

RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL



ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE THIÈS

GC.0372

**PROJET  
DE  
FIN D'ÉTUDES**

NUM

Titre Flambage des colonnes haubannées

Auteur M - KA

Génie CIVIL

Date JUIN 1984



ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

PROJET DE FIN D'ETUDES

Par

MODY KA

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

TITRE: FLAMBAGE DES COLONNES  
HAUBANNEES



DIRECTEUR DE PROJET: J. R. MURAT

année scolaire 1983 - 84

## Remerciements

Le présent travail a été proposé et réalisé sous la direction du professeur Jean. Robert MURAT. Je tiens à lui présenter mes sincères remerciements pour la documentation qu'il m'a fournie, pour ses conseils, critiques et encouragements dont j'ai bénéficié durant cette recherche.

qu'il ne soit également permis de remercier très sincèrement tous les techniciens du laboratoire de résistance des matériaux pour l'intérêt qu'ils ont montré durant cette étude, et plus particulièrement Nicolas MALIANOVITCH pour son dévouement. Je remercie également le professeur Roger LAPIEN pour ses conseils.

mes remerciements vont également à AMADOU DIALLO, DIARIATOU BA, N'GOURA KA et HARIATOU Yero DIALLO qui ont grandement contribué à ma formation.

Je ne saurais compléter cette liste sans citer Aliou Samba BA, Samba Diallo et Aminata BA pour leurs encouragements.

# TABLE DES MATIERES

<u>Chapitre 1 : introduction</u>	<u>Pages</u>
1.1 pourquoi une telle recherche - - - - -	2
1.2 but de la recherche - - - - -	2
1.3 méthode d'analyse et présentation des résultats.	3
 <u>Chapitre 2 : théorie du flambage d'une colonne élastique</u> <u>biarticulée en compression pure</u>	
2.1 introduction - - - - -	7
2.2 théorie du flambage d'une pièce élastique en compression -	7
2.3 étude du comportement d'une pièce en compression pure -	14
2.4 norme sur la compression pure - - - - -	19
2.5 détermination de la charge critique d'une colonne réelle - - - - -	22
2.6 charge critique d'une colonne biarticulée comportant un appui élastique en son milieu (méthode exacte) - -	26
2.7 charge critique d'une colonne biarticulée comportant un appui élastique en son milieu (méthode énergétique)	34
 <u>Chapitre 3 : choix de la section rectangulaire, du type d'appuis</u> <u>et du système de raidissement</u>	
3.1 choix de la section rectangulaire - - - - -	41
3.2 calcul de la rigidité du ressort équivalent - - -	51

## Table des matières (suite)

3.3	choix du type d'appuis et du système de raidissement	55
3.4	procédure d'essais	57

### Chapitre 4: Vérification de la théorie et détermination de la précision du système d'appuis à partir d'essais avec des colonnes simples.

4.1	introduction	59
4.2	méthode expérimentale de détermination de la charge critique	59
4.3	vérification de la méthode	61
4.4	remarques générales sur le comportement des appuis	73
4.5	charge critique de la colonne avec son système de raidissement	75

### Chapitre 5: analyse des résultats obtenus avec la colonne haubannée

5.1	méthode de détermination de la charge critique	78
5.2	analyse des résultats	85

### Chapitre 6: Conclusion générale et recommandations

6.1	conclusion générale	89
6.2	recommandations	89
6.3	sujet de recherche proposé	90

Table des matières (suite)

Annexes

Annexe A	-----	92
Annexe B	-----	94
Annexe C	-----	106

<u>Bibliographie</u>	-----	109
----------------------	-------	-----

# Chapitre 1

## introduction

1.1 pourquoi une telle recherche ?

1.2 but de la recherche

1.3 méthode d'analyse et présentation des résultats.

L'utilisation des câbles pour raidir certaines structures est d'une pratique courante, et d'une importance capitale en génie civil. En général les câbles sont utilisés dans les systèmes de contreventement (ponts, bâtiments à ossature métallique), en particulier pour les structures auto-portantes (pylône, antenne de réception, support de radar...), afin de réduire les déplacements et de profiter du gain de résistance.

### 1.1 : Pourquoi une telle recherche ?

Or que l'utilisation des structures auto-portantes déjà existantes implique très souvent la nécessité d'avoir des appuis intermédiaires pour la fixation des câbles, et que la mise en place de tels appuis nécessite très souvent un espace considérable (ce qui n'est pas toujours possible) pour que le système en question soit efficace, il est aujourd'hui très utile de trouver une nouvelle forme de structure auto-portante dont l'utilisation ne serait pas réduite à des particularités.

### 1.2 : but de la recherche

notre but est de déterminer le comportement des câbles pour le système de raidissement proposé, et d'étudier l'influence des différents paramètres en ce qui concerne le gain de résistance.



nous limiterons notre recherche à l'étude du comportement d'une colonne biarticulée haubannée (voir figure 1.1)

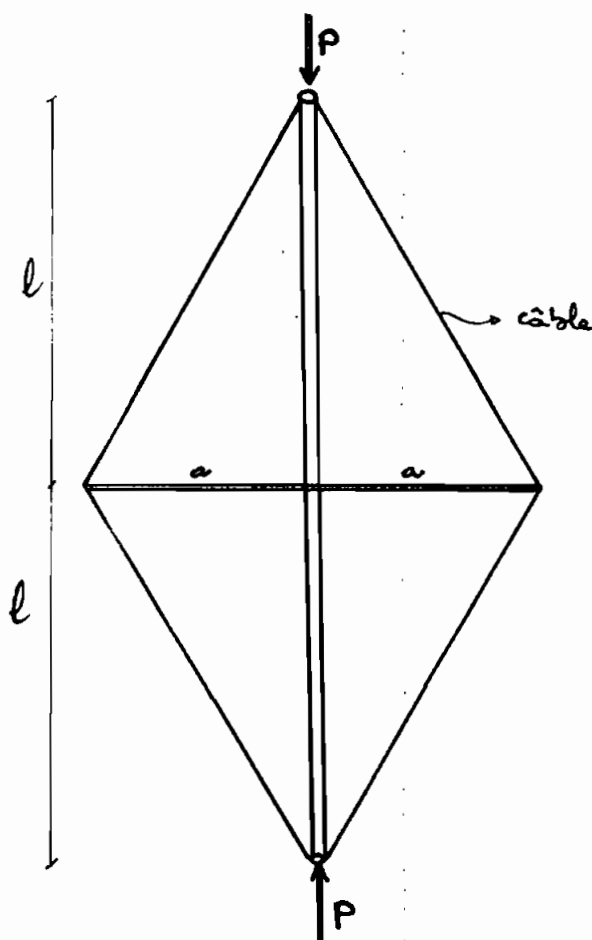


figure 1.1

### 1.3 méthode d'analyse et présentation des résultats.

En l'absence d'une méthode permettant de déterminer directement la charge critique, nous avons développé une méthode numérique à partir des relations théoriques sur le flambage d'une colonne biarticulée simple, et d'une colonne biarticulée comportant

un appui idéologique au son milieu. un programme d'ordina-  
teur a été réalisé sur la corrélation linéaire, afin d'avoir  
une méthode utilisable de la méthode.

au chapitre II nous exposons la théorie du flouage en général.  
au chapitre III nous décrivons les dimensions de notre colonne, et  
le type d'appui et de raidisseur à celle. au chapitre IV nous  
faisons l'exposé de la méthode de détermination de la  
charge critique pour une colonne simple biarticulée,  
et nous vérifions la précision de notre système d'appuis  
à partir d'essai avec des colonnes simples. au chap-  
itre V nous faisons l'exposé de la méthode de détermination  
de la charge critique pour une colonne hémisphérique,  
et l'analyse des résultats. enfin le dernier chapitre  
portera sur la conclusion générale et nos recommanda-  
tions.

## Chapitre 2

Théorie du flambage d'une colonne élancée, bi-articulée en  
compression pure.

### 2.1 introduction

### 2.2 Théorie du flambage d'une pièce élancée en compression

#### 2.2.1 détermination de la charge critique

##### 2.2.1.1 hypothèses

##### 2.2.1.2 mise en équation

##### 2.2.1.3 notion de coefficient de longueur effective et du degré d'élançement

### 2.3 étude du comportement d'une pièce en compression pure

#### 2.3.1 introduction

#### 2.3.2 les éléments trapèzes

#### 2.3.3 les éléments de longueur intermédiaire

#### 2.3.4 les éléments élancés

#### 2.3.5 récapitulation

### 2.4 norme sur la compression pure

#### 2.4.1 introduction

#### 2.4.2 limites des trois catégories

### 2.5 détermination de la charge critique d'une colonne

réelle.

#### 2.5.1 hypothèses

2.5.2 mise en équation

2.5.3 comparaison entre une colonne idéale et une colonne réelle.

2.6 charge critique d'une colonne biarticulée comportant un appui élastique en son milieu (méthode exacte).

2.6.1 introduction

2.6.2 généralités

2.6.3 charge critique en fonction de la rigidité du ressort (appui élastique).

2.7 charge critique d'une colonne biarticulée comportant un appui élastique en son milieu par la méthode énergétique (approximative)

2.7.1 introduction

2.7.2 mise en équation

2.7.3 comparaison

## 2.1 Introduction:

Le phénomène de flambage se manifeste lors d'une compression de petites pièces minces (baguettes, règles en plastique). Quand on augmente progressivement la charge, la pièce se comporte comme un solide comprimé, puis brusquement elle fléchit quand la charge atteint une certaine valeur appelée charge critique. Tant que la charge appliquée reste inférieure à la charge critique, la pièce est stable. Quand la charge critique est atteinte, on est dans une nouvelle forme d'équilibre qui implique cette combinaison de compression et de flexion, la pièce est alors en équilibre indifférent. Au delà de la charge critique, la pièce devient instable. Le phénomène de flambage se produit d'autant plus facilement que la pièce est élancée.

## 2.2 : Théorie du flambage d'une pièce élancée en compression

Si on accepte cette approche, on peut poser comme point de départ d'une étude théorique :

- pour les colonnes élancées, homogènes et isotropes, le flambage est un phénomène d'instabilité élastique qui se manifeste pour une certaine charge.
- on peut rechercher les conditions pour lesquelles il y a

équilibre d'une colonne dont l'axe est fléchi. La mise en équation, qui conduit à la détermination de la charge critique a été faite par Euler en 1744.

