :

$$\delta\tau = -p \wedge \tau \quad (4.7)$$

Si  $\tau$  unit  $x_0$  à  $x$ , et donc si  $\tau_i = x_i - x_0^i$ , il vient:

$$\delta x_i = \delta x_0^i + \delta\tau_i$$

En notant ici  $\delta x_0^i = a_i$  et  $a = (a_1, a_2, a_3)$  on obtient à l'aide de (4.7):

$$\delta x = a - p \wedge (x - x_0)$$

Si la matrice  $\alpha$  est antisymétrique, le déplacement du point  $x$  se réduit donc à une translation (caractérisée par  $a$ ) et à une rotation (caractérisée par  $-p$ ) c'est-à-dire à un déplacement rigide infinitésimal de  $V$  dans son ensemble, le même en tous ses points

puisque  $a$  et  $p$  sont constants.

\* Variation des distances

Supposons maintenant que la transformation (3.5) soit définie par une matrice infinitésimale de composants quelconques  $\alpha_{ij}$ .

Décomposons-la en la somme de ses parties symétrique et anti-symétrique:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad (4.9)$$

$$w_{ij} = -w_{ji} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) \quad (4.10)$$

de sorte que l'on a:

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{ij} + w_{ij} \quad (4.11)$$

Puisque la déformation est infinitésimale, on peut utiliser le principe de la superposition et affirmer que la matrice  $w_{ij}$  décrit un déplacement rigide infinitésimal de  $V$ .

Assurément les relations (4.3) à (4.8) ne sont plus maintenant valables.

En portant (4.11) en (4.1), on obtient:

$$\delta \tau_i = (\epsilon_{ij} + w_{ij}) \tau_{ij} \quad (4.12)$$

Si la déformation est infinitésimale, on peut négliger les termes quadratiques, ce qui mène (à la place de (4.2) et (4.3)) à l'expression :

$$\delta |\tau|^2 = 2\epsilon_{ij} \tau_i \tau_j \quad (4.13)$$

(compte tenu de  $w_{ij}\tau_i\tau_j = 0$ ). De (4.5) et (4.10) on tire maintenant:

$$p_1 = w_{23} \quad p_2 = w_{31} \quad p_3 = w_{12} \quad (4.14)$$

Par conséquent, les six composants de la partie symétrique de la matrice  $\alpha$  caractérisent les variations de distance et les trois composants de sa partie anti-symétrique, la rotation rigide.

\* Matrice de la déformation

Afin de préciser la signification des grandeurs  $\epsilon$ , déterminons l'allongement relatif d'un vecteur arbitraire  $\tau$ . Nous allons désigner par le vecteur unitaire :

$$m = \tau / |\tau| \quad (4.15)$$

dont les composantes  $m_1, m_2, m_3$  seront les cosinus directeurs de  $\tau$ .

La quantité qui nous intéresse est donc:

$$\epsilon = \delta |\tau| / |\tau| = (|\tau^*|^2 - |\tau|^2) / |\tau| \quad (4.16)$$

Elle peut être positive ou négative. On trouve aisément :

$$|\tau^*|^2 - |\tau|^2 = (|\tau^*| - |\tau|)(|\tau^*| + |\tau|) = \epsilon |\tau| (\epsilon |\tau| + 2|\tau|)$$

ou bien encore, en tenant compte de (4.13) et (4.15):

$$\epsilon_m (1 + \frac{1}{2}\epsilon_m) = \epsilon_{ij} m_i m_j \quad (4.17)$$

où la notation  $\epsilon_m$  indique le fait que l'allongement relatif dépend de  $m$  et non de  $|\tau|$ .

La solution de (4.17) s'écrit:

$$\epsilon_m = -1 + (1 + 2\epsilon_{ij}m_i m_j) \quad \text{avec } n=3 \quad (4.18)$$

où le signe positif correspond à ce que  $|\tau^*|/|\tau| > 0$ .

La matrice symétrique  $E$  de composantes  $\epsilon_{ij}$  s'appelle matrice de la déformation (pure et infinitésimale).

Le premier terme de (4.12) représente donc la contribution de la déformation pure, et le second, celle du déplacement rigide, à la variation des composantes du vecteur  $\tau$ .

#### I.2.2.e Théorie générale de la déformation infinitésimale

##### Equations géométriques

Revenons au cas d'une loi de transformation quelconque:

$$x_i^* = f_i(\mathbf{x}) = x_i + u_i(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

ce qui conduit aux relations:

$$\delta \tau_i = u_{i,j} \tau_j \tau_i^* = (\delta_{ij} + u_{i,j}) \tau_j \quad (5.2)$$

où l'on suppose  $u$  de classe  $C^2$ .

$$\text{En prenant : } \alpha_{ij} = u_{i,j} \quad (5.3)$$

on obtient à l'aide de (4.9)-(4.11) :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.4)$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (5.5)$$

$$u_{i,j} = \epsilon_{ij} + w_{ij} \quad (5.6)$$

Les équations (5.4) et (5.5) forment le système des équations géométriques. C'est un système aux dérivées partielles, linéaire, à coefficients constants, du premier ordre par rapport aux déplacements, et contenant les composantes de la déformation sous forme entière.

Les composantes  $\epsilon_{ij}$  de la déformation forment un tenseur orthogonal du second ordre: le tenseur déformation.

### I.2.3 ETAT DE TENSION DU MILIEU CONTINU-ANALYSE DES FORCES ET DES CONTRAINTES

#### I.2.3.a Forces extérieures

Nous allons maintenant fixer notre attention sur les forces qui sollicitent le corps de l'extérieur et sur celles qui, sous l'effet de cette sollicitation apparaissent en son intérieur.

##### \* Forces volumiques et surfaciques

On appelle force extérieure toute force qui caractérise l'action d'un corps extérieur à  $V$ , sur des points de  $V+S$ . Les forces agissant sur des points d'un sous-domaine  $V'$  inclus dans  $V$  sont appelées forces volumiques. Celles qui agissent sur les points d'un sous-domaine  $S'$  inclus dans  $S$  sont nommées forces surfaciques.

Si  $R$  est la résultante des forces extérieures agissant sur  $V'$

on appelle force volumique en  $x$  appartenant à  $V$  la limite:

$$F(x) = \lim \frac{R(V')}{\text{mes}(V')} , \text{ pour } x \text{ appartenant à } V' \text{ inclus dans } V.$$

avec  $\text{mes}(V')$  étant la mesure de  $V'$  tendant vers zéro.

Soit  $M_r$  le moment résultant des forces extérieures agissant sur  $V'$ . On appelle moment volumique en  $x$  appartenant à  $V$  la limite:

$$M(x) = \lim \frac{M_r(V')}{\text{mes}(V')} , \text{ pour } x \text{ appartenant à } V' \text{ inclus dans } V.$$

avec  $\text{mes}(V')$  tendant vers zéro.

Si pour  $d(V') \rightarrow 0$ , le moment résultant en  $x$  appartenant à  $V$  n'est pas négligeable, on devra faire une théorie asymétrique des milieux continus.

De même on définit les forces surfaciques par la relation:

$$f(x) = \lim \frac{R(S')}{\text{mes}(S')} \text{ pour } x \text{ appartenant à } S' \text{ inclus dans } S .$$

avec  $\text{mes}(S')$  tendant vers zéro.

#### \* Forces concentrées

Les définitions ci-dessus n'ont plus de sens si la résultante  $R$  ne tend pas vers zéro avec le diamètre du domaine considéré. Si cette résultante a une limite qui n'est pas nulle, on dit qu'en  $x$  est appliquée une force concentrée (volumique ou surfacique) égale simplement à la limite de la résultante.

## b°) Forces intérieures

### \* Tensions

Sous l'action des forces extérieures, des forces intérieures agissant entre les particules de  $V$  font leur apparition. Pour les étudier, on fait appel à la méthode des sections imaginaires de Cauchy.

Supposons donc le corps  $V$  en équilibre, et séparons ( par l'imagination) une portion  $V_1$ , et la partie complémentaire  $V_2$ . Désignons par  $S_i$  la partie de  $S$  qui appartient à la frontière de  $V_i$  ( $i=1,2$ ), et par  $S_{12}$  la frontière commune des domaines  $V_1, V_2$ , qu'on suppose avoir un plan tangent, et à deux faces.

Pour que la portion  $V_1$  reste en équilibre après cette séparation il faut que l'action de la partie  $V_2$  ( qui transmet à  $V_1$  l'effet des forces extérieures agissant sur  $V_2$  et sur sa frontière et celui des forces intérieures développées dans  $V_2$ ) soit remplacée par l'action de certaines forces agissant sur  $S_{12}$ .

Celles-ci doivent être choisies de manière que  $V_1$  reste en équilibre, sans aucune modification de sa configuration, sous l'action conjuguée des forces extérieures antérieurement appliquées, et des forces d'interaction entre  $V_1$  et  $V_2$  introduites plus haut. Ces dernières jouent le rôle de forces de cohésion, et les considérer, revient à faire usage de l'hypothèse de la rigidisation.

On définit la notion de tension comme suit:

$$\sigma = \lim \frac{R(S'_{12})}{\text{mes}(S'_{12})} \quad \text{pour } x \text{ appartenant à } S'_{12} \text{ inclus dans } S_{12}.$$

avec  $\text{mes}(S'_{12})$  qui tend vers zéro.

\* Matrice de la tension

On peut définir en chaque point du domaine une matrice  $\Sigma$  de composantes  $\sigma_{ij}$  appelée matrice de tensions. Les  $\sigma_{ii}$  seront les composantes normales et les  $\sigma_{ij}$  seront les composantes tangentielles de la tension.

I.2.3.b Equations statiques de la théorie linéaire

Puisque l'on peut exprimer tout vecteur-tension par l'intermédiaire de certaines composantes standard, les équations d'équilibre pour un domaine arbitraire doivent conduire à des relations entre les forces extérieures et les composantes de la tension.

\* Equations de CAUCHY-Théorie symétrique

Les équations de Cauchy s'obtiennent de la condition d'équilibre statique. Nous nous contenterons de les énumérer sans les démontrer.

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0$$

avec  $i, j=1, 2$ .

La condition d'annulation du moment résultant des forces extérieures permet d'écrire:

$$\sigma_{hk} = \sigma_{kh} \text{ d'où:}$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad i, j=1, 2$$

On montre également que les composantes de la tension forment un tenseur symétrique du second ordre appelé tenseur des tensions.

Les équations ci-dessus représentent les équations statiques et

symétriques de la théorie linéaire. Pour leur démonstration voir [1].

\* Equations de Cauchy-Théorie asymétrique

Dans le cas où le moment volumique des forces extérieures ne s'annule pas, on a:

$$\sigma_{hk} \neq \sigma_{kh} \text{ et } \sigma_{ji,j} + F_i = 0.$$

On fait alors une théorie asymétrique linéaire.

Recherchons les relations entre  $\sigma_{hk}$  et  $\sigma_{kh}$  dans le cas où le moment volumique n'est pas négligeable. Ecrivons la condition d'annulation du moment résultant:

$$\iint_{S'} (x_k \sigma_{nh} - x_h \sigma_{nk}) dS + \iiint_{V'} (x_k F_h - x_h F_k) dV + \iiint_{V'} M dV = 0$$

avec M moment volumique.

Or on a:  $\sigma_{ni} = \sigma_{ji} n_j$  d'où:

$$\iint_{S'} (x_k \sigma_{jh} - x_h \sigma_{jk}) n_j dS + \iiint_{V'} (x_k F_h - x_h F_k + M) dV = 0$$

En faisant usage de la formule d'Ostrogradsky-Gauss, on tire:

$$\iiint_{V'} [x_k (\sigma_{jh,j} + F_h) - x_h (\sigma_{jk,j} + F_k) + \sigma_{kh} - \sigma_{hk} + M] dV = 0$$

Si l'on tient compte de:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0$$

on tire:

$$\sigma_{kh} - \sigma_{hk} + M = 0 \text{ ou encore:}$$

$$\sigma_{kh} = \sigma_{hk} - M$$

Dans ce cas, le tenseur des tensions n'est pas symétrique. Les équations d'équilibre s'écrivent alors:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} - M$$

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0$$

Ce sont les équations statiques et linéaires de la théorie asymétrique.

#### I.2.4 LIAISONS ENTRE LES TENSIONS ET LES DEFORMATIONS

La théorie géométrique et la théorie statique déjà examinées font abstraction des propriétés mécaniques réelles des matériaux.

Dans ces conditions, rien ne peut être précisé sur la manière selon laquelle les forces extérieures provoquent grâce aux propriétés du matériau, certains déplacements et déformations; autrement dit sur la manière dont le corps s'oppose à la sollicitation.

Il faut maintenant préciser le modèle choisi, en établissant la forme de la dépendance entre le champ des déformations et celui des tensions, c'est-à-dire la loi physique.

##### I.2.4.a Loi de Hooke

\* Dans le cas de la théorie symétrique:

Si à des déformations nulles correspondent des tensions nulles, on tire la loi de Hooke généralisée:

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{hk} \epsilon_{hk} \quad i, j, h, k = 1, 2, 3$$

où les  $c_{ij}^{hk}$  sont en général des fonctions du point, du choix des axes, et de la température. Leur dimension est  $FL^{-2}$ .

Apparemment, on a affaire à  $3^6$  coefficients; mais la symétrie de  $E$  et de  $\Sigma$  conduit aux égalités évidentes:

$$c_{ij}^{hk} = c_{ij}^{kh} = c_{ji}^{hk} = c_{ji}^{kh}$$

de sorte que leur nombre se réduit à  $6 \times 6 = 36$ .

En résolvant les relations ci-dessus par rapport aux  $\epsilon_{ij}$ , on obtient:

$$\epsilon_{ij} = C_{ij}^{hk} \sigma_{hk}$$

Les quantités  $c_{ij}^{hk}$  s'appellent coefficients de rigidité élastique tandis que les  $C$  s'appellent coefficients de déformabilité.

Les coefficients de rigidité élastique forment un tenseur: le tenseur de Hooke.

\* Dans le cas de la théorie asymétrique:

On a toujours:

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{hk} \epsilon_{hk} \quad i, j, h, k = 1, 2, 3$$

On peut aussi écrire:

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{kh} \epsilon_{kh}$$

Puisque:  $\epsilon_{kh} = \epsilon_{hk}$  (symétrie du tenseur déformation), on a:

$$c_{ij}^{hk} = c_{ij}^{kh}$$

d'où une réduction du nombre des  $c_{ij}^{hk}$  à  $81 - 27 = 54$ .

De plus on a les relations suivantes entre les coefficients  $c$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} - M \text{ avec } M \text{ moment volumique.}$$

d'où:  $c_{ij}^{hk} \epsilon_{hk} = c_{ji}^{hk} \epsilon_{hk} - M$  ce qui implique:

$$c_{ij}^{hk} = c_{ji}^{hk} - M/\epsilon_{hk}. \text{ Le nombre de coefficients indépendants est}$$

donc réduit à 51.

En résolvant par rapport aux  $\epsilon_{ij}$ , on obtient:

$$\epsilon_{ij} = C_{ij}^{hk} \sigma_{hk}$$

\* Loi de Hooke pour des corps isotropes-Cas de la théorie symétrique

Dans ce cas, la loi de Hooke prend la forme:

$$\sigma_{11} = C_{11}^{11} \epsilon_{11} + C_{11}^{22} \epsilon_{22} + C_{11}^{33} \epsilon_{33},$$

$$\sigma_{22} = C_{22}^{11} \epsilon_{11} + C_{22}^{22} \epsilon_{22} + C_{22}^{33} \epsilon_{33},$$

$$\sigma_{33} = C_{33}^{11} \epsilon_{11} + C_{33}^{22} \epsilon_{22} + C_{33}^{33} \epsilon_{33},$$

$$\sigma_{12} = 2C_{12}^{12} \epsilon_{12},$$

$$\sigma_{23} = 2C_{23}^{23} \epsilon_{23},$$

$$\sigma_{31} = 2C_{31}^{31} \epsilon_{31}.$$

avec :

$$C_{11}^{11} = C_{22}^{22} = C_{33}^{33} = a \quad C_{11}^{22} = C_{22}^{33} = C_{33}^{11} = b$$

$$C_{22}^{11} = C_{33}^{22} = C_{11}^{33} = c$$

$$C_{12}^{12} = C_{23}^{23} = C_{31}^{31} = d$$

et:

$$b = c = \beta, \quad d = \mu, \quad a = \beta + 2\mu. \quad \text{D'où:}$$

$$\sigma_{ij} = \beta \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad \text{avec:}$$

$$\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = u_{j,j} = \text{div}(\mathbf{u}).$$

On a donc finalement:

$$C_{11}^{22} = C_{22}^{11} = C_{22}^{33} = C_{33}^{22} = C_{33}^{11} = C_{11}^{33} = \beta$$

$$C_{11}^{11} = C_{22}^{22} = C_{33}^{33} = \beta + 2\mu$$

$$C_{12}^{12} = C_{23}^{23} = C_{31}^{31} = \mu$$

Les coefficients  $\beta$  et  $\mu$  s'appellent constantes de Lamé;  $\mu$  est aussi appelé constante de Coulomb.

On a aussi la relation:

$$\epsilon_{ij} = - \frac{\beta}{2\mu(3\beta + 2\mu)} (3\beta + 2\mu)\theta\delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}$$

N.B: pour l'établissement des relations ci-dessus voir [1].

\* Loi de Hooke pour des corps isotropes-Cas de la théorie asymétrique

En raisonnant comme dans le cas de la théorie symétrique, on trouve les relations suivantes:

$$\begin{aligned}c_{11}^{11} &= c_{22}^{22} = c_{33}^{33} = a, \\c_{33}^{11} &= c_{11}^{22} = c_{22}^{33} = b, \\c_{11}^{33} &= c_{33}^{22} = c_{22}^{11} = c, \\c_{12}^{12} &= c_{31}^{31} = c_{23}^{23} = d, \quad c_{21}^{21} = c_{13}^{13} = c_{32}^{32} = e.\end{aligned}$$

La loi de Hooke s'écrit alors:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= a\epsilon_{11} + b\epsilon_{22} + c\epsilon_{33} \\ \sigma_{22} &= c\epsilon_{11} + a\epsilon_{22} + b\epsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= b\epsilon_{11} + c\epsilon_{22} + a\epsilon_{33} \\ \sigma_{12} &= 2d\epsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2d\epsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2d\epsilon_{31} \\ \sigma_{21} &= 2e\epsilon_{12} = 2d\epsilon_{12} - M \\ \sigma_{32} &= 2e\epsilon_{23} = 2d\epsilon_{23} - M \\ \sigma_{13} &= 2e\epsilon_{13} = 2d\epsilon_{31} - M\end{aligned}$$

On a également:

$b = c = \beta$  ,  $d = \mu$  ,  $a = \beta + 2\mu$  d'où l'on tire:

$$\sigma_{11} = \beta\theta + 2\mu\epsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \beta\theta + 2\mu\epsilon_{22}, \quad \sigma_{33} = \beta\theta + 2\mu\epsilon_{33},$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2\mu\epsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2\mu\epsilon_{31},$$

$$\sigma_{21} = 2\mu\epsilon_{12} - M, \quad \sigma_{32} = 2\mu\epsilon_{23} - M, \quad \sigma_{13} = 2\mu\epsilon_{31} - M.$$

C'est la loi de Hooke pour des corps isotropes dans le cas de la théorie asymétrique.

