REPUBLIQUE DU SENEGAL

ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR DE CONCEPTION

TITRE : ELABORATION DE MODÈLES MATHÉMATIQUES D'ÉTUDES DE SYSTÈMES DE TRANSPORT;

AUTEUR : MULENDA MPOMBO

DIRECTEUR : JEAN-CLAUDE WARMOES

CO-DIRECTEUR : SAMBA DIALLO

DEPARTEMENT : GÉNIE MÉCANIQUE

DATE : JUIN 1987

Génie : Mécanique

J'exprime ma reconnaissance à toutes les personnes qui, par leurs conseils, encouragements et suggestions ont efficacement contribué à la réalisation du présent projet de fin d'études.

Je pense particulièrement à messieurs Jean-Claude WARMOES, M. Sc. A., Ph. D., Professeur et Samba DIALLO, M. Sc., Ing. qui ont volontiers accepté d'être respectivement Directeur et Co-Directeur du Présent projet de fin d'études.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les professeurs de l'Ecole Polytechnique de Thiès ayant contribué à ma formation d'ingénieur, au personnel du centre de calcul, ainsi qu'à toutes mes amies et tous mes amis pour leur assistance technique et morale combien précieuse.

Un grand merci tout particulier à ma famille si loin de moi physiquement, mais toujours aussi présente dans mes pensées et en mon coeur.

TABLE DES MATIERES

DEFINITION GENERALE DU PROBLEME

Il s'agit dans le présent rapport de présenter un essai de résolution du problème de l'optimisation d'une organisation de transport,par la création d'un modèle général qui approche le problème avec une précision acceptable.

Avant d'aborder la question de la définition du modèle proprement dit,il est nécessaire de fournir une question à la question suivante: que signifie l'optimisation d'une organisation de transport?

La meilleure réponse est la suivante: une organisation de transport est optimale si elle satisfait les besoins(demandes) de transport de toute nature pour la période étudiée,mais en réussissant à donner une valeur extrême aux critères choisis.

Cette réponse soulève à son tour plusieurs questions:

a)comment et par quels paramètres peut être exprimée une demande de transport?

b)comment et en fonction de quels paramètres peut-on exprimer l'aptitude d'un système de transport à satisfaire la demande de transport?

c)comment prendre en compte le facteur temps dans la détermination d'un système de transport?

d)que faut-il prendre comme critère d'optimisation d'un système de transport?

La demande de transport pour une marchandise déterminée ne s'exprime pas sous la forme d'un paramètre simple.
L'information qui consiste à indiquer que x tonnes de marchandises doivent être transportées de A à B est insuffisante;car le client pour ce transport peut désirer que ces x tonnes soient acheminées en 3 jours à partir de la remise des dites marchandises même dans les conditions les plus défavorables de l'organisation de cet acheminement.
Il en est de même avec le transport de voyageurs:il est indispensable que soient précisées les possibilités d'acheminement des voyageurs,avec les différentes vitesses commerciales pratiquées,dans les différentes conditions d'exploitation envisagées,avec les niveaux de confor souhaités,..

DEFINITION DETAILLEE DU PROBLEME

Une demande globale de transport au niveau d'une région est l'ensemble des besoins d'acheminement de marchandises et de personnes entre toutes les localités qui sont le siège qui sont le siège d'une activité de transport,pour une période de temps donné(une année par exemple).

Différentes branches de transport peuvent contribuer à satisfaire ces besoins de transport. Si nous sommes dans une année(on pourrait prendre une autre période quelconque)qui précède la période prise pour horizon du plan de N années,et si nous disposons de prévisions de demandes année par année jusqu'à cet horizon,le problème est alors de déterminer la contribution de chaque branche de transport pour chaque année,de telle sorte que la demande globale de transport soit satisfaite et que la valeur extrême soit atteinte pour les critères choisis.

DEMARCHE ENVISAGEE

Le problème sera résolu en trois étapes:

a)d'abord pour une relation entre A et B

b)ensuite pour un réseau de transport<u>primaire</u> c'est à dire un réseau reliant les principaux centres de demande;

c)enfin,pour l'ensemble du réseau de transport.

J'essaierai autant que possible d'introduire les définitions nécessaires,les symboles,et procédures analytiques au cours de la première étape.

CHAPITRE 1: INTRODUCTION

Certains transports dont la distance de transport est relativement courte,ou ayant un faible débit,ou encore dominés par une spécialisation monopolistique exigent une approche moins globale.Ils seront exhaustivement exclus du champ de mon investigation.

Il s'agit de:

-transport urbain dont la distance de transport dépasse rarement les 25 km;

-transport par téléphériques ou par courroies transporteuses,solutions économiques justifiées par un parcours accidenté;

-transport par pipe-line ne pouvant s'appliquer qu'à un certain nombre de marchandises déterminé(le pétrole et ses dérivés).

Les trafics fondamentaux qui seront pris en considération sont:la voie maritime,la voie aérienne,la voie navigable,la voie routière,la voie ferrée.

Ayant donc prévu le niveau de trafic,mis en place les infrastructures nécessaires pour absorber le trafic,il est alrs question de voir les problèmes qui se posent en terme d'organisation de transport.

Les principaux problèmes peuvent être libellés comme suit:

-un certain nombre de centres de production doivent desservir un certain nombre de centres de consommation.Comment organiser la circulation(des biens et personnes)pour que l'ensemble des besoins des centres de consommation soit satisfait?

-une région génère vers une autre un certain niveau de trafic(marchandises et voyageurs).Il y a plusieurs itinéraires possibles et plusieurs moyens d'aller d'une région à l'autre.Comment répartir ce trafic pour que l'ensemble des itinéraires soit utilisé au mieux et que le coût total d'exploitation soit le plus faible?

-un certain nombre de matériels peut être employé à certaines tâches déterminées.Comment optimiser l'utilisation de ces matériels,c'est à dire maximiser le rendement global ou minimiser le coût total?

-enfin,un réseau de transport étant donné,quelle est la localisation optimale,c'est à dire celle qui minimise l'ensemble des coûts de transport?

En ce qui me concerne, il s'agit de trouver la solution à la combinaison des tros premiers problèmes pris globalement.
Bien entendu, dans le deuxième cas au lieu de considérer deux régions uniquement, je dois considérer tout un réseau constitué de plusieurs centres de demandes; et dans le troisième cas, par matériels j'entends les différentes branches de transport.
Le premier problème relève d'une programmation de desserte, le second d'une programmation de répartition, et le troisième d'une programmation d'affectation.

La démarche sera telle que suggérée précédemment.

CHAPITRE 2:RESOLUTION DU PROBLEME ENTRE 2 LOCALITES A ET B

DEFINITION DES PARAMETRES

Etant donné qu'un modèle est en général une relation logique constituée de certains paramètres lesquels,à des valeurs déterminées,devront optimiser la fonction économique(maximiser le rendement,minimiser les coûts,...),il est nécessaire dès le départ de poser et de définir les dits paramètres.
Dans le cas présent,je distinguerai les paramètres de la demande de ceux de l'unité de capacité de transport.

2.1.Les paramètres de la demande

La demande globale de transport de A vers B et de B vers A est constituée d'une demande de transport de marchandises R et d'une demande de transport de voyageurs P.La demande est en général exprimée pour des catégories homogènes de marchandises ou de voyageurs.
Soient $R_{1,i}, R_{2,i}, \ldots, R_{n,i}$ la demande par n catégories de marchandises pour l'année i,et $P_{1,i}, P_{2,i}, \ldots, P_{m,i}$ la demande par m catégories de voyageurs pour la même année i.

La demande de transport pour la jème catégorie homogène de marchandises de l'année i est caractérisée par les paramètres suivants:

-transport total nécessaire de marchandises, $r_{j,1,i}$, qui est la quantité de marchandises(en tonnes par exemple) qui doit être transportée de A à B pendant l'année i.
Il faut noter la différence à faire entre la direction de A à B, représentée par (r_{AB}) et celle de B vers A (r_{BA}).
Afin d'éviter la constitution de modèles extrêmement grands, la valeur prise en considération pour la demande sur l'itinéraire AB est $r=\text{Max}\ (r_{AB}, r_{BA})$.
J'admettrai tout au long de mon développement que $r_{AB} > r_{BA}$, aussi ne vais-je m'occuper que du transport de A vers B.
-capacité maximale nécessaire de transport-marchandises, $r_{j,2,i}$
c'est la quantité de marchandises, en tonnes, qui peut être transportée en une semaine (période subjective).
-demande de transport minimale garantie, $r_{j,3,i}$
c'est la quantité de marchandises, en tonnes, qui doit être transportée au moins pendant deux jours en période exceptionnellement chargée.

Ainsi une demande $R_{j,i}$ est une variable qui s'exprime sous forme de vecteur:

$$R_{j,i}=[r_{j,1,i},\ r_{j,2,i},\ r_{j,3,i}] \qquad (1)$$

La demande globale de transport de marchandises à acheminer entre A et B pendant l'année i est:

$$R_i=R_{1,i}+R_{2,i}+\ldots+R_{j,i}+\ldots+R_{n,i} \qquad (2)$$

Ce qui veut dire que R_i est un vecteur dont les composantes sont:

$r_{1,i}$=transport total nécessaire de marchandises

$r_{2,i}$=capacité maximale nécessaire de transport-marchandises

$r_{3,i}$=transport garanti

Ces composantes peuvent être calculées de manière suivante:

$$r_{1,i}=\sum_{j=1}^{n} r_{j,1,i}$$

$$r_{2,i}(t_1)=\max\sum_{j=1}^{n} r_{j,2,i}(t)$$

$$r_{3,i}=\sum_{j=1}^{n} r_{j,3,i}$$

où t représente la suite des semaines de l'année considérée.

Pour caractériser la quantité de marchandises de catégorie j qui doit êrte transportée pendant une semaine,il est nécessaire de définir de quelle semaine éventuellement unique de l'année il s'agit.

C'est sur la base de données de ce genre que l'on peut déterminer la caoacité maximale de transport nécessaire pour toutes les n catégories de marchandises.

La demande globale de transport-marchandises pour la période du plan limitée par l'année-horizon N est donnée par le vecteur:

$$R=[R_1,R_2,\ldots,R_N]$$

*La demande de transport pour la jième catégorie homogène de voyageurs de A vers B pour l'année i pourra être caractérisée par les paramètres suivants:

-<u>Besoins totaux de transport</u> $P_{j,1,i}$

C'est le nombre total de voyageurs de catégorie j qui désirent voyager de A vers B pendant une année;

-Nombre minimum de voyageurs $P_{j,2,i}$

nombre de voyageurs de la catégorie j qui doit voyager de A vers B pendant une journée quelles que soient les conditions de voyage;

-Nombre maximum de voyageurs, $P_{j,3,i}$

nombre de voyageurs de catégorie j qui désirent voyager de A vers B pendant une journée, lorsque des motivations particulières pour que ce nombre atteigne son maximum sont réunies;

-Durée maximale acceptable de voyage, $P_{j,4,i}$

durée du trajet au-dessus de laquelle les voyageurs de catégorie j cessent de faire recoures au transport proposé.

Si m=3, la demande de transport-voyageurs pour l'année i est:

$$P_i=[P_{1,i},\ P_{2,i},\ P_{3,i},\ P_{1,4,i},\ P_{2,4,i},P_{3,4,i}]$$

où: $P_{1,i}=\sum_{j=1}^{3} P_{j,1,i}$

=transport total nécessaire

$$P_{2,i}(t_2)=\min_{t} \sum_{j=1}^{3} P_{j,2,i}(t)$$

=capacité minimale de transport nécessaire

$$P_{3,i}(t_3)=\operatorname{Max}_{t} \sum_{j=1}^{3} P_{j,3,i}(t)$$

=capacité maximale de transport nécessaire

2.2. Les paramètres de l'unité de capacité de transport

2.2.1. définition

L'unité de capacité de transport est définie séparément pour chaque itinéraire.

a) l'unité de capacité de transport de marchandises pour la kième branche de transport, sur l'itinéraire AB, est la capacité de transport qui permet d'acheminer 1000 tonnes de marchandises entre A et B dans le temps-unité, lorsque les conditions et le régime d'exploitation sont normaux.

b) l'unité de capacité de transport-voyageurs pour la kième branche de transport, sur l'itinéraire AB, est la capacité de transport qui permet d'acheminer 100 voyageurs de A vers B dans le temps-unité, lorsque les conditions et le régime d'exploitation sont normaux.