### 2.2.1 : Détermination de la charge critique d'une colonne élancée, rectiligne, biarticulée.

2.2.1.1 : hypothèses : la colonne est homogène, isotrope, rectiligne, de section constante, disposée verticalement, articulée à ses deux extrémités, sollicitée par deux forces égales et opposées, coaxiales avec l'axe de la colonne avant déformation.

La colonne est élancée, ce qui signifie que le flambage se fait dans le domaine élastique.

#### 2.2.1.2 : mise en équation :

soient :

- E : le module de Young
- I : le moment quadratique minimum de la section considérée
- A : l'aire de la section transversale
- P : la charge appliquée
- $y$  : la déflexion due par l'application de P
- M : le moment fléchissant

L: longueur totale de la colonne

R: le rayon de courbure de la ligne moyenne

initialement la barre est en  $BCA$ , après flambage sa configuration est  $Bc'A$  (figure 2.1)

L'équation fondamentale de la déformation en flexion est (Lucien Geminard, Armand Giet, 1971) :

$$EI + \frac{1}{R} = -M \quad (2.1)$$

pour de petites déformations,

$$\frac{1}{R} = \gamma'' \quad (2.2)$$

or dans une section quelconque d'abscisse  $x$ , la déflexion est  $\gamma$ , et le moment fléchissant vaut :

$$M = P \cdot \gamma \quad (2.3)$$

par suite

$$EI \cdot \gamma'' = -P\gamma \quad (2.4)$$

$$\text{ou} \quad EI\gamma'' + P\gamma = 0$$

posons  $K^2 = P/EI$

la solution de cette équation différentielle est :

$$\gamma = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx$$

les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées par les conditions

aux limites : -  $x=0$ ,  $\gamma=0 \Rightarrow C_2=0$

-  $x=L$ ,  $\gamma=0$  donc  $C_1 \sin KL = 0$

or  $C_1 \neq 0$  parce qu'il y a flambage, donc il faut

conclure :

$$\sin KL = 0 \quad (2.5)$$

donc

$$KL = R\pi$$

avec  $R$  entier positif.

d'où

$$P = \frac{R^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (2.6)$$

la charge critique correspond à la plus petite valeur de  $P$   
la plus petite valeur de  $R$  est évidemment 1, d'où

$$P_{critique} = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.7)$$

la déformée est donc un arc de sinuséide de  
période  $2L$ . la flèche maximale est obtenue pour

$$x = L/2$$

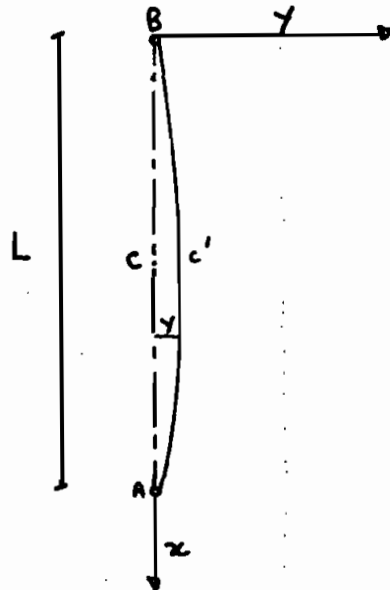


figure 2.1



2.2.1.3 notion de coefficient de longueur effective  
et de degré d'élanement.

à la section 2.2.1.2, nous avons trouvé que pour qu'il ait flambage, il faut: (équation 2.5)

$$\text{si } KL = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{d'où } KL = R\pi$$

dans cette équation,  $R$  est un nombre entier représentant le nombre de boucles sinusoïdales d'égales longueurs caractérisant le mode de flambement du poteau.

$R$  est appelé coefficient de longueur effective et sa valeur dépend donc des conditions de fixation.  $KL$  est appelé longueur effective de flambement, c'est à dire quelque soit la condition de fixation, le poteau se comporte comme s'il est articulé sur une longueur  $KL$ .

pour les conditions de fixation courantes, idéalisées, des dérivations semblables à celle faite à la section 2.2.1.2 pour la détermination de la charge critique de Euler ont été faites (voir tableau 2.1 référence Picard et Baulieu, 1981)

Tableau 2.1 figure 2.2 modèles de flambement idéalisés	sans déplacement latéral			avec déplacement latéral		
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
valeurs théoriques de $R$	1,0	0,7	0,5	2,0	2,0	1,0

pour ce qui concerne une colonne articulée à ses deux extrémités, nous savons que la charge critique de Euler vaut : (voir équation 2.7)

$$P_u = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.9)$$

la contrainte critique est obtenue en divisant la charge critique par l'aire de la section, soit :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_u}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A \cdot L^2} \quad (2.10)$$

$$\text{ou} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/r)^2} \quad (2.11)$$

où  $r$  représente le rayon de giration défini comme suit :

$$r = \sqrt{I/A}$$

mais l'équation (2.11) n'est valide que si la charge n'a induit pas de plastification dans la section avant le flambement. Ce qui nous amène à déterminer le comportement d'une colonne en compression pure, et à voir dans quelles conditions pratiques le flambement élastique est obtenu.

on rappelle que pour les autres modes de fixation, on a :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{(K L/r)^2} \quad (2.12)$$

$RL/r$  est appelé degré d'éclatement de la colonne.

### 2.3 : Etude du comportement d'une pièce en compression

#### Pure

#### 2.3.1 : introduction : nous remarquons l'existence

de trois catégories d'éléments comprimés dépendamment de leur déplacement : à savoir les éléments trapus, les éléments de longueur intermédiaire et les éléments élancés. Le comportement d'un élément dépend de la catégorie à laquelle il appartient. nous allons étudier sommairement chaque catégorie, ce qui nous permettra de déterminer celle qui répond le mieux à notre recherche. (voir figure 2.3)

#### 2.3.2 : les éléments trapus

Ces éléments développent la plus grande résistance, et nous pouvons dire que la contrainte maximale correspond à la limite élastique ( $F_y$ ) ;  $\sigma_{max} = F_y$ ,  $\sigma_{max}$  étant la contrainte maximale avant l'apparition des déformations permanentes. Quand la contrainte atteint  $F_y$ , toute la pièce se plastifie (plastification totale). Or pratiquement il a été remarqué que la résistance maximale de tels éléments n'est pas influencée de façon significative par les défauts de rectitude

et les contraintes résiduelles. on remarque donc qu'il y a écrasement et non flambement, et que la capacité totale de la pièce est utilisable.  $\sigma_{max} = F_y$  (2.13)

### 2.3.3: les éléments de longueur intermédiaire

Le comportement de tels éléments est considérablement influencé par les défauts de rectitude et les contraintes résiduelles ( $\sigma_r$ ). en effet quand la contrainte normale dans la pièce atteint la valeur  $(F_y - \sigma_r)$ , les contraintes uniformes de compression combinées aux contraintes résiduelles font en sorte que les fibres extrêmes commencent à se plastifier. donc la rigidité de la section commence à diminuer, car les zones plastifiées ne peuvent supporter un accroissement de contraintes. Ainsi la section efficace pouvant résister avant que ne survienne le flambement est réduite

soit  $A_e$ ,  $I_e$  respectivement l'aire de la section efficace et le moment quadratique minimum de la section efficace.

$$\text{on a alors } A_e < A ; I_e < I \quad (2.14)$$

il s'en suit que lorsque la charge qui produit le flambement est atteinte, certaines fibres de la section ont déjà atteint la limite élastique ( $F_y$ ), on dit alors

qu'on a un flambement inélastique.

La résistance maximale de tels éléments dépend donc aussi bien de la rigidité flexionnelle ( $EI$ ), de la longueur effective ( $KL$ ), que de la limite élastique ( $F_y$ )  
( $K=1$  pour une colonne bi-articulée voir équation (2.6), (2.7))

$$\text{d'où} \quad \sigma_{\max} < F_y \quad (2.15)$$

#### 2.3.4 : les éléments élancés

Le mode de rupture de tels éléments est le flambement élastique. La mise en équation pour déterminer la charge critique a été faite par Euler. Pour de tels éléments, la résistance maximale n'est plus fonction de la limite élastique ( $F_y$ ), mais plutôt de la rigidité flexionnelle ( $EI$ ), et de la longueur effective ( $KL$ )

il a été démontré expérimentalement que les contraintes résiduelles ont très peu d'effet sur la résistance des éléments élancés qu'ils soient rectilignes ou initialement courbés.

Étant donné que le mode de rupture est le flambement élastique, la contrainte maximale est largement inférieure à

$$F_y \quad \sigma_u \approx \sigma_{\text{Euler}} \ll F_y \quad (2.16)$$

2.3.5 récapitulation

Tableau 2.2

catégories des éléments	Remarques sur $\sigma_u$
éléments trapus	$\sigma_u = F_y$
éléments moyens	$\sigma_u = F_y - \sigma_r$
éléments élancés	$\sigma_u = \sigma_{uler} \ll F_y$ (largement inférieur)

pour toute la section 2.3 (référence Picaud et Beaulieu 1981)