### I.2.5 SYSTEME COMPLET DES EQUATIONS DE L'ELASTO DYNAMIQUE

#### LINEAIRE POUR DES CORPS ISOTROPES

##### I.2.5.a Equations de l'élasto-dynamique linéaire

En négligeant tout déplacement éventuel du corps dans son ensemble, et en considérant de petits mouvements des particules autour d'une position d'équilibre, on obtient les équations élasto-dynamiques linéaires.

##### \* Cas de la théorie symétrique

Jusqu'à présent le comportement du corps élastique a été examiné de trois points de vue différents, ce qui nous a conduit à considérer trois composantes du déplacement, six composantes de la déformation, et six composantes de la tension.

Ces fonctions sont liées par six équations géométriques, trois équations élastiques et six équations physiques ce qui fait quinze équations à quinze inconnues.

Ces équations sont:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ( u_{i,j} + u_{j,i} )$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i - p \frac{\delta^2 u_i}{\delta t^2} = 0$$

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{hk} \epsilon_{hk}$$

ou encore:

$$\epsilon_{ij} = C_{ij}^{hk} \sigma_{nk}$$

Ce système s'appelle système complet d'équations de la théorie de l'élasto-dynamique symétrique.

On peut à l'aide des liaisons entre les tensions et les déformations, construire des équations en termes de déplacements dites équations dynamiques de Lamé. Ces équations s'écrivent comme suit:

$$\mu u_{i,kk} + (\beta + \mu) u_{k,ki} - p \frac{\delta^2 u_i}{\delta t^2} + F_i = 0$$

$$\text{avec } \beta = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E module d'élasticité.

\nu coefficient de Poisson.

\beta et \mu constantes de Lamé.

#### \* Cas de la théorie asymétrique

Dans ce cas, on peut écrire les équations de l'élasticité sous la forme:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = p \frac{\delta^2 u_i}{\delta t^2}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} - M$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\epsilon_{ij} = C_{ij}^{hk} \sigma_{hk}$$

On a 9 composantes de la tension, 3 composantes du déplacement, et 6 composantes de la déformation soient 18 inconnues.

On dispose de 6 équations élastiques, 6 équations géométriques et 6 équations physiques, soient 18 équations. Le système est donc résoluble.

Afin de clarifier les idées nous écrivons ci-dessous entièrement les équations sus-mentionnées:

Equations élasto-dynamiques:

$$\frac{\delta \sigma_{11}}{\delta x_1} + \frac{\delta \sigma_{21}}{\delta x_2} + \frac{\delta \sigma_{31}}{\delta x_3} + F_1 = \rho \frac{\delta^2 u_1}{\delta t^2}$$

$$\frac{\delta \sigma_{12}}{\delta x_1} + \frac{\delta \sigma_{22}}{\delta x_2} + \frac{\delta \sigma_{32}}{\delta x_3} + F_2 = \rho \frac{\delta^2 u_2}{\delta t^2}$$

$$\frac{\delta \sigma_{13}}{\delta x_1} + \frac{\delta \sigma_{23}}{\delta x_2} + \frac{\delta \sigma_{33}}{\delta x_3} + F_3 = \rho \frac{\delta^2 u_3}{\delta t^2}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} - M$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} - M$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} - M$$

Equations géométriques:

$$\epsilon_{11} = \frac{\delta u_1}{\delta x_1}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\delta u_2}{\delta x_2}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\delta u_3}{\delta x_3}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \frac{\delta u_2}{\delta x_1} \right)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u_1}{\delta x_3} + \frac{\delta u_3}{\delta x_1} \right)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u_2}{\delta x_3} + \frac{\delta u_3}{\delta x_2} \right)$$

Equations physiques

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{hk} \epsilon_{hk}$$

$$\sigma_{11} = \beta\theta + 2\mu\epsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \beta\theta + 2\mu\epsilon_{22}, \quad \sigma_{33} = \beta\theta + 2\mu\epsilon_{33},$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2\mu\epsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2\mu\epsilon_{31},$$

On aurait aussi pu écrire le système de façon à avoir 3 équations élasto-dynamiques, 6 équations géométriques et 9 équations physiques; en éliminant des équations élastiques les relations entre les  $\sigma_{ij}$  et les  $\sigma_{ji}$ , et en ajoutant aux équations physiques les relations ci-après:

$$\sigma_{21} = 2\mu\epsilon_{12} - M, \quad \sigma_{32} = 2\mu\epsilon_{23} - M, \quad \sigma_{13} = 2\mu\epsilon_{31} - M.$$

On peut également obtenir des équations en termes de déplacements uniquement comme dans le cas de la théorie symétrique.

\* Equations de Lamé pour des corps homogènes et isotropes.

Cas de la théorie asymétrique.

On sait que:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} - M \text{ et } \sigma_{ji,j} + F_i = 0$$

d'où:

$$\sigma_{ij,j} + F_i - M_{,j} = 0$$

Or :

$$\sigma_{ij} = \beta\theta + 2\mu\epsilon_{ij}$$

par conséquent:

$$(\beta + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + F_i - M_{,j} = 0$$

En tenant compte de:

$(\beta + \mu)/\mu = (1 - 2\nu)^{-1}$ , (avec  $\nu$  coefficient de Poisson) le système ci-dessus s'écrit:

$$u_{i,jj} + (1 - 2\nu)^{-1}u_{j,ji} + \mu^{-1}F_i - \mu^{-1}M_{,j} = 0.$$

Sous forme développée, les équations de Lamé pour des corps homogènes et isotropes s'écrivent:

$$\left[ \frac{\delta^2 u_1}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 u_1}{\delta x_2^2} + \frac{\delta^2 u_1}{\delta x_3^2} \right]$$

$$+(1-2\nu)^{-1} \left[ \frac{\delta^2 u_1}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 u_2}{\delta x_1 \delta x_2^2} + \frac{\delta^2 u_3}{\delta x_1 \delta x_3^2} \right] + \mu^{-1} F_1 - \mu^{-1} \frac{\delta M}{\delta x_2}$$

$$= \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_1}{\delta t^2}$$

$$\left[ \frac{\delta^2 u_2}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 u_2}{\delta x_2^2} + \frac{\delta^2 u_2}{\delta x_3^2} \right]$$

$$+(1-2\nu)^{-1} \left[ \frac{\delta^2 u_1}{\delta x_1 \delta x_2} + \frac{\delta^2 u_2}{\delta x_2^2} + \frac{\delta^2 u_3}{\delta x_2 \delta x_3} \right] + \mu^{-1} F_2 - \mu^{-1} \frac{\delta M}{\delta x_3}$$

$$= \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_2}{\delta t^2}$$

$$\left[ \frac{\delta^2 u_3}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 u_3}{\delta x_2^2} + \frac{\delta^2 u_3}{\delta x_3^2} \right]$$

$$+(1-2\nu)^{-1} \left[ \frac{\delta^2 u_1}{\delta x_1 \delta x_3} + \frac{\delta^2 u_2}{\delta x_2 \delta x_3} + \frac{\delta^2 u_3}{\delta x_3^2} \right] + \mu^{-1} F_3 - \mu^{-1} \frac{\delta M}{\delta x_1}$$

$$= \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_3}{\delta t^2}$$

Ce système de trois équations à trois inconnues joint aux équations géométriques et aux équations physiques permet de déterminer les déplacements, les tensions et les déformations.

Pour l'étude des systèmes obtenus aussi bien dans le cadre de la théorie symétrique que dans celui de la théorie asymétrique, on dispose de deux voies:

\* Méthode directe

On connaît la configuration du corps, les coefficients élastiques du matériau, et les actions extérieures. On demande de

déterminer l'état élastique du corps.

Dans le cadre de notre étude, c'est ce problème que nous aurons à étudier.

\* Méthode inverse

On connaît l'état élastique du corps, sa configuration, ses coefficients élastiques. On demande de déterminer l'action extérieure et la configuration.

I.2.5.b Régularité des solutions

La structure même des équations de l'élasticité nous oblige à chercher des solutions  $u$  bicontinûment dérivables sur le domaine  $V$ , afin d'assurer la continuité des forces volumiques. Mieux, pour que les conditions aux limites aient un sens, il faut que les composantes  $\sigma_{ij}$  et  $u_i$  puissent être prolongées par continuité sur  $S$ . On cherchera donc les  $u_i$  tels que:

$$u_i \in C^1(V) \cap C^0(V+S).$$

### I.3 EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN CORPS RIGIDE DANS UN REFERENTIEL PLAN FIXE

Soit un solide plan dans un référentiel fixe. Ce solide possède une vitesse angulaire  $\Omega(t)$  et une vitesse linéaire  $V(t)$ . Il s'agit d'établir les équations du mouvement pour un tel corps. On se servira à cet effet du formalisme lagrangien qui a été exposé en annexe.

Sa masse est supposée constante et égale à  $m$ . Son moment d'inertie principal est égal à  $I$ .

L'énergie cinétique du solide est égal à la somme de son énergie cinétique de translation et à celle de rotation autour de son centre de gravité.

Soit:

$$T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$$

Equations de Lagrange pour un corps rigide :

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \dot{q}'_j} - \frac{\delta T}{\delta q_j} = 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

La connaissance de  $x, y, \Omega$  suffit pleinement pour déterminer la position du corps à tout instant. Nous les prendrons donc comme coordonnées généralisées de notre système.

D'où les équations suivantes:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \dot{x}'} - \frac{\delta T}{\delta x} = 0.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta y'} - \frac{\delta T}{\delta y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \Omega'} - \frac{\delta T}{\delta \Omega} = 0$$

$$V^2 = x'^2 + y'^2 \quad \Omega = \dot{\phi}'$$

$$T = \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2} I\dot{\phi}'^2$$

$$\frac{\delta T}{\delta x'} = mx'' \quad \frac{\delta T}{\delta y'} = my''$$

$$\frac{\delta T}{\delta \dot{\phi}'} = I\dot{\phi}''$$

$$\frac{\delta T}{\delta x} = \frac{\delta T}{\delta y} = \frac{\delta T}{\delta \phi} = 0$$

d'où:

$$\frac{d}{dt} (mx'') = 0 \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = Fx$$

$$\frac{d}{dt} (my'') = 0 \Rightarrow m \frac{d^2 y}{dt^2} = Fy$$

$$\frac{d}{dt} (I\dot{\phi}'') = 0 \Rightarrow I \frac{d^2 \phi}{dt^2} = M\phi$$

Equations du mouvement d'un corps rigide plan dans un référentiel galiléen.

## CHAPITRE II

### EQUATIONS DE LA CINETO-ELASTO-DYNAMIQUE POUR UN MECANISME PLAN

Afin d'établir les équations de la cinéto-élasto-dynamique d'un mécanisme plan, nous adopterons le schéma suivant:

- on établit les équations cinétiques ou équations du mouvement d'une membrure considérée comme un élément de poutre rigide à l'aide des résultats de l'étude du formalisme lagrangien.

- on effectue l'assemblage des membrures en tenant compte de la loi de l'action et de la réaction. On obtient alors les équations cinétiques d'un mécanisme plan à quatre membrures supposées rigides.

- on établit les équations élasto-dynamiques d'une membrure considérée comme un élément de poutre élastique.

- on effectue l'assemblage des membrures en tenant compte de la compatibilité des déformations et des déplacements aux noeuds afin d'obtenir les équations élasto-dynamiques d'un mécanisme plan.

Les équations cinéto-élasto-dynamiques résultent de la prise en considération de la force d'inertie (calculée à l'aide des équations cinétiques) comme force volumique dans les équations élasto-dynamiques.

L'aspect vibratoire ou dynamique est tenu en compte dans les équations élasto-dynamiques par la considération de petits mouvements autour de la position d'équilibre.

## II.1 DYNAMIQUE D'UNE MEMBRURE RIGIDE

### II.1.1 Etablissement des équations différentielles du mouvement d'une membrure rigide dans un référentiel plan fixe.

Hypothèses de base: - la membrure est assimilée à un élément de poutre rectangulaire rigide.

- le système formé par la membrure est holonome et soumis à des forces conservatives (voir annexe pour la définition de ces termes).

#### II.1.1.a Réduction d'un système de forces appliquées à une membrure à un système équipollent aux noeuds-Torseur équivalent.

Soit un système de forces:

$F_{xa}, F_{xb}, \dots, F_{xn}, F_{ya}, F_{yb}, \dots, F_{yn}, mg$  (poids) agissant sur la membrure.

Soient  $d_{ya}, d_{yb}, \dots, d_{yn}$ , les distances séparant respectivement les forces  $F_{xa}, F_{xb}, \dots, F_{xn}$  de G.

Soient  $d_{xa}, d_{xb}, \dots, d_{xn}$  les distances séparant respectivement les forces  $F_{ya}, F_{yb}, \dots, F_{yn}$  de G.

Avec G centre de gravité de la poutre.

Réduisons ces forces au système  $F_x^c, F_y^c, M^c$  appliqué au centre de gravité.

On a les équations suivantes:

$$\sum_{i=a}^n Fx_i = Fx^c$$

$$\sum_{i=a}^n Fy_i - mg = Fy^c$$

$$\sum_{i=a}^n Fx_i dy_i + \sum_{i=a}^n Fy_i dx_i = M^o$$

Ces équations permettent la réduction du système  $Fa, \dots, Fn$  au torseur  $[Fx^o, Fy^o, M^o]$  appliqué au centre de gravité.

II.1.1.b ) Equations du mouvement d'une membrure rigide dans un référentiel plan fixe.

Soit un système d'axes fixes  $Oxy$ .

Coordonnées du noeud 1  $(x_1, y_1)$ .

Coordonnées du noeud 2  $(x_2, y_2)$ .

Coordonnées du centre de gravité G  $(x', y')$ .

$Fx_1, Fy_1$  forces agissant au noeud 1.

$Fx_2, Fy_2$  forces agissant au noeud 2.

$Fx^o, Fy^o$  résultante des forces extérieures appliquées au centre de gravité.

$M^o$  moment des forces extérieures au centre de gravité.

On part des équations du mouvement:

$$\Sigma Fx = m \frac{d^2 x'}{dt^2}$$

$$\Sigma Fy = m \frac{d^2 y'}{dt^2}$$

$$\Sigma Mg = I \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

On obtient alors les équations suivantes:

$$1. \quad Fx_1 + Fx_2 + Fx^o = m \frac{d^2 x'}{dt^2}$$

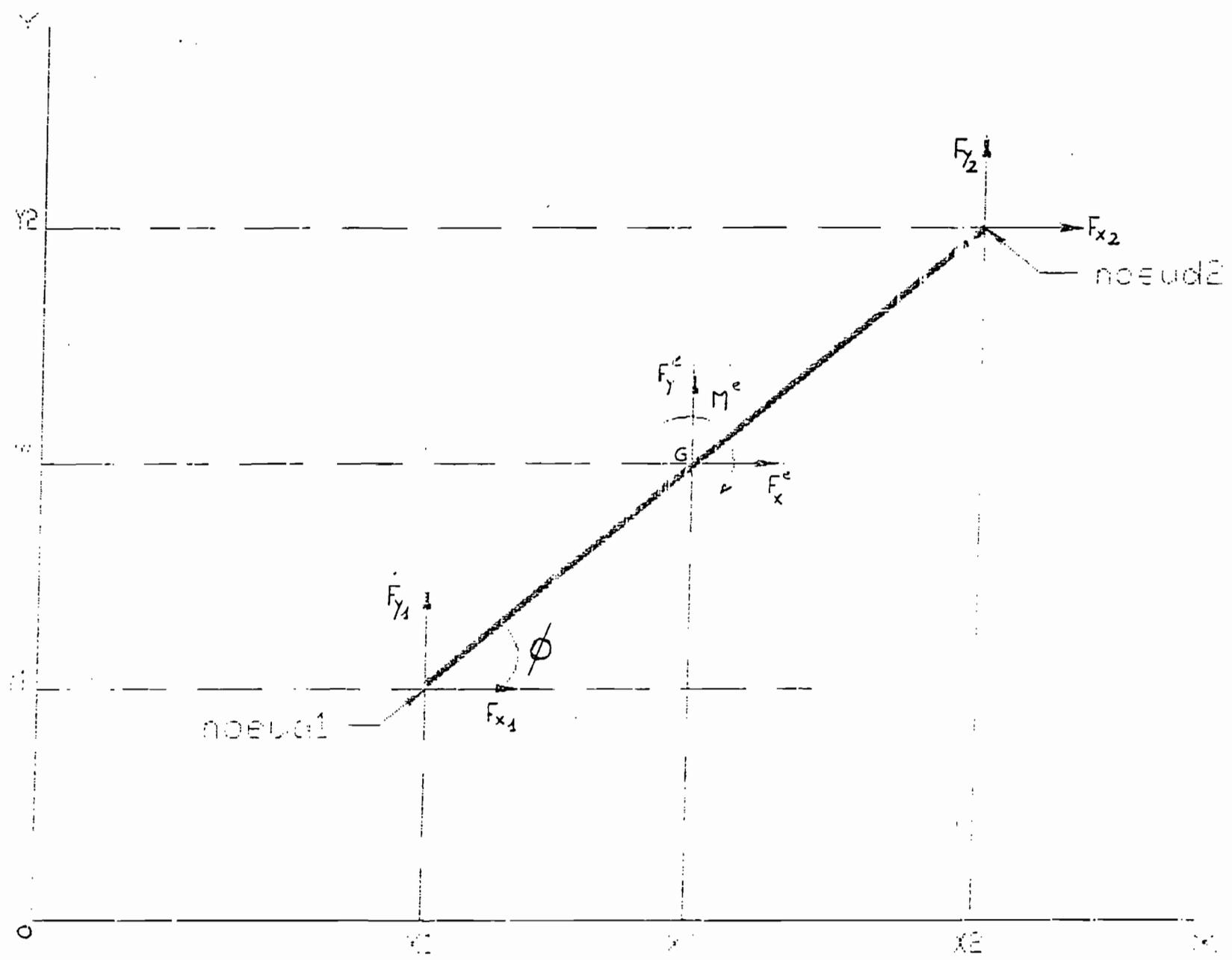


FIGURE E Force system on a membrane

$$2. \quad F_{Y_1} + F_{Y_2} + F_{X^2} = m \frac{d^2 y'}{dt^2}$$

$$3. \quad F_{X_2}(Y_2 - Y') - F_{X_1}(Y' - Y_1) - F_{Y_2}(x_2 - x') + F_{Y_1}(x' - x_1) + M^e = I \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$$4. \quad \text{Tg}(\phi) = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1}$$

$$5. \quad (x_2 - x')^2 + (y_2 - y')^2 = \frac{l^2}{4}$$

$$6. \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

On a six (6) équations à onze (11) inconnues qui sont:

$F_{X_1}, F_{Y_1}, F_{X_2}, F_{Y_2}, x'(t), y'(t), \phi(t), x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t)$ .

\* Equations de la membrure 1:

On connaît la vitesse angulaire  $\Omega_1(t)$  ainsi que la longueur  $l_1$  de la membrure.

Masse de la membrure 1:  $m_1$

Moment d'inertie de la membrure 1:  $I_1$

Coordonnées du centre de gravité de la membrure 1:  $x^o, y^o$ .

Coordonnées du noeud 0:  $x_o=0=y_o$ : on suppose l'origine du repère au noeud 0.