2.2.2. Les paramètres proprement dits

Supposons, dans un cas général, qu'il y ait q branches de transport; par exemple letransport ferroviaire constitue la branche 1, le transport routier la branche 2, le transport fluvial la branche 3, le transport maritime la branche 4, le transport aérien la branche 5 (une subdivision plus détaillée est possible pour certaines branches).

Les paramètres de l'unité de capacité de transport(unité de fourniture de prestation de transport) seront définis par rapport aux paramètres de demande.

*Les paramètres de l'unité de capacité pour la kième branche de transport sur l'itinéraire AB pour l'année i sont:

-contribution annuelle moyenne possible de transport $u_{k,1,i}$

volume de marchandises, en tonnes, qui peut être transporté

-capacité garantie de transport-marchandises, $u_{k,2,i}$

volume de marchandises, en tonnes, qui peut être transporté pendant la semaine t_1 de l'année i;

-capacité maximale intangible de transport, $u_{k,3,i}$

quantité maximale de tonnes de marchandises pouvant être transportée dans une période de deux jours dans les conditions les plus difficiles.

Si on exprime la capacité de transport de marchandises que présente la kième branche pour l'année i sur la relation AB par $x_{k,i}$,cette capacité permet:

1. de transporter $1000.u_{k,1,i}.x_{k,i}$tonnes de marchandises de A à B pendant l'année i;
2. de transporter au maximum $1000.u_{k,2,i}.x_{k,i}$ tonnes de marchandises de A à B pendant la tième semaine de l'année i;
3. de garantir le transport de $1000.u_{k,3,i}.x_{k,i}$ tonnes de marchandises de A à B pendant une période de deux jours dans des conditions exceptionnellement difficiles.

*Pour le transport de voyageurs,la capacité unitaire que présente la kième branche de transport sur l'itinéraire AB pendant l'année i peut être définie par:

-<u>le transport moyen annuel de voyageurs possible,</u>$v_{k,1,i}$ représente le nombre de voyageurs pouvant être transporté durant l'année i;

-<u>la capacité garantie de transport-voyageurs,</u>$v_{k,2,i}$,définie comme étant le nombre de voyageurs pouvant être transporté pendant la $t_2$ième jour de l'année i,même dans les conditions les plus défavorables;

-<u>la capacité maximale de transport-voyageurs,</u>$v_{k,3,i}$,qui détermine le nombre maximum de voyageurs pouvant être transporté pendant le $t_3$ième jour de l'année i;

-<u>la durée du trajet qui peut être garantie,</u>$v_{k,4,i}$,durée de voyage dont on garantit qu'elle ne sera pas dépassée,sauf en cas d'accident imprévisible.

De même dans ce cas, en exprimant la capacité de transport-voyageurs que présente la kième branche de transport pour l'année i sur le parcours AB, par $y_{k,i}$, on peut:

1. transporter $100.v_{k,1,i}.y_{k,i}$ voyageurs de A vers B pour l'ensemble de l'année i
2. assurer le transport de $100.v_{k,2,i}.y_{k,i}$ voyageurs de A à B pendant le $t_2$ième jour de l'annéei;
3. transporter $100.v_{k,3,i}.y_{k,i}$ voyageurs au maximum pendant le $t_3$ième jour de l'année i;
4. garantir que la durée du trajet de A à B ne dépassera pas $v_{k,4,i}$ heures, sauf en cas d'accident imprévisible.

2.3. Capacité de transport minimale nécessaire

La capacité minimale de transport pour la branche de transport k nécessaire pour satisfaire les demandes sur l'itinéraire AB pendant l'année i est notée $Z_{k,i}$ et est constituée de deux éléments: la capacité minimale nécessaire de transport de marchandises $x_{k,i}$ et la capacité minimale nécessaire de transport de voyageurs $y_{k,i}$:

$$Z_{k,i}: |x_{k,i}, y_{k,i}| \qquad (4)$$

Dans le cas où la demande totale de transport de marchandises et de voyageurs est satisfaite par la branche de transport k, la capacité minimale nécessaire pour cette branche est la valeur minimale des variables $x_{k,i}$ et $y_{k,i}$ qui satisfasse les inégalités:

$$1000.u_{k,s,i} \cdot x_{k,i} \geq r_{s,i} \qquad (5)$$

$$100.v_{k,s,i} \cdot y_{k,i} \geq p_{s,i} \qquad (6)$$

pour $s=1,2,3$

$v_{k,4,i} \leq P_{j,4,i}$ pour $j=1,2,3$

2.4. Capacité de transport maximale possible (x_{max}, y_{max})

La capacité de transport entre les localités A et B a des limites supérieurespour chaque branche de transport.
Par exemple, s'il n'y a pas de rivière navigable entre A et B, la capacité maximale du transport fluvial est nulle.
Etant donné la capacité maximale de chaque branche de transport se modifie par suite du développement des techniques et de la technologie, on a, pour la période limitée par l'horizon N du plan:

$$x_{max}, y_{max} = f_1(i) \quad \text{où } i=1,2,\ldots,N \qquad (7)$$

2.5.Elaboration du modèle proprement dit

2.5.1.Introduction

La prévision de la demande globale de trafic repose sur des modèles du type induction statistique.

Le principe général est une liaison temporelle ou spatiale entre la demande globale de trafic et une ou plusieurs variables explicatives.

La variable explicative peut être le temps ou un facteur présentant un lien de causalité avec la demande de trafic?

Dans le cas présent,étant donnée l'importance du facteur temps,un calcul d'actualisation s'avère indispensable.

L'idée de base pour ce calcul est la suivante:1F disponible tout de suite et 1F disponible dans un an sont deux biens économiques différents,que l'on ne peut ni comparer ni additionner directement.

Si i=taux d'intérêt,l'équivalence s'établit entre 1F tout de suite et (1+i)F dans un an,ou bien entre 1/(1+i) tout de suite et 1F dans un an.

De même 1F dans deux ans est équivalent à 1/(1+i)F dans un an,et à $\frac{1}{(1+i)^2}$ tout de suite.

De manière générale:1F dans n années équivaut à $\frac{1}{(1+i)^n}$F tout de suite.

Ainsi, en faisant l'opération A on peut espérer un bénéfice actualisé:

$$B_a = \left(E_o - D_o\right) + \frac{E_1 - D_1}{1+i_1} + \frac{E_2 - D_2}{(1+i_1)(1+i_2)} + \cdots + \frac{E_n - D_n}{(1+i_1)\cdots(1+i_n)} .$$

En supposant: -taux d'intérêt constant: $i_1 = i_2 = \ldots = i_n = i$

-recettes et dépenses constantes: Revenu annuel constant: $R_i = E_i - D_i = R \quad ¥ i$

On peut alors écrire:

$$B_a = -D_o + \frac{R}{1+i}\left[1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

En utilisant la formule des régressions géométriques:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

j'obtiens:

$$B_a = -D_o + \frac{R}{i}\left[1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]$$

lorsque $n \to \infty$

$$B_a = -D_o + \frac{R}{i}$$

A ce stade, on peut dire que le premier critère de choix entre les options A et B est la valeur de leur bénéfice actualisé.

Il s'agira donc, pour mon modèle, de calculer le coût total actualisé pour la période prévue jusqu'à l'horizon du plan (N années).

et pour la demande globale de transport.

2.5.2. Modèle mathématique

La demande de transport sur l'itinéraire AB est exprimée par les vecteurs R_i,$P_{1,i}$,$P_{2,i}$,$P_{3,i}$ pour l'année i,

où je rappelle que:R_i=demande globale de transport de marchandises à acheminer entre A et B durant l'année i;

$P_{1,i}$=transport total nécessaire de voyageurs

$P_{2,i}$=capacité minimale de transport voyageurs nécessare

$P_{3,i}$=capacité maximale de transport nécessaire

La meilleure affectation des différentes branches de transport sera celle qui:

-correspond à la dépense actualisée la plus faible,

-et conduit au bénéfice actualisé maximum

L'affectation optimale ainsi définie fournit le vecteur-dépenses optimal qui y détermine les décisions d'exploitation à prendre chaque année.

Il faudra en outre vérifier si cette meilleure affectation est rentable,c'est à dire vérifier si le bénéfice actualisé est positif.

Connaissant le vecteur-recettes R et le vecteur-dépenses optimal D relatifs à l'affectation,le vecteur-bénéfice vaut:

$$B=R-D.$$

Notons par $c_{k,i}$ les coûts de transport de 1000 t de marchandises par la kième branche de transport,et par $d_{k,i}$ les coûts pour 100 voyageurs(voir définition de l'unité de capacité de transport).

Le taux d'intérêt étant w, la fonction économique est le coût actualisé (vecteur-dépenses) pour la période prévue jusqu'à l'horizon du plan (N années) pour la demande globale de transport:

$$\underline{D= f = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(1+w)^{i}} \left(c_{k,i} \cdot x_{k,i} + d_{k,i} \cdot y_{k,i} \right)}$$

2.5.3. Contraintes

L'offre de transport de l'ensemble des modes de transport pour chaque année de la période-horizon doit être au moins égale à la demande totale de transport de voyageurs et de marchandises:

a) $\Sigma\ \Sigma\ 1000.u_{k,s,i} \cdot x_{k,i} \geq \Sigma\ r_{s,i}$

$s=1,2,3$

$x_{k,i} \geq 0$

$x_{k,i} \leq x_{k,i+1} \leq x_{k,max}$ (9)

$k=1,2,\ldots,q$

$i=1,2,\ldots,N$

b) $\Sigma\ 100.v_{k,s,i} \cdot \overset{j}{y}_{k,i} \geq P_{j,s,i}$

$s=1,2,3$

$i=1,2,\ldots,N$

$j=1,2,3$

$\sum_{j=1}^{3} \overset{j}{y}_{k,i} = y_{k,i} \leq y_{k,ma\ x}$ (10)

$y_{k,i} = 0$ pour $v_{k,4,i} > P_{j,4,i}$

sinon $\overset{j}{y}_{k,i} \geq 0$

<u>Note:</u> $\overset{j}{y}_{k,i}$ représente la part de la capacité de la kième branche de transport qui doit être utilisée pour la jième catégorie de voyageurs, pendant l'année i.

2.5.4. Avantages du modèle

La création d'un modèle permettant l'analyse économique d'une affectation de transport où différentes branches sont mises en jeu présente un atout majeur.

Une fois que l'exploitant a introduit dans l'ordinateur une description précise de l'affectation choisie:branche de transport adoptée,différents coûts induits(p.ex. carburant,coûts indirects,...),recettes espérées,etc...,il peut alors comparer le rendement des différentes optiosns sur plusieurs années.

Le programme permettra de produire des tableaux des coûts,revenus et bénéfices pour chaque possibilité et aidera ainsi l'exploitant à faire les chois les plus rentables.

Le logiciel peut ensuite répondre à une multitude de questions en fonction des choix effectués.

Par exemple,l'utilisateur peut comparer les revenus envisageables si le prix de carburant utilisé pour un quelconque mode varie,ou si des perturbations géographiques survenaient,etc....

La complexité de ces systèmes pour un réseau très vaste est telle quel'ordinateur peut être d'un grand secours à l'exploitant qui se demande comment agencer dans le temps et dans l'espace les différentes branches de transport dont il dispose pour une exploitation optimale.