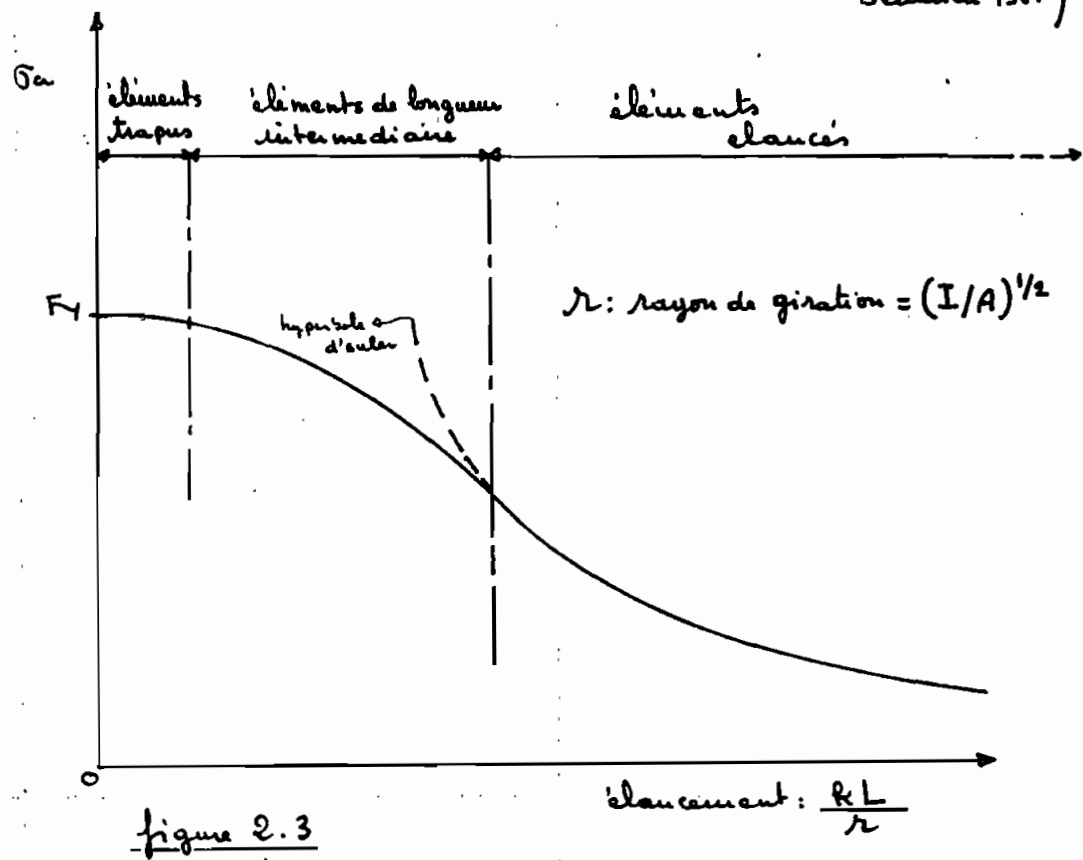


figure 2.3

élancement:  $\frac{R L}{r}$

La complexité du comportement des éléments comprimés montre la nécessité de trouver une méthode de calcul des éléments en compression pure. C'est pourquoi des recherches ont été faites sur des poteaux de qualité différente en considérant la distribution réelle mesurée des contraintes résiduelles de chaque poteau, et une déflexion initiale à mi-hauteur de 0,001.L.

à la section suivante vous trouverez la méthode adoptée par la norme S16.1-M78 (méthode récente).



## 2.4 : Norme sur la compression pure.

2.4.1 introduction: il est très difficile de classer les poteaux selon les 3 catégories de la section 2.3.

soit  $\lambda$  défini comme étant le facteur d'élanement, on a

$$\lambda = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 E}} \quad (2.17)$$

le terme  $\frac{KL}{r}$  est appelé le rapport d'élanement. rappelons que le rayon de giration ( $r$ ) est calculé par rapport à l'axe autour duquel se produit le flambage, généralement l'axe faible de la section. le coefficient de longueur effective ( $K$ ), a été discuté à la section précédente.

### 2.4.2: limites des trois catégories pour $F_y = 300 \text{ MPa}$ .

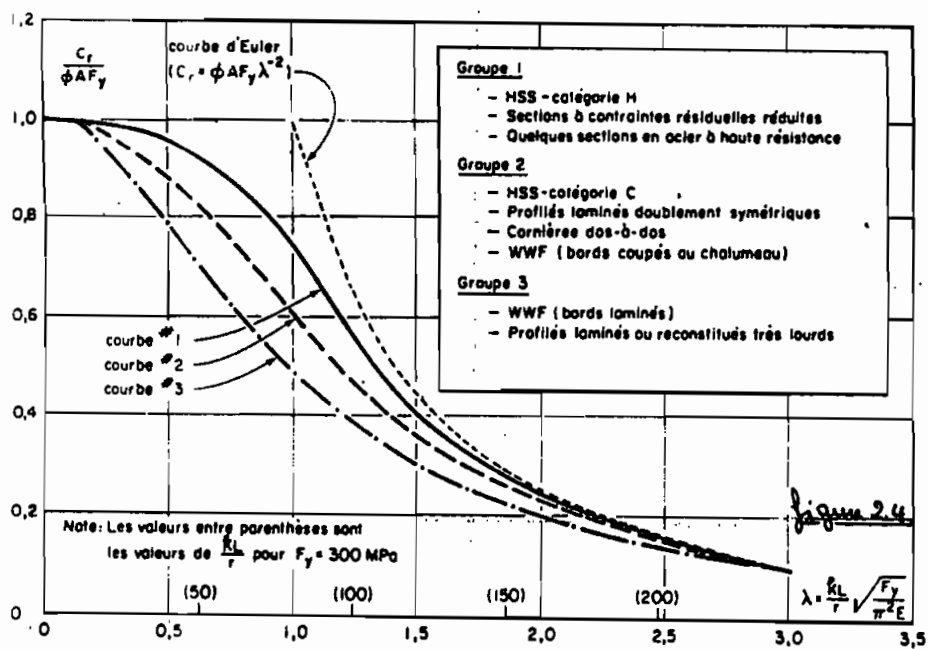
limitant la discussion aux axes constants et à la courbe  $w_2$ , les poteaux trapus seraient approximativement ceux pour lesquels  $\lambda \leq 0,25$  ( $E = 200000 \text{ MPa}$ ), c'est à dire  $\frac{KL}{r} \leq 20$ , les poteaux de longueurs intermédiaires sont ceux pour lesquels  $0,25 < \lambda < 2$ ; c'est à dire  $20 < \frac{KL}{r} < 162$ , et finalement le facteur d'élanement des poteaux élancés serait supérieur à 2, c'est à dire  $\frac{KL}{r} \geq 162$ . Voir figure 2.4 et tableau 2.3

La norme propose des formules pour chaque intervalle de  $\lambda$ . donc il est évident d'après le tableau 2.4 que la formule de

Euler ne s'applique que très rarement ( $\lambda > 3.6$ )

Tableau 2.3

Catégories des colonnes	limites sur $KL/r$
colonnes trapues	$KL/r \leq 20$
colonnes intermédiaires	$20 < KL/r < 162$
colonnes élancées	$KL/r \geq 162$



## Groupe 1

- HSS - catégorie M
- Sections à contraintes résiduelles réduites
- Quelques sections en acier à haute résistance

## Groupe 2

- HSS - catégorie C
- Profilés laminés doublement symétriques
- Cornières dos-à-dos
- WWF (bords coupés ou chalumeau)

## Groupe 3

- WWF (bords laminés)
- Profilés laminés ou reconstitués très lourds

- courbe no 2:

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| (a) $0 \leq \lambda \leq 0,15$ | $C_r = \phi A F_y$   |
| (b) $0,15 < \lambda \leq 1,0$  | $C_r = \phi A F_y (1,035 - 0,202\lambda - 0,222\lambda^2)$                           |
| (c) $1,0 < \lambda \leq 2,0$   | $C_r = \phi A F_y (-0,111 + 0,636\lambda^{-1} + 0,087\lambda^{-2})$                  |
| (d) $2,0 < \lambda \leq 3,6$   | $C_r = \phi A F_y (0,009 + 0,877\lambda^{-2})$                                       |
| (e) $3,6 < \lambda$            | $C_r = \phi A F_y \lambda^{-2} = \phi A \left[ \frac{1\,970\,000}{(KL/r)^2} \right]$ |

Tableau 2.4

en pratique il est impossible de trouver une colonne initialement rectiligne. étudions donc l'influence d'une courbure initiale sur la charge critique d'une colonne élancée, biarticulée

## 2.5 détermination de la charge critique

d'une colonne élastique initialement non-

rectiligne, articulée à ses deux extrémités.

2.5.1 : hypothèses : les hypothèses sont les mêmes que celles définies à la section 2.2.1, sauf que la colonne accuse une déformation initiale.

2.5.2 : mise en équation :

soit

$\gamma_0$  : la déflexion initiale à une section d'abscisse  $x$

$a$  : la déflexion initiale maximale

$f$  : la flèche totale

$$f = \gamma + \gamma_0 \quad (2.18)$$

$\gamma$  : déflexion causée par l'application de la charge  $P$  (figure 2.5)

supposons que l'équation de l'axe avant l'application de la charge  $P$  soit :

$$\gamma_0 = a \sin \frac{\pi}{L} x \quad (2.19)$$

(figure 2.5)

le moment fléchissant vaut :

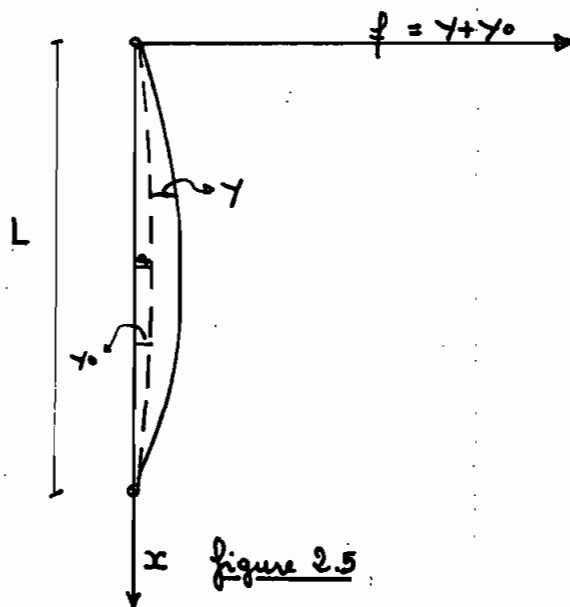
$$M = P.f = P(\gamma + \gamma_0) = P\gamma + Pa \sin \frac{\pi}{L} x \quad (2.20)$$

L'équation différentielle de la déformée est:

$$EI y'' = -Py - Pa \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.20)$$

Ort  $K^2 = P/EI$ , la solution complète de cette équation est:

$$y = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx + \frac{a}{\frac{\pi^2 EI}{PL^2} - 1} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.22)$$



les constantes  $C_1, C_2$  sont déterminées par les conditions

aux limites:  $x = 0, y = 0$  donc  $C_2 = 0$

$x = L, y = 0$  donc  $C_1 = 0$

d'où on obtient finalement

$$y = \frac{a}{\frac{\pi^2 EI}{PL^2} - 1} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.23)$$

théoriquement, l'instabilité a lieu quand  $\gamma \rightarrow \infty$   
 c'est à dire quand

$$\frac{\pi^2 EI}{PL^2} - 1 = 0$$

donc 
$$p_{critique} = P_u = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.24)$$

nous remarquons donc que nous avons la même charge critique, que la colonne soit rectiligne ou non (voir équation (2.7))

en combinant les équations (2.23) et (2.24) on peut écrire :

$$\gamma = \frac{a}{\frac{pu}{P} - 1} \sin \frac{\pi}{L} x \quad (2.25)$$

la déflexion maximale causée par l'application de la charge  $P$  est obtenue pour  $x = L/2$

d'où 
$$\gamma_{max} = \frac{a}{\frac{pu}{P} - 1} \quad (2.26)$$

### 2.5.3 Comparaison entre une colonne initialement droite et une colonne initialement courbée.

pour une colonne initialement rectiligne, le flambage a lieu quand la charge critique ( $P_u$ ) est atteinte (voir figure 2.6).

pour ce qui concerne une colonne initialement non-rectiligne

La flexion commence dès l'application d'une charge  $P$  (voir équation (2.23) et figure 2.6). Quand on approche la charge critique, les déformations transversales deviennent très importantes pour un faible accroissement de charge. Ce qui rend expérimentalement impossible de déterminer directement la charge critique.