Coordonnées du noeud 1:  $x_1, y_1$ .

Soient  $F_{X^{21}}$  et  $F_{Y^{21}}$  les composantes de la force exercée par la membrure 2 sur la membrure 1. Ces forces s'exercent au noeud 1.

Soient  $F_{X^{01}}$  et  $F_{Y^{01}}$  les composantes de la force exercée par la membrure fixe 0 sur la membrure 1. Ces forces s'exercent au noeud 0.

Soient  $F_{X^{e1}}$  et  $F_{Y^{e1}}$  les composantes de la résultante des forces extérieures réduites au centre de gravité et s'appliquant à la

membrure 1.

Soit  $M^{e1}$  le moment résultant des forces extérieures réduites au centre de gravité et s'appliquant à la membrure 1.

On a donc en supposant  $\Omega_1$  comme une constante et en considérant les forces aux noeuds 0 et 1 et au centre de gravité:

$$\Omega_1 = \frac{d\phi_1}{dt} \implies \phi_1 = \Omega_1 t + C \quad \text{avec } C = \text{constante.}$$

$$1. \quad Fx^{21} + Fx^{01} + Fx^{e1} = m_1 \frac{d^2 x^o}{dt^2}$$

$$2. \quad Fy^{21} + Fy^{01} + Fy^{e1} = m_1 \frac{d^2 y^o}{dt^2}$$

$$3. \quad Fx^{21}(Y_1 - Y^o) - Fx^{01}(Y^o - Y_0) + Fy^{01}(x^o - x_0) - Fy^{21}(x_1 - x^o) + M^{e1} = 0$$

$$4. \quad \text{Tg}(\phi_1) = \frac{Y^o}{x^o} = \frac{Y_1}{x_1}$$

$$5. \quad x^{o2} + y^{o2} = \frac{(l_1)^2}{4}$$

$$6. \quad x_1^2 + y_1^2 = (l_1)^2$$

De l'équation 4 on tire:

$$y^o = x^o \text{Tg}(\phi_1) \quad \text{et} \quad y_1 = x_1 \text{Tg}(\phi_1)$$

De l'équation 5 on tire:

$$x^{o2} (1 + \text{Tg}^2(\phi_1)) = \frac{(l_1)^2}{4} \implies x^o(t) = \frac{l_1}{2[1 + \text{Tg}^2(\phi_1(t))]^{1/2}}$$

$$\implies y^o(t) = \frac{l_1 \text{Tg}(\phi_1(t))}{2[1 + \text{Tg}^2(\phi_1(t))]^{1/2}}$$

De l'équation 6 on tire:

$$x_1'(1 + Tg^2(\phi_1)) = (l_1)' \implies x_1(t) = \frac{l_1}{[1 + Tg^2(\phi_1(t))]^{1/2}}$$

$$\implies y_1(t) = \frac{l_1 Tg(\phi_1(t))}{[1 + Tg^2(\phi_1(t))]^{1/2}}$$

D'où  $x^\circ, y^\circ, x_1, y_1, \phi_1(t)$  connus.

On se retrouve alors avec les équations suivantes:

(si on tient compte du fait que:  $x_0 = y_0 = 0$ )

$$1. Fx^{21} + Fx^{01} + Fx^{e1} = m_1 \frac{d^2 x^\circ}{dt^2}$$

$$2. Fy^{21} + Fy^{01} + Fy^{e1} = m_1 \frac{d^2 y^\circ}{dt^2}$$

$$3. Fx^{21}(y_1 - y^\circ) - Fx^{01}(y^\circ) + Fy^{01}(x^\circ) - Fy^{21}(x_1 - x^\circ) + M^{e1} = 0$$

Trois(3) équations à quatre(4) inconnues:

$$Fx^{01}, Fy^{01}, Fx^{21}, Fy^{21}$$

\* Pour la membrure 2:

On connaît  $x_1(t)$  et  $y_1(t)$ .

Soient  $Fx^{12}, Fy^{12}$  les composantes de la force exercée par la membrure 1 sur la membrure 2 et appliquée au noeud 1.

Soient  $Fx^{e2}, Fy^{e2}$  les composantes de la résultante des forces extérieures appliquées à la membrure 2 et réduites au centre de gravité de la membrure 2.

Soient  $Fx^{32}, Fy^{32}$  les composantes de la force exercée par la membrure 3 sur la membrure 2 et appliquée au noeud 2.

Soit  $M^{e2}$  le moment réduit.

Les forces s'appliquant au noeud 1 de la membrure 2 sont:

$$Fx^{12}, Fy^{12}.$$

Forces s'appliquant au noeud 2 de la membrure 2:

$$F_x^{32}, F_y^{32}.$$

Forces s'appliquant au centre de gravité de la membrure 2:

$$F_x^{e2}, F_y^{e2}, M^{e2}.$$

On a les relations suivantes:

$$4. F_x^{12} = -F_x^{21}$$

$$5. F_y^{12} = -F_y^{21}$$

La membrure a une vitesse angulaire  $\Omega_2(t) = d^2\phi_2/dt^2$  et une longueur  $l_2$ .

Coordonnées du centre de gravité  $G^{oo}$ :  $x^{oo}, y^{oo}$ .

Coordonnées du noeud 1:  $x_1, y_1$ .

Coordonnées du noeud 2:  $x_2, y_2$ .

Masse de la membrure 2:  $m_2$ .

Moment d'inertie de la membrure 2:  $I_2$ .

Les équations du mouvement s'écrivent comme suit:

$$6. F_x^{12} + F_x^{32} + F_x^{e2} = m_2 \frac{d^2 x^{oo}}{dt^2}$$

$$7. F_y^{12} + F_y^{32} + F_y^{e2} = m_2 \frac{d^2 y^{oo}}{dt^2}$$

$$8. F_x^{32}(y_2 - y^{oo}) - F_x^{12}(y^{oo} - y_1) - F_y^{32}(x_2 - x^{oo}) + F_y^{12}(x^{oo} - x_1) + M^{e2} = I_2 \frac{d^2 \phi_2}{dt^2}$$

$$9. \text{Tg}(\phi_2(t)) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$10. (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (l_2)^2$$

$$11. (x^{00} - x_1)^2 + (y^{00} - y_1)^2 = (l_2)^2 / 4$$

\* Pour la membrure 3:

Coordonnées du centre de gravité de la membrure 3:  $x^{00}, y^{00}$ .

Coordonnées du noeud 2:  $x_2, y_2$ .

Coordonnées du noeud 3:  $x_3, y_3 = 0$ . Le noeud 3 est fixe.

Forces s'appliquant au noeud 2:  $Fx^{23}, Fy^{23}$ .

Forces s'appliquant au noeud 3:  $Fx^{03}, Fy^{03}$ .

Forces s'appliquant au centre de gravité:  $Fx^{e3}, Fy^{e3}$ .

Soient  $Fx^{23}, Fy^{23}$  les composantes de la force exercée par la membrure 2 sur la membrure 3 et appliquée au noeud 2.

Soient  $Fx^{03}, Fy^{03}$  les composantes de la force exercée par la membrure fixe 0 sur la membrure 3.

Soient  $Fx^{e3}, Fy^{e3}$  les composantes de la résultante des forces extérieures réduites et appliquées à la membrure 3.

Soit  $M^{e3}$  le moment résultant réduit des forces extérieures appliquées à la membrure 3.

On a les relations suivantes:

$$12. Fx^{23} = -Fx^{32}$$

$$13. Fy^{23} = -Fy^{32}$$

Vitesse angulaire de la membrure 3:  $\Omega_3(t) = d\phi_3/dt$ .

Masse de la membrure 3:  $m_3$ .

Moment d'inertie de la membrure 3:  $I_3$ .

Longueur de la membrure 3:  $l_3$ .

Equations du mouvement de la membrure 3:

$$14. Fx^{23} + Fx^{03} + Fx^{e3} = m_3 \frac{d^2 x^{ooo}}{dt^2}$$

$$15. Fy^{23} + Fy^{03} + Fy^{e3} = m_3 \frac{d^2 y^{ooo}}{dt^2}$$

$$16. Fx^{23}(y_2) - Fx^{03}(-y_3) + Fy^{23}(x^{ooo} - x_2) - Fy^{03}(x_3 - x^{ooo}) + M^{o3} = I_3 \frac{d^2 \phi_3}{dt^2}$$

$$17. (x_2 - x_3)^2 + y_2^2 = (l_3)^2$$

$$18. \text{Tg}(\phi_3) = \frac{y_2}{x_2 - x_3}$$

$$19. (x^{ooo} - x_3)^2 + y^{ooo}^2 = \frac{(l_3)^2}{4}$$

$$20. y^{ooo} = x^{ooo} \text{Tg}(\phi_3)$$

## II.2 ASSEMBLAGE DES MEMBRURES-DYNAMIQUE D'UN MECANISME PLAN

### RIGIDE

Le système d'équations (1)-(20) est appelé système d'équations de la dynamique d'un mécanisme plan rigide. Il s'agit d'un système de vingt équations à vingt inconnues qui sont:

$$Fx^{01}, Fy^{01}, Fx^{21}, Fy^{21}, Fx^{12}, Fy^{12}, Fx^{32}, Fy^{32}, Fx^{23}, Fy^{23}, Fx^{03}, Fy^{03}, x^{oo}(t), y^{oo}(t), x^{ooo}(t), y^{ooo}(t), x^2(t), y^2(t), \phi_3(t), \phi_2(t).$$

Ce système est donc résoluble.

On considère connu le système de forces appliquées à chaque membrure ainsi que la longueur de la membrure fixe. De même sont

supposées connues les valeurs initiales des différentes fonctions du temps.

N.B: sens positif des moments = sens des aiguilles d'une montre.

### II.2.1 Détermination des accélérations et des vitesses.

Une fois déterminées les forces aux noeuds ainsi que les autres inconnues, les accélérations et les vitesses se déduisent aisément par simple dérivation.

#### \* Vitesse et accélération angulaires de la membrure 1

Soient  $\Omega_1$  et  $\alpha_1$  les vitesse angulaire et accélération angulaire de la membrure 1. Par hypothèse on a  $\Omega_1$  connu et  $\alpha_1 = 0$ .

#### \* Vitesse et accélération angulaires de la membrure 2

Soient  $\Omega_2$  et  $\alpha_2$  les vitesse angulaire et accélération angulaire de la membrure 2. On a :

$$\Omega_2(t) = d\phi_2(t)/dt \text{ et } \alpha_2(t) = d^2\phi_2(t)/dt^2.$$

#### \* Vitesse et accélération angulaires de la membrure 3

Soient  $\Omega_3$  et  $\alpha_3$  les vitesse angulaire et accélération angulaire de la membrure 3. On a :

$$\Omega_3(t) = d\phi_3(t)/dt \text{ et } \alpha_3(t) = d^2\phi_3(t)/dt^2.$$

#### \* Vitesse et accélération du noeud 0

Soient  $V_0$  et  $a_0$  les vitesse et accélération du noeud 0.

Le noeud 0 appartenant à la membrure fixe, on a :

$$V_0 = a_0 = 0$$

\* Vitesse et accélération du centre de gravité de la membrure 1

Soient  $V^\circ$  et  $a^\circ$  les vitesse et accélération du centre de gravité de la membrure 1. On a :

$$V^\circ_x(t) = \frac{dx^\circ(t)}{dt} \quad V^\circ_y(t) = \frac{dy^\circ(t)}{dt}$$

$$a^\circ_x(t) = \frac{d^2x^\circ(t)}{dt^2} \quad a^\circ_y(t) = \frac{d^2y^\circ(t)}{dt^2}$$

$$V^\circ(t) = [(V^\circ_x)^2 + (V^\circ_y)^2]^{1/2}$$

$$a^\circ(t) = [(a^\circ_x)^2 + (a^\circ_y)^2]^{1/2}$$

La connaissance des grandeurs  $V^\circ, V^\circ_x, V^\circ_y, a^\circ, a^\circ_x, a^\circ_y$  permet de caractériser entièrement la cinématique du centre de gravité de la membrure 1.

\* Vitesse et accélération linéaires du noeud 1

Soient  $V_1$  et  $a_1$  les vitesse et accélération du noeud 1. On a :

$$V_{1,x}(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \quad V_{1,y}(t) = \frac{dy_1(t)}{dt}$$

$$a_{1,x}(t) = \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} \quad a_{1,y}(t) = \frac{d^2y_1(t)}{dt^2}$$

$$V_1(t) = [(V_{1,x})^2 + (V_{1,y})^2]^{1/2}$$

$$a_1(t) = [(a_{1,x})^2 + (a_{1,y})^2]^{1/2}$$

\* Vitesse et accélération linéaires du centre de gravité de la membrure 2

Soient  $V^{\circ\circ}$  et  $a^{\circ\circ}$  les vitesse et accélération du centre de gravité de la membrure 2. On a :

$$V^{\circ\circ}x(t) = \frac{dx^{\circ\circ}(t)}{dt} \quad V^{\circ\circ}y(t) = \frac{dy^{\circ\circ}(t)}{dt}$$

$$a^{\circ\circ}x(t) = \frac{d^2x^{\circ\circ}(t)}{dt^2} \quad a^{\circ\circ}y(t) = \frac{d^2y^{\circ\circ}(t)}{dt^2}$$

$$V^{\circ\circ}(t) = [(V^{\circ\circ}x)^2 + (V^{\circ\circ}y)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$a^{\circ\circ}(t) = [(a^{\circ\circ}x)^2 + (a^{\circ\circ}y)^2]^{\frac{1}{2}}$$

\* Vitesse et accélération linéaires du noeud 2

Soient  $V_2$  et  $a_2$  les vitesse et accélération du noeud 2. On a:

$$V_2x(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} \quad V_2y(t) = \frac{dy_2(t)}{dt}$$

$$a_2x(t) = \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} \quad a_2y(t) = \frac{d^2y_2(t)}{dt^2}$$

$$V_2(t) = [(V_2x)^2 + (V_2y)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_2(t) = [(a_2x)^2 + (a_2y)^2]^{\frac{1}{2}}$$

\* Vitesse et accélération linéaires du centre de gravité de la membrure 3.

Soient  $V^{\circ\circ\circ}(t)$  et  $a^{\circ\circ\circ}(t)$  les vitesse et accélération du centre de gravité de la membrure 3. On a:

$$V^{\circ\circ\circ}x(t) = \frac{dx^{\circ\circ\circ}(t)}{dt} \quad V^{\circ\circ\circ}y(t) = \frac{dy^{\circ\circ\circ}(t)}{dt}$$

$$a^{\circ\circ\circ}x(t) = \frac{d^2x^{\circ\circ\circ}(t)}{dt^2} \quad a^{\circ\circ\circ}y(t) = \frac{d^2y^{\circ\circ\circ}(t)}{dt^2}$$

$$V^{\circ\circ\circ}(t) = [(V^{\circ\circ\circ}x)^2 + (V^{\circ\circ\circ}y)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$a^{\circ\circ\circ}(t) = [(a^{\circ\circ\circ}x)^2 + (a^{\circ\circ\circ}y)^2]^{\frac{1}{2}}$$

\* Vitesse et accélération linéaires du noeud 3

Le noeud 3 appartenant à la membrure fixe, ses vitesse et accélération sont nulles. Soit donc:

$$V_3 = a_3 = 0$$

II.2.2 Détermination des forces d'inertie

\* Force d'inertie de la membrure 1

Soit  $F_{i1}$  la force d'inertie qui s'exerce sur la membrure 1. Elle vaut:

$$F_{i1} = [ (F_{X_{i1}})^2 + (F_{Y_{i1}})^2 ]^{1/2}$$

avec :

$$F_{X_{i1}} = m^1 a^{\circ} x = F_{X^{21}} + F_{X^{01}} + F_{X^{e1}}$$

$$F_{Y_{i1}} = m^1 a^{\circ} y = F_{Y^{21}} + F_{Y^{01}} + F_{Y^{e1}}$$

\* Force d'inertie de la membrure 2

Soit  $F_{i2}$  la force d'inertie s'exerçant sur la membrure 2:

$$F_{i2} = [ (F_{X_{i2}})^2 + (F_{Y_{i2}})^2 ]^{1/2}$$

avec:

$$F_{X_{i2}} = m^{(2)} a^{\circ} x = F_{X^{12}} + F_{X^{32}} + F_{X^{e2}}$$

$$F_{Y_{i2}} = m^{(2)} a^{\circ} y = F_{Y^{12}} + F_{Y^{32}} + F_{Y^{e2}}$$

\* Force d'inertie de la membrure 3

Soit  $F_{i3}$  la force d'inertie s'exercant sur la membrure 3:

$$F_{i3} = [ (F_{X_{i3}})^2 + (F_{Y_{i3}})^2 ]^{1/2}$$

avec:

$$F_{X_{i3}} = m^{(3)} a^{\circ \circ \circ} X = F_{X^{23}} + F_{X^{03}} + F_{X^{e3}}$$

$$F_{Y_{i3}} = m^{(3)} a^{\circ \circ \circ} Y = F_{Y^{23}} + F_{Y^{03}} + F_{Y^{e3}}$$

### II.3 EQUATIONS ELASTIQUES D'UNE MEMBRURE

Soit une poutre rectangulaire dans le référentiel fixe Oxy.  
Cette poutre est soumise aux forces :

$F_{x_1}, F_{y_1}$  au noeud 1

$F_{x_2}, F_{y_2}$  au noeud 2

$F_{x_e}, F_{y_e}$  au centre de gravité

$M_e$  moment au centre de gravité

et possède une accélération angulaire  $\alpha$  et une accélération linéaire  $a$ .

La résultante des forces extérieures appliquées à la poutre est égale à la force d'inertie. On est en présence de moment volumique représenté par le moment au centre de gravité. Afin d'établir les équations élasto-dynamiques de la poutre, nous devons donc faire appel à la théorie asymétrique. De plus, on considère que l'on a un état plan de contraintes et de déformations.

Les équations élasto-dynamique de Lamé de la poutre s'écrivent sous ces conditions:

Equations de Lamé

$$\frac{\delta^2 u_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u_x}{\delta y^2} + (1-2\nu)^{-1} \left[ \frac{\delta^2 u_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u_y}{\delta x \delta y} \right] + \mu^{-1} f_x - \mu^{-1} \frac{\delta m}{\delta y} = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_x}{\delta t^2}$$

$$= \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_x}{\delta t^2}$$

$$\frac{\delta^2 u_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u_y}{\delta y^2} + (1-2\nu) \left[ \frac{\delta^2 u_x}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 u_y}{\delta y^2} \right] + \mu^{-1} f_y = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_y}{\delta t^2}$$

où  $f_x$  et  $f_y$  sont les composantes volumiques de la force d'inertie et  $m$  celle du moment  $M$ .