2.5.5. Caractéristiques du modèle

La fonction économique f montre que si $c_{k,i}$ et $d_{k,i}$ expriment les coûts de l'unité de capacité de transport,on a alors:

$$c_{k,i}=c(x_{k,i}) \quad \text{et} \quad d_{k,i}=d(y_{k,i}),$$

c'est à dire que les coûts par unité de capacité de transport dépendent du niveau de capacité et de la technologie de chaque mode de transport.

Si la loi des revenus décroissants se vérifie,on peut admettre que c,d rt f sont des fonctions convexes.

Si par contre $c_{k,i}$ et $d_{k,i}$ expriment les prix de vente de l'unité de service de transport,i,dépendemment du niveau de ce service,(8) est alors une fonction linéaire des variables $x_{k,i}$ et $y_{k,i}$.

La valeur des coefficients u et v pour chaque mode de transport dépend en fait de la capacité de transport.

On voit tout de suite que ces coefficients ont des valeurs directement proportionnelles à x et y,car plus grands sont x et y,plus grands sont aussi u et v respectivement,à l'exception bien entendu de la quatrième composante du coefficient v.

Il en résulte donc que u.x et v.y sont des fonctions quadratiques des variables respectivement x et y,ce qui signifie que les contraintes (9) et (10) sont des fonctions convexes.

Si les paramètres u et v sont constants,ces contraintes sont des fonctions linéaires.

Je peux donc résumer l'analyse ci-dessus en disant que le modèle appartient à l'une des classes de modèles ci-après:

critères de contraintes

1.-fonction convexe
  -ensemble de fonctions convexes

2.-fonction convexe
  -ens.de fonctions linéaires

3.-fonction linéaire
  -ensemble de fonctions convexes

4.-fonction linéaire
  -ens.de fonctions linéaires

Les mathématiques supérieures démontrent aisément que,contrairement aux fonctions concaves,si f est une fonction convexe définie sur un ensemble convexe,alors un minimum local de f est un minimum global de f.Cela facilite remarquablement la tâche vu qu'il est relativement facile d'obtenir un minimum local.

Si tel n'était pas le cas,il fallait s'intéresser à trouver le minimum global,étant donné que la différence entre la valeur de f en un optimum global et celle en un optimum local peut être importante relativement à la valeur de f.

CHAPITRE 3: PROBLEME DE DONNEES

Puisque le modèle est relativement complexe,le problème de données est important.A partir de statistiques existantes et/ou de calculs simples,il est possible d'établir les valeurs des paramètres u et v pour le passé et pour l'année en cours.

En effet,la prévision de la demande globale de trafic repose sur des modèles du type induction statistique.Le principe général est une liaison temporelle ou spatiale entre la demande globale de trafic et une ou plusieurs variables explicatives.

La variable explicative peut être le temps ou un facteur présentant un lien de causalité avec la demande de trafic.

Je me propose d'examiner quelques types de liaison.

1.liaison avec le temps

Mise à part l'extrapolation de la tendance passée,la prévision de la demande globale de trafic en fonction du temps,pour une série chronologique assez longue donne des ordres de grandeur que l'on peut considérer en première approximation comme valables.

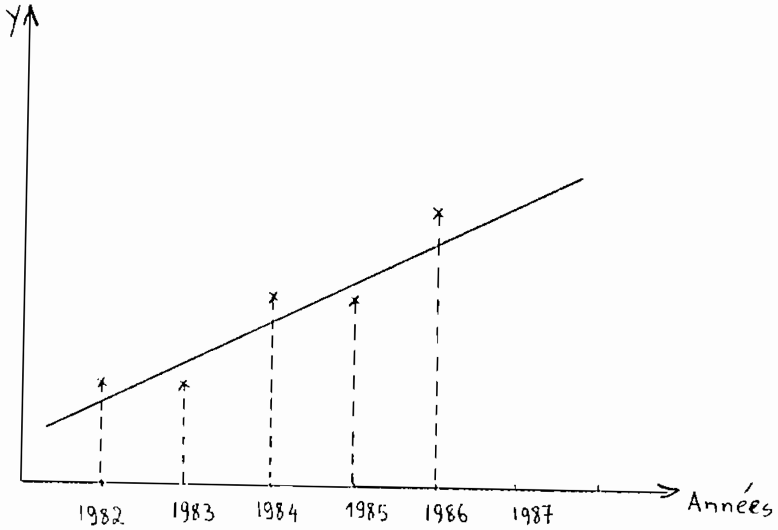
En fait,le processus méthodologique consiste à construire en graphique la série rétrospective et de voir à quel type de fonction la courbe peut se rattacher.

Une fois déterminé le type de fonction,on donne au temps (années) des valeurs fictives allant de 0,1,2,....,t à n (s'il y a n observations).

Soit y la demande globale de trafic,on cherche la relation $y=f(t)$.

Soit N=n+1 l'année-horizon de la prévision;en donnant à t la valeur n+1,on détermine la valeur de y.

a)liaison linéaire



La fonction est du type : $y = a + bt$

on calcule le coefficient de corrélation entre y et t:

$$\rho_{yt} = \frac{\Sigma y_i \cdot t_i - n\bar{y}\bar{t}}{n\sigma_y \cdot \sigma_t}$$

où : $\bar{y}, \bar{t}$: moyennes des y_i et des t_i

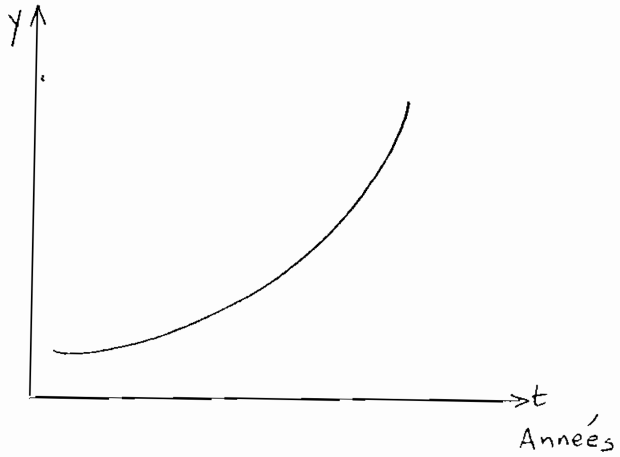
σ_y, σ_t : écart-types des y_i et t_i

n : nombre d'observations

On calcule ensuite les coefficients a et b selon:

$$b = \rho_{yt} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_t} \qquad a = \bar{y} - b\bar{t} .$$

b)liaison exponentielle



La fonction exponentielle est de la forme: $y=a.b^t$

La transformation en logarithmes donne:

$$\text{Log } y=\text{Log}a+t.\text{Log}b$$

on se ramène au cas précédent,mais au lieu de travailler sur les valeurs réelles de y,on travaille sur leurs logarithmes.

2.Liaison avec un facteur de causalité

Généralement,la prévision de la demande globale de trafic peut donner de bons résultats lorsque l'on se fonde sur une liaison avec un agrégat de comptabilité nationale:Revenu National,P.N.B.,etc....

En comptabilité,à ce niveau,trois problèmes de fond doivent être examinés:

-l'invariance de la liaison dans le temps

-l'élasticité trafic/agrégat

-les effets-prix sur le marché

Je vais examiner les 2ième et 3ième cas,soient les effets-prix sur le trafic et l'élasticité trafic/agrégat.

a)les effets-prix sur le marché

La prise en compte de la variable prix soulève un certain nombre de problèmes:

-comment doit être calculé le niveau réel des tarifs? à prix constants?

-lorsque l'on étudie la demande globale de transport tous modes réunis,sur quelle base pondérer l'indice des prix des différents modes:tonnages kilométriques,ou tonnages transportés?

-lorsque l'on étudie la demande globale de transport d'un mode donné,le niveau de prix doit-il être calculé par rapport aux tarifs des modes concurrents?

Il est évident que chaque cas de prévision comporte des conditions spécifiques et modifie les réponses aux questions ci-dessus.Cependant,théoriquement on peut admettre les conclusions suivantes:-la pondération d'un indice général des prix de transport tous modes réunis doit se faire en première approximation sur la base de tonnages kilométriques;

-si l'on étudie la demande globale de transport pour un mode donné,la prise en compte des niveaux de tarifs des modes concurrents est souhaitable.On étudiera donc la relation entre le trafic du mode pour lequel on veut réaliser une prévision et le niveau de tarif des modes qui lui sont le plus directement concurrents.

Il va de soi que cette méthode s'avère plus ardue que celle décrite en 1.

b)l'élasticité trafic/agrégat

UNe approche pour prévoir la demande globale de transport est de considérer l'élasticité trafic/agrégat.

La notion de l'élasticité d'une variable par rapport à une autre est le rapport du pourcentage de variation de la première sur le pourcentage de variatiopn de la seconde.

Soit par exemple la relation reliant y le trafic à x le P.N.B.:

$$y=a+bx$$

par définition l'élasticité trafic/P.N.B. vaut:

$$e = \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x}$$

Supposons: $\frac{\Delta y}{y} = 5\%$ et $\frac{\Delta x}{x} = 2.5\% \longrightarrow e = 2$

ce qui signifie que toute augmentation du P.N.B. aura comme conséquence une augmentation double du trafic.

On peut remarquer qu'un coefficient d'élasticité négatif signifie qu'à une augmentation de x correspond une diminution de y et vice-versa;alors que lorsqu'il est nul il y a inélasticité.

En outre,l'élasticité,qui dépend des variations en % n'a pas de relation avec la pente de la courbe qui traduit des variations en valeurs absolues.Cependant,en reliant la notion d'élasticité à celle de logarithmes,on pourra associer le coefficient d'élasticité et la pente de la courbe.

En effet,jusqu'à présent mon acception de l'élasticité est ponctuelle,c'est à dire qu'il y a autant de coefficients d'élasticité qu'il y a de couples de valeurs x et y associés.En admettant maintenant un coefficient constant,et que par ailleurs la relation trafic/agrégat est de nature exponentielle(cas général),on aura:

$y = k \cdot x^e$ où k = constante et e = élasticité

$\text{Log } y = \text{Log } k + e \text{ Log } x$ (a)

faisons varier y de Δy et x de Δx

$\text{Log } (y + \Delta y) = \text{Log } k + e \text{ Log } (x + \Delta x$ (b)

faisons (b)-(a) et multiplions chaque membre par $\frac{1}{\Delta y \cdot \Delta x}$

et d'autre part, sachant que les rapports $\frac{\text{Log}(y+\Delta y) - \text{Log } y}{\Delta y}$ et $\frac{\text{Log}(x+\Delta x) - \text{Log } x}{\Delta x}$ sont équivalents aux dérivées de Log y et Log x pour y et x suffisamment petits, et que $(\text{Log } y)' = \frac{1}{y}$ et $(\text{Log } x)' = \frac{1}{x}$,

on trouve finalement que $e = \frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{x}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x}$.

On retombe bien sur la même formule de e.
Ainsi,connaissant le coefficient d'élasticité et la variation relative de l'agrégat x,on peut induire facilement la variation du trafic.
Il va sans dire que cette méthode devrait généralement s'appliquer sur les compagnies nationales ayant le monopole des transports sur tout le réseau national;et est d'autant plus facilitée pour elles dans la mesure où le P.N.B.(c'est à dire x à l'année-horizon)est toujours connu(prévisions du plan).

Comme on vient de le voir,la prévision de la demande est une tâche assez difficile.Néanmoins,pour le trafic courant des données sur l'implantation de centres d'affaires et des centres industriels,culturels,touristiques et commerciaux importants permettent des prévisions relativement précises des besoins en transports,au moins pour les principales catégories homogènes de marchandises et de voyageurs.
Mais même s'il y a des risques de faire de grosses erreurs dans les prévisions à long terme,la valeur du modèle n'en est pas diminuée car les données concernant le long terme n'ont qu'un effet réduit par suite de l'actualisation.
Une solution proposée par le modèle reste relativement stable lorsqu'on fait varier les données concernant la demande des dernières années.

La détermination des paramètres c et d dépend de leurs significations.