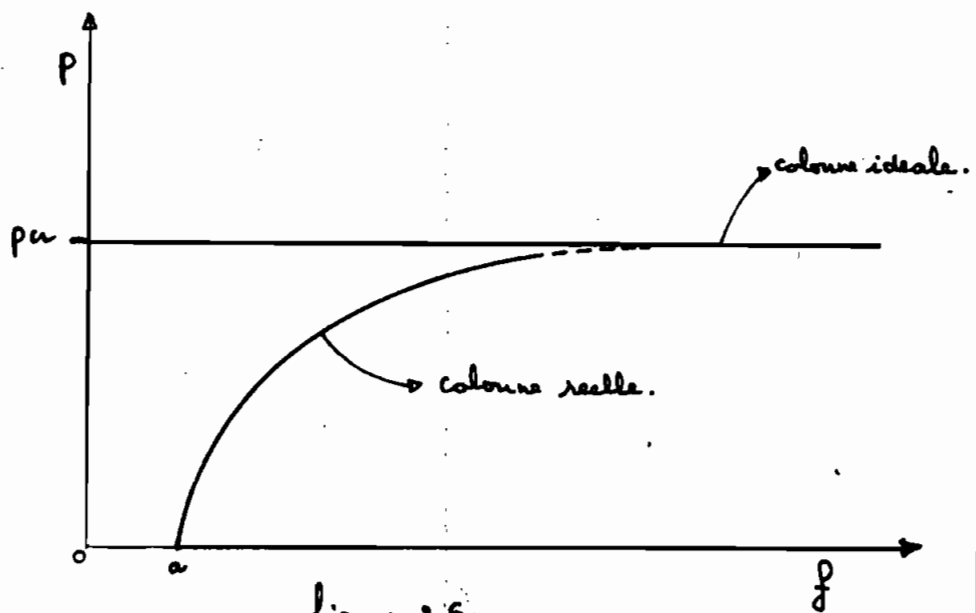


figure 2.6

où  $a$  et  $f$  représente respectivement la déflexion initiale et la flèche totale, au milieu de la colonne.

maintenant que nous avons fait les développements nécessaires pour une colonne simple biarticulée, passons à notre colonne hantournée.

## 2.5 Calcul de la charge critique d'une colonne

biarticulé comportant un appui élastique à son milieu, par la méthode exacte.

### 2.5.1 : introduction:

soit une colonne haubannée tel que l'indique la figure 2.7. Si  $AA'$  le raccourcissement de la colonne est négligeable, nous pouvons dire que la force  $F$  résultant de la tension dans les câbles (tension créée par le déplacement  $d$ ) est liée à cette même tension par une simple relation géométrique (voir figure 2.8) c'est à dire

$$\frac{a+d}{L} = \frac{F}{2T} \quad (2.27)$$

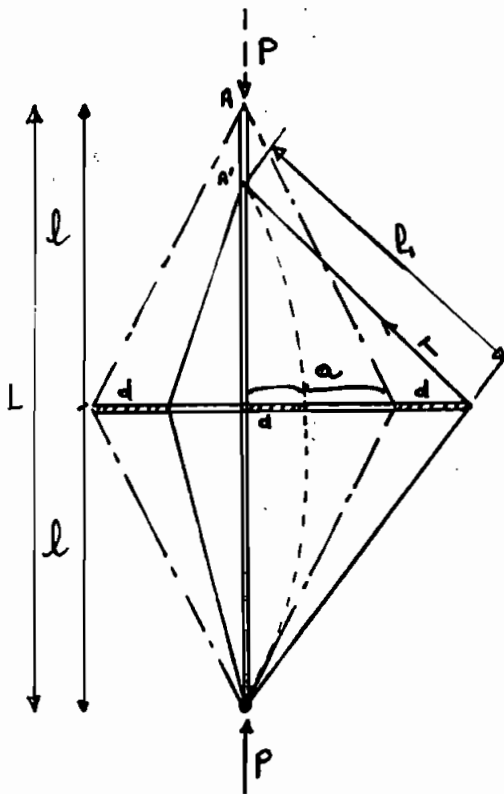


figure 2.7

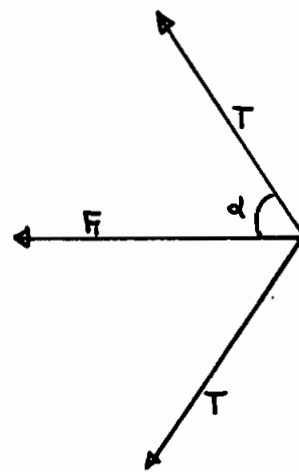


figure 2.8



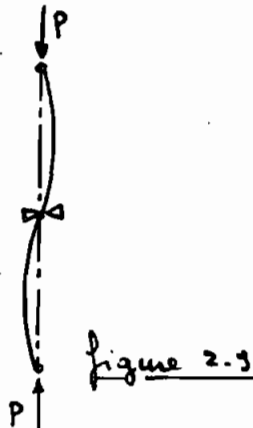
dans ce cas la colonne articulée peut être étudiée comme une colonne ayant un appui élastique en son milieu (ressort)

### 2.5.2 généralités:

+ si à une colonne bi-articulée nous fixons un ressort infiniment rigide, l'appui est parfait (aucune déformation n'est permise), voir figure 2.3

on a alors  $P_u = P_{eu}$  (sur une longueur  $l$ )

$$P_u = P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2.28)$$



+ si par contre le ressort est très flexible, la colonne se comporte comme si le ressort n'existe pas. une contrainte infinitésimale est suffisante pour créer une déformation au niveau du ressort car  $\alpha \approx 0$  ( $\alpha$  étant la rigidité du ressort en question), donc  $F = \alpha d \approx 0$  ( $F$  étant la force résultante de la déformation  $d$ ), voir figure 2.10.

donc  $p_a = p_e$  sur une longueur  $L$   
 or  $L = 2l$ , d'où

$$P_a = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

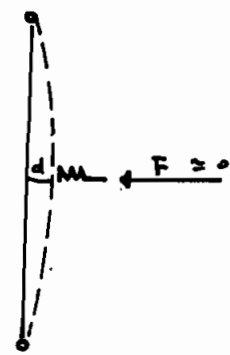


figure 2.10

nous remarquons donc que pour une colonne avec un appui élastique, la charge critique dépend aussi bien de  $E, I, L$  que de  $d$ . il existe donc nécessairement une certaine valeur de  $d$  pour laquelle la force  $F$  engendrée est suffisante pour permettre à la colonne de développer une charge critique telle que :

$$P_a > \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (2.29)$$

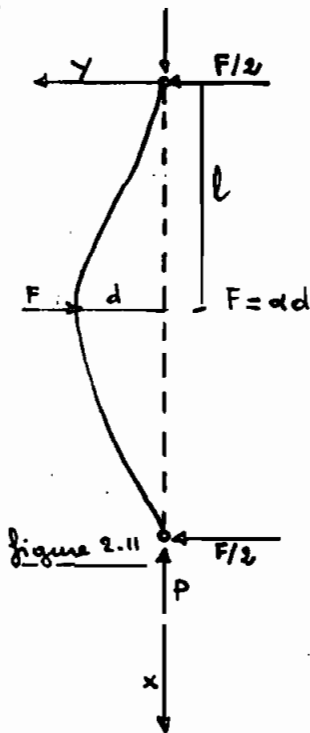
aussi à partir d'une certaine valeur de  $d$ , la force  $F$  permet de développer une charge critique telle que

$$P_a = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2.30)$$

il existe donc nécessairement des valeurs de  $d$  intermédiaires pour lesquelles

$$\frac{\pi^2 EI}{4l^2} < P_a = f(d) \leq \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2.31)$$

### 2.6.3 Détermination de $P_0$ en fonction de $\alpha$



$$\textcircled{1} \quad 0 \leq x \leq l, \quad \mathcal{M} = P_0 - \frac{F}{2}x$$

$$\textcircled{2} \quad l \leq x \leq 2l, \quad \mathcal{M} = P_0 - \frac{F}{2}x + F(x-l)$$

$$\mathcal{M} = P_0 + \frac{F}{2}(x - 2l)$$

$$\textcircled{1} \quad EI \gamma'' = -P_0 + \frac{F}{2}x = -\mathcal{M} \quad (2.32)$$

$$\text{si } 0 \leq x \leq l$$

$$\textcircled{2} \quad EI \gamma'' = -P_0 + \frac{F}{2}(2l - x) = -\mathcal{M} \quad (2.33)$$

$$\text{si } l \leq x \leq 2l$$

$$\text{posons } K^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\textcircled{1} \quad \gamma_1 = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx + \frac{F}{2P}x \quad (2.34)$$

$$\textcircled{2} \quad \gamma_2 = A_1 \sin Kx + A_2 \cos Kx + \frac{F}{2P}(2l - x) \quad (2.35)$$

$$\textcircled{1} \quad \text{si } x=0, \quad \gamma_1=0 \quad \text{d'où} \quad 0 + C_2 \cdot 1 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{d'où } \gamma_1 = C_1 \sin Kx + \frac{F}{2P}x \quad (2.36)$$