La force d'inertie suivant  $x$  vaut:

$$F_{x_0} = m \frac{d^2 x_G}{dt^2} \quad \text{avec } x_G \text{ abscisse du centre de gravité.}$$

Or on peut écrire:

$$x_G \int_V p dV = \int_V x p dV$$

$$F_{x_0} = \frac{d^2}{dt^2} x_G \int_V p dV = \frac{d^2}{dt^2} \int_V x p dV = \int_V p \frac{d^2 x}{dt^2} dV$$

$$\text{d'où } f_x = p \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\text{De même on a: } f_y = p \frac{d^2 y}{dt^2}$$

On sait que:  $M = I\alpha$  avec  $I$  moment d'inertie.

$$m = p(x^2 + y^2)\alpha \longrightarrow \frac{\delta m}{\delta y} = 2py\alpha$$

d'où la forme suivante des équations de Lamé:

$$\frac{\delta^2 u_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u_x}{\delta y^2} + (1-2\nu)^{-1} \left[ \frac{\delta^2 u_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u_y}{\delta x \delta y} \right] + \mu^{-1} p \left( \frac{d^2 x}{dt^2} - 2y\alpha \right) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_x}{\delta t^2}$$

$$\frac{\delta^2 u_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u_y}{\delta y^2} + (1-2\nu)^{-1} \left[ \frac{\delta^2 u_x}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 u_y}{\delta y^2} \right] + \mu^{-1} p \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_y}{\delta t^2}$$

Dans ces équations, apparaissent les termes  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  et  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  qui

représentent l'accélération linéaire d'un élément de volume dont le centre de gravité a pour coordonnées  $x$  et  $y$ .

Les équations dynamiques de Lamé font apparaître des termes de dérivées partielles par aux variables spatiales  $x$  et  $y$  et à la variable temporelle  $t$ . Or,  $x$  et  $y$  sont des fonctions du temps. Il est donc nécessaire de réécrire ces équations en fonction de variables spatiales indépendantes du temps. Cela peut se faire en réécrivant les équations de Lamé dans un référentiel lié à la membrure, d'origine le noeud 1 et dont l'axe des abscisses est confondu avec l'axe de symétrie de la membrure.

#### \* Formules de transformation des coordonnées

Soient  $a$ ,  $b$  les coordonnées d'un point dans le référentiel lié à la membrure noeud 1-a-b; soient  $x, y$  les coordonnées de ce même point dans le référentiel fixe.

On a les relations suivantes:

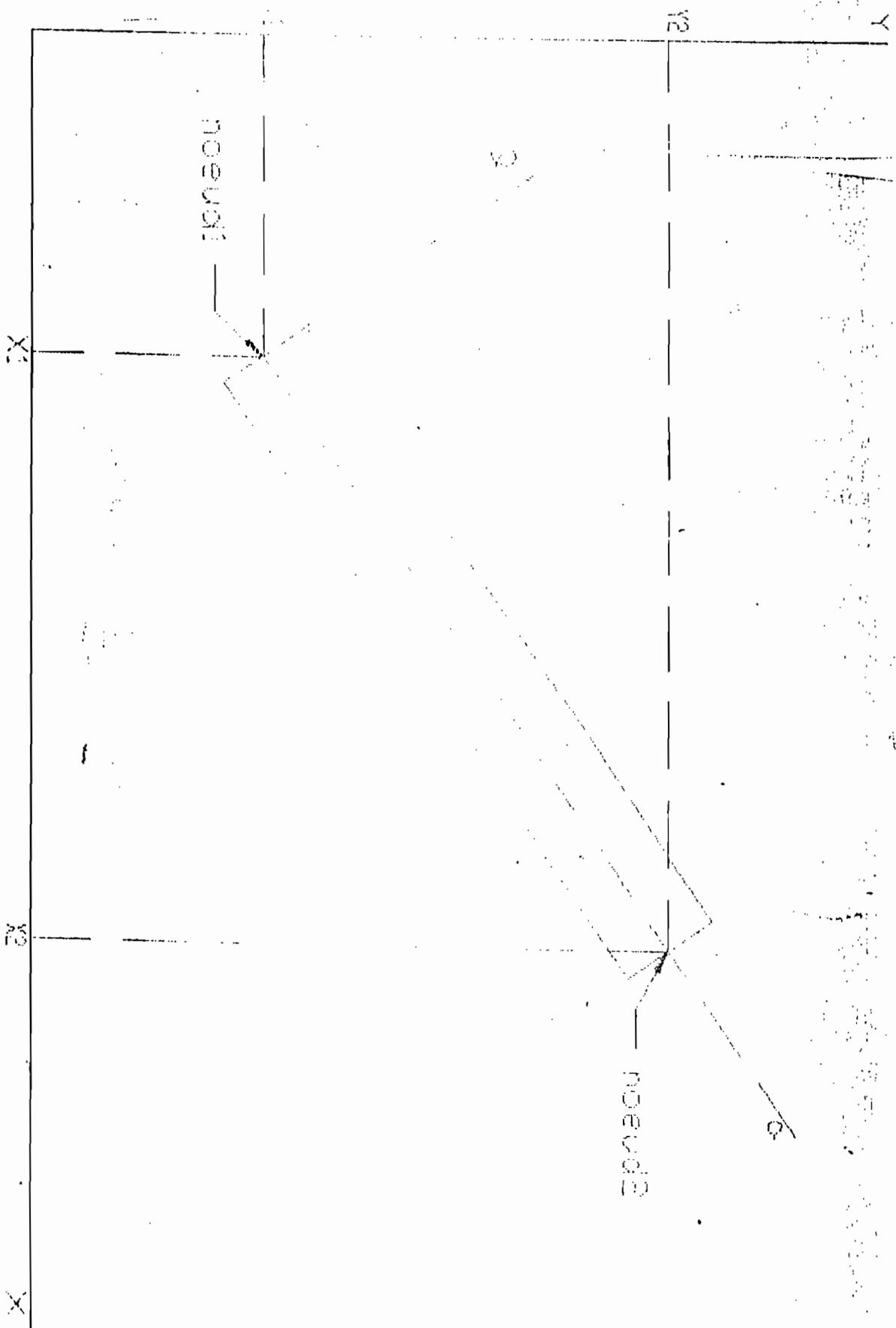


FIGURE 3: referentielis pour une membrane

$$a = \frac{x_2 - x_1}{l} (x - x_1) + \frac{Y_2 - Y_1}{l} (Y - Y_1)$$

$$b = \frac{Y_1 - Y_2}{l} (x - x_1) + \frac{x_2 - x_1}{l} (Y - Y_1)$$

$$x = \frac{x_2 - x_1}{l} a + \frac{Y_1 - Y_2}{l} b + x_1$$

$$Y = \frac{Y_2 - Y_1}{l} a + \frac{x_2 - x_1}{l} b + Y_1$$

où  $x_1, Y_1$  sont les coordonnées du noeud 1 dans le référentiel oxy et l la longueur de la membrure.

\* Formules de transformation des dérivées premières

On a :

$$\frac{\delta}{\delta x} = \frac{\delta a}{\delta x} \frac{\delta}{\delta a} + \frac{\delta b}{\delta x} \frac{\delta}{\delta b}$$

$$\frac{\delta}{\delta Y} = \frac{\delta a}{\delta Y} \frac{\delta}{\delta a} + \frac{\delta b}{\delta Y} \frac{\delta}{\delta b}$$

$$\frac{\delta}{\delta x} = \frac{x_2 - x_1}{l} \frac{\delta}{\delta a} + \frac{Y_1 - Y_2}{l} \frac{\delta}{\delta b}$$

$$\frac{\delta}{\delta Y} = \frac{Y_2 - Y_1}{l} \frac{\delta}{\delta a} + \frac{x_2 - x_1}{l} \frac{\delta}{\delta b}$$

\* Formules de transformation des dérivées secondes

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2} = \left(\frac{x_2-x_1}{l}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta a^2} + 2 \frac{(x_2-x_1)(Y_1-Y_2)}{l^2} \frac{\delta^2}{\delta a \delta b} + \left(\frac{Y_1-Y_2}{l}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta b^2}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta y^2} = \left(\frac{Y_2-Y_1}{l}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta a^2} + 2 \frac{(Y_2-Y_1)(x_2-x_1)}{l^2} \frac{\delta^2}{\delta a \delta b} + \left(\frac{x_2-x_1}{l}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta b^2} + \left(\frac{x_2-x_1}{l}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta b^2}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta x \delta y} = \frac{(x_2-x_1)(Y_2-Y_1)}{l^2} \frac{\delta^2}{\delta a^2} + \frac{(x_2-x_1)^2 - (Y_2-Y_1)^2}{l^2} \frac{\delta^2}{\delta a \delta b} + \frac{(x_2-x_1)(Y_1-Y_2)}{l^2} \frac{\delta^2}{\delta b^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{a_{x2}-a_{x1}}{l} a + \frac{a_{y1}-a_{y2}}{l} b + a_{x1}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{a_{y2}-a_{y1}}{l} a + \frac{a_{x2}-a_{x1}}{l} b + a_{y1}$$

où  $a_{xi}$  et  $a_{yi}$  représentent les composantes dans le référentiel oxy de l'accélération linéaire du noeud i.

A partir de ces formules de transformation on peut écrire les équations de Lamé comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x}{\delta a^2} + \left[ \left( \frac{y_1 - y_2}{l} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x}{\delta b^2} \\
& + (1 - 2\nu)^{-1} \left[ 2 \frac{(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)}{l^2} \frac{\delta^2 u_x}{\delta a \delta b} + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{l^2} \frac{\delta^2 u_y}{\delta a^2} \right. \\
& \left. + \frac{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}{l^2} \frac{\delta^2 u_y}{\delta a \delta b} + \frac{(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)}{l^2} \frac{\delta^2 u_y}{\delta b^2} \right] + f(a, b, t) \\
& = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_x}{\delta t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y}{\delta a^2} + \left[ \left( \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y}{\delta b^2} \\
& + (1 - 2\nu)^{-1} \left[ 2 \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{l^2} \frac{\delta^2 u_y}{\delta a \delta b} + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{l^2} \frac{\delta^2 u_x}{\delta a^2} \right. \\
& \left. + \frac{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}{l^2} \frac{\delta^2 u_x}{\delta a \delta b} + \frac{(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)}{l^2} \frac{\delta^2 u_x}{\delta b^2} \right] + g(a, b, t) \\
& = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_y}{\delta t^2}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
f(a, b, t) = & \mu^{-1} p \left[ \left( \frac{a_{x2} - a_{x1}}{l} - 2 \frac{y_2 - y_1}{l} \alpha \right) a + \left( \frac{a_{y1} - a_{y2}}{l} - 2 \frac{x_2 - x_1}{l} \alpha \right) b + \right. \\
& \left. + (a_{x1} - 2y_1 \alpha) \right]
\end{aligned}$$

$$g(a, b, t) = \mu^{-1} p \left( \frac{a_{y2} - a_{y1}}{l} a + \frac{a_{x2} - a_{x1}}{l} b + a_{y1} \right)$$

Les autres équations élastiques s'écrivent :

## Equations géométriques

$$\epsilon_{xx} = \frac{\delta u_x}{\delta x} = \frac{x_2 - x_1}{1} \frac{\delta u_x}{\delta a} + \frac{y_1 - y_2}{1} \frac{\delta u_x}{\delta b}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\delta u_y}{\delta y} = \frac{y_2 - y_1}{1} \frac{\delta u_y}{\delta a} + \frac{x_2 - x_1}{1} \frac{\delta u_y}{\delta b}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u_x}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x_2 - x_1}{1} \left( \frac{\delta u_y}{\delta a} + \frac{\delta u_x}{\delta b} \right) + \frac{y_2 - y_1}{1} \left( \frac{\delta u_x}{\delta a} - \frac{\delta u_y}{\delta b} \right) \right] \end{aligned}$$

## Equations physiques

$$\sigma_{xx} = \beta \left( \frac{\delta u_x}{\delta x} + \frac{\delta u_y}{\delta y} \right) + 2\mu \frac{\delta u_x}{\delta x}$$

$$= (\beta + 2\mu) \left[ \frac{x_2 - x_1}{1} \frac{\delta u_x}{\delta a} + \frac{y_1 - y_2}{1} \frac{\delta u_x}{\delta b} \right]$$

$$+ \beta \left[ \frac{y_2 - y_1}{1} \frac{\delta u_y}{\delta a} + \frac{x_2 - x_1}{1} \frac{\delta u_y}{\delta b} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \beta \left( \frac{\delta u_x}{\delta x} + \frac{\delta u_y}{\delta y} \right) + 2\mu \frac{\delta u_y}{\delta y}$$

$$= (\beta + 2\mu) \left[ \frac{y_2 - y_1}{1} \frac{\delta u_y}{\delta a} + \frac{x_2 - x_1}{1} \frac{\delta u_y}{\delta b} \right]$$

$$+ \beta \left[ \frac{x_2 - x_1}{1} \frac{\delta u_x}{\delta a} + \frac{y_1 - y_2}{1} \frac{\delta u_x}{\delta b} \right]$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left( \frac{\delta u_x}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta x} \right)$$

$$= \mu \left[ \frac{x_2 - x_1}{1} \left( \frac{\delta u_y}{\delta a} + \frac{\delta u_x}{\delta b} \right) + \frac{y_2 - y_1}{1} \left( \frac{\delta u_x}{\delta a} - \frac{\delta u_y}{\delta b} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yx} &= \mu \left( \frac{\delta u_x}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta x} \right) - p(x^2 + y^2) \alpha \\ &= \mu \left[ \frac{x_2 - x_1}{1} \left( \frac{\delta u_y}{\delta a} + \frac{\delta u_x}{\delta b} \right) + \frac{y_2 - y_1}{1} \left( \frac{\delta u_x}{\delta a} - \frac{\delta u_y}{\delta b} \right) \right] \\ &- p \alpha \left( \left[ \frac{x_2 - x_1}{1} a + \frac{y_1 - y_2}{1} b + x_1 \right]^2 + \left[ \frac{y_2 - y_1}{1} a + \frac{x_2 - x_1}{1} b + y_1 \right]^2 \right) \end{aligned}$$

\* Quelques commentaires sur les équations obtenues

- Type des équations de Lamé

Les équations de Lamé sont des équations aux dérivées partielles linéaires et non-stationnaires.

- Les dérivées spatiales intervenant dans les équations elasto-dynamiques sont prises par rapport aux composantes spatiales de la membrure considérée comme rigide. La force d'inertie est la force s'exerçant sur le corps considéré comme rigide. Ce faisant, on néglige la contribution des déformations et des déplacements dans la force d'inertie.

- Les équations ci-dessus permettent de trouver les déformations, les déplacements et les tensions en fonction de  $a$ ,  $b$ , et du temps. Pour retrouver ces paramètres dans le référentiel fixe, il suffit d'utiliser les formules de transformation.

-  $f(a, b, t)$  et  $g(a, b, t)$  représentent la contribution des accélérations linéaire et angulaire dans la configuration de la membrure. Ils représentent donc l'aspect cinétique de la configuration.

Les termes  $\frac{\delta^2 u_i}{\delta t^2}$  ( $i=x, y$ ) représentent les vibrations que subit

la membrure au cours du mouvement; ils représentent donc l'aspect dynamique de la configuration.

Quant aux autres termes des équations de Lamé, ils représentent l'aspect élastique de la configuration: c'est la cinéto-élasto-dynamique.

## II.2, ASSEMBLAGE DES MEMBRURES: cinéto-élasto-dynamique d'un mécanisme plan

### II.2.1 Analyse cinéto-élasto-dynamique d'une membrure

Les équations cinéto-élasto-dynamiques d'une membrure sont composées de:

- les équations de la dynamique rigide.
- les équations de l'élasto-dynamique.
- les conditions initiales, et aux limites.

### II.2.2 Analyse cinéto-élasto-dynamique d'un mécanisme plan

Les équations de la C.E.D d'un mécanisme plan sont composées:

- de vingt (20) équations de la dynamique rigide d'un mécanisme plan avec vingt (20) inconnues.
- de vingt-sept (27) équations de l'élasticité avec vingt-sept inconnues.

#### \* Equations cinéto-élasto-dynamiques de la membrure 1.

- Equations cinétiques

Voir le chapitre sur la dynamique des corps rigides, page 35.

- Equations élasto-dynamiques

Noeud 0:  $x_0=y_0=0$ .

Noeud 1:  $x_1, y_1$ .

Longueur de la membrure:  $l_1$ .

Vitesse angulaire de la membrure constante d'où accélération angulaire  $\alpha=0$ .

Les déplacements, les déformations et les tensions sont notées avec l'exposant 1 indiquant la membrure 1.

$0a_1, b_1$  est le référentiel lié à la membrure 1.

Equations de Lamé

$$1. \left[ \left( \frac{x_1}{l_1} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta a_1^2} + \left[ \left( \frac{y_1}{l_1} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta b_1^2} \\ + (1-2\nu)^{-1} \left[ -2 \frac{x_1 y_1}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta a_1 \delta b_1} + \frac{x_1 y_1}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta a_1^2} + \frac{x_1^2 - y_1^2}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta a_1 \delta b_1} \right. \\ \left. - \frac{x_1 y_1}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta b_1^2} \right] + f_1(a_1, b_1, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta t^2}$$

$$2. \left[ \left( \frac{y_1}{l_1} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta a_1^2} + \left[ \left( \frac{x_1}{l_1} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta b_1^2} \\ + (1-2\nu)^{-1} \left[ 2 \frac{x_1 y_1}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta a_1 \delta b_1} + \frac{x_1 y_1}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta a_1^2} + \frac{x_1^2 - y_1^2}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta a_1 \delta b_1} \right. \\ \left. - \frac{x_1 y_1}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta b_1^2} \right] + g_1(a_1, b_1, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta t^2}$$

avec:

$$f_1(a_1, b_1, t) = \mu^{-1} p \left( \frac{a_{x1}}{l_1} a - \frac{a_{y1}}{l_1} b \right)$$

$$g_1(a_1, b_1, t) = \mu^{-1} p \left( \frac{a_{y1}}{l_1} a + \frac{a_{x1}}{l_1} b \right)$$



Equations géométriques

$$3. \epsilon_{xx}^1 = \frac{x_1}{l_1} \frac{\delta u_x^1}{\delta a_1} - \frac{y_1}{l_1} \frac{\delta u_x^1}{\delta b_1}$$

$$4. \epsilon_{yy}^1 = \frac{y_1}{l_1} \frac{\delta u_y^1}{\delta a_1} + \frac{x_1}{l_1} \frac{\delta u_y^1}{\delta b_1}$$

$$5. \epsilon_{xy}^1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_1}{l_1} \left( \frac{\delta u_y^1}{\delta a_1} + \frac{\delta u_x^1}{\delta b_1} \right) + \frac{y_1}{l_1} \left( \frac{\delta u_x^1}{\delta a_1} - \frac{\delta u_y^1}{\delta b_1} \right) \right]$$

Equations physiques

$$6. \sigma_{xx}^1 = (\beta + 2\mu) \epsilon_{xx}^1 + \beta \epsilon_{yy}^1$$

$$7. \sigma_{yy}^1 = (\beta + 2\mu) \epsilon_{yy}^1 + \beta \epsilon_{xx}^1$$

$$8. \sigma_{xy}^1 = 2\mu \epsilon_{xy}^1$$

$$9. \sigma_{yx}^1 = 2\mu \epsilon_{xy}^1 = \sigma_{xy}^1$$

\* Equations cineto-élasto-dynamiques de la membrure 2

- Equations cinétiques

Voir chapitre sur la dynamique des corps rigides.