-si c et d représentent les coûts par unité de capacité de transport telle que définie précédemment,leur détermination est un problème difficile,car il est nécessaire de bien préciser le sens donné aux termes de coûts(réels,prévisionnels,...)et donc de définir la structure des coûts qui doivent être utilisés dans les calculs.

-dans le cas où c et d représentent le prix du service de transport offert,le problème se ramène au précédent si le prix est corrélé de façon très étroite avec le coût de l'exécution du transport.

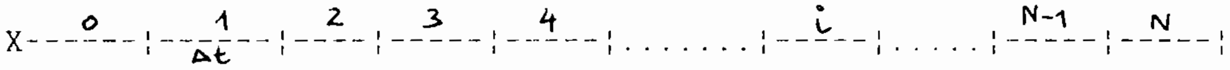
CHAPITRE 4:UTILISATION DU MODELE

Un plan optimal de transport-solution du modèle)pour la période étudiée jusqu'à l'horizon N est choisi dans l'année qui précède le début de cette période.

Désignons cette solution par S_1 et le modèle par M_1.

On doit maintenant définir un plan d'observation et de réadaptation au plan,temps qui débute dès la première année de la période étudiée et qui dure ,avec naturellement <N.

Pendant ce temps ,on note les valeurs des paramètres et on détermine les déviations ainsi que l'importance des écarts entre ces valeurs et celles prises pour l'étude.De cette façon on recueille des données sur la partie de la période étudiée qui a en réalité l'effet le plus important sur le choix du plan de transport.



0=période pendant laquelle est choisi le plan de transport S_1

Δt =période d'observation et de réadaptation au plan

1.....N=période étudiée,limitée par l'horizon N

A la fin du temps Δt ,on établit un nouveau modèle en se servant des données recueillies pendant ce temps Δt .

Ce nouveau modèle M_{1n} diffère du précédent M_1 par des modifications dans les valeurs des paramètres.Les deux modèles ont le même horizon,l'horizon initial,pour objectif.

En résolvant le modèle M_{1n},on obtient un plan de transport S_{1n} qui,très vraisemblablement différera de S_1.

L'analyse des écarts entre les modèles(M) et les solutions (S) fait apparaître:

1.des erreurs dans la prévision des valeurs des paramètres;

2.l'influence de ces erreurs sur la solution S_1,mise à l'écart et remplacée par S_{1n}.

Avec une telle méthode on apprend à connaître le système et son modèle.

Après le tempsΔt,un nouvel horizon est défini et le processus est répété.

Cela veut dire que:

a)un modèle M_2 est établi et la solution qu'il fournit esr S_2;

b)le modèle est vérifié et corrigé pendant le temps ,ce qui conduit à l'établissement d'un nouveau modèle M_{2n} et sa nouvelle solution est S_{2n};

c)les différences entre les modèles M_2 et M_{2n} et entre leurs solutions S_2 et S_{2n} sont analysées,d'où l'obtention d'une statistique des erreurs dans les prévisions.

Cette procédure répétée plusieurs fois(il est d'ailleurs préférable de le faire à intervalles assez courts),on s'apercevra à coup sûr que les valeurs d'un groupe de paramètres sont surestimées tandis qu'elles sont sous-estimées pour un autre groupe,et cele avec une certaine régularité.

Par ailleurs,on aboutit de proche en proche au olan optimal,en prenant en compte les modifications qui surviennent pendant la période étudiée jusqu'à l'horizon choisi.

La structure initiale du plan(S_1)s'approche de plus en plus de la meilleure structure réalisable S^*.

CHAPITRE 5:MODELE POUR UN RESEAU DE TRANSPORT PRIMAIRE

Dans un modèle mathématique il n'est pas recommandé de couvrir le réseau tout entier,c'est à dire prendre en compte tous les arcs entre tous les noeuds.Il faut plutôt définir un réseau primaire(BASE) constitué des itinéraires de base souhaités (Réseau des Itinéraires de Base Souhaités=R.I.B.S.),c'est à dire de l'ensemble des arcs qui relient les principaux centres de demande de transport.

Quand le modèle est résolu pour un arc,la capacité de transport se trouve déjà attribuée à une partie du R.I.B.S..AU fur et à mesure que que toutes les autres lignes de transport sont ajoutées au R.I.B.S.,on aboutit au Réseau de Transport Complet (R.T.C.).

Cette démarche est valable en vertu du principe(théorème) d'optimalité de BELLMAN qui dit que:"une politique optimale ne peut être formée que de sous-politiques optimales".

Ce théorème s'énonce généralement comme suit:Soit un système pouvant changer d'état à chaque phase k(k=0,1,2,...,N) étant en nombre fini ou non,mais dénombrable;on appelle "politique une certaine succession de décisions de k=0 à k=N;on appelle "sous-politique une succession de décisions jointives faisant partie d'une politique;alors si l'on se donne une fonction de valeurs relative à ces changements d'état et qu'on se propose d'optimiser cette fonction,alors le théorème suivant est vrai:une politique optimale ne peut être formée que de sous-politiques optimales.

La démonstration de ce théorème peut être donnée à partir de concepts de l'algèbre moderne;mais elle est si simple que l'on peut considérer le théorème comme trivial.
En effet,considérons une sous-politique extraite d'une politique optimale;si cette politique n'était pas optimale,il en existerait une autre meilleure qui,complétée par la partie restante de la politique considérée permettrait d'améliorer celle-ci,ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.
Une politique est donc optimale si ,à une phase donnée,quelles que soient les décisions précédentes les décisions qui restent à prendre constituent une politique optimale tenant compte des résultats des décisions précédentes.

La structure optimale pour le R.I.B.S. est donc composée d'un ensemble de plans optimaux pour chacune des lignes qui le composent,obtenus en applicant le modèle (8),(9),(10).
Par suite,ce sont des modèles isolés qui sont agrégés en un seul,et,de cette façon on obtient le modèle du R.I.B.S..

ATTENTION:Accepter simplement les solutions optimales de chacune des lignes peut aboutir à une structure de transport non cohérente pour le R.I.B.S..
En réalité ce qui peut arriver c'est que sur l'itinéraire BC par exemple la meilleure solution est la route,tandis que sur les itinéraires AB et CD c'est le chemin de fer.Il faudrait évidemment corriger une telle situation,car il existe pour la structure de transport d'autres caractéristiques plus importantes.On organisera ainsi untransport par chemin de fer sur l'itinéraire BC.

CHAPITRE 6: STRUCTURE OPTIMALE POUR LE R.T.C.

Le passage du R.I.B.S. au R.T.C. consiste à relier le noeud du R.I.B.S. à d'autres noeuds dont les demandes sont plus faibles,ainsi qu'à relier ces noeuds entre eux.En fait le problème est celui des itinéraires nettement plus courts.Il ne serait pas sensé de considérer toutes les branches les branches de transport car certains sont à priori hors de question(par exemple la branche de transport aérien entre deux centres distants de 20 km).Il n'est donc pas nécessaire de développer des modèles mathématiques si le nombre de solutions possibles est très réduit,ou s'il n'y a qu'une solution possible(par exemple recours possible au seul transport routier).

De ce fait,chaque itinéraire est tout d'abord analysé en utilisant les méthodes traditionnelles dans lesquelles l'expérience joue un rôle très important.Les solutions obtenues de cette façon ne sont pas moins valables que celles obtenues par des modèles mathématiques,et de plus ces dernières sont sans nul doute beaucoup plus chères.

Par dessus tout,le problème de transport sur les itinéraires courts est un problème de stratégie commerciale des compagnies industrielles de la région concernée.

Avec une telle approche de ce problème,on ne risque pas de commettre des erreurs qui auraient des répercussions négatives sur l'économie globale de la structure de transport.

CHAPITRE 7:ETUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS IMPORTANTS

Deux problèmes importants et fort liés au problème général examiné ci-dessus sont celui de la programmation de desserte et celui de la répartition optimaledu trafic d'exportation d'un produit en provenance d'une zone donnée vers un certain nombre de destinations.

Je vais donc traiter de ces deux aspects du problème en partant des hypothèses suivantes:

-le niveau du trafic est déjà prévu;

-les infrastructures nécessaires sont mises en place.

Néanmoins,pour le deuxième problème qui concerne la répartition optimale d'un trafic de produits,je vais considérer deux cas:

a)cas où la capacité physique d'un mode de transport devient inssufisante;

b)cas où la capacité économique d'un mode de transport est atteinte.

7.1.LA PROGRAMMATION DE DESSERTE

Définition

Le problème se pose comme suit:un certain nombre de centres de production doivent desservir un certain nombre de centres de consommation;comment faudrait-il organiser la circulation pour que l'ensemble des besoins des centres de consommation soit satisfait?

application sur un cas concret

Soient 3 centres de production A,B,C et 10 centres de consommation D,E,F,G,H,I,J,K,L,M.

- P_i(i=1,2,3):capacité de production des centres A,B,C
- D_j(j=1,2,...,10):demande des centres de consommation
- C_{ij}:coût unitaire d'approvisionnement du centre de consommation j par le centre de production i
- x_{ij}:quantité livrée par i sur j

contraintes:1. la somme des expéditions des 3 centres de production sur les 10 centres consommateurs j doit être égale à la demande de ces derniers:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}=\sum_{j=1}^{10} D_j \qquad (1)$$

2.la somme des expéditions des 3 centres producteurs sur les 10 centres de consommation ne peut en aucun cas dépasser la capacité de production des 3 centres de production:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}\leq \sum_{i=1}^{3} P_i \qquad (2)$$

La fonction économique à optimiser est:

$$F = \sum_{i} \sum_{j} C_{ij} \cdot x_{ij} \equiv \text{minimum}$$

Application numérique

Soit le tableau suivant des données:

x_{ij}	capacité des centres producteurs	125	80	95
besoins des cons.	C_{ij}	A (1)	B (2)	C (3)
16	D (1)	$c_{11} = 6$	$c_{21} = 1$	$c_{31} = 7$
55	E (2)	$c_{12} = 10$	$c_{22} = 3$	$c_{32} = 1$
9	F (3)	$c_{13} = 6$	$c_{23} = 10$	$c_{33} = 8$
7	G (4)	$c_{14} = 3$	$c_{24} = 9$	$c_{34} = 1$
80	H (5)	$c_{15} = 3$	$c_{25} = 8$	$c_{35} = 2$
12	I (6)	$c_{16} = 12$	$c_{26} = 7$	$c_{36} = 10$
25	J (7)	$c_{17} = 1$	$c_{27} = 10$	$c_{37} = 4$
20	K (8)	$c_{18} = 8$	$c_{28} = 10$	$c_{38} = 6$
8	L (9)	$c_{19} = 5$	$c_{29} = 7$	$c_{39} = 2$
15	M (10)	$c_{110} = 4$	$c_{210} = 9$	$c_{310} = 6$
53	Excédent de capacité (11)			

La dernière ligne concerne un centre de consommation fictif situé dans le centre producteur et qui absorbe l'excédent de capacité de production ;son coût de production est nul.

(les coûts sont donnés en "unités monétaires").

La méthode de calcul nécessitant l'emploi d'égalités,il est nécessaire de transformer en égalité la relation(2):

$$\sum_{j=1}^{11} x_{ij}=P_i \qquad (2')$$

puisqu'il a été créé un centre consommateur fictif(11).

Les besoins des centres consommateurs sont égaux à la capacité totale de production.

De même une nouvelle relation(1) sera écrite pour tenir compte de ce centre fictif:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j}^{10} x_{ij}=\sum_{j=1}^{11} D_j \qquad (j=1,2,...,11)$$

La demande D_{11} correspond par définition à l'éxcédent total de capacité sur la demande,c'est à dire:

$$D_{11}=\sum_{i=1}^{3} P_i-\sum_{j=1}^{10} D_j$$

La somme des expéditions d'un centre producteur vers tous les centres de consommatio,y compris le centre fictif,est alors égale à sa capacité de production.