Les 4 conditions suivantes déterminent  $C_1, A_1, A_2, P$

$$\gamma_1 = \gamma_2 \text{ si } x=l; \quad \gamma_2=0 \text{ si } x=2l; \quad \gamma_1=d \text{ si } x=l; \quad \gamma_1' = \gamma_2' \text{ si } x=l$$

$$y_1 = y_2 \text{ si } x = l \Rightarrow c_1 \sin kl = A_1 \sin kl + A_2 \cos kl$$

$$y_2 = 0 \text{ si } x = 2l \Rightarrow A_1 \sin 2kl + A_2 \cos 2kl = 0$$

$$y_1 = d \text{ si } x = l \Rightarrow c_1 \sin kl + \frac{Fl}{\epsilon p} = d \quad \text{or } F = \alpha d \Rightarrow$$

$$d = \frac{F}{\alpha}$$

$$\text{d'où } c_1 \sin kl + F \left( \frac{l}{2p} - \frac{1}{\alpha} \right) = 0$$

$$y_1' = y_2' \text{ si } x = l \quad c_1 k \cos kl + \frac{F}{\epsilon p} = A_1 k \cos kl - A_2 k \sin kl - \frac{F}{2p}$$

en arrangeant les équations précédentes  
on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 0 + A_2 \cos kl + A_1 \sin kl - c_1 \sin kl = 0 \\ 0 + A_2 \cos 2kl + A_1 \sin 2kl + 0 = 0 \\ F \left( \frac{l}{\epsilon p} - \frac{1}{\alpha} \right) + 0 + 0 + c_1 \sin kl = 0 \\ \frac{F}{p} + A_2 k \sin kl - A_1 k \cos kl + c_1 k \cos kl = 0 \end{cases}$$

à part la solution banale  $A_2 = A_1 = c_1 = F = 0$   
ce système n'admet des solutions que si  
le déterminant des coefficients est nul

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos kl & \sin kl & -\sin kl \\ 0 & \cos 2kl & \sin 2kl & 0 \\ \left( \frac{l}{\epsilon p} - \frac{1}{\alpha} \right) & 0 & 0 & \sin kl \\ \frac{1}{p} & k \sin kl & -k \cos kl & k \cos kl \end{vmatrix} = 0 = \Delta$$

$$\Delta = \left( \frac{l}{z_p} - \frac{1}{\alpha} \right) \begin{vmatrix} \cos kl & \sin kl & -\sin kl \\ \cos zkl & \sin zkl & 0 \\ K \sin kl & -K \cos kl & K \cos kl \end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{P} \begin{vmatrix} \cos kl & \sin kl & -\sin kl \\ \cos zkl & \sin zkl & 0 \\ 0 & 0 & \sin kl \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \left( \frac{l}{z_p} - \frac{1}{\alpha} \right) \left[ \cos kl \cdot \sin zkl \cdot K \cos kl + K \sin kl \cdot \sin kl \cdot \sin zkl \right]$$

$$- \frac{1}{P} \left[ \cos kl \cdot \sin zkl \cdot \sin kl - \cos zkl \sin^2 kl \right]$$

$$\Delta = 0 = \left( \frac{l}{z_p} - \frac{1}{\alpha} \right) (K \sin zkl) - \frac{1}{P} (\sin zkl \cdot \cos kl \sin kl - \cos zkl \sin^2 kl)$$

en posant  $\sin zkl = z \sin kl \cos kl$

et en simplifiant par  $\sin^2 kl$  on obtient

$$\left( \frac{l}{z_p} - \frac{1}{\alpha} \right) \left( \frac{zK}{\tan kl} \right) = \frac{1}{P} (z \cos^2 kl - \cos zkl)$$

ou  $\cos zkl = \cos^2 kl - \sin^2 kl$

d'où l'équation devient

$$\left( \frac{l}{z_p} - \frac{1}{\alpha} \right) \left( \frac{zK}{\tan kl} \right) = \frac{1}{P}$$

$$\Rightarrow \tan kl = Kl - \frac{zKp}{\alpha} \quad (2.37)$$

La résolution de l'équation (2.37) en fonction de  $P$  donne la charge critique. La résolution analytique faite n'a pas donné des résultats satisfaisants, ce qui simplifie donc une résolution numérique.

Il faut savoir que c'est la rigidité du ressort équivalent qui détermine la charge critique (toute chose égale par ailleurs), nous avons pensé qu'il est intéressant de tracer une courbe  $P_{cr}/p_e$  en fonction de  $d/p_e$ , ce qui nous permettra par la suite de déterminer la charge critique théorique (graphiquement), quelque soit la rigidité du ressort équivalent.

La courbe tracée révèle que si  $d/p_e \geq 8$ ;  $P_{cr}/p_e = 4$

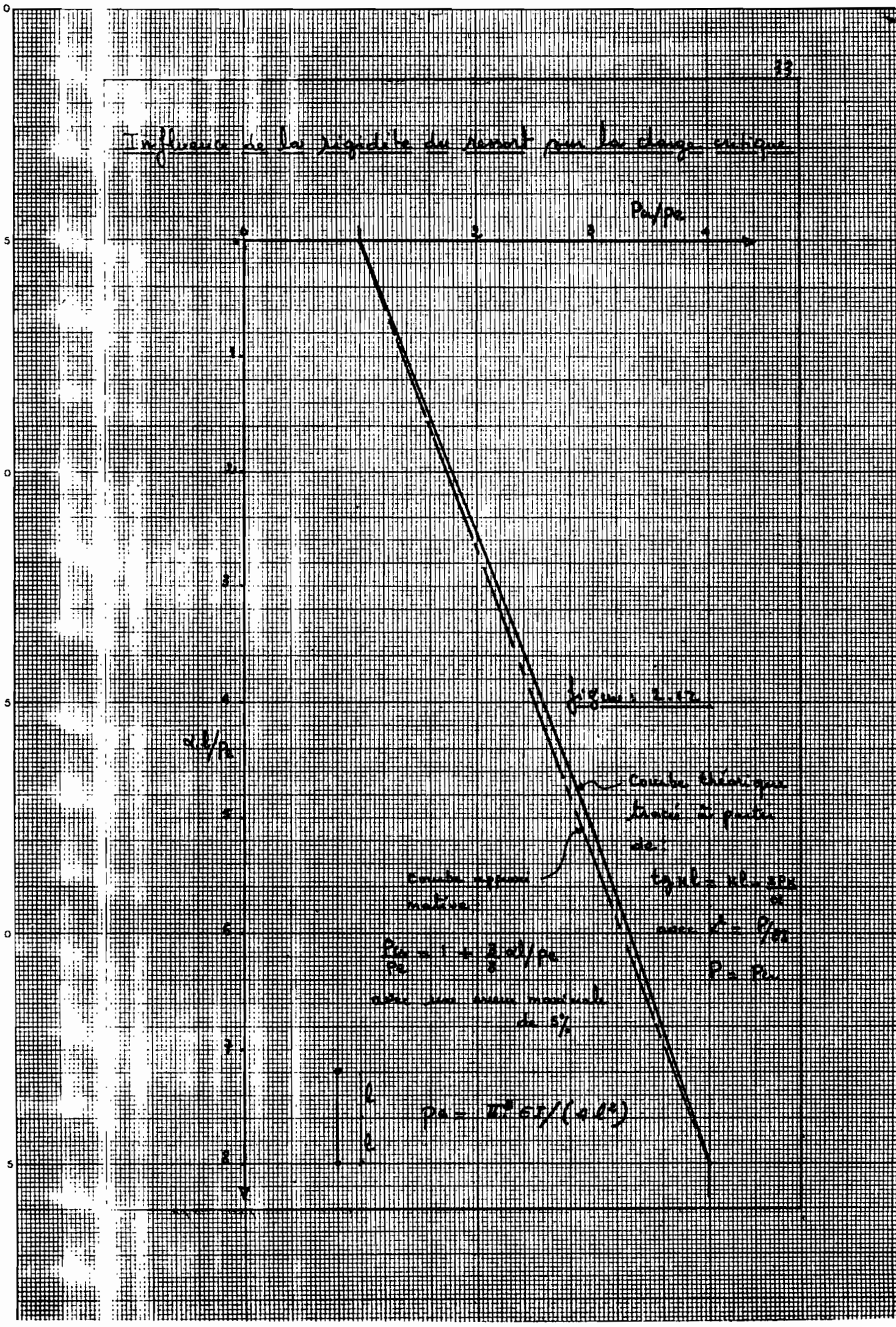
en joignant les deux points extrêmes de la courbe, on obtient une droite approximative avec 5% d'erreur au maximum

$$P_{cr}/p_e = 1 + \frac{3}{8} d/p_e \quad (2.38)$$

(voir figure 2.12)

vous allez utiliser la méthode énergétique pour confirmer vos résultats, et par la suite pour trouver une méthode indirecte permettant de trouver la charge critique théorique à partir des résultats expérimentaux. (voir chapitre 5).

# Influence de la rigidité du ressort sur la charge critique



2.7 détermination de la charge critique d'une colonne  
bi-articulée comportant un appui élastique en son milieu  
par la méthode énergétique (approximative)

2.7.1 : introduction :

soit  $U_t$ ,  $U_f$ ,  $U_d$  respectivement l'énergie des forces extérieures, l'énergie de flexion et l'énergie du ressort. nous savons que l'énergie interne équilibre l'énergie externe, c'est à dire

$$U_t = U_f + U_d \quad (2.33)$$

le système étant en équilibre avant le flambage, l'énergie de déformation axiale et le potentiel de la charge axiale s'équilibrent et ne seront pas considérés dans les calculs.