- Equations élasto-dynamiques

Equations de Lamé

$$10. \left[ \left( \frac{x_2 - x_1}{l_2} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x^2}{\delta a_2^2} + \left[ \left( \frac{y_1 - y_2}{l_2} \right)^2 (1 + 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x^2}{\delta b_2^2}$$

$$+ (1 - 2\nu)^{-1} \left[ 2 \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{l_2^2} \frac{\delta^2 u_x^2}{\delta a_2 \delta b_2} + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{l_2^2} \frac{\delta^2 u_y^2}{\delta a_2^2} \right.$$

$$\left. + \frac{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}{l_2^2} \frac{\delta^2 u_y^2}{\delta a_2 \delta b_2} + \frac{(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)}{l_2^2} \frac{\delta^2 u_y^2}{\delta b^2} \right]$$

$$+ f_2(a_2, b_2, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_x^2}{\delta t^2}$$

$$\begin{aligned}
11. & \left[ \left( \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y^2}{\delta a_2^2} + \left[ \left( \frac{x_2 - x_1}{l_2} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y^2}{\delta b_2^2} \\
& + (1 - 2\nu)^{-1} \left[ 2 \frac{(x_2 - x_1)(Y_2 - Y_1)}{l_2^2} \frac{\delta^2 u_y^2}{\delta a_2 \delta b_2} + \frac{(x_2 - x_1)(Y_2 - Y_1)}{l_2^2} \frac{\delta^2 u_x^2}{\delta a_2^2} \right. \\
& \left. + \frac{(x_2 - x_1)^2 - (Y_2 - Y_1)^2}{l_2^2} \frac{\delta^2 u_x^2}{\delta a_2 \delta b_2} + \frac{(x_2 - x_1)(Y_1 - Y_2)}{l_2^2} \frac{\delta^2 u_x^2}{\delta b^2} \right] \\
& + g_2(a_2, b_2, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_y^2}{\delta t^2}
\end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}
f_2(a_2, b_2, t) = & \mu^{-1} p \left[ \left( \frac{a_{x_2} - a_{x_1}}{l_2} - 2 \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} \alpha_2 \right) a + (a_{x_1} - 2Y_1 \alpha_2) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{a_{y_1} - a_{y_2}}{l_2} - 2 \frac{x_2 - x_1}{l_2} \alpha_2 \right) b \right]
\end{aligned}$$

$$g_2(a_2, b_2, t) = \mu^{-1} p \left[ \frac{a_{y_2} - a_{y_1}}{l_2} a + \frac{a_{x_2} - a_{x_1}}{l_2} b + a_{y_1} \right]$$

Equations géométriques

$$12. \epsilon_{xx}^2 = \frac{x_2 - x_1}{l_2} \frac{\delta u_x^2}{\delta a_2} + \frac{Y_1 - Y_2}{l_2} \frac{\delta u_x^2}{\delta b_2}$$

$$13. \epsilon_{yy}^2 = \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} \frac{\delta u_y^2}{\delta a_2} + \frac{x_2 - x_1}{l_2} \frac{\delta u_y^2}{\delta b_2}$$

$$14. \epsilon_{xy}^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_2 - x_1}{l_2} \left( \frac{\delta u_y^2}{\delta a_2} + \frac{\delta u_x^2}{\delta b_2} \right) + \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} \left( \frac{\delta u_x^2}{\delta a_2} - \frac{\delta u_y^2}{\delta b_2} \right) \right]$$

Equations physiques

$$15. \sigma_{xx}^2 = (B + 2\mu) \epsilon_{xx}^2 + B \epsilon_{yy}^2$$

$$16. \sigma_{yy}^2 = (B + 2\mu) \epsilon_{yy}^2 + B \epsilon_{xx}^2$$

$$17. \sigma_{xy}^2 = 2\mu \epsilon_{xy}^2$$

$$18. \sigma_{yx}^2 = \sigma_{xy}^2 - p\alpha_2 \left( \left[ \frac{x_2 - x_1}{l_2} a + \frac{Y_1 - Y_2}{l_2} b + x_1 \right]^2 + \left[ \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} a + \frac{x_2 - x_1}{l_2} b + Y_1 \right]^2 \right)$$

\* Equations cinéto-élasto-dynamiques de la membrure 3

- Equations cinétiques

Voir chapitre traitant de la dynamique des corps rigides.

- Equations élasto-dynamiques

Equations de Lamé

$$19. \left[ \left( \frac{x_2 - x_3}{l_3} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta a_3^2} + \left[ \left( \frac{Y_2}{l_3} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta b_3^2}$$

$$+ (1-2\nu)^{-1} \left[ -2 \frac{(x_2 - x_3) Y_2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta a_3 \delta b_3} + \frac{(x_2 - x_3) Y_2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_y^3}{\delta a_3^2} \right.$$

$$\left. + \frac{(x_2 - x_3)^2 - Y_2^2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta a_3 \delta b_3} - \frac{(x_2 - x_3) Y_2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_y^3}{\delta b_3^2} \right]$$

$$+ f_3(a_3, b_3, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta t^2}$$

$$20. \left[ \left( \frac{Y_2}{l_3} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y^3}{\delta a_3^2} + \left[ \left( \frac{x_2 - x_3}{l_3} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y^3}{\delta b_3^2}$$

$$+ (1-2\nu)^{-1} \left[ 2 \frac{(x_2 - x_3) Y_2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_y^3}{\delta a_3 \delta b_3} + \frac{(x_2 - x_3) Y_2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta a_3^2} \right.$$

$$\left. + \frac{(x_2 - x_3)^2 - Y_2^2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta a_3 \delta b_3} - \frac{(x_2 - x_3) Y_2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta b_3^2} \right]$$

$$+ g_3(a_3, b_3, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_y^3}{\delta t^2}$$

avec:

$$f_3(a_3, b_3, t) = \mu^{-1} p \left[ \left( -\frac{a_{x1}}{l_3} - 2\frac{Y_2}{l_3} \alpha_3 \right) a - \left( \frac{a_{y2}}{l_3} + 2\frac{x_2-x_3}{l_3} \alpha_3 \right) b \right]$$

$$g_3(a_3, b_3, t) = \mu^{-1} p \left[ -\frac{a_{y2}}{l_3} a + \frac{a_{x2}}{l_3} b \right]$$

### Equations géométriques

$$21. \epsilon_{xx}^3 = \frac{x_2-x_3}{l_3} \frac{\delta u_x^3}{\delta a_3} - \frac{Y_2}{l_3} \frac{\delta u_x^3}{\delta b_3}$$

$$22. \epsilon_{yy}^3 = \frac{Y_2}{l_3} \frac{\delta u_y^3}{\delta a_3} + \frac{x_2-x_3}{l_3} \frac{\delta u_y^3}{\delta b_3}$$

$$23. \epsilon_{xy}^3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_2-x_3}{l_3} \left( \frac{\delta u_y^3}{\delta a_3} + \frac{\delta u_x^3}{\delta b_3} \right) + \frac{Y_2}{l_3} \left( \frac{\delta u_x^3}{\delta a_3} - \frac{\delta u_y^3}{\delta b_3} \right) \right]$$

### Equations physiques

$$24. \sigma_{xx}^3 = (\beta + 2\mu) \epsilon_{xx}^3 + \beta \epsilon_{yy}^3$$

$$25. \sigma_{yy}^3 = (\beta + 2\mu) \epsilon_{yy}^3 + \beta \epsilon_{xx}^3$$

$$26. \sigma_{xy}^3 = 2\mu \epsilon_{xy}^3$$

$$27. \sigma_{yx}^3 = \sigma_{xy}^3 - p\alpha_3 \left( \left[ -\frac{x_2-x_3}{l_3} a_3 - \frac{Y_2}{l_3} b_3 + x_3 \right]^2 + \left[ -\frac{Y_2}{l_3} a_3 + \frac{x_2-x_3}{l_3} b_3 \right]^2 \right)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites et les conditions initiales, pour des raisons de commodité nous les écrirons seulement dans le cas des équations simplifiées.

## II.5 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES-EQUATIONS SIMPLIFIEES DE LA

### C.E.D D'UN MECANISME PLAN

Dans l'hypothèse que toutes les dérivées par rapport à  $b$  ainsi que tous les paramètres proportionnels à  $b$  sont nuls, on obtient les équations simplifiées de la C.E.D. Cette hypothèse se justifie lorsque la largeur de la poutre est très petite devant sa longueur. Elle signifie que la poutre est assimilée à un élément linéaire.

Sous ces hypothèses, les équations cinéto-élasto-dynamiques d'un mécanisme plan s'écrivent:

\* Membrure 1

- Equations cinétiques

Voir chapitre Dynamique des corps rigides

- Equations élasto-dynamiques

Equations de Lamé

$$1. \left[ \left( \frac{x_1}{l_1} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta a_1^2} + (1-2\nu)^{-1} \frac{x_1 y_1}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta a_1^2} + \mu^{-1} p \frac{a_{x1}}{l_1} a = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta t^2}$$

$$2. \left[ \left( \frac{y_1}{l_1} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta a_1^2} + (1-2\nu)^{-1} \frac{x_1 y_1}{l_1^2} \frac{\delta^2 u_x^1}{\delta a_1^2} + \mu^{-1} p \frac{a_{y1}}{l_1} a = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_y^1}{\delta t^2}$$

Equations géométriques

$$3. \epsilon^1_{xx} = \frac{x_1}{l_1} \frac{\delta u^1_x}{\delta a_1}$$

$$4. \epsilon^1_{yy} = \frac{y_1}{l_1} \frac{\delta u^1_y}{\delta a_1}$$

$$5. \epsilon^1_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_1}{l_1} \frac{\delta u^1_y}{\delta a_1} + \frac{y_1}{l_1} \frac{\delta u^1_x}{\delta a_1} \right]$$

Equations physiques

$$6. \sigma^1_{xx} = (\beta + 2\mu) \epsilon^1_{xx} + \beta \epsilon^1_{yy}$$

$$7. \sigma^1_{yy} = (\beta + 2\mu) \epsilon^1_{yy} + \beta \epsilon^1_{xx}$$

$$8. \sigma^1_{xy} = 2\mu \epsilon^1_{xy}$$

$$9. \sigma^1_{yx} = 2\mu \epsilon^1_{xy} = \sigma^1_{xy}$$

\* Membrane 2

- Equations cinétiques

Voir dynamique des corps rigides

- Equations élasto-dynamiques

Equations de Lamé

$$10. \left[ \left( \frac{x_2 - x_1}{l_2} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u^2_x}{\delta a_2^2} + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{l_2^2} \frac{\delta^2 u^2_y}{\delta a_2^2} \\ + f_2(a_2, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u^2_x}{\delta a_2^2}$$

$$11. \left[ \left( \frac{y_2 - y_1}{l_2} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u^2_y}{\delta a_2^2} + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{l_2^2} \frac{\delta^2 u^2_x}{\delta a_2^2} \\ + g_2(a_2, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u^2_y}{\delta a_2^2}$$

avec :

$$f_2(a_2, t) = \mu^{-1} p \left[ \left( \frac{a_{x_2} - a_{x_1}}{l_2} - 2 \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} \alpha_2 \right) a + (a_{x_1} - 2Y_1 \alpha_2) \right]$$

$$g_2(a_2, t) = \mu^{-1} p \left[ -\frac{a_{y_2} - a_{y_1}}{l_2} + a_{y_1} \right]$$

Equations géométriques

$$12. \epsilon_{xx}^2 = \frac{x_2 - x_1}{l_2} \frac{\delta u_x^2}{\delta a_2}$$

$$13. \epsilon_{yy}^2 = \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} \frac{\delta u_y^2}{\delta a_2}$$

$$14. \epsilon_{xy}^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_2 - x_1}{l_2} \frac{\delta u_y^2}{\delta a_2} + \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} \frac{\delta u_x^2}{\delta a_2} \right]$$

Equations physiques

$$15. \sigma_{xx}^2 = (\beta + 2\mu) \epsilon_{xx}^2 + \beta \epsilon_{yy}^2$$

$$16. \sigma_{yy}^2 = (\beta + 2\mu) \epsilon_{yy}^2 + \beta \epsilon_{xx}^2$$

$$17. \sigma_{xy}^2 = 2\mu \epsilon_{xy}^2$$

$$18. \sigma_{yx}^2 = \sigma_{xy}^2 - p \alpha_2 \left( \left[ \frac{x_2 - x_1}{l_2} a + x_1 \right]^2 + \left[ \frac{Y_2 - Y_1}{l_2} a + Y_1 \right]^2 \right)$$

\* Equations cinéto-élasto-dynamiques de la membrure 3

- Equations cinétiques

Voir chapitre traitant de la dynamique des corps rigides

- Equations élasto-dynamiques

Equations de Lamé

$$19. \left[ \left( \frac{x_2 - x_3}{l_3} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta a_3^2} + (1-2\nu)^{-1} \frac{(x_2 - x_3) \gamma_2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_y^3}{\delta a_3^2} \\ + f_3(a_3, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta t^2}$$

$$20. \left[ \left( \frac{\gamma_2}{l_3} \right)^2 (1-2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y^3}{\delta a_3^2} + (1-2\nu)^{-1} \frac{(x_2 - x_3) \gamma_2}{l_3^2} \frac{\delta^2 u_x^3}{\delta a_3^2} \\ + g_3(a_3, t) = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 u_y^3}{\delta t^2}$$

avec:

$$f_3(a_3, t) = \mu^{-1} p \left( \frac{a_{y1}}{l_3} - 2 \frac{\gamma_2}{l_3} \alpha_3 \right) a$$

$$g_3(a_3, b_3, t) = \mu^{-1} p \frac{a_{y2}}{l_3} a$$

Equations géométriques

$$21. \epsilon_{xx}^3 = \frac{x_2 - x_3}{l_3} \frac{\delta u_x^3}{\delta a_3}$$

$$22. \epsilon_{yy}^3 = \frac{\gamma_2}{l_3} \frac{\delta u_y^3}{\delta a_3}$$

$$23. \epsilon_{xy}^3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_2 - x_3}{l_3} \frac{\delta u_y^3}{\delta a_3} + \frac{\gamma_2}{l_3} \frac{\delta u_x^3}{\delta a_3} \right]$$

Equations physiques

$$24. \sigma_{xx}^3 = (\beta + 2\mu) \epsilon_{xx}^3 + \beta \epsilon_{yy}^3$$

$$25. \sigma_{yy}^3 = (\beta + 2\mu) \epsilon_{yy}^3 + \beta \epsilon_{xx}^3$$

$$26. \sigma_{xy}^3 = 2\mu \epsilon_{xy}^3$$

$$27. \sigma_{yx}^3 = \sigma_{xy}^3 - p \alpha_3 \left\{ \left[ \frac{x_2 - x_3}{l_3} a_3 + x_3 \right]^2 + \left[ \frac{y_2}{l_3} a_3 \right]^2 \right\}$$

\* Conditions aux limites

- Déformation du noeud 0 membrure 1 = 0

$$\epsilon_{xx}^1(\text{noeud } 0) = \frac{x_1}{l_1} \frac{\delta u_x^1}{\delta a_1} \Big|_{a_1=0} = 0 \text{ d'où: } \frac{\delta u_x^1}{\delta a_1} \Big|_{a_1=0} = 0$$

$$\epsilon_{yy}^1(\text{noeud } 0) = \frac{y_1}{l_1} \frac{\delta u_y^1}{\delta a_1} \Big|_{a_1=0} = 0 \text{ d'où: } \frac{\delta u_y^1}{\delta a_1} \Big|_{a_1=0} = 0$$

- Déformation du noeud 1 membrure 1 = déformation du noeud 1 membrure 2

$\epsilon_{xx}^1(\text{noeud } 1) = \epsilon_{xx}^2(\text{noeud } 1)$  soit:

$$\frac{x_1}{l_1} \frac{\delta u_x^1}{\delta a_1} \Big|_{a_1=1_1} = \frac{x_2 - x_1}{l_2} \frac{\delta u_x^2}{\delta a_2} \Big|_{a_2=0}$$

$\epsilon_{yy}^1(\text{noeud } 1) = \epsilon_{yy}^2(\text{noeud } 1)$  soit:

$$\frac{y_1}{l_1} \frac{\delta u_y^1}{\delta a_1} \Big|_{a_1=1_1} = \frac{y_2 - y_1}{l_2} \frac{\delta u_y^2}{\delta a_2} \Big|_{a_2=0}$$

- Déformation du noeud 2 membrure 2 = déformation du noeud 2 membrure 3

$\epsilon_{xx}^2(\text{noeud } 2) = \epsilon_{xx}^3(\text{noeud } 2)$

$$\frac{x_2 - x_1}{l_2} \frac{\delta u_x^2}{\delta a_2} \Big|_{a_2=1_2} = \frac{x_2 - x_3}{l_3} \frac{\delta u_x^3}{\delta a_3} \Big|_{a_3=1_3}$$

$$\epsilon_{yy}^2(\text{noeud } 2) = \epsilon_{yy}^3(\text{noeud } 2)$$

$$\frac{Y_2 - Y_1}{l_2} \frac{\delta u_y^2}{\delta a_2} \Big|_{a_2=l_2} = \frac{Y_2}{l_3} \frac{\delta u_y^3}{\delta a_3} \Big|_{a_3=l_3}$$

-Déformation du noeud 3 membrure 3 = 0

$$\epsilon_{xx}^3(\text{noeud } 3) = 0 = \epsilon_{yy}^3(\text{noeud } 3)$$

$$\frac{\delta u_x^3}{\delta a_3} \Big|_{a_3=0} = \frac{\delta u_y^3}{\delta a_3} \Big|_{a_3=0}$$

On voit ainsi que l'on dispose en plus des conditions aux limites au noeud 0 de la membrure 1 et au noeud 3 de la membrure 3, de quatre conditions aux limites supplémentaires avec 8 inconnues qui sont les déformations au noeud 1 de la membrure 1, au noeud 1 de la membrure 2, au noeud 2 de la membrure 2 et au noeud 2 de la membrure 3.

Cela impose que l'on connaisse explicitement quatre conditions aux limites supplémentaires afin de pouvoir résoudre les équations.

Pour la suite, nous supposons que:

$\epsilon_{xx}^1(\text{noeud } 1)$ ,  $\epsilon_{yy}^1(\text{noeud } 1)$ ,  $\epsilon_{xx}^3(\text{noeud } 3)$ ,  $\epsilon_{yy}^3(\text{noeud } 3)$  sont connus et sont respectivement égales à D1, D2, D3, D4 qui sont des fonctions du temps.

#### \* Conditions initiales

On suppose connues les valeurs des déplacements et de leurs premières dérivées sur toutes les membrures à l'instant initial. Nous n'insisterons pas plus sur ces conditions; elles interviennent surtout dans l'élaboration du schéma aux différences finies

nécessaire pour la résolution du système différentiel résultant de la modélisation par éléments finis, schéma qui n'est pas développé dans ce travail.

## CHAPITRE III

### RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET ANALYSE

#### VIBRATOIRE D'UN MECANISME PLAN

Dans ce chapitre, nous décrirons le modèle par éléments finis des équations aux dérivées partielles obtenues, plus précisément des équations de Lamé; en effet, une fois les déplacements obtenus, les autres grandeurs (tensions et déformations) se calculent aisément par simple dérivation numérique.

#### III.1 METHODE DES ELEMENTS FINIS

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à mettre en oeuvre des projets de plus en plus complexes et soumis à des contraintes de sécurité sévères. Pour mieux cerner ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur et s'applique à une grande variété de problèmes: problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans une géométrie quelconque.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.

- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques .

- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur .

### III.1.1 Méthode des résidus pondérés

Les différents algorithmes de la méthode des éléments finis peuvent être formulés en utilisant la méthode des résidus pondérés.

Dans la méthode des résidus pondérés, la fonction désirée  $u(.)$  est remplacée par une approximation sérielle finie  $\hat{u}$ ,

$$u(.) \# \hat{u}(.) = \sum U_j \phi_j(.) \quad j=1,2,\dots,N \quad (1)$$

En général, les fonctions  $\phi_j$ ,  $j=1,2,\dots,N$ , peuvent être définies dans un espace spatio-temporel tandis que les  $U_j$  sont des coefficients indéterminés.

Dans la méthode des éléments finis, les fonctions  $\phi_j$  sont choisies sous forme polynômiale de façon à satisfaire les conditions aux frontières homogènes ainsi que les conditions de continuité et de dérivabilité imposées au problème. Ces fonctions sont appelées fonctions de base, fonctions d'interpolation etc...

Si on considère une équation aux dérivées partielles:

$$Lu(.) - f = 0 \quad \text{avec } L \text{ opérateur différentiel,}$$

en substituant à  $u$  l'approximation  $\hat{u}$ , on obtient:

$$L\hat{u}(\cdot) - f = R(\cdot)$$

où  $R(\cdot)$  est appelé résidu.

L'objectif est de choisir les coefficients indéterminés  $U_j$  de sorte que le résidu soit minimal. Cela peut se faire en annulant l'intégral du résidu:

$$\int_t \int_V R(\cdot) dV dt = 0$$

Ce schéma génère une seule équation pour les  $N$  coefficients  $U_j$  inconnus et peut être modifié en introduisant des fonctions de pondération  $w_i(\cdot)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ .

En considérant que l'intégral de chaque résidu pondéré est égal à zéro, on obtient  $n$  équations indépendantes:

$$\int_t \int_V R(\cdot) w_i(\cdot) dV dt = 0, \quad i=1,2,\dots,N \quad (2)$$

L'équation (2) est l'équation générale de la méthode des résidus pondérés, et beaucoup de schémas sont déduits de cette expression à partir de la définition des fonctions de pondération.

Dans la pratique de l'ingénieur, les méthodes de Galerkin, collocation par points et collocation par sous domaines sont les plus utilisées de la famille de la méthode des résidus pondérés. Nous nous contenterons de faire une brève description de la méthode de Galerkin. Pour plus de renseignements, on pourra consulter les ouvrages sur la méthode des éléments finis cités en

référence (4,5,6).

### III.1.1.a La méthode de GALERKIN

La méthode de Galerkin est obtenue en choisissant comme fonctions de pondération les fonctions d'interpolation. On obtient alors:

$$\int_t \int_V R(\cdot) \Phi_i(\cdot) dV dt = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (3)$$

### III.2 MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DES EQUATIONS DE LAME

Reécrivons les équations dynamiques de Lamé:

$$\left[ \left( \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_x}{\delta a^2} + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{l^2} \frac{\delta^2 u_y}{\delta a^2} + f(a, t) = \mu^{-1} \rho \frac{\delta^2 u_x}{\delta t^2}$$

$$\left[ \left( \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1 \right] \frac{\delta^2 u_y}{\delta a^2} + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{l^2} \frac{\delta^2 u_x}{\delta a^2} + g(a, t) = \mu^{-1} \rho \frac{\delta^2 u_y}{\delta t^2}$$

Sous forme matricielle, cette équation s'écrit:

$$[A] \left\{ \frac{\delta^2 u}{\delta a^2} \right\} + [B] \left\{ \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \right\} = \{f\}$$

avec:

Matrice [A]:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{x_2-x_1}{1}\right)^2 (1-2v)^{-1}+1 & (1-2v)^{-1} \frac{(x_2-x_1)(Y_2-Y_1)}{1^2} \\ (1-2v)^{-1} \frac{(x_2-x_1)(Y_2-Y_1)}{1^2} & \left(\frac{Y_2-Y_1}{1}\right)^2 (1-2v)^{-1}+1 \end{bmatrix}$$

Matrice [B]:

$$\mu^{-1}p \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrice (f):

$$\begin{bmatrix} -f(a, t) \\ -g(a, t) \end{bmatrix}$$

Matrice  $\left(\frac{\delta^2 u}{\delta a^2}\right)$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta^2 u_x}{\delta a^2} \\ \frac{\delta^2 u_y}{\delta a^2} \end{bmatrix}$$

Matrice  $\left\{ \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \right\}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta^2 u_x}{\delta t^2} \\ \frac{\delta^2 u_y}{\delta t^2} \end{bmatrix}$$

Cette équation matricielle a la forme générale de l'équation d'ondes; nous la résoudrons à l'aide de la méthode de Galerkin.

Si  $\hat{u}_x$  et  $\hat{u}_y$  sont les approximations des fonctions  $u_x$  et  $u_y$ , la méthode de Galerkin exige que le résidu généré par la substitution de  $\hat{u}_x$  et  $\hat{u}_y$  dans le système d'équations de Lamé soit orthogonal aux fonctions de pondération choisies égales aux fonctions d'interpolation  $\phi_i$ . Soit donc:

$$\int_a R_1(a, t) \phi_i(a) da = 0 \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$$\int_a R_2(a, t) \phi_i(a) da = 0 \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$N$  étant égal au nombre de variables nodales attachées aux noeuds de chaque élément.

Les fonctions  $R_1(a, t)$  et  $R_2(a, t)$  sont les résidus attachées à chacune des équations de Lamé; ils s'écrivent:

$$R_1(a, t) = a(.) \frac{\delta^2 \hat{u}_x}{\delta a^2} + b(.) \frac{\delta^2 \hat{u}_y}{\delta a^2} + f(a, t) - \mu^{-1} p \frac{\delta^2 \hat{u}_x}{\delta t^2}$$

$$R_2(a, t) = a'(.) \frac{\delta^2 \hat{u}_y}{\delta a^2} + b(.) \frac{\delta^2 \hat{u}_x}{\delta a^2} + g(a, t) - \mu^{-1} p \frac{\delta^2 \hat{u}_y}{\delta t^2}$$

avec:

$$a(.) = \left( \frac{x_2 - x_1}{1} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1$$

$$a'(.) = \left( \frac{Y_2 - Y_1}{1} \right)^2 (1 - 2\nu)^{-1} + 1$$

$$b(.) = (1 - 2\nu)^{-1} \frac{(x_2 - x_1)(Y_2 - Y_1)}{1^2}$$

En introduisant dans l'équation représentant la condition d'orthogonalité du résidu les expressions de  $R_1$  et  $R_2$  et après intégration par parties on obtient pour  $R_1$ :

$$\int_a \left[ -a(.) \frac{\delta \hat{u}_x}{\delta a} \frac{d\phi_i}{da} - b(.) \frac{\delta \hat{u}_y}{\delta a} \frac{d\phi_i}{da} + \phi_i f(a, t) - \phi_i \mu^{-1} p \frac{\delta^2 \hat{u}_x}{\delta t^2} \right] da$$

$$+ a(.) \phi_i \frac{\delta \hat{u}_x}{\delta a} \Big|_0^1 + b(.) \phi_i \frac{\delta \hat{u}_y}{\delta a} \Big|_0^1 = 0$$

Les conditions aux limites sont introduites au niveau de l'expression:

$$+ a(.) \phi_i \frac{\delta \hat{u}_x}{\delta a} \Big|_0^1 + b(.) \phi_i \frac{\delta \hat{u}_y}{\delta a} \Big|_0^1$$

Si on a:

$$\frac{\delta \hat{u}_x}{\delta a} \Big|_0 = C1 ; \quad \frac{\delta \hat{u}_x}{\delta a} \Big|_1 = C2 ; \quad \frac{\delta \hat{u}_y}{\delta a} \Big|_0 = C3 ; \quad \frac{\delta \hat{u}_y}{\delta a} \Big|_1 = C4$$

l'expression devient:

$$a(.) \Phi_i(a=1)C2 + \Phi_i(a=0)C1 + b(.) \Phi_i(a=1)C4 - \Phi_i(a=0)C3$$

Supposons que l'on ait découpé le domaine considéré en un nombre  $n_{e1}$  d'éléments. L'expression ci-dessus n'existe pas alors pour les éléments internes; elle existe seulement pour les éléments contenant les noeuds correspondant à  $a=0$  et à  $a=1$  c'est-à-dire pour les éléments externes, respectivement le premier et le dernier élément. L'équation ci-dessus peut alors s'écrire comme la somme des intégrales sur chaque élément.

La contribution de chaque élément dans l'intégrale s'écrit:

- éléments internes:

$$\int_{a^e} \left[ -a(.) \frac{\delta \hat{u}_x^e}{\delta a} \frac{d\Phi_i}{da} - b(.) \frac{\delta \hat{u}_y^e}{\delta a} \frac{d\Phi_i}{da} + \Phi_i f(a, t) - \Phi_i \mu^{-1} p \frac{\delta^2 \hat{u}_x^e}{\delta t^2} \right] da$$

- élément 1

$$\int_{a_e} \left[ -a(.) \frac{\delta \hat{u}_x^e}{\delta a} \frac{d\Phi_i}{da} - b(.) \frac{\delta \hat{u}_y^e}{\delta a} \frac{d\Phi_i}{da} + \Phi_i f(a, t) - \Phi_i \mu^{-1} p \frac{\delta^2 \hat{u}_x^e}{\delta t^2} \right] da$$

$$- a(.) \Phi_i(a=0)C1 - b(.) \Phi_i(a=0)C3$$

- élément  $e = n_{e1}$

$$\int_{a_e} \left[ -a(.) \frac{\delta \hat{u}_x^e}{\delta a} \frac{d\Phi_i}{da} - b(.) \frac{\delta \hat{u}_y^e}{\delta a} \frac{d\Phi_i}{da} + \Phi_i f(a, t) - \Phi_i \mu^{-1} p \frac{\delta^2 \hat{u}_x^e}{\delta t^2} \right] da$$

$$+ a(.) \Phi_i(a=1)C2 + b(.) \Phi_i(a=1)C4$$

L'exposant  $e$  se réfère à l'élément.

Sur chaque élément, les fonctions  $\hat{u}_x$  et  $\hat{u}_y$  peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des fonctions de base  $\Phi_i$ , soit:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x^e &= \sum_{j=1, \dots, N} U_j^e(t) \phi_j(a) \\ \hat{u}_y^e &= \sum_{j=1, \dots, N} V_j^e(t) \phi_j(a) \end{aligned}$$

où  $U_j^e$  et  $V_j^e$  sont les variables nodales (fonctions du temps) attachées aux noeuds de l'élément.

En utilisant ces relations dans l'expression représentant la contribution de chaque élément, on obtient:

- éléments internes

$$\begin{aligned} &\sum \int_{a^e} \left[ -a(\cdot) U_j^e \frac{d\phi_j}{da} - b(\cdot) V_j^e \frac{d\phi_j}{da} - \phi_j f(a, t) \mu^{-1} p \phi_j \frac{d^2 U_j^e}{dt^2} \right] da \\ &+ \int_{a^e} \phi_i f(a, t) da \quad \forall \end{aligned}$$

- élément 1

$$\begin{aligned} &\sum \int_{a^e} \left[ -a(\cdot) U_j^e \frac{d\phi_j}{da} - b(\cdot) V_j^e \frac{d\phi_j}{da} - \phi_j f(a, t) \mu^{-1} p \phi_j \frac{d^2 U_j^e}{dt^2} \right] da \\ &+ \int_{a^e} \phi_i f(a, t) da - a(\cdot) \phi_i(a=0) C1 - b(\cdot) \phi_i(a=0) C3 \end{aligned}$$

- élément  $e=n_{el}$

$$\begin{aligned} &\sum \int_{a^e} \left[ -a(\cdot) U_j^e \frac{d\phi_j}{da} - b(\cdot) V_j^e \frac{d\phi_j}{da} - \phi_j f(a, t) \mu^{-1} p \phi_j \frac{d^2 U_j^e}{dt^2} \right] da \\ &+ \int_{a^e} \phi_i f(a, t) da + a(\cdot) \phi_i(a=1) C2 + b(\cdot) \phi_i(a=1) C4 \end{aligned}$$

la somme s'étendant de  $j=1$  à  $N$ ; ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$[A]^e \left\{ \frac{d^2 U}{dt^2} \right\}^e + [B]^e \{U\}^e + [C]^e \{V\}^e + \{f\}^e$$

avec:

$$[A]^e = \{a^e_{ij}\} \quad a^e_{ij} = - \int_{a^e} \mu^{-1} p \phi_i \phi_j \, da$$

$$[B]^e = \{b^e_{ij}\} \quad b^e_{ij} = - \int_{a^e} a(\cdot) \frac{d\phi_j}{da} \frac{d\phi_i}{da} \, da$$

$$[C]^e = \{c^e_{ij}\} \quad c^e_{ij} = - \int_{a^e} b(\cdot) \frac{d\phi_j}{da} \frac{d\phi_i}{da} \, da$$

- éléments internes

$$\{f\}^e = \{f^e_i\} \quad f^e_i = \int_{a^e} \phi_i f(a, t) \, da$$

- élément e = 1

$$\{f\}^e = \{f^e_i\} \quad f^e_i = \int_{a^e} \phi_i f(a, t) \, da - a(\cdot) \phi_i(a=0) C1 - b(\cdot) \phi_i(a=0) C3$$

- élément e = n<sub>e1</sub>

$$\{f\}^e = \{f^e_i\} \quad f^e_i = \int_{a^e} \phi_i f(a, t) \, da + a(\cdot) \phi_i(a=1) C2 + b(\cdot) \phi_i(a=1) C4$$

De même, la contribution de chaque élément à l'orthogonalité du résidu R<sub>2</sub> s'écrit:

$$[A]'^e \left\{ \frac{d^2 V}{dt^2} \right\}^e + [B']^e \{V\}^e + [C]'^e \{U\}^e + \{f'\}^e$$

avec:

$$[B']^e = (b'^e_{ij}) \quad b'^e_{ij} = - \int_{a^e} a'(\cdot) \frac{d\phi_j}{da} \frac{d\phi_i}{da} da$$

- éléments internes

$$(f')^e = (f'^e_i) \quad f'^e_i = \int_{a^e} \phi_i g(a, t) da$$

- élément e = 1

$$(f')^e = (f'^e_i) \quad f'^e_i = \int_{a^e} \phi_i g(a, t) da - a'(\cdot) \phi_i(a=0) C3 - b(\cdot) \phi_i(a=0) C1$$

- élément e = n<sub>el</sub>

$$(f')^e = (f'^e_i) \quad f'^e_i = \int_{a^e} \phi_i g(a, t) da + a'(\cdot) \phi_i(a=1) C4 + b(\cdot) \phi_i(a=1) C2$$

A l'aide de ceci, on peut écrire la contribution de chaque élément à l'orthogonalité du vecteur résidu du système d'équations (vecteur dont les composantes sont R<sub>1</sub> et R<sub>2</sub>) sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} [A]^e & 0 \\ 0 & [A]^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{d^2 U}{dt^2}\right)^e \\ \left(\frac{d^2 V}{dt^2}\right)^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B]^e & [C]^e \\ [C]^e & [B']^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (U)^e \\ (V)^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (f)^e \\ (f')^e \end{bmatrix}$$

Les matrices [A]<sup>e</sup>, [B]<sup>e</sup>, [B']<sup>e</sup> et [C]<sup>e</sup> sont des matrices carrées d'ordre NxN, N étant le nombre de variables nodales attachées aux noeuds de chaque élément. Ainsi qu'on peut le constater, ces matrices sont symétriques.

Les matrices (d<sup>2</sup>U/dt<sup>2</sup>)<sup>e</sup>, (d<sup>2</sup>V/dt<sup>2</sup>)<sup>e</sup>, (f)<sup>e</sup> et (f')<sup>e</sup> sont des vecteurs colonnes d'ordre N.

Les matrices:

$$\begin{bmatrix} [A]^e & 0 \\ 0 & [A]^e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [B]^e & [C]^e \\ [C]^e & [B']^e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \{f\}^e \\ \{f'\}^e \end{bmatrix}$$

sont dites respectivement matrice de masse élémentaire, matrice de rigidité élémentaire et vecteur sollicitations élémentaire.

En sommant les  $n_{el}$  contributions de tous les éléments dans lequel le domaine est subdivisé, on aboutit au système d'équations différentielles par rapport au temps suivant:

$$[A] \left\{ \frac{d^2 U}{dt^2} \right\} + [B] \{U\} + [C] \{V\} + \{f\} = 0$$

$$[A] \left\{ \frac{d^2 V}{dt^2} \right\} + [B'] \{V\} + [C] \{U\} + \{f'\} = 0$$

ou encore:

$$\begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 U}{dt^2} \\ \frac{d^2 V}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] & [C] \\ [C] & [B'] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{f\} \\ \{f'\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices:

$$\begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [B] & [C] \\ [C] & [B'] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \{f\} \\ \{f'\} \end{bmatrix}$$

sont dites respectivement matrice de masse globale, matrice de raideur globale et vecteur global de sollicitations.

Les matrices  $[A], [B], [B'], [C]$  sont d'ordre  $n_{el} N \times n_{el} N$  et les

vecteurs colonnes possèdent  $n_e N$  lignes. Ces matrices sont obtenues par assemblage des matrices élémentaires.

### III.2.1 Assemblage des matrices élémentaires

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire les matrices globales  $[A], [B], [B'], [C]$ , les vecteurs  $\{f\}, \{f'\}$ , à partir des matrices élémentaires  $[A]^e, [B]^e, [B']^e, [C]^e$  et des vecteurs élémentaires  $\{f\}^e$  et  $\{f'\}^e$ . La technique utilisée est celle de l'assemblage par expansion; elle se prête bien à la programmation par ordinateur. Dans cet exposé, nous nous contenterons de l'exposer à l'aide d'exemples simples.

#### Expansion de la matrice $[B]^e$

Considérons à titre d'exemple, l'expression:

$$W^e = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$= [B]^e (U)^e + \{f\}^e$$

Le vecteur global des variables nodales est:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_1 \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_j \\ U_{j+1} \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix}$$

pour que  $W^e$  reste inchangée si l'on remplace  $\{U\}^e$  par  $\{U\}$ , il

faut:

- remplacer  $[B]^e$  par une matrice  $[\beta]^e$  de dimensions  $n \times n$  dans laquelle  $b_{11}$ ,  $b_{21}$ ,  $b_{12}$  et  $b_{22}$  occupent respectivement la colonne I et la ligne I; la colonne I et la ligne J; la colonne J et la ligne I; la colonne J et la ligne J; toutes les autres cellules de la matrice étant occupées par des zéros.

- remplacer  $(f)^e$  par un vecteur  $(\theta)^e$  de dimension  $n$  dont le terme I est  $f_1$ , le terme J  $f_j$  et dont tous les autres termes sont nuls.