Résolution du problème

Elle se fait en deux étapes:

1.on procède à une répartition compatible,mais en général non optimale:c'est la répartition initiale;

2.on applique un procédé graduel d'amélioration de la solution initiale jusqu'à l'obtention de l'optimum.

a)répartition optimale

Il s'agit ici de placer des valeurs dans les cases du tableau de façon que les contraintes soient satisfaites. J'utiliserai à cette fin la méthode d'HOUTTAKER qui consiste à saturer d'abord les cases correspondant aux trajets de coûts C_{ij} les plus faibles; puis à parcourir progressivement l'échelle des coûts jusqu'à la répartition totale des ressources.

PROCEDE

1.en pratique on isole les cases dont les coûts sont minima dans leur ligne et colonne,soit dans le cas présent:

$C_{17}=1$

$C_{21}=1$

$C_{34}=1$

2.saturer les demandes correspondantes:

$x_{17}=25$

$x_{21}=16$

$x_{34}=7$

3.exclure les lignes saturées,soient les lignes D,G,J

4.continuer le calcul en prenant soin de diminuer les capacités des centres de production des quantités déjà attribuées;c'est à dire diminuer de 25 la capacité du centre A,de 16 celle du centre B et de 7 celle du centre C;

5.chercher les cases dont les coûts sont le plus faibles:

$$C_{1,10}=4$$

$$C_{22}=3$$

$$C_{35}=2$$

$$C_{39}=2$$

et satisfaire la demande le cas échéant:

$$x_{1,10}=15$$

$$x_{22}=55$$

$$x_{35}=80$$

$$x_{39}=8$$

6.continuer les calculs jusqu'à attribution de toutes les ressources.

On obtient finalement le tableau ci-après(page suivante):

	Pi	125		80		95	
D_j	C_{ij}	A	(1)	B	(2)	C	(3)
16	D (1)		6	16	1		7
55	E (2)		10	55	3		11
9	F (3)	9	6		10		8
7	G (4)		3		9	7	1
80	H (5)		3		8	80	2
12	I (6)	3	12	9	7		10
25	J (7)	25	1		10		4
20	K (8)	20	8		8		6
8	L (9)		5		7	8	2
15	M (10)	15	4		9		6
53	Excédent	53	0		0		0

Et F vaut alors: $F=\Sigma \Sigma C_{ij}.x_{ij}=762$

b)l'amélioration graduelle de la solution

Il s'agit de vérifier si les solutions retenues minimisent les coûts de transport.

Les trajets non adoptés doivent,sans exception,être caractérisés par des dépenses supérieures ou égales à celles des itinéraires choisis.

Afin de permettre les vérifications qui s'imposent,faire intervenir des coûts fictifs a_i et b_j qui correspondent aux équations suivantes:

si $x_{ij} \neq 0$ $\quad a_i+b_j=c_{ij} \quad$ (4)

$x_{ij}=0$ $\quad a_i+b_j \leq c_{ij} \quad$ (5)

La relation (4) est utilisée pour le calcul des coûts fictifs: elle exprime l'égalité de ces derniers et des dépenses réelles. Quant à la relation (5),elle sert à comparer les charges fictives aux frais de transport des itinéraires non retenus ($x_{ij}=0$).

PROCEDE

1.ajouter au tableau(2) une ligne marginale superposée à celle des centres de production i et une colonne marginale située à côté de celle des centres de consommation j.

Dans la ligne on place les coûts fictifs a_i et dans la colonne les coûts fictifs b_j;

2.le calcul de ces éléments se fait en utilisant la relation (4) et en choisissant arbitrairement égal à zéro un coût b_j.

Soit ici $b_1= 0$

or x_{21} 0,appliquer l'égalité (4)

$a_2+b_1=c_{21}$

$a_2+b_1=1$,d'où $a_2=1$

continuer:

x_{22} 0,donc $a_2+b_2=3$,alors $b_2=2$

3. achever de la même façon de proche en proche;

4. réaliser ensuite la vérification des inéquations(5) en ajoutant les coûts a_i et b_j des trajets pour lesquels aucune expédition n'est prévue.

Lorsqu'une relation n'est pas vérifiée,on se trouve en présence d'un conflit justiciable d'une procédure d'amélioration.

Ainsi,a_3+b_6 n'est pas inférieur ou égal à c_{36};

en effet,$a_3=5$, $b_6=6$ et $a_3+b_6=11>c_{36}=10$.

La méthode d'amélioration est celle de l'échange circulaire(voir tableau 3).

Son principe consiste à prévoir,avec les affectations voisines,un circuit qui,tout en respectant les relations des besoins et capacités,diminue la valeur de la fonction d'optimisation.

En définitive,on obtient:

$x_{36}=3$

$x_{16}=0$

$x_{15}=3$

$x_{35}=77$

Cette amélioration conduit d'ailleurs au minimum de la fonction économique:

$F=759$ (<762)

(voir tableau 3,page suivante)

Tableau 3

		capacité des centres Prod.	125	80	95
coûts fictifs j	Besoins des centres cons.	C_{ij}	A (1)	B (2)	C (3)
0	16	D	6	16 1	7
2	55	E	10	55 3	11
0	9	F	9 6	10	8
-4	7	G	3	9	7 1
-3	80	H	+3 0 3	8	-3 80 2
6	12	I	-3 3 12	9 7	+3 10
-5	25	J	25 1	10	4
2	20	K	20 8	8	6
-3	8	L	5	7	8 2
-2	15	M	15 4	9	6
-6	53	Excédent de capacité	53 0	0	0
		coûts fictifs i	6	1	5

REMARQUES

1. Ce problème peut être enrichi en introduisant des contraintes supplémentaires, tels que des maxima d'expéditions entre un centre de production et un centre consommateur donnés.

2. Les tableaux ci-dessus peuvent être dynamisés afin de tenir compte des variations respectives de la production et de la demande dans le temps.
Mais les modèles ainsi élaborés, devant en plus tenir compte des frais de stockage, deviennent trop importants pour être traités manuellement. Il faudrait dès lors élaborer des programmes sur ordinateur, ce qui dépasse le cadre du présent rapport.

7.2.PROGRAMMATION DE REPARTITION

7.2.1. Formulation du problème

L'étude sera limitée à la répartition du trafic d'exportation d'un produit en provenance d'une zone donnée vers un certain nombre de destinations.

Désignons par:

-T_e:le trafic évasionnel de la zone de production.
Ce trafic sera supposé connu;

-T_i:trafic sur l'itinéraire i,trafic directionnel
(i=1,2,...,n) avec $\Sigma T_i = T_e$

-C_i:le coût de transport d'une tonne kilométrique sur
l'itinéraire i,coût pour l'usager.

La zone de production sera considérée comme un ensemble P formé d'un certain nombre de sous-ensembles P_i.

Le raisonnement portera sur la répartition de trafic entre les itinéraires reliant l'ensemble zone de production et zones de demande.

Il importe,pour ne pas alourdir les calculs,de prendre un nombre limité de sous-ensembles.

Il s'agira dans chaque cas,soit l'ensemble zone de production avec les ports,soit chaque sous-ensemble avec les destinations,de lister exhaustivement tous les itinéraires possibles;chaque itinéraire étant défini par son origine et sa destination,les villes sur son passage et les types de transport utilisés.

7.2.2.Processus méthodologique

Cette étude de répartition de trafic entre différents itinéraires peut être abordée sous deux optiques:

a)du point de vue de l'usager

hypothèses:-la production ou trafic évasionnel T_e est indépendant du coût de transport,seule la répartition du trafic T_e serait fonction du coût;

-la capacité d'absorption des demandes est loin d'être saturée;

-les différents itinéraires sont strictement concurrents;

-l'usager cherchera à minimiser ses dépenses en transport.La répartition effective d'un trafic T_e sur n itinéraires sera celle qui minimisera l'ensemble des coûts de transport.

On aura donc: $T_e=\Sigma T_i$

$\underline{\Sigma T_i * C_i}$ minimale

La résolution de ce problème se fera par la méthode d'optimisation séquentielle basée sur le principe d'optimalité de BELLMAN.

b)du point de vue de la nation

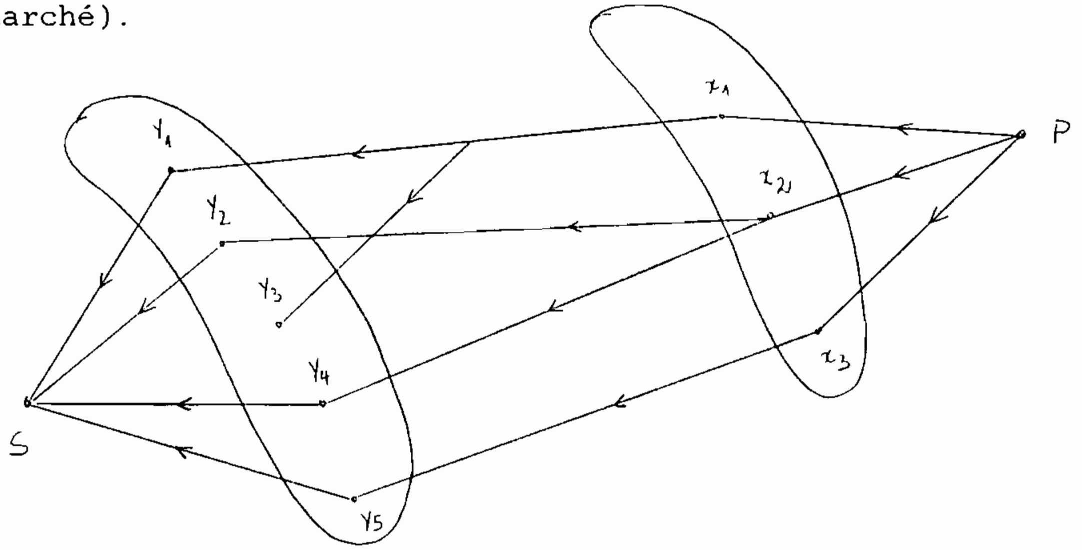
Ici on n'est plus dans le domaine de la répartition effective,mais bien dans celui de la répartition optimale.

Les itinéraires entre la zone de production et les zones de demande peuvent être assimilés à un graphe ordonné.

Définissons théoriquement pour ce graphe:

-une entrée P d'où arrive le trafic évasionnel T_e,

-une sortie S centralisant la totalité de ce trafic(S serait le marché).



Chaque itinéraire(ou arc) i possède une certaine capacité de transport C_i définie par les caractéristiques techniques et par la durée d'utilisation.

Le graphe ordonné ainsi défini constitue un réseau de transport auquel est associé un flot que l'on peut considérer comme une répartition quelconque de trafic$(T_1,T_2,...,T_n)$.

A l'arc 1 ou itinéraire 1 correspond la valeur T_1 du flot avec:$T_1 \leq C_1$.

D'autre part, la somme des flots des arcs incidents à un sommet est égale à la somme des flots des arcs sortant de ce sommet. Une répartition optimale de trafic, ou flot maximum, peut être déterminée si l'on connaît la demande en S.

En d'autres termes, la recherche de la répartition optimale permet de déterminer pour chaque itinéraire le meilleur niveau de trafic en tenant compte de la capacité de la voie.

7.2.3. Solution du problème

Je prends pour base le principe d'optimalité de Bellman: "une politique optimalene peut être formée que de sous-politiques optimales".

Soit $T_j(j=1,2,3,4,5)$ le trafic de chaque itinéraire 1,2,3,4,5.

Le coût total de transport est alors:

$$(1)\ F(C_1T_1,C_2T_2,C_3T_3,C_4T_4,C_5T_5)=\sum_{j=1}^{5} T_j*C_j = \sum_{j=1}^{5} v_j$$

$$=\Sigma\ v_j$$

avec $v_j=T_j*C_j$

les T_j étant reliés par l'équation de contrainte:

$$(2)\sum_{1}^{5} T_j=T_e$$

et ne peuvent prendre que des valeurs $0,1,2,\ldots,T_e$.