2.7.2 : mise en équation :

selon la figure 2.13 une fibre de la barre se raccourcit d'une quantité  $\Delta$  qui est due à l'effet de compression combiné à celui de la courbure. le raccourcissement dû à la charge axiale étant déjà considéré, on peut conclure que  $\Delta$  ne provient que de la courbure.

$$\text{soit } y = A \cos \frac{\pi x}{2l} + B \sin \frac{\pi x}{l} \quad \left( \begin{array}{l} \text{formule} \\ \text{approximative} \end{array} \right) \quad (2.40)$$

l'équation de la déformée causée par l'application de la charge  $P$ . <sup>le caractère</sup> l'approximatif de la méthode énergétique vient de l'approximation de la déformée.



si  $x=0$ ,  $y=A$  ; si  $x=\pm l$ ,  $y=0 \Rightarrow A + B \cdot 0 = 0$   
 à partir de l'équation 2.40 nous pouvons écrire que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\pi}{2l} A \sin \frac{\pi}{2l} x + \frac{B\pi}{l} \cos \frac{\pi}{2l} x$$

ou bien 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2l} \left[ -A \sin \frac{\pi}{2l} x + 2B \cos \frac{\pi}{2l} x \right] \quad (2.41)$$

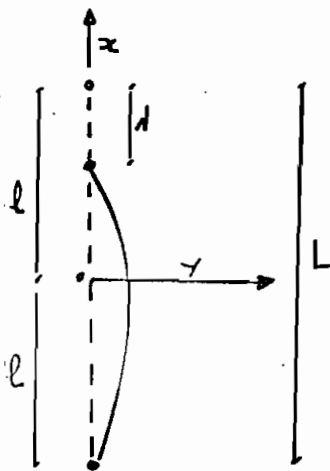
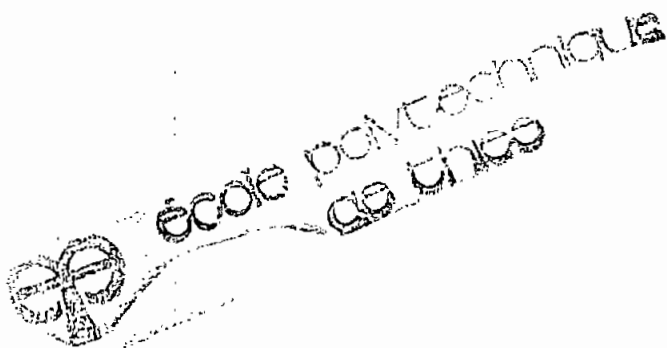


Figure 2.13



donc 
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} \left[ A^2 \sin^2 \frac{\pi}{2l} x + 4B^2 \cos^2 \frac{\pi}{2l} x - 4AB \sin \frac{\pi}{2l} x \cos \frac{\pi}{2l} x \right]$$

or nous savons que 
$$d = \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \quad (2.42)$$
  
(référence Bleich, 1952)

par la suite en remplaçant  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  par sa valeur (équation 2.41)

on trouve

$$\int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \left| \frac{\pi^2}{4l^2} \left[ A^2 \left( \frac{x}{2} - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{\pi}{l} x \right) + 4B^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{l}{4\pi} \sin \frac{2\pi}{l} x \right) - 4AB \left( \frac{-\cos(\frac{\pi}{2l} x)}{-\pi/l} - \frac{\cos(\frac{3\pi}{2l} x)}{3\pi/l} \right) \right] \right|_{-l}^l$$

après développement on trouve 
$$\Delta = \frac{\pi^2}{8} [A^2 + 4B^2] \quad (2.43)$$

nous savons que 
$$U_f = \frac{EI}{2} \int_{-l}^{+l} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{référence Bleich})$$

$$\text{or } \frac{dy}{dx} = \frac{-\pi^2}{4l^2} \cdot A \cdot \cos \frac{\pi}{2l} x - B \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2.44)$$

$$\text{ou } \frac{dy}{dx} = \frac{\pi^2}{4l^2} \left( -A \cos \frac{\pi}{2l} x - 4B \sin \frac{\pi x}{l} \right)$$

en remplaçant  $\frac{dy}{dx}$  par sa valeur et en calculant l'intégrale, on trouve :

$$U_f = \frac{EI \pi^4}{32 l^3} [A^2 + 16B^2] \quad (2.45)$$

soit  $y_0$  la valeur de  $y$  pour  $x=0$

$$\text{or } U_d = \frac{\alpha y_0^2}{2} \quad \text{donc } U_d = \frac{\alpha A^2}{2}$$

(voir équation 2.40).

$$\text{et } U_t = \Delta \cdot P = \frac{P \pi^2}{8 l} [A^2 + 4B^2] \quad (2.46)$$

en posant  $U_t = U_f + U_d$  (voir équation 2.39)

$$\text{on trouve } \frac{P \pi^2}{8 l} (A^2 + 4B^2) = \frac{\alpha A^2}{2} + \frac{EI \pi^4}{32 l^3} [A^2 + 16B^2] \quad (2.47)$$

après transformation on trouve

$$P = 4 \alpha l \cdot \left( \frac{A^2}{A^2 + 4B^2} \right) + \frac{EI \pi^2}{4 l^2} \left( \frac{A^2 + 16B^2}{A^2 + 4B^2} \right) \quad (2.48)$$

or à la section 2.2.1 nous avons trouvé que la

charge critique d'une colonne simple biarticulée de longueur

$L$  ( $L=2l$ ) vaut :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{A l^2}$$

posons

$$A^2 = M; \quad N = A^2 + 4B^2$$

$$D = A^2 + 4B^2$$

ou rearrangeant on obtient

$$P = \frac{4al}{\pi^2} \cdot \frac{M}{D} + P_e \cdot \frac{N}{D} \quad (2.43)$$

ou la charge qui crée l'équilibre indifférent correspond à la charge critique (débit du flambage), d'où

$$P_c = \frac{4al}{\pi^2} \cdot \frac{M}{D} + P_e \frac{N}{D} \quad (2.50)$$

déterminons l'expression de  $P$  par rapport à  $A$  et  $B$  pour minimiser la charge qui crée le flambement (charge critique)

soit  $x$  une constante (pouvant représenter  $A$  ou  $B$ )

la valeur de  $P$  solution de l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

représente la charge critique. or

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{4al}{\pi^2} \left[ D \frac{\partial M}{\partial x} - M \frac{\partial D}{\partial x} \right] + P_e \left( D \frac{\partial N}{\partial x} - N \frac{\partial D}{\partial x} \right) + \frac{1}{D^2} (2.51)$$

ou après développement on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial x} \underbrace{\left[ \frac{M}{D} + \frac{4al}{\pi^2} + \frac{N}{D} P_e \right]}_P + \frac{4al}{\pi^2} \frac{\partial M}{\partial x} + P \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2.52)$$

en écrivant  $\frac{\partial P}{\partial A} = 0$  on obtient

$$-2AP + \frac{4al}{\pi^2} + 2A + p_e \times 2A = 0$$

$$\text{ou } P = \frac{4al}{\pi^2} + p_e \quad (2.53)$$

pour  $\frac{\partial P}{\partial B} = 0$ , on obtient

$$-8B.P + \frac{2al}{\pi^2} + 32 \times B \times p_e = 0$$

$$\text{ou } P = 4p_e \quad (2.54)$$

on obtient donc 2 solutions :

$$\begin{cases} P_a = p_e + \frac{4al}{\pi^2} \\ \text{et} \\ P_a = 4p_e \end{cases}$$

à partir de ces solutions, nous remarquons que :

si  $\frac{4al}{\pi^2} \leq 3$  ; la charge critique se situe entre  $p_e$  et  $4p_e$ .

$$\text{Si } \frac{4al}{\pi^2} = 3 \quad ; \quad P_a = 4p_e$$

Pour des valeurs de  $\frac{4al}{\pi^2} > 3$ ,  $P_a = 4p_e$ , la longueur de flambage devient  $l$  et c'est là où l'on obtient le maximum de gain de résistance. Le ressort se comporte comme un appui à rigidité infinie, d'où la formation de deux demi-ondes de longueur totale  $2l$  (l pour chaque demi-onde).

### 2.7.3 Comparaison des deux méthodes (exacte et énergétique)

Si nous acceptons une erreur de 5% au maximum, nous pouvons dire que par la méthode exacte,  $p_u$  vaut:

$$\textcircled{1} \quad p_u = p_e + \frac{3}{8} \frac{e l}{p_e} \quad (2.55)$$

la méthode énergétique donne:

$$\textcircled{2} \quad p_u = p_e + \frac{4 e l}{\pi^2} \quad (2.56)$$

$$\textcircled{1} \approx p_u = p_e + 0,375 \frac{e l}{p_e}$$

$$\textcircled{2} \approx p_u = p_e + 0,405 \frac{e l}{p_e}$$

nous remarquons une légère différence due au fait que l'équation de la déformée qui a été utilisée au niveau de la détermination de  $p_u$  par la méthode énergétique est approximative.

maintenant que nous avons cerné l'aspect théorique du problème, passons aux conditions pratiques expérimentales.

## Chapitre 3

### Choix de la section rectangulaire, du type d'appuis et du système de raidisseur à câbles.

#### 3.1 choix de la section rectangulaire

##### 3.1.1 critères de flambage

3.1.1.1 flambage autour du plan YY

3.1.1.2 flambage autour du plan XX

3.1.1.3 flambage dans le domaine élastique

##### 3.1.2 résistance des câbles

##### 3.1.3 limites imposées par la machine de compression

3.1.3.1 limite sur la charge

3.1.3.2 limite sur la longueur

##### 3.1.4 disponibilité

##### 3.1.5 résumé et choix final

#### 3.2 calcul de la rigidité du ressort équivalent

#### 3.3 choix du type d'appuis et du système de raidisseur

##### 3.3.1 appuis

##### 3.3.2 système de raidisseur

#### 3.4 procédures d'essais

### 3.1 Choix de la section rectangulaire

Le choix de la section rectangulaire repose sur quatre critères généraux qui doivent être vérifiés simultanément. A savoir le critère de flambage, la résistance des cales, les limites imposées par la machine de compression sur la charge appliquée et la longueur de la pièce.