Soit donc:

$$\begin{bmatrix}
 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \dots & k_{11} & \dots & k_{12} & \dots & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \dots & k_{21} & \dots & k_{22} & \dots & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \vdots
 \end{bmatrix}
 = [\beta]^e
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 \vdots \\
 f_1 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \vdots \\
 f_j \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{ligne I} \\
 \\
 \\
 \leftarrow \text{ligne J}
 \end{array}
 = (\theta)^e$$

↑ colonne I    ↑ colonne J

L'expansion des matrices  $[A]^e, [B']^e, [C]^e$  se fait de façon similaire à celle de  $[B]^e$ . On doit seulement retenir que l'expansion doit se faire en tenant compte aussi bien des  $U_i$  que des  $V_i$ . On aboutit ainsi à des matrices élémentaires étendues  $[\alpha]^e, [\beta']^e$  et  $[\Gamma]^e$ .

De même, l'expansion de  $(f')^e$  se fait de façon identique à celle de  $(f)^e$  et on aboutit à un vecteur étendu  $(\theta')^e$ .

On obtient les matrices  $[A], [B], [B'], [C]$  et les vecteurs  $[f], [f']$  par sommation des matrices et vecteurs étendus, la sommation s'effectuant sur le nombre d'éléments; soit:

$$[A] = \Sigma[\alpha]^e$$

$$[B] = \Sigma[\beta]^e$$

$$[B'] = \Sigma[\beta']^e$$

$$[C] = \Sigma[\Gamma]^e$$

$$\{f\} = \Sigma\{\theta\}^e$$

$$\{f'\} = \Sigma\{\theta'\}^e$$

On peut remarquer que les matrices assemblées sont des matrices creuses; leur stockage se fait donc de façon aisée.

### III.2.2 Choix du type d'éléments et des fonctions de pondération

Les critères de choix du type d'éléments sont:

- la géométrie du domaine.
- les conditions de continuité et de dérivabilité des fonctions inconnues.

Dans notre cas, le domaine choisi est un domaine linéaire, à une dimension. Les éléments seront donc des éléments linéaires à une dimension.

Nous avons dans le chapitre I paragraphe 3 que les déplacements doivent être de classe  $C^1$  dans le domaine et de classe  $C^0$  sur sa frontière. Cela nous impose comme choix des éléments du cinquième ordre avec deux noeuds et trois variables nodales par noeud:

- pour la fonction  $u_x$ , au noeud  $i$  :

$$\{u_i, \delta u_i / \delta a, \delta^2 u_i / \delta a^2\}.$$

- pour la fonction  $u_y$ , au noeud  $i$ :

$$\{v_i, \delta v_i / \delta a, \delta^2 v_i / \delta a^2\}.$$

Ces éléments sont dits éléments de haute précision de type Hermitte. [4].

Ainsi donc on a:

$$U_1^e = u_1 ; U_2^e = \delta_a u_1 ; U_3^e = \delta_a^2 u_1 ; \text{noeud } 1.$$

$$U_4^e = u_2 ; U_5^e = \delta_a u_2 ; U_6^e = \delta_a^2 u_2 ; \text{noeud } 2.$$

$$V_1^e = v_1 ; V_2^e = \delta_a v_1 ; V_3^e = \delta_a^2 v_1 ; \text{noeud } 1.$$

$$V_4^e = v_2 ; V_5^e = \delta_a v_2 ; V_6^e = \delta_a^2 v_2 ; \text{noeud } 2.$$

où  $\delta_a$  et  $\delta_a^2$  représentent respectivement les dérivées premières et secondes par rapport à  $a$ .

De manière à simplifier la définition analytique des éléments, on introduit la notion d'élément de référence: un élément de référence  $V^r$  est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel  $V^e$  par une transformation géométrique  $\tau^e$ .

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---*---} | \text{---*---} > \\ -1 \quad 0 \quad 1 \\ \quad \quad V^r \end{array} & \begin{array}{c} \text{---*---} | \text{---*---} > \\ a_1 \quad 0 \quad a_2 \\ \quad \quad V^e \end{array} \end{array}$$

La transformation  $\tau^e$  définit les coordonnées  $a^e$  de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées  $\epsilon$  du point correspondant de l'élément de référence.

$\tau^e$  dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des noeuds géométriques qui le définissent. Il y

a donc une transformation  $r^\epsilon$  pour chaque élément réel.

On appelle noeuds géométriques les noeuds servant à définir la géométrie de l'élément. Les noeuds d'interpolation sont les points où la fonction approchée coïncide avec la fonction exacte.

La transformation  $r^\epsilon$  est associée à des polynômes  $N_i$  dits fonctions de transformation géométrique qui permettent d'effectuer le changement de variables. On a ainsi:

$$r^\epsilon: \epsilon \longrightarrow a(\epsilon) = [N(\epsilon)] \{a_n\}$$

avec  $\{a_n\}$  coordonnées des noeuds géométriques de l'élément réel.

Soit encore:

$$a(\epsilon) = N_1(\epsilon) a_1 + N_2(\epsilon) a_2$$

Un élément est dit isoparamétrique si les fonctions de transformation géométrique  $N(\epsilon)$  sont identiques aux fonctions d'interpolation  $\Phi(\epsilon)$ ; il est dit pseudo-isoparamétrique si  $N$  et  $\Phi$  sont des polynômes différents utilisant les mêmes monômes, sub-paramétrique si l'ordre des polynômes  $N(\epsilon)$  est inférieur à l'ordre des polynômes  $\Phi(\epsilon)$  et super-paramétrique dans le cas contraire.

Dans notre cas, les éléments choisis nous imposent comme fonctions de transformation géométrique:

$$N_1(\epsilon) = 2(1 - \epsilon) ; N_2 = 2(1 + \epsilon)$$

et comme fonctions d'interpolation (Référence 4):

$$\Phi_1(\epsilon) = 16(1 - \epsilon)^3(8 + 9\epsilon + 3\epsilon^2);$$

$$\Phi_2(\epsilon) = 16(1 - \epsilon)^3(1 + \epsilon)(5 + 3\epsilon);$$

$$\Phi_3(\epsilon) = 16(1 - \epsilon)^3(1 + \epsilon)^2;$$

$$\Phi_4(\epsilon) = 16(1 + \epsilon)^3(8 - 9\epsilon + 3\epsilon^2);$$

$$\Phi_5(\epsilon) = 16(1 + \epsilon)^3(-1 + \epsilon)(5 - 3\epsilon);$$

$$\Phi_6(\epsilon) = 16(1 + \epsilon)^3(1 - \epsilon)^2;$$

Les éléments que nous avons choisis sont donc sub-paramétriques.

Sous ces conditions, les approximations sur l'élément de référence des fonctions  $u_x$  et  $u_y$  s'écrivent:

$$\hat{u}_x^e(\epsilon, t) = \sum_{j=1, \dots, N} U_j^r(t) \Phi_j(\epsilon)$$

$$\hat{u}_y^e(\epsilon, t) = \sum V_j^r(t) \Phi_j(\epsilon)$$

Soit sous forme développée:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x^e(\epsilon, t) = & u_1(t) \Phi_1(\epsilon) + \delta_\epsilon u_1(t) \Phi_2(\epsilon) + \delta^2_\epsilon u_1(t) \Phi_3(\epsilon) \\ & + u_2(t) \Phi_4(\epsilon) + \delta_\epsilon u_2(t) \Phi_5(\epsilon) + \delta^2_\epsilon u_2(t) \Phi_6(\epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_y^e(\epsilon, t) = & v_1(t) \Phi_1(\epsilon) + \delta_\epsilon v_1(t) \Phi_2(\epsilon) + \delta^2_\epsilon v_1(t) \Phi_3(\epsilon) \\ & + v_2(t) \Phi_4(\epsilon) + \delta_\epsilon v_2(t) \Phi_5(\epsilon) + \delta^2_\epsilon v_2(t) \Phi_6(\epsilon) \end{aligned}$$

où  $\delta\epsilon$  et  $\delta^2\epsilon$  représentent les dérivées premières et secondes par rapport à l'élément de référence.

Les fonctions, d'une part  $\hat{u}_x^e(\epsilon, t)$  et  $\hat{u}_y^e(\epsilon, t)$ , d'autre part  $\hat{u}_x^e(a, t)$  et  $\hat{u}_y^e(a, t)$  prennent les mêmes valeurs en des points qui se correspondent dans la transformation géométrique.

Ainsi donc, nous venons de déterminer les fonctions d'interpolation mais sur l'élément de référence; les approximations des fonctions inconnues sont aussi écrites sur l'élément de référence ainsi que les variables nodales. Il faut donc transformer dans l'expression représentant la contribution de chaque élément les dérivations en  $a$  en dérivations en  $\epsilon$ , et l'intégration sur  $a^e$  en une intégration sur  $\epsilon$ .

\* Transformation des dérivations en  $a$

Les dérivées par rapport à  $a$  qui interviennent dans la contribution de chaque élément sont:

$$\delta_a \hat{u}_x^e, \delta_a \hat{u}_y^e, d\phi_i/da .$$

On a:

$$d\phi_i/da = (d\phi_i/d\epsilon) (d\epsilon/da) = (2/l^e) (d\phi_i/d\epsilon)$$

avec  $l^e$  longueur de l'élément réel.

De même on a:

$$\delta_a \hat{u}_x^e = (\delta_\epsilon \hat{u}_x^e) (\delta_a \epsilon) = (2/l^e) (\delta_\epsilon \hat{u}_x^e)$$

\* Transformation du domaine d'intégration

L'intégrale sur l'élément réel est remplacée par l'intégrale sur l'élément de référence:

$$\int_{a^e} \dots da = \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} \dots (l^e/2) d\epsilon$$

\* Transformation des variables nodales

Les variables nodales  $\{U\}^e = (u_1, \delta_a u_1, \delta^2_a u_1, u_2, \delta_a u_2, \delta^2_a u_2)$  sur l'élément réel sont remplacées par les variables nodales sur l'élément de référence  $\{U\}_\epsilon = (u_1, \delta_\epsilon u_1, \delta^2_\epsilon u_1, u_2, \delta_\epsilon u_2, \delta^2_\epsilon u_2)$ :

$$\delta_a u_i = (2/l^e) \delta_{i,\epsilon} u_i ; \delta^2_a u_i = (2/l^e)^2 \delta_{i,\epsilon} u_i$$

soit donc:

$$\{U\}^e = [T] \{U\}_\epsilon$$

avec:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2/l^e)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/l^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2/l^e)^2 \end{bmatrix}$$

A l'aide de ces relations, les matrices élémentaires peuvent être réécrites en fonction de  $\epsilon$ , et la contribution de chaque élément s'écrit alors:

$$[A]^e \left( \frac{d^2 U}{dt^2} \right)^r + [B]^e (U)^r + [C]^e (V)^r + (f)^e$$

$$[A]^e \left( \frac{d^2 V}{dt^2} \right)^r + [B']^e (V)^r + [C]^e (U)^r + (f')^e$$

avec:

$$[A]^e = [A]_e [T]$$

où  $[A]^e$  est une matrice déduite de la transformation du domaine d'intégration et dont un élément  $ij$  s'écrit:

$$(1^e/2) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} \mu^{-1} p \phi_i \phi_j d\epsilon$$

$$[B]^e = [B]_e [T]$$

où  $[B]^e$  est une matrice déduite de la transformation du domaine d'intégration et dont un élément  $ij$  s'écrit:

$$- (2/1^e) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} a(\cdot) \mu^{-1} p (d\phi_i/d\epsilon) (d\phi_j/d\epsilon) d\epsilon$$

$$[B']^e = [B']_e [T]$$

où  $[B']^e$  est une matrice déduite de la transformation du domaine d'intégration et dont un élément  $ij$  s'écrit:

$$- (2/1^e) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} a'(\cdot) \mu^{-1} p (d\phi_i/d\epsilon) (d\phi_j/d\epsilon) d\epsilon$$

$$[C]^e = [C]_e [T]$$

où  $[C]^e$  est une matrice déduite de la transformation du domaine d'intégration et dont un élément  $ij$  s'écrit:

$$- (2/1^e) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} b(\cdot) \mu^{-1} p (d\phi_i/d\epsilon) (d\phi_j/d\epsilon) d\epsilon$$

et:

$[f]^e$  vecteur colonne dont la composante  $i$  s'écrit:

- éléments internes

$$(1^e/2) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} \Phi^i f(\epsilon, t) d\epsilon$$

- élément  $e=1$

$$(1^e/2) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} \Phi^i f(\epsilon, t) d\epsilon - a(\cdot) \Phi_i(\epsilon=-1) C1 - b(\cdot) \Phi_i(\epsilon=-1) C3$$

- élément  $e=n_{el}$

$$(1^e/2) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} \Phi^i f(\epsilon, t) d\epsilon + a(\cdot) \Phi_i(\epsilon=1) C2 + b(\cdot) \Phi_i(\epsilon=1) C4$$

$[f']^e$  vecteur colonne dont la composante  $i$  s'écrit:

- élément internes

$$(1^e/2) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} \Phi^i g(\epsilon, t) d\epsilon$$

- élément  $e = 1$

$$(1^e/2) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} \Phi^i g(\epsilon, t) d\epsilon - a'(\cdot) \Phi_i(\epsilon=-1) C3 - b(\cdot) \Phi_i(\epsilon=-1) C1$$

- élément  $e = n_{el}$

$$(1^e/2) \int_{\epsilon=-1}^{\epsilon=1} \Phi^i g(\epsilon, t) d\epsilon + a'(\cdot) \Phi_i(\epsilon=1) C4 + b(\cdot) \Phi_i(\epsilon=1) C4$$

Les matrices ci-dessus sont des matrices d'ordre 6.

$\{U\}_r$  et  $\{V\}_r$  sont des vecteurs colonne d'ordre 6 qui s'écrivent respectivement:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \delta_\epsilon u_1 \\ \delta^2_\epsilon u_1 \\ \hline u_2 \\ \delta_\epsilon u_2 \\ \delta^2_\epsilon u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \delta_\epsilon v_1 \\ \delta^2_\epsilon v_1 \\ \hline v_2 \\ \delta_\epsilon v_2 \\ \delta^2_\epsilon v_2 \end{bmatrix}$$

### III.2.3 Erreurs d'approximation sur un élément

L'erreur d'approximation en tout point  $a$  de l'élément réel est définie par:

$$e(a) = \hat{u}(a) - u(a)$$

L'erreur au point  $\epsilon$  de l'élément de référence est:

$$e(\epsilon) = \hat{u}(\epsilon) - u(\epsilon)$$

En deux points  $a$  et  $\epsilon$  qui se correspondent dans la transformation géométrique, les erreurs  $e(a)$  et  $e(\epsilon)$  prennent la même valeur.

Pour définir l'erreur maximale sur l'élément, on utilise la norme du maximum de la fonction  $e(a)$ :

$$|e| = \text{Maximum sur } V^e \text{ de } |e(a)|$$

On définit l'erreur sur chacune des dérivées d'ordre  $s$  comme suit:

$$e_s(a) = D^s (e(a)) = \delta^s e(a) / \delta a^s$$

La norme correspondante s'écrit:

$$|e|_s = \text{Maximum sur } V^e \text{ de } |D^s(e(a))|$$

Les erreurs d'approximation sur un élément de type Hermitte du cinquième ordre s'écrivent:

$$e(\epsilon) \leq (1/120) (1-\epsilon)^3 \cdot \text{Max} |\delta^6 u / \delta \epsilon^6|_{V_r}$$

$$|e|_0 \leq (1/720) (1^6/64) \text{Max} |\delta^6 u / \delta a^6|_{V_e}$$

$$|e|_1 \leq (1/720) (1^5/8 \text{rac}(3)) \text{Max} |\delta^6 u / \delta a^6|_{V_e}$$

#### III.2.4 Résolution du système d'équations différentielles

L'assemblage des matrices élémentaires conduit à un système différentiel du temps qui peut être résolu à l'aide d'un schéma aux différences finies. La résolution de ces équations permet de déterminer les variables nodales et donc les expressions des fonctions de déplacement sur chaque élément de référence  $u_x^e(\epsilon)$  et  $u_y^e(\epsilon)$ . A l'aide des fonctions de transformation géométrique on peut déterminer  $u_x^e(a)$  et  $u_y^e(a)$ . Le déplacement sur une membrure est alors égal à la somme des déplacements sur chaque élément.

Nous n'aborderons pas dans ce travail les schémas aux différences finies qui peuvent être mis en oeuvre. Pour un travail ultérieur nous proposons l'approximation de Houbolt qui fournit un schéma implicite de résolution. Cette méthode a été introduite en 1950 pour l'analyse de la réponse dynamique des ailes d'avion.[7]

### III.2.5 Forme des matrices élémentaires pour un mécanisme plan

Les matrices élémentaires pour les membrures d'un mécanisme ont la forme générale précédemment écrite; seules sont modifiées les fonctions  $a(\cdot)$ ,  $a'(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$ ,  $f(a,t)$  et  $g(a,t)$ . Ces expressions sont écrites de façon détaillée dans le chapitre II paragraphe 4.

Il faut aussi se rappeler que les équations de Lamé sont écrites pour chaque membrure dans un référentiel qui lui est lié.

Dans les expressions des vecteurs sollicitation élémentaire pour les éléments extérieurs, l'introduction des conditions aux limites se fait en prenant:

\*pour la membrure 1:

$$C1 = 0 ; C3 = 0 ; C2 = D1 \cdot l_1 / x_1 ; C4 = D4 \cdot l_1 / Y_1$$

\*pour la membrure 2:

$$C1 = D1 \cdot l_2 / (x_2 - x_1) ; C2 = D3 \cdot l_2 / (x_2 - x_1) ; C3 = D2 \cdot l_2 / (Y_2 - Y_1) ;$$

$$C4 = D4 \cdot l_2 / (Y_2 - Y_1)$$

\* pour la membrure 3

$$C1 = 0 ; C2 = D3 \cdot l_3 / (x_2 - x_3) ; C3 = 0 ; C4 = D4 \cdot l_3 / Y_2$$

### III.3 ANALYSE VIBRATOIRE DES MECANISMES PLAN

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le vecteur déplacement d'une membrure considérée comme un élément de poutre rectangulaire obéissait à une équation d'ondes de vibrations forcée. Nous avons également élaboré le schéma aux éléments finis nécessaire pour la résolution des équations pour un mécanisme plan ainsi que les différentes conclusions qualitatives que l'on pouvait tirer d'une telle étude.

Dans ce chapitre, nous décrirons une méthode hybride d'analyse aussi bien d'une membrure que d'un mécanisme plan.

Notre étude portera sur l'analyse vibratoire d'une membrure, et qui sera axée sur la mise en évidence des types d'ondes possibles; nous parlerons également sommairement des notions de fréquences propres et de modes de vibration d'une membrure et nous indiquerons la réponse dynamique de celle-ci.

Nous nous limiterons au cas d'une membrure tant il est vrai que pour un mécanisme, les fréquences propres, les modes de vibration ainsi que la réponse dynamique sont constitués de l'ensemble des valeurs pour chaque membrure.

### III.3.1 Analyse vibratoire d'une membrure

#### III.3.1.a Types d'ondes possibles dans le cas de la C.E.D

Le système d'équations dynamiques de Lamé s'écrit sous forme vectorielle:

$$(1) \quad \mathbf{u} + (1-2\nu)^{-1} \operatorname{div} \operatorname{grad}(\mathbf{u}) + \mu^{-1} \mathbf{F} = \mu^{-1} \rho \frac{\delta^2 \mathbf{u}}{\delta t^2}$$

où  $\operatorname{grad}$  représente l'opérateur gradient dans le référentiel fixe  $Oxy$ .