Posons:

$$(3)\ T_1+T_2=U_1$$

$$U_1+T_3=U_2 \qquad \text{avec } U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq T_e.$$

$$U_2+T_4=U_3$$

$$U_3+T_5=T_e$$

Le coût de transport(1) s'écrit alors:

$$F(C_jT_j)=C_1T_1+C_2(U_1-T_1)+C_3(U_2-U_1)+C_4(U_3-U_2)$$
$$+C_5(T_e-U_3);$$

par application du théorème d'optimalité de Bellman,on détermine successivement:

$$f_{1,2}(U_1)=\min_{T_1=0,1,...,U_1}\{C_1T_1+C_2(U_1-T_1)\}$$

$$f_{1,2,3}(U_2)=\min_{U_1=0,1,2,...,U_2}\{f_{1,2}(U_1)+C_3(U_2-U_1)\}$$

$$f_{1,2,3,4}(U_3)=\min_{U_2=0,1,2,...,U_3}\{f_{1,2,3}(U_2)+C_4(U_3-U_2)\}$$

$$f_{1,2,3,4,5}(T_e)=\min_{U_3=0,1,2,...,T_e}\{f_{1,2,3,4}(U_3)+C_5(T_e-U_3)\}.$$

REMARQUE

Dans le but d'alléger les écritures,j'ai pris le cas particulier où n=5 itinéraires.Il est clair que pour n quelconque il faut adapter les écritures en tenant compte de la généralisation.

7.2.4. Application sur un cas particulier

Soit le cas de la répartition d'un bien entre 3 itinéraires (1),(2),(3).

T=100 tonnes et l'unté de poids transporté est prise égale à 10 tonnes.

Les coûts de transport de chaque itinéraire sont donnés dans le tableau de la page suivante:

Tableau 1:coût en fonction du poids T

Trafic	Itinéraires		
10t	C_1 (1)	C_2 (2)	C_3 (3)
0	0	0	0
1	2	3	1
2	4	6	2
3	6	8	15
4	4	10	20
5	5	36	25
6	6	42	30
7	7	48	28
8	32	54	32
9	36	60	37
10	40		40

<u>Tableau 2:</u> sous-optimum pour les itinéraires (1) et (2) suivant le tonnage:

$T_1 T_2 U_1$	(1) $c_1 T_1$	(2) $c_2 T_2$	(3) $f_{1,2}$ (U_1)	Sous-optimums pour itinéraires (1) et (2)
0	0	0	0	(0,0)
1	2	3	2	(1,0)
2	4	6	4	(2,0)
3	6	6	6	(3,0)
4	4	8	4	(4,0)
5	5	10	5	(5,0)
6	6	36	6	(6,0)
7	7	42	7	(7,0)
8	32	48	10	(7,1)
9	36	54	12	(6,3)
10	40	60	13	(7,3)

Si par exemple on avait à répartir 90 tonnes entre les itinéraires (1) et (2) seulement,on aurait un coût minimum en affectant 60 tonnes à l'itinéraire (1) et 30 tonnes à l'itinéraire (2).

Tableau 3:optimum pour les itinéraires (1),(2) et (3)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0	0	0	(0,0)	(0,0,0)
1	2	1	1	(1,0)	(0,0,1)
2	4	2	2	(2,0)	(0,0,2)
3	6	15	4	(3,0)	(1,0,2)
4	4	20	4	(4,0)	(4,0,0)
5	5	25	5	(5,0)	{(4,0,1),(5,0,0)}
6	6	30	6	(6,0)	{(6,0,0),(5,0,1),(4,0,2)
7	7	28	7	(7,0)	{(7,0,0),(6,0,1),(5,0,2)}
8	10	32	8	(7,1)	{(7,0,1),(6,0,2)}
9	12	36	9	(6,3)	(7,0,2)
10	13	40	10	(7,3)	(7,1,2)

légende:

-colonne (1): U_1T_3

-colonne (2): $f_{1,2}(U_1)$

-colonne (3): C_3T_3

-colonne (4): $f_{1,2,3}(U_2)$

-colonne (5): sous-optimum pour les itinéraires (1) et (2)

-colonne (6): optimum pour les itinéraires (1),(2) et (3).

La répartition optimale s'obtient donc en affectant 70 tonnes à l'itinéraire (1) au coût de 7 u.m.,10 t à l'itinéraire (2) au coût de 3u.m. et 20 t à l'itinéraire (3 au coût de 2 u.m

Le coût minimal trouvé est ainsi égal à 12 u.m. pour cette répartition.

7.2.5.REMARQUE IMPORTANTE

Il se peut que sur un réseau de transport arrive l'éventualité suivante:

a)la capacité physique d'un mode de transport devient insuffisante.

On appelle capacité physique d'une infrastructure la limite d'écoulement d'un certain trafic,T_e,au-delà de laquelle il est impossible d'écouler un trafic supérieur à T même en augmentant les frais déexploitation.

La capacité physique ainsi définie ne pourra être augmentée que par une modification de l'infrastructure;

b)la capacité économique est atteinte.

Une telle situation arrive lorsqu'il y a saturation de l'infrastructure par l'apparition de nouveaux trafics;la densité de trafic devenant telle que les charges d'exploitation s'élèvent rapidement.

Cette saturation entraîne la création de nouvelles infrastructures.

Quelle que soit l'éventualité,on est obligé de faire des investissements.

Le problème à résoudre est donc celui-ci: connaissant le trafic global T, comment doivent s'effectuer ces investissements sur le réseau afin que l'on arrive à une répartitionoptimale du trafic T.

7.2.5.1. Méthode générale

Soient: x_i: charges d'exploitation, fonction du trafic sur chaque mode i

y_i: les charges indépendantes du trafic sur chaque mode i

z_i: les charges d'investissement sur chaque mode i

i=1,2,3,...

Les dépenses x et y sont annuelles; tandis que les dépenses z obéissent à un échéancier qui est à définir par l'exploitant.

Pour que le trafic global T (qui prend successivement les valeurs $T_1, T_2, \ldots, T_t$), soit assuré dans les meilleures conditions, il faut qu'il se répartisse entre les divers modes de transport, de façon à ce que soit minimum le coût global C défini dans ce cas par:

$$C = \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+w)^t} \sum_i \left[x_i^t (T_i)^t + y_i^t + z_i^t \right]$$

où: N=échéancier des investissements

w: taux d'intérêt souvent décidé par l'exploitant

N.B.: $x_i^t (T_i)^t$ se lit : x_i à l'année t, fonction de T_i à l'année t.

On doit en particulier examiner la capacité physique T_C et le trafic optimum T à acheminer, pour déterminer l'échelonnement des investissements.

En outre, il faut qu'un tel échéancier corresponde au taux de croissance que l'on s'est fixé et aux capacités de financement que l'on possède

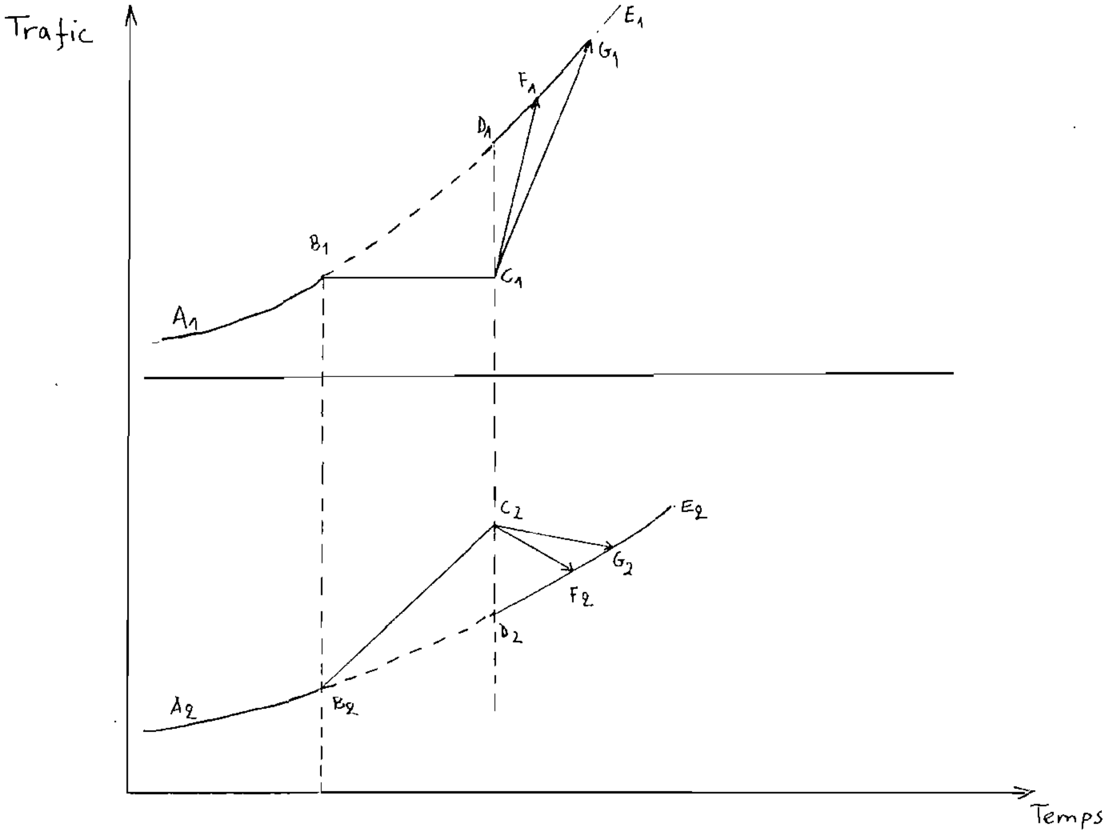
7.2.5.2. Cas d'une capacité physique insuffisante

Un mode de transport est physiquement saturé.

On est ainsu conduit à envisager un investissement en vue d'élargir sa capacité.

Pour ne pas trop alourdir les considérations, nous allons nous placer dans le cas de l'existence de deux modes, et dans le cas d'un trafic substituable, c'est à dire qu'il peut être assuré indifféremment par l'un ou l'autre mode.

Si on suppose que ce soit le premier mode qui voit sa capacité atteinte, le problème peut se schématiser comme suit:



-en AB: les deux modes voient leurs trafics se développer;

-en B_1: le premier mode atteint sa saturation physique. Le trafic supplémentaire est alors assuré par le second mode supposé non saturé B_2C_2;

-en C_1: l'investissement est réalisé; le trafic du premier mode reprend plus ou moins vite (C_1D_1, C_1F_1, C_1G_1).

Le trafic du second mode reprend son rythme initial plus ou moins vite (C_2D_2, C_2F_2, C_2G_2).

D'une façon générale, le recul d'un an de la réalisation de l'investissement entraîne:

-une économie: $\frac{1}{(1+\omega)^t} - \frac{1}{(1+\omega)^{t+1}} = \frac{\omega}{(1+\omega)^{t+1}}$

-une dépense supplémentaire due à ce que le trafic reporté sur le second mode entraîne des charges d'exploitation plus fortes; appelons D cette dépense;

-un coût dû au transfert d'un mode de transport vers l'autre; soit C ce coût.

On peut toujours reculer l'investissement tant que:

$$\frac{\omega}{(1+\omega)^{t+1}} > C + D$$

A partir du moment où: $C + D \geq \frac{\omega}{(1+\omega)^{t+1}}$

on peut alors procéder à l'investissement selon le critère du coût global minimum.

7.2.5.3. Cas d'une capacité économique insuffisante

Dans ce cas le problème ne concerne plus un mode mais le réseau tout entier: une saturation de l'ensemble de l'infrastructure nécessite une série d'investissements.
Le problème est celui de comment répartir ces investissements sur les divers modes du réseau.
Soit donc un réseau de n modes de transport dont la capacité physique de chacun est T_{ci}.
On a évalué un optimum de trafic qui a ensuite permis de déterminer le trafic optimum T.
Le trafic existant est évidemment $\sum_{1}^{n} T_{ci}$.
Il y a donc une augmentation de trafic: $\Delta T = T - \sum_{i=1}^{n} T_{ci}$
Le trafic est supposé parfaitement substituable.