#### 3.1.1: Critère de flambage

pour qu'une section soit adéquate il faut que le flambage autour du plan  $yy$  sur une longueur  $l$  arrive avant le flambage autour du plan  $xx$  sur une longueur  $2l$  (voir figures 3.1, 3.2, 3.3)

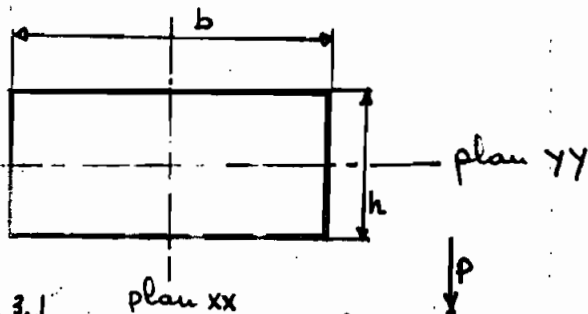


fig 3.1

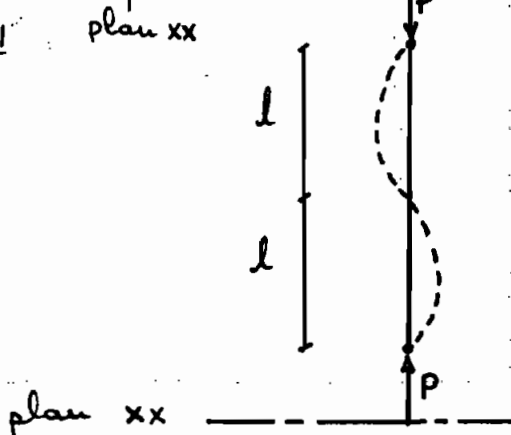


fig 3.2

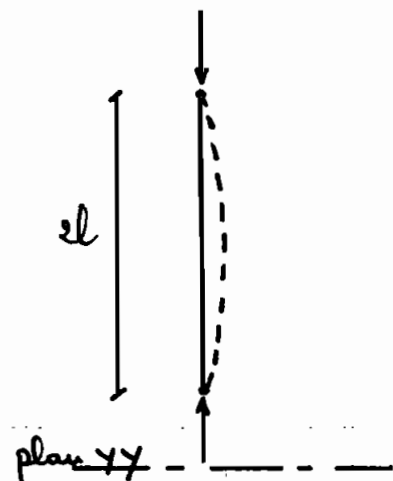


fig 3.3

### 3.1.1.1: flambage autour du plan $yy$ (dans le plan $xx$ )

soit  $A = b \cdot h$  l'aire de la section rectangulaire

soit  $I_{yy} = (b \cdot h^3) / 12$  l'inertie de la section par rapport à l'axe  $yy$

soit  $r_{yy} = \left( \frac{I_{yy}}{A} \right)^{1/2}$  le rayon de giration de la section par rapport à l'axe  $yy$

$$\text{on a } r_{yy} = \left( \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{1}{b \cdot h} \right)^{1/2} = \frac{h}{2\sqrt{3}} \quad (3.1)$$

alors le degré d'élanement  $(kl/r_{yy})$  vaut:  $l/r_{yy}$   
(colonne biarticulée; point d'inflexion au milieu de la colonne;  $k=1$ )

$$\frac{kl}{r_{yy}} = \frac{l}{h} \cdot 2\sqrt{3} \quad (3.2)$$

### 3.1.1.2: flambage autour du plan $xx$ (dans le plan $yy$ )

soit  $I_{xx} = (h \cdot b^3) / 12$  l'inertie de la section par rapport à l'axe  $xx$

on a  $r_{xx} = \left( \frac{I_{xx}}{A} \right)^{1/2}$  le rayon de giration de la section par rapport à l'axe  $xx$

le degré d'élanement  $(2kl/r_{xx})$  vaut:  $2l/r_{xx}$   
( $k=1$ ; poutre biarticulée)

$$\frac{2kl}{r_{xx}} = \frac{2l}{b} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4l \cdot \sqrt{3}}{b} \quad (3.3)$$



pour que le flambage autour du plan  $yy$  sur une longueur  $l$  arrive avant le flambage autour du plan  $xx$  sur une longueur  $2l$ , il faut que le degré d'élanement  $l/r_{yy}$  soit plus grand que le degré d'élanement  $2l/r_{xx}$

$$\text{il faut donc } l/r_{yy} > 2l/r_{xx} \quad (3.4)$$

$$\text{or } l/r_{yy} = \frac{l}{h} \cdot 2\sqrt{3} \quad ; \quad 2l/r_{xx} = \frac{4l}{b} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{donc il faut } \frac{l}{h} \cdot 2\sqrt{3} > \frac{4l}{b} \cdot \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{h} > \frac{2}{b}$$

$$\text{donc il faut } b > 2h. \quad (3.5)$$

### 3.1.1.3 flambage dans le domaine élastique.

Lors de la mise en équation pour trouver la charge critique d'une colonne biarticulée, nous avons posé comme hypothèse que la colonne était élastique, ce qui voulait dire indirectement que le flambage se fait dans le domaine élastique.

Nous avons mentionné à la section 2.4.2 que pour que les conditions de la théorie soient correctement vérifiées, il faut que le degré d'élanement

soit supérieur à 162

si nous voulons que le flambage autour du plan  $yy$  sur une longueur  $l$  se fasse dans le domaine élastique, il faut donc  $l/r_{yy} > 162$

ce qui implique évidemment que le flambage autour du plan  $yy$  sur une longueur  $2l$  se fait dans le domaine élastique ( $2l/r_{yy} > 162$ )

Vous remarquerez que nous avons considéré que nos rotules étaient parfaites ( $k=1$ ). Étant donné que pratiquement notre système d'appuis ne peut être parfait, et que nous ne pouvons prédire ce qu'il vaut sans l'avoir testé, nous prendrons un coefficient de sécurité sur les conditions fondamentales qui implique le critère de flambage, à savoir

$$b > 2h \quad (3.6)$$

$$l/r_{yy} > 162 \quad (3.7)$$

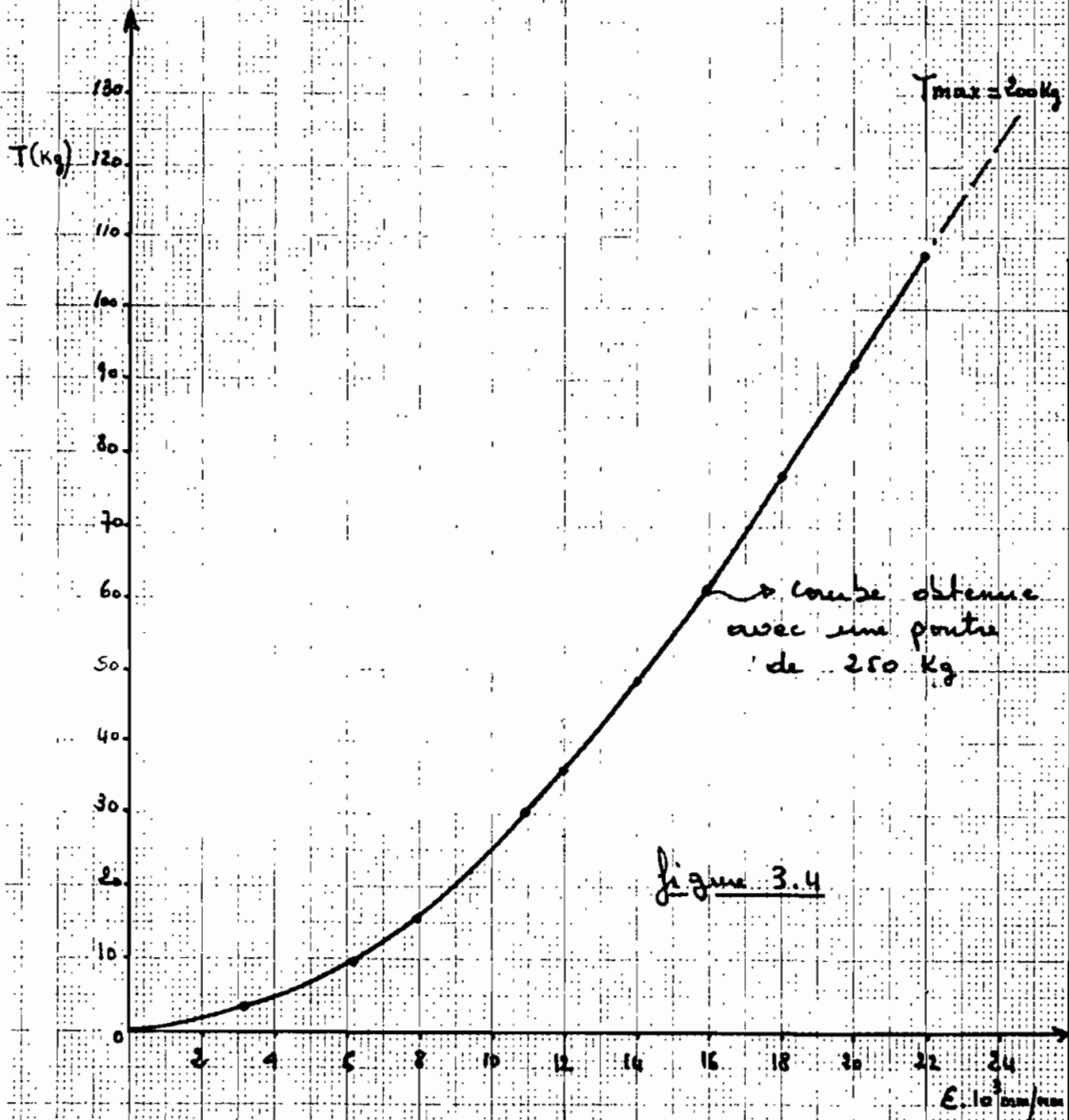
### 3.1.2 : Résistance des câbles

Des essais de traction ont été faits sur les câbles qui peuvent être utilisés dans le système de raidissement. Des effets de diépreage et de concentration de contraintes ont été observés au niveau des points d'attaches des câbles. Nous devons donc tenir compte de ces phénomènes lors de la réalisation du système de raidissement à câbles.

Nous prendons ici néanmoins une tension admissible de 100 Kg pour éviter les ruptures des câbles au niveau des attaches par concentration de contraintes répétées, ce qui nous permettra de garder la même précision en utilisant les mêmes câbles pour tous les essais. Les câbles peuvent supporter une charge maximale autour de 200 Kg, et il a été remarqué que cette charge maximale dépend du degré de serrage au niveau des points d'attaches.