Supposons que  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{F}$  puissent être assujetties à la décomposition de STOKES:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} p + \operatorname{rot} \mathbf{q} \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} P + \operatorname{rot} \mathbf{Q} \quad (3)$$

c'est-à-dire que  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{F}$  sont décomposés en la somme d'un champ

de vecteurs solénoïdal et d'un champ potentiel.

i) Recherche des fonctions P et Q

Voyons quelles sont les équations auxquelles doivent être astreintes la fonction P et le vecteur Q pour que cette décomposition soit possible; à partir de la formule (1.1.3) on peut écrire:

$$P = \text{div}F \quad (4)$$

$$\text{rot}q = \text{rot}F \quad (5)$$

avec F vecteur de composantes  $F_x$  et  $F_y$  telles que:

$$F_x = p \left( \frac{d^2 x}{dt^2} - 2y\alpha \right) \quad F_y = p \frac{d^2 y}{dt^2}$$

En se servant des formules de transformation on peut exprimer  $F_x$  et  $F_y$  en fonction de a et b ainsi que l'expression de la divergence de F dans le référentiel ab.

On trouve alors:

$$\text{div}F = (2p/l^2) [(x_2 - x_1)(a_{x_2} - a_{x_1}) + (y_2 - y_1)(a_{y_2} - a_{y_1})]$$

A partir de (4) on tire alors l'équation suivante que doit vérifier P pour valider la décomposition de STOKES:

$$P = \frac{\delta^2 P}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 P}{\delta y^2} = (2p/l^2) [(x_2 - x_1)(a_{x_2} - a_{x_1}) + (y_2 - y_1)(a_{y_2} - a_{y_1})]$$

$$\frac{\delta^2 P}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 P}{\delta b^2} \quad (6)$$

De même,  $Q$  peut être déterminée à partir de la relation (5).

Le vecteur  $F$  ayant des composantes  $F_x$  et  $F_y$  suivant les axes  $i$  et  $j$  du référentiel fixe, seules nous intéressent en vertu de la relation (3) la composante suivant ces axes de  $\text{rot}Q$ . Si  $Q$  a pour composantes  $Q_x, Q_y, Q_z$  suivant respectivement  $i, j, k$ , alors on peut écrire :

$$\text{rot}Q = i(\delta Q_z / \delta y) - j(\delta Q_z / \delta x) + k(\delta Q_y / \delta x - \delta Q_x / \delta y)$$

Au regard de cette expression, on peut dire que seule la détermination de  $Q_z$  nous importe. On peut donc se fixer  $Q_x = Q_y = 0$  sans pour autant restreindre la généralité.

En développant la relation (5), on aboutit à l'équation suivante:

$$\begin{aligned} Q_z &= \frac{\delta^2 Q_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 Q_z}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 Q_z}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 Q_z}{\delta b^2} \\ &= \frac{\delta F_x}{\delta y} - \frac{\delta F_y}{\delta x} \end{aligned}$$

À l'aide des formules de transformation et des expressions des  $F_i$  selon  $a$  et  $b$ , on trouve:

$$\frac{\delta^2 Q_z}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 Q_z}{\delta b^2} = \frac{2p}{l^2} [(Y_2 - Y_1)(a_{x2} - a_{x1}) + (x_2 - x_1)(a_{y1} - a_{y2}) - al^2] \quad (7)$$

Les équations (6) et (7) permettent de déterminer les fonctions

P et Q<sub>z</sub> nécessaires pour effectuer la décomposition de STOKES du vecteur F sous certaines conditions aux limites. Ces équations sont des équations de LAPLACE non-homogènes.

\*Recherche des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont telles que la force d'inertie volumique au centre de gravité soit égale à:

$$f_x = p(d^2 x_g / dt^2 - 2y_g \alpha) \text{ et } f_y = p d^2 y_g / dt^2.$$

ii) Transformations des équations de LAME-Représentation de CLEBSCH [1]

A l'aide de la décomposition de STOKES, les équations de LAME prennent la forme suivante:

$$[1+(1-2\nu)^{-1}] \text{grad}(p) + \text{rot}(q) + \mu^{-1} [\text{grad}P + \text{rot}q] = \mu^{-1} p \left[ \text{grad} \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} + \text{rot} \frac{\delta^2 q}{\delta t^2} \right]$$

Cette équation est satisfaite si l'on pose:

$$p = - \frac{\mu^{-1}}{1+(1-2\nu)^{-1}} P + \frac{\mu^{-1} p}{1+(1-2\nu)^{-1}} \frac{\delta^2 p}{\delta t^2}$$

$$= \frac{\delta^2 p}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 p}{\delta b^2} \quad (8)$$

$$q = -\mu^{-1} q + \mu^{-1} p \frac{\delta^2 q}{\delta t^2}$$

$$= \frac{\delta^2 q}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 q}{\delta b^2} \quad (9)$$

Si l'on suppose que  $q = (q_x, q_y, q_z)$  ; suivant la décomposition de STOKES du vecteur u , on ne doit pas avoir de composantes de rotq

suivant k. Cela implique que la composante suivant k de  $\text{rot} \mathbf{q}$  doit être nulle, soit:

$$\delta q_y / \delta x - \delta q_x / \delta y = 0$$

Les composantes suivant i et j de  $\text{rot} \mathbf{q}$  étant respectivement  $\delta q_z / \delta y$  et  $-\delta q_z / \delta x$ , nous n'avons donc pas besoin de  $q_x$  et  $q_y$ ; on peut donc poser  $q_x = q_y = 0$ .

Ainsi, l'on a ramené les équations dynamiques de LAME en la recherche de quatre fonctions  $p, q_z, P,$  et  $Q_z$ .

Les fonctions  $P$  et  $Q_z$  vérifient les équations de POISSON non-homogènes (6) et (7) tandis que  $p$  vérifie l'équation (8); quant à  $q_z$ , son équation s'écrit:

$$\frac{\delta^2 q_z}{\delta t^2} + \frac{\delta^2 q_z}{\delta t^2} + \mu^{-1} Q_z = \mu^{-1} p \frac{\delta^2 q_z}{\delta t^2} \quad (10)$$

Les équations aux dérivées partielles que vérifient les fonctions  $p$  et  $q_z$  sont des équations quasi-harmoniques (équations de type hyperbolique non-homogène et non-stationnaire): ce sont des équations d'ondes sous vibrations forcées. On peut donc interpréter la décomposition de STOKES comme la décomposition du vecteur déplacement en deux vecteurs vérifiant l'équation d'ondes.

L'observation de ces équations montre que:

- la composante irrotationnelle  $\text{grad} p$  se propage avec la vitesse  $c_1 = \{(\mu/p) [1 + (1-2\nu)^{-1}]\}^{1/2}$ .

- la composante à divergence nulle  $\text{rot} \mathbf{q}$  se propage avec la vitesse  $c_2 = (\mu/p)^{1/2}$ .

La composante gradp est une onde longitudinale se propageant à la vitesse  $c_1$ , tandis que la composante rotq est une onde transversale se propageant avec la vitesse  $c_2$ .

Le déplacement cinéto-élasto-dynamique se présente donc comme une superposition d'ondes longitudinales et transversales sous l'effet de vibrations forcées.

### III.3.1.b Détermination des modes de vibration et des fréquences propres d'une membrure

Dans la modélisation par éléments finis, nous avons trouvé que l'équation dynamique fondamentale à laquelle obéissent les déplacements s'écrit:

$$\begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \frac{d^2 U}{dt^2} \right) \\ \left( \frac{d^2 V}{dt^2} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] & [C] \\ [C] & [B'] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{F\} \\ \{F'\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles à  $2N$  inconnues qui sont les variables nodales. Nous avons également montré comment les matrices intervenant dans cette équation pouvaient être obtenues (par assemblage des matrices élémentaires).

Dans ce paragraphe, nous montrerons comment l'on détermine les modes de vibration et les fréquences propres de vibration d'une membrure à partir de cette équation.

Le vecteur sollicitation global représente le terme d'excitation de la membrure; il contient en effet les termes d'inertie représentant la cinétique de la membrure. Si ce terme est nul, autrement dit s'il n'y a pas d'excitation, l'équation générale ci-dessus

s'écrit:

$$\begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \frac{d^2 U}{dt^2} \right\} \\ \left\{ \frac{d^2 V}{dt^2} \right\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] & [C] \\ [C] & [B'] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et peut se mettre sous la forme condensée:

$$[K]\{W\} + [M] \frac{d^2}{dt^2} \{W\} = 0$$

Cette équation a la forme de l'équation d'ondes et il existe donc une solution périodique réelle simple:

$$\{W\} = \{W_0\} \cos(\omega t)$$

si:

$$([K] - \omega^2 [M])\{W_0\} = 0. (1)$$

Ceci n'est possible que pour certaines valeurs de  $\omega$  pour le déterminant de la matrice entre parenthèses est nul. Les matrices  $[K]$  et  $[M]$  étant de dimensions  $2N \times 2N$  (avec nombre de variables nodales), le déterminant est de degré  $2N$  et il existe  $2N$  racines réelles  $\omega^2$ . Ces racines définissent les fréquences propres angulaires du système et leur détermination pose un problème de valeurs propres:

$$\det |[K] - \omega^2 [M]| = 0$$

$\{W_0\}$  est déterminé à l'aide des conditions initiales.

A chaque fréquence pour laquelle l'équation (1) est vérifiée correspond un vecteur  $\{W_0\}_i$  appelé mode du système.

En pratique, il est commode de définir le module de ces vecteurs par la condition:

$$\{W_0\}_i^T [M] \{W_0\}_i = I \text{ (matrice identité)}$$

où  $(W_0)_i^T$  est la transposée de  $(W_0)_i$ . Avec cette définition, les vecteurs propres sont dits modes normés du système.

\* Solution du problème de valeurs propres

La détermination des valeurs propres et des vecteurs propres peut se faire numériquement à l'aide d'algorithmes appropriés qui font l'objet de l'analyse numérique; énoncer ces algorithmes dans ces lignes nous semble dénué d'intérêt. Une telle étude n'aurait de sens que dans le cadre de l'élaboration d'un programme informatique.

Le but de ce paragraphe était beaucoup plus de mettre en évidence les types d'ondes possibles dans le cadre de l'analyse C.E.D.

La décomposition de CLEBSCH fournit des voies d'étude semi-analytiques des équations de la C.E.D. En effet, il est possible de déterminer alors les fonctions de déplacement en suivant le schéma ci-après:

- résoudre les équations homogènes en P et  $Q_2$  : ces équations sont des équations de Laplace dont les solutions générales  $P_g$  et  $Q_{2g}$  peuvent être déterminées analytiquement;
- résoudre les équations non-homogènes en P et  $Q_2$  sous des conditions aux limites fictives à l'aide de la méthode des éléments finis; on déterminera alors ainsi des solutions particulières  $P_p$  et  $Q_{2p}$ .
- les solutions des équations s'écriront alors comme la somme des solutions particulières et des solutions générales sous des

conditions aux limites modifiées tenant compte des C.L fictives imposées pour la détermination des solutions particulières.

- résoudre les équations homogènes ( équations d'ondes) en  $p$  et  $q_z$ ; la solution générale peut être obtenue analytiquement;
- résoudre les équation non-homogènes en  $p$  et  $q_z$  sous des conditions aux limites fictives à l'aide de la méthode des éléments finis.
- les solutions  $p$  et  $q_z$  s'écrivent alors comme la somme des solutions particulières et des solutions générales en tenant compte des conditions aux limites fictives.
- déterminer les fonctions de déplacement à l'aide de la décomposition de Stokes.

#### III.3.1.c Réponse dynamique d'une membrure

La réponse dynamique d'une membrure à une excitation est donnée par la solution du modèle par éléments finis.

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

L'étude menée dans ce projet nous aura permis d'établir les équations de la cinéto-élasto-dynamique pour un mécanisme plan à quatre membrures ainsi que l'élaboration d'un schéma numérique aux éléments finis pour la résolution des équations.

Dans ce travail, nous nous sommes beaucoup plus appesantis sur l'étude des équations élasto-dynamiques. En effet, l'étude cinétique des mécanismes, c'est-à-dire la détermination des différentes grandeurs cinématiques et dynamiques (vitesses, accélérations et forces d'inertie), ne peut être faite qu'avec l'hypothèse fondamentale de rigidité. Par conséquent, une telle étude rejoindrait l'analyse classique et ce sont d'ailleurs les concepts de base de cette analyse qui en constituent le fondement.

L'étude élasto-dynamique par contre, est beaucoup plus féconde et permet de faire ressortir certains aspects fondamentaux du comportement des mécanismes tels les modes de vibration, fréquences propres etc...

Mais pour que cette étude soit complète, il est nécessaire de calculer explicitement ces propriétés fondamentales (modes et les fréquences propres etc...), qui constituent la base de l'analyse vibratoire des mécanismes. Cela peut être fait notamment par l'élaboration d'un programme informatique, qui, à partir des équations fondamentales et du schéma aux éléments finis élaboré, permettra de valider le modèle par le traitement de cas pratiques.

Il serait également possible d'étendre l'étude au cas des mécanismes de forme plus complexe.

Nous recommandons par conséquent:

- l'élaboration d'un schéma aux différences finies pour la résolution du système d'équations différentielles résultant de la modélisation par éléments finis.
- l'élaboration d'un programme informatique afin de résoudre numériquement les équations obtenues; ce programme devra permettre le calcul des déplacements, des déformations, des tensions, des modes et fréquences propres de vibration.
- l'extension aux mécanismes de forme complexe.

## ANNEXE

### DYNAMIQUE DES CORPS RIGIDES-FORMALISME LAGRANGIEN

#### 1°/ MECANIQUE ANALYTIQUE-équations de LAGRANGE

L'établissement des équations de LAGRANGE peut se faire:

- soit en partant de la considération de l'état instantané du système et des déplacements virtuels autour de l'état instantané c'est à dire d'un "principe différentiel" tel que le principe de D'ALEMBERT.

- soit à partir d'un principe qui considère le mouvement total du système entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  et des faibles variations virtuelles du mouvement total autour du mouvement c'est à dire un principe intégral.

C'est cette démarche que nous choisirons mais auparavant voici quelques définitions de concepts qui apparaîtront au cours de notre exposé.

#### 1.a Coordonnées généralisés-Contraintes et liaisons

Le mouvement d'un système peut être limité par des contraintes ou liaisons. On distingue plusieurs classifications des contraintes d'un système:

- contraintes holonomes: les conditions de liaison peuvent s'exprimer sous forme d'équations reliant les coordonnées des particules (et le temps) ayant pour forme:

$$\text{équation n°1: } f(r_1, r_2, \dots, t) = 0$$

- les liaisons ne s'exprimant pas de cette manière sont dites non holonomes.

Les contraintes sont en outre classées selon qu'elles sont

indépendantes du temps (scléronomes) ou qu'elles contiennent explicitement le temps (rhéonomes).

Les liaisons introduisent deux types de difficultés dans la résolution des problèmes de Mécanique. Premièrement, les coordonnées  $r_i$  ne sont plus indépendantes puisque qu'elles sont reliées par des équations de liaison. Deuxièmement, les forces de liaison figurent parmi les inconnues du problème et doivent s'obtenir de la solution que nous cherchons.

Dans le cas de contraintes holonomes, la première difficulté est levée par l'introduction de coordonnées généralisées.

Un système de particules libres de contraintes a  $3N$  coordonnées indépendantes ou degrés de liberté. S'il existe des contraintes holonomes exprimées par  $k$  équations de la forme 1, on peut éliminer  $k$  des  $3N$  coordonnées et il reste  $3N-k$  degrés de liberté.

Cette élimination des coordonnées dépendantes peut s'effectuer d'une autre façon par l'introduction de  $3N-k$  nouvelles variables indépendantes  $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$  en fonction desquelles les anciennes coordonnées sont exprimées par des équations de la forme:

$$r_1 = r_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

$$r_2 = r_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

etc

contenant implicitement les contraintes.

Si les contraintes sont non holonomes, les équations servant à les exprimer ne peuvent être utilisées pour éliminer les coordonnées dépendantes.

### 1.b Déplacement virtuel (infinitésimal) d'un système

Il se définit comme un changement dans la configuration du système résultant d'un changement arbitraire infinitésimal des coordonnées  $\delta r_i$  compatible avec les forces et les liaisons imposées au système à l'instant donné  $t$ .

### 1.c Espace de configuration

On décrit la configuration instantanée d'un système par les valeurs des  $n$  coordonnées généralisées  $q_1, q_2, \dots, q_n$  et elle correspond à un point particulier d'un hyperespace cartésien où les coordonnées  $q$  constituent les  $n$  axes de coordonnées. Cet espace est dit espace de configuration.

A mesure que le temps varie, l'état du système change et le point représentatif se meut dans l'espace de configuration en décrivant une courbe dite "trajectoire du mouvement du système".

Chaque point de la trajectoire représente la configuration entière du système à un certain instant donné.

### 1.d Principe d'Hamilton intégral - Equations de LAGRANGE

Le mouvement d'un système depuis l'instant  $t_1$  jusqu'à l'instant  $t_2$  est tel que l'intégrale de ligne:

$$I = \int L dt$$

où  $L = T - V$  avec  $L$  énergie cinétique du système.

$V$  potentiel du système.

Tel est le principe d'Hamilton pour des systèmes conservatifs ou admettant des potentiels généralisés.

En d'autres termes , l'intégrale de ligne I pour des temps t1 et t2 fixes est égale à zéro.

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, q'_1, q'_2, \dots, q'_n, t) dt = 0$$

La déduction des équations de Lagrange à partir du principe d'Hamilton se fait à l'aide des méthodes du calcul des variations qui ne sera pas développée ici.

Les équations de Lagrange s'écrivent:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta q'_i} - \frac{\delta L}{\delta q_i} = 0$$

On peut aussi généraliser le principe d'Hamilton de manière à y inclure les forces non conservatives, aux systèmes non conservatifs. Il s'écrit alors:

$$\delta I = \int_1^2 (T+W) dt = 0$$

avec  $W = \sum F_i r_i$

On trouve alors:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta q'_i} - \frac{\delta T}{\delta q_i} = Q_i$$

avec  $Q_i$  force généralisée.

## BIBLIOGRAPHIE

1. SOLOMON Liviu.  
ELASTICITE LINEAIRE.  
Paris, Masson et Cie Editeurs, 1968 - 742 p.
2. DIALLO Mohamadou Lamine.  
Notes de cours: MECANISMES ET DYNAMISME DES MACHINES  
Thiès, Ecole Polytechnique, 1989.
3. GOLDSTEIN Herbert.  
MECANIQUE CLASSIQUE.  
Editions Masson, 1967
4. DHATT Gouri & TOUZOT Gilbert.  
UNE PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.  
Québec, Les Presses de l'Université Laval  
Paris, Maloine S.A Editeur, 1981 - 544 p.
5. MARCHOUK G. & AGOCHKOV V.  
INTRODUCTION AUX METHODES DES ELEMENTS FINIS.  
Moscou, Editions MIR, 1985 - 432 p.
6. ZIENKIEWICZ O.C.  
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.  
Paris, Ediscience, 1973 - 525 p.
7. LAPIDUS Léon & PINDER George F.  
NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SCIENCE  
AND ENGINEERING.  
Princeton, New Jersey, John Wiley & Sons editor, 1981 - 677 p.