PROBLEME: Comment répartir ΔT de manière optimale sur les n modes, cette répartition devant déterminer le choix des modes où l'on va investir.

La réponse formelle que l'on puisse donner est qu'il faut que la répartition des investissements obéisse à la répartition optimale de trafic.
En admettant que l'échéancier soit de N années, la répartition optimale de trafic doit minimiser le coût global déterminé par:

$$C = \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+w)^t} \sum_{i} \left[x_i^t (T_i)^t + \gamma_i^t + z_i^t \right]$$

où: $x=f(T_i)$:charges d'exploitation,fonction du trafic

$y=c_i$:charges indépendantes du trafic

z :charges d'investissement

Or,après l'investissement sur un ou deux modes,les charges x et y sur ces modes changent;la répartition optimale ainsi définie est remise en question.

Une solution possible,bien qu'assez lourde,esr de déterminer les divers coûts globaux C_i après chaque investissement selon l'échéancier N,et prendre comme critère la moyenne des C_i.

Une résolution par la programmation linéaire s'impose ici.

Soient les <u>hypothèses de base</u> suivantes:

-un investissement sur un mode de transport permet de faire passer la capacité physique de ce mode de T_{ci1} à T_{ci2};

-une capacité physique d'un mode varie par tranche(T_{ci1},T_{ci2},.)

-une augmentation de trafic entraîne toujours une baisse du prix de revient de la tonne kilométrique(t/km),baisse que l'on peut supposer linéaire étant donné que le coût marginal à long terme est sensiblement linéaire.

Supposons le problème résolu et que l'on ait affecté à chacun des n modes,ΔT_i du trafic.

L'augmentation du trafic sur le mode entaîne une baisse du prix de revient de la t/km de P_0 à P_1,ou $\Delta P=P_0-P_1$.

Le système de contraintes sera de la forme:

T_{ci2}:deuxième capacité physique de chaque mode

ΔT_i :partie du trafic de allouée à un mode i

ΔP_i :baisse du prix de revient de la t/km sur un mode i

$$\left.\begin{array}{l}\Delta T_i \leq T_{ci2} \\ \sum \Delta T_i = \Delta T\end{array}\right. \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

La fonction économique à <u>maximiser</u> est: $\underline{y = \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i \cdot \Delta P_i}$

On voit que dans le cas d'une capacité économique insuffisante,la résolution par la programmation linéaire est très attrayante,d'autant plus que maximiser la baisse du prix de revient,donc le gain de l'utilisateur,est bien une conception généralement bien acceptée de l'optimum.

Ceci ne rentre pas nonplus en conflit avec le point de vue de l'investisseur ,car le prix de revient inclut les charges d'exploitation et d'investissement (amortissement).

CHAPITRE 8:CONCLUSION

Le problème d'optimisation d'un réseau de transport possède généralement deux principales caractéristiques:

a)la dimension du modèle est très large,c'est à dire qu'il y a plusieurs variables et plusieurs contraintes;

le problème est très complexe:les relations entre les variables (containtes) peuvent être aussi complexes que le modèle lui-même;et et dans certaines situations en tout cas elles sont aussi complexes qu'une affectation descriptive.

Ces deux caractéristiques induisent quelques conséquences. En effet,il peut des fois s'avérer impossible de trouver une solution optimale dans un temps raisonnable.

Lorsqu'une telle situation se produit,au lieu de s'acharner à trouver la solution optimale,on peut se contenter d'une solution réalisable qui soit assez bonne et proche de l'optimale.

Dans la pratique,il arrive très souvent que l'on doive en effet se contenter d'une telle solution,située entre une limite inférieure et une limite supérieure permises.

Ces dernières s'obtiennent en résolvant un problème simplifié,soit en ignorant certaines contraintes d'ordre secondaire,soit en linéarisant les relations non linéaires,ou encore en négligeant certaines interdépendances secondaires,etc....

Connaissant ces limites,il est possible d'approcher le plus possible de l'optimum la solution adoptée.

Là réside le danger car,bien que l'on puisse sensiblement approcher la fonction-objectif de sa valeur optimale,cela peut ne pas être le cas pour les variables de décision.
D'où une attention particulière est requise dans la simplification des modèles.
Pour cela,il existe différentes méthodes que je n'ai pas développées dans le présent projet afin de ne pas dépasser le cadre du présent rapport.

Cependant,en ce qui concerne le modèle développé dans le présent projet,si les définitions concernant l'offre et la demande de transport et celles concernant les capacités unitaires sont suffisamment valables,ce modèle est à même d'affronter avec succès des études difficiles.
Le problème qui demeure est celui de la détermination des valeurs numériques à donner aux paramètres.
Une limite dans les ressources d'investissement disponibles peut être prise en compte en étendant l'ensemble des contraintes (9) et (10).

D'une façon générale,au terme du développement du présent rapport,les conclusions suivantes peuvent être tirées:

a)L'équilibre est un optimum.

Cet équilibre s'énonce par rapport aux prix et par rapport à l'optimisation des satisfactions individuelles;

b)cependant cet équilibre ne peut être qu'instantanné.
Un état d'équilibre doit être,par essence même,en mouvance continuelle;

c)un optimum est un équilibre,mais il faut ajouter que pour arriver à cet optimum il y a un chemin possible et souhaitable:c'est <u>l'optimisation séquentielle</u>.
En d'autres termes,la recherche de l'optimum consiste à déterminer par itérations une suite de sous-optimums.Ceci n'est autre,une fois de plus,que le principe d'optimalité de Bellman qui dit qu'une politique optimale ne peut être formée que de sous-politiques optimales;

d)envisagé sous cet angle,le concept d'un optimum théorique de transports peut être présenté comme suit:l'optimum sectoriel peut être atteint par la voie de sous-optimisations ponctuelles.
La programmation de l'optimum théorique de transports consiste à prévoir le trafic,à optimiser l'investissement,ensuite à optimiser la répartition de trafic et la circulation.
Tous ces sous-optimums doivent être appréhendés en tenant compte d'un système de prix défini.

e)Ces sous-optimums obtenus de façon "décentralisée" contribueront à l'obtention de l'optimum théorique de transport. En fait,et pour maximiser nos chances d'obtenir cet optimum sectoriel,dans cette approche de la programmation mathématique des transports,il faudra rechercher aussi la cohérence entre sous-optimums.
La "décentralisation" des sous-optimumns n'est donc que formelle, et l'approche mathématique le montre clairement;il y a une relation bi-univoque continuelle entre les trois termes:
PREVOIR,INVESTIR,ORGANISER.
L'optimum dans l'investissement prend comme variable explicative les résultats de la prévision de trafic.La prévision de trafic se module selon le volume des investissements injectés.La répartition de trafic inter-mode,la programmation de la circulation prend en compte le trafic prévu,les transports de trafic,les investissements projetés.

f)Dans la technique d'analyse par construction de modèle mathématique qui reproduit abstraitement et de façon simplifiée le système à l'étude,il est nécessaire,et même indispensable dans certaines circonstances,de le traduire en langage informatique afin de pouvoir le traiter.Par traitement,il faut entendre l'étude de sensibilité:on modifie les différentes variables et on observe les effets de ces modifications sur les extants du modèle.

Il existe dans le commerce divers logiciels fort utiles pour la résolution de la plupart des problèmes(programmation linéaire,P.E.R.T./C.P.M.,etc...).
L'ordinateur permet de travailler simultanément avec un grand nombre de variables,et de recouvrer de grandes quantités d'informations et le tout extrêmement rapidement.

Une application du modèle sur un cas concret n'a pu être faite en raison du manque de valeurs numériques réelles à donner aux paramètres.
Il est d'autre part,sans aucun doute,possible et même souhaitable d'améliorer le modèle par des études complémentaires.

CHAPITRE 9: LES ANNEXES

Dans ce chapitre, je décris brièvement les concepts de base utilisés tout au long de mon projet tant dans la résolution de certains problèmes que dans certaines généralisations faites et conclusions tirées en supposant connues certaines propriétés des mathématiques.
IL s'agit donc, dans cette partie, de rappeler ces propriétés et définitions importantes, supports de tout développement scientifique.

Quelques notions mathématiques utilisées dans le rapport

1. OPTIMISATION

1.1. Définition d'un problème d'optimisation

Dans tous les domaines, des décisions sont constamment prises. Lorsque la situation en présence est très complexe ou, si à cause de l'impact qu'elles auront il est important que des décisions "adéquates" soient prises, les techniques d'optimisation par des modèles mathématiques peuvent être d'un grand secours.

Généralement, un problème d'optimisation mathématique se formule comme suit: on désire déterminer des valeurs pour n variables $x_1,...,x_n$ de sorte que la valeur de la fonction de ces variables $F(x_1,...,x_n)$ soit aussi grande ou aussi petite que possible.

Les variables $x_1,...,x_n$ sont appelées <u>variables de décision</u>

La fonction $F(x_1,...,x_n)$ est appelée <u>fonction-objectif</u>;

la fonction-objectif doit être maximisée ou minimisée.

D'autre part, il peut exister certaines relations entre les variables de décision; et ces variables de décision ou leurs fonctions doivent satisfaire certaines égalités ou inégalités. Celles-ci sont appelées les <u>contraintes</u>

$g_h(x_1,...,x_n)=0 \qquad h=1,...,m_1$

$g_i(x_1,...,x_n)<0 \qquad i=m_1+1,...,m_2$

$g_j(x_1,...,x_n)\leq 0 \qquad j=m_2+1,...,m$

Ainsi un problème de minimisation se formule comme suit:

$$\min F(x_1,\ldots,x_n)$$

sous contraintes: $g_i(x_1,\ldots,x_n) <,=,> 0 \quad i=1,\ldots,m$

La formulation d'un problème de maximisation est évidemment similaire.

Toute valeur de x est appelée <u>solution</u>.

Si une solution satisfait aux contraintes elle est appelée "solution possible"(réalisable).

La solution qui satisfait aux contraintes et donne la valeur maximale ou minimale de la fonction-objectif est appelée "la solution optimale".

1.2. Techniques d'optimisation

a)Le problème le plus simple est celui d'optimiser une fonction d'une variable sans contraintes:

$$\min_{x} F(x)$$

Il peut être facilement démontré que pour les fonctions différentiables une condition nécessaire pour le minimum (x^*) est que la dérivée première de F par rapport à x soit égale à zéro en ce point: $\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x^*} = 0$

Cette condition n'est pas suffisante;il est aussi nécessaire que la dérivée seconde ne soit pas négative en ce même point:

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x=x^*} \geqslant 0$$

Si la dérivée seconde est positive,la solution est bien le minimum;si elle est égale à zéro,elle pourrait être un minimum,mais dans ce cas il faut une inspection complémentaire.

La même chose que ci-dessus est valable pour un problème de maximisation;seulement la dérivée seconde ne doit pas être positive.

REMARQUE:une fonction pourrait avoir plusieurs maxima et/ou minima.
Un minimum est défini comme une solution pour laquelle la valeur de la fonction-objectif est la plus petite de toutes les valeurs obtenues pour les solutions se trouvant dans le voisinage de la solution minimale.
Un tel minimum est appelé "minimum local".
La plus petite valeur(absolument) de la fonction-objectif est atteinte par" le minimum global".
Ainsi,le minimum global est le minimum de tous les minima locaux.
La même chose peut être dite des maxima en faisant les remplacements qui s'imposent.

A côté de la classique approche par le calcul différentiel,il existe la possibilité une autre méthode appelée en anglais "Search Method" pour trouver le minimum dans le cas d'une seule variable de décision.
Lorsqu'on utilise cette méthode,la fonction-objectif est calculée pour un nombre de solutions possibles pour les variables de

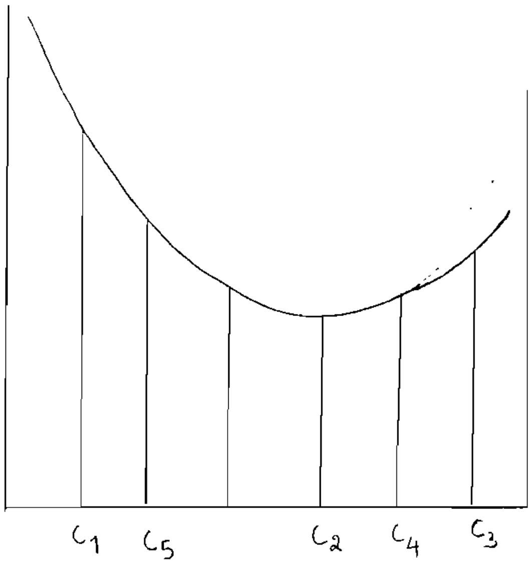
décision.

Dans ce cas une nouvelle valeur de variable de décision ,pour laquelle la fonction-objectif est calculée,est alors définie sur base des résultats les plus récents.

La "Search Method" peut être appliquée avec plus de succès pour les fonctions convexes (ou concaves dans le cas de maximisation)

La table ainsi que la figure ci-dessous illustrent la méthode:

Calcul	Comparaison	Conclusion
$F(c_1)$		
$F(c_2)$	$F(c_2) < F(c_1)$	$c^* > c_1$
$F(c_3)$	$F(c_3) > F(c_2)$	$c_1 < c^* < c_3$
$F(c_4)$	$F(c_2) < F(c_4) < F(c_3)$	$c_1 < c^* < c_4$
$F(c_5)$	$F(c_1) > F(c_5) > F(c_2)$	$c_5 < c^* < c_4$



Il y a deux types principaux de fonctions:les fonctions <u>convexes</u> et <u>concaves</u>.

Une fonction convexe a la propriété suivante:

$F\{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\}\le\alpha F(x_1)+(1-\alpha)F(x_2) \qquad 0\le\alpha\le1$

elle est strictement convexe lorsque:

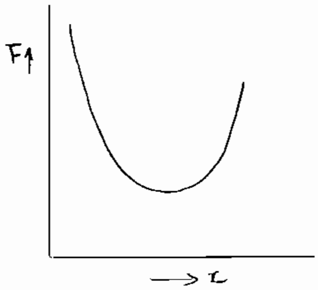
$F\{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\}<\alpha F(x_1)+(1-\alpha)F(x_2) \qquad 0<\alpha<1$

Une fonction est concave si:

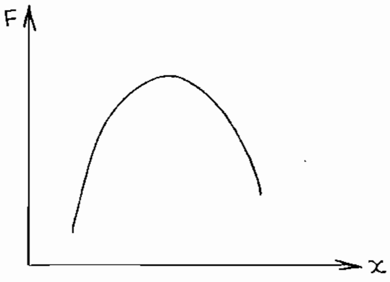
$F\{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\}\ge\alpha F(x_1)+(1-\alpha)F(x_2) \qquad 0\le\alpha\le1$

elle est strictement concave lorsque:

$F\{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\}>\alpha F(x_1)+(1-\alpha)F(x_2) \qquad 0<\alpha<1$



strictement convexe



strictement concave.

On peut facilement voir qu'une somme de fonctions(strictement) convexes est aussi une fonction(strictement) convexe.

Il peut aussi être prouvé que si une fonction convexe possède un minimum local,celui-ci est aussi un minimum global;de même un maximum local d'une fonction concave est un maximum global.

b)cas de problèmes d'optimisation avec contraintes

$$\min f(X) \quad \text{sous contraintes}: g(X)=0$$

L'approche classique est la méthodes de Lagrange qui convertit le problème en un problème sans contraintes:

$$\min_{X,\alpha} F(X,\alpha)=f(X)+\alpha g(X).$$

Ces deux problèmes admettent la même solution optimale.

Cependant, pour des problèmes ayant beaucoup de contraintes sous forme d'inégalités en plus, cette méthode n'est que d'un intérêt théorique. Les systèmes d'équations à résoudre sont trop compliqués pour produire une solution correcte en un temps raisonnable.

On entre ici dans le domaine de la Recherche Opérationnelle.

Ces problèmes sont généralement traités à l'ordinateur.

Le problème de programmation le plus connu est celui de la programmation linéaire dans lequel la fonction-objectif et les contraintes sont toutes linéaires.

Il a la forme générale suivante:

$$\min_{x_j} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

$$\text{sous contraintes}: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j <,=,> a_i \qquad i=1,\ldots,m$$

Beaucoup de problèmes peuvent être formulés de cette façon.

La solution d'un programme linéaire est devenue actuellement un problème standard.

N.B. Lorsque la fonction-objectif et/ou les contraintes ne sont pas linéaires la solution du problème devient beaucoup plus compliquée.

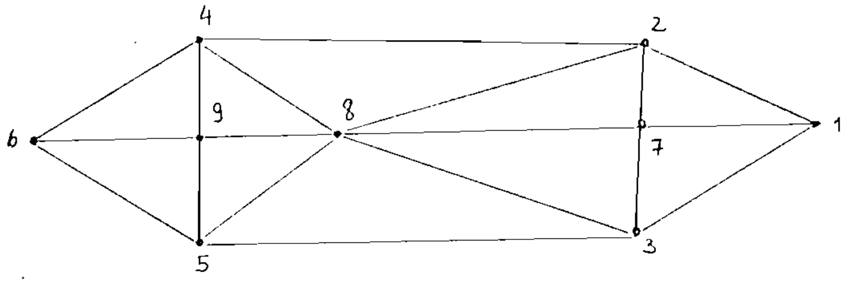
Certaines techniques existent pour la résolution de ce genre de problèmes: on a par exemple laprogrammation quadratique pour le cas de contraintes linéaires et où la fonction-objectif est quadratique;on a aussi la programmation géométrique pour le cas où les contraintes et la fonction-objectif sont constitués de termes qui sont des produits de puissances des variables de décision;il existe aussi la programmation dynamique pour le cas où la fonction-objectif une somme de fonctions de seulement quelques variables de décision et où les contraintes ne concernent que quelques variables.

2. LA THEORIE DES GRAPHES ET RESEAUX

2.1. Définitions

Un graphe est constitué d'une suite N d'éléments i,j,... et d'une suite L formée de paires d'éléments ij de N.

Les éléments de N sont appelés les "noeuds" du graphe, tandis que ceux de L qui relient les noeuds sont appelés "arcs".



La suite N est constituée des noeuds 1,2,3,...,9 et la suite L des arcs 12,21,17,71,13,31,24,etc....

Un graphe est dit linéaire lorsque les arcs n'ont pas d'autres points communs que les noeuds;et il est dit fini lorsqu'il est formé d'un nombre fini de noeuds et d'arcs.

Une succession d'arcs $i_1i_2, i_2i_3, i_3i_4, \dots, i_{n-1}i_n$ forme un "chemin", une "route" ou ine "chaîne".

Dans notre exemple 1246 forme un chemin de 1 à 6.

*Un <u>RESEAU</u> est un graphe dont les arcs et/ou les noeuds ont certaines caractéristiques quantitatives. Celles-ci peuvent être la dimension(capacité) c_{ij} d'un arc, ou le flot x_{ij} d'un arc. Les deux étant supposées être des nombres entiers non négatifs:

$$c_{ij} \geq 0 \qquad ¥\ ij \in L$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad ¥\ ij \in L$$

Une autre restriction est le flot ne peut dépasser la capacité d'un arc: $x_{ij} \leq c_{ij}$

2.2. Flots dans les réseaux

Une définition complète du réseau appelle la définition de deux nouveaux concepts: le noeud P (6 dans notre figure) appelée l'"origine" ou entrée, et le noeud S (1 dans l'exemple) appelée "destination" ou sortie. Tous les autres noeuds sont des noeuds intermédiaires.

On appelle alors flot la quantité de marchandises et/ou le nombre de personnes se déplaçant le long des différents arcs de l'origine P à la sortie S.

Cette définition est précisée en définissant un flot comme une suite de nombres réels non-négatifs, satisfaisant les conditions suivantes:

$$\sum_{\substack{i \\ (ij\in L)}} x_{ij} - \sum_{\substack{k \\ (jk\in L)}} x_{jk} \begin{cases} =0 & j \neq P \text{ ou } S \; ; \; j \in N \\ =-x & j = P \\ =x & j = S \end{cases}$$

Cette relation dit que le flot net est égal à zéro pour tous les noeuds, exceptés l'entrée et la sortie.

Il s'agit là des <u>lois de conservation</u>.

Il existe aussi des réseaux à plusieurs entrées et plusieurs sorties, les lois de conservation dans ce cas sont très semblables de celles du cas précédent:

$$\sum_{\substack{i \\ (ij\in L)}} x_{ij} - \sum_{\substack{k \\ (jk\in L)}} x_{jk} \begin{cases} =0 & si\ j\in N^{I} \\ =-x_j & si\ j\in N^{O} \\ =x_j & si\ j\in N^{D} \end{cases}$$

où: N^I=suite des noeuds intermédiaires

N^O=suite des origines

N^D=suite des destinations

Pour obtenir une solution possible(réalisable) il est évidemment nécessaire que:

$$\sum_{i\in N^O} x_i = \sum_{j\in N^D} x_j$$

Il est possible de remplacer ce problème à plusieurs entrées et plusieurs sorties par celui à une entrée et une sortie en connectant toutes les origines à une "Super-Origine" et toutes les destinations à une "Super-Destination" et en supposant que le flot total a son origine dans la super-origine et se termine dans la super-destination.Toutes les précédentes origines et destinations deviennent alors des noeuds intermédiaires.

C'est à partir de ces définitions que le problème classique de transport, également abordé dans le projet, a pu être défini. Dans ce problème il existe une suite d'origines fournissant des quantités x_i de marchandises et une suite de destinations ayant des demandes x_j de marchandises.

Pour transporter une unité de i à j, des coûts unitaires t_{ij} sont nécessaires.

Le problème est alors de transporter les marchandises des origines aux destinations au coût minimum:

$$\min_{x_{ij}} \sum_{ij \in L} x_{ij} . t_{ij}$$

sous contraintes:
$$\sum_{\substack{k \\ (ik \in L)}} x_{ik} \leq x_i \qquad i \in N^O$$

$$\sum_{\substack{l \\ (lj \in L)}} x_{lj} \geq x_j \qquad j \in N^D$$

Pour trouver une solution possible (réalisable) il est évidemment nécessaire que: $\sum_{i \in N^O} x_i \geq \sum_{j \in N^D} x_j .$

Il y a beaucoup d'autres problèmes dont la formulation mathématique s'inspire de celle-ci. C'est pour cette raison que je n'ai présenté que cette dernière, étant donné que les autres s'en déduisent aisément en faisant les adaptations adéquates.

BIBLIOGRAPHIE

1.Fundamentals of Transportation Systems Analysis
Volume 1:Basic Concepts
Marvin L. Manheim,1979
The M.I.T. Press

2.Les Transports
tome 2:Programmation
série FLUX ET TRAFICS,par NGUYEN TIEN PHUC
éditions EYROLLES - éditions d'organisation

3.Optimisation of Transport Networks
Peter A. Steenbrink
John WILEY & SONS.London-N.Y.-Sydney-Toronto

4.Méthodes et modèles de la Recherche Opérationnelle
tome 2. A. KAUFMANN
collection L'ECONOMIE D'ENTREPRISE. DUNOD

5.Méthodes et modèles de la Recherche Opérationnelle
tome 3. A. KAUFMANN
collection L'ECONOMIE D'ENTREPRISE. DUNOD

6.MAASE,P:"le choix des investissements".
Dunod,1959,Paris

7.MATEJIC,V,et PETROVIC,R.:"System Approach to the Planning and Control in Transport"
First Pupin-CEMI Seminar,Moscow,1974

8.MATEJIC,V,et PETROVIC,R.:"Identification of a Mathematical Programming Model for Selection of Development Program of Transport System"
First Pupin-CEMI Seminar,Moscow,1974

9.Notes de cours de Recherche Opérationnelle