Vous trouverez à la page suivante les courbes charge déformation qui ont été enregistrées (figures 3.4, 3.5)

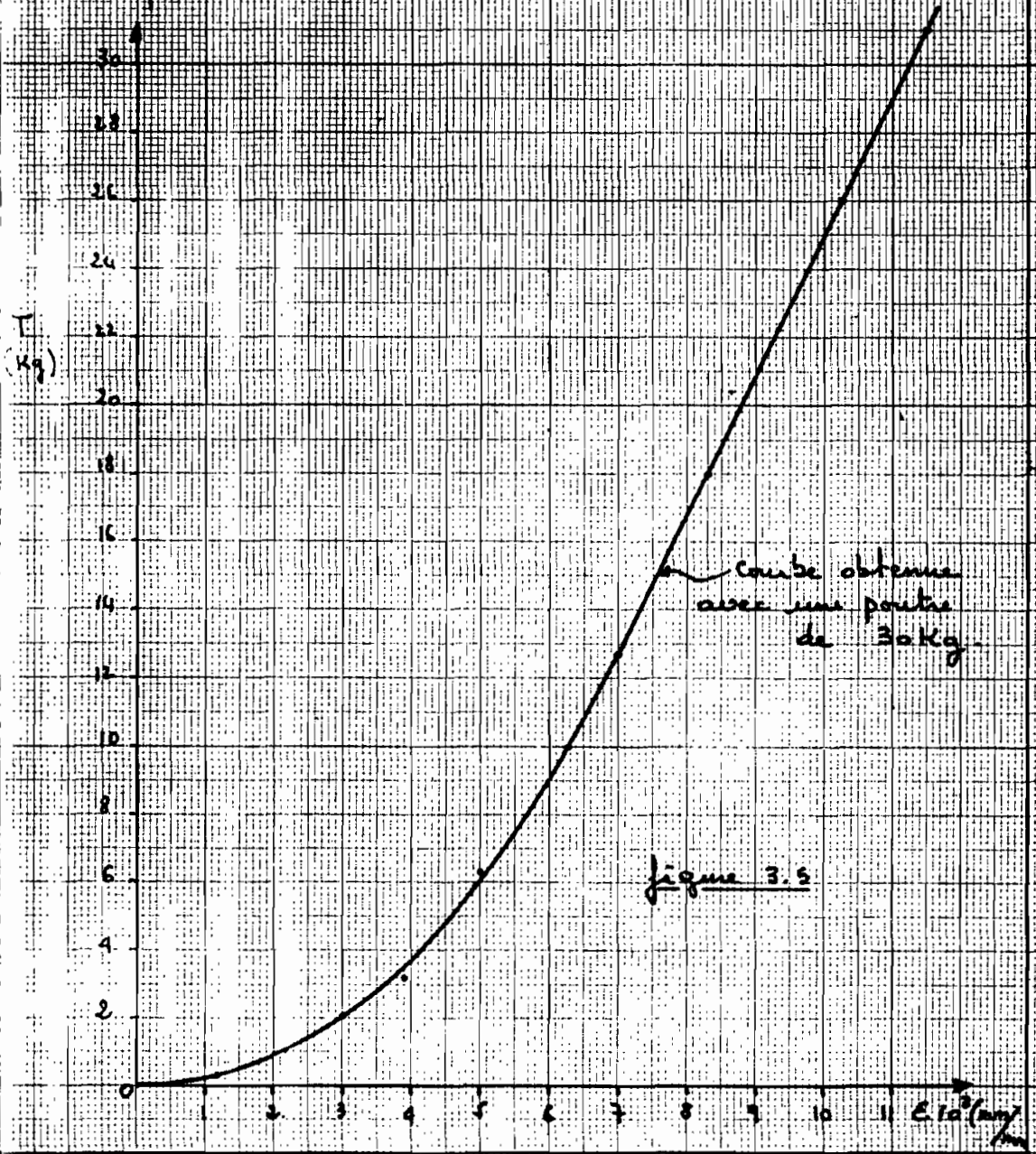
## Courbes charge - déformation de câble



des difficultés particulières ont été rencontrées en ce qui a trait aux attaches (dérapages aux extrémités) une autre courbe a été obtenue avec une poutre de 30kg, pour avoir une meilleure précision (page suivante)

Cette présente courbe permet de déterminer la tension au niveau du câble même pour de faibles déformations.

Il a été remarqué qu'un chargement répété avant l'essai de tension en question permet d'améliorer le phénomène de dissipation constaté au niveau des points d'attaches.



48

### 3.1.3 : limites imposées par la machine de compression sur la charge applicable et la longueur de la pièce.

3.1.3.1 : Charge : la machine permet une charge maximale de 600 kN et le choix est possible pour différentes échelles selon la précision recherchée.

3.1.3.2 : Longueur : la marge totale disponible est environ 1400 mm. En tenant compte de l'espace nécessaire pour les appuis, et du fait que pour avoir un bon fonctionnement de la pompe hydraulique, le piston doit sortir d'au moins 100 mm. La longueur de notre colonne doit donc être nécessairement inférieure à 1100 mm.

3.1.4. Disponibilité : essentiellement quatre types de sections rectangulaires sont disponibles :

- ① 20 x 60 (mm)
- ② 10 x 50 -
- ③ 5 x 16 -
- ④ 10 x 100 -

nous allons dans ce qui suit déterminer la section qui répond le mieux à nos critères.

### 3.1.5: Résumé et choix final

à partir des remarques faites à la section 3.1.3.2, nous avons choisi  $L = 1000 \text{ mm}$ , or  $L = 2l$ , donc  $l = 500 \text{ mm}$  nous vérifions que toutes les sections disponibles vérifient l'équation (3.6), à savoir  $b/h > 2$

nous savons que  $R_{\ell}/\lambda_{yy} = \frac{\ell}{h} \pm 2\sqrt{3}$  (équation (3.2)), d'où pour les différentes sections, nous avons :

	(R=1)
section ①	$\frac{R_{\ell}/\lambda_{yy}}{86,6}$
section ②	173,2
section ③	346,4
section ④	173,2

nous choisissons la section ② :  $E = 180000 \text{ MPa}$      $F_y = 300 \text{ MPa}$

$$b = 50 \text{ mm}; \quad h = 10 \text{ mm}$$

$\frac{R_{\ell}}{\lambda_{yy}} = 173,2$  (R=1), ce qui signifie que le flambement va se faire dans le domaine élastique (référence picard et Beaulieu, 1981)

pour ce qui concerne la vérification de la résistance du câble, un critère très important sera de limiter durant les essais avec la colonne haubannée, la déflexion au milieu de la colonne pour éviter de dépasser une tension de 100kg au niveau du câble. Ceci parce qu'il y a des risques de dérapage et de concentration de contraintes

ou vérifie que au maximum une charge de 29,6 kN peut être appliquée, charge qui peut être atteinte avec la machine de compression sans problème.

$$P_e(L) = \frac{\pi^2 EI}{L} = 7,4 \text{ kN}$$

$$P_e(L/2) = P_e(L) = \frac{\pi^2 EI}{l} = 29,6 \text{ kN.}$$

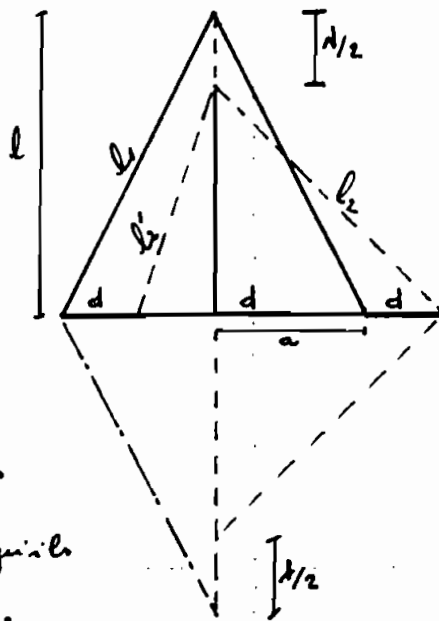


### 3.2 Calcul de la rigidité du ressort équivalent

il est indispensable avant de faire un essai avec la colonne haubannée, de déterminer d'avance la charge critique théorique à laquelle on pourrait s'attendre, ceci pour éviter de la dépasser expérimentalement.

Le développement théorique permettant de déterminer la charge critique en fonction de la rigidité du ressort étant déjà fait, il reste maintenant à déterminer la rigidité du ressort équivalent en fonction des propriétés du câble et des différents paramètres géométriques (voir figure 3.6).

soit  $\Delta$  le raccourcissement total de la colonne pour une charge  $P$  donnée,  $E$  et  $A'$  respectivement le module élastique et l'aire de section du câble.



N.B. les câbles sont initialement tendus (suffisamment pour qu'ils ne restent devant le chargement)

figure 3.6

$d$  représente la déflexion causée par l'application d'une charge  $P$  (déflexion au milieu de la colonne)

nous savons que  $l_1^2 = a^2 + l^2$  (3.8)

$$l_2^2 = (a+d)^2 + (l - d/2)^2 = a^2 + 2ad + d^2 + l^2 - dl + \frac{d^2}{4}$$

or  $d^2$  et  $\frac{d^2}{4}$  sont négligeables devant les autres termes

$$\text{d'où } l_2^2 = a^2 + 2ad + l^2 - dl \quad (3.9)$$

de la même manière

$$l_1'^2 = (a-d)^2 + (l - d/2)^2 = a^2 - 2ad + l^2 - dl \quad (3.10)$$

$$\text{or } l_1^2 = (l_1 + \Delta l_1(\text{droite}))^2$$

$$l_1'^2 = (l_1 - \Delta l_1(\text{gauche}))^2$$

$$\text{posons } \Delta l_1(\text{droite}) = \Delta l_1$$

$$\Delta l_1(\text{gauche}) = \Delta l_2$$

on a alors

$$l_1^2 = (l_1 + \Delta l_1)^2 = a^2 + l^2 + 2l_1 \Delta l_1 + \Delta l_1^2 \quad (3.11)$$

$$l_1'^2 = (l_1 - \Delta l_2)^2 = a^2 + l^2 - 2l_1 \Delta l_2 + \Delta l_2^2 \quad (3.12)$$

or  $\Delta l_1^2$  et  $\Delta l_2^2$  sont négligeables devant les autres termes, d'où finalement

$$2l_1 \Delta l_1 = 2ad - dl \quad (3.13)$$

$$2l_1 \Delta l_2 = 2ad + dl \quad (3.14)$$

d'où 
$$\Delta l_1 = \frac{2ad - \Delta l}{2l_1} \tag{3.15}$$

$$\Delta l_2 = \frac{2ad + \Delta l}{2l_1} \tag{3.16}$$

soit  $\Delta T_1$  et  $\Delta T_2$  respectivement le gain de tension à droite et la perte de tension à gauche.

$\Delta T_1 + \Delta T_2$  représente alors la tension résultante

soit donc  $T = \Delta T_1 + \Delta T_2$

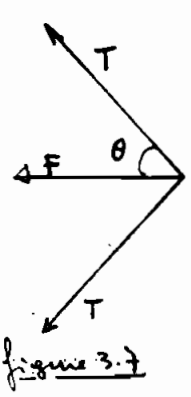
la contrainte au niveau du câble vaut :  $\sigma = E' \epsilon = \frac{T}{A'}$

avec  $\epsilon$  la variation relative totale

on peut donc écrire que  $T = A'E'\epsilon$

d'où 
$$T = A'E' \frac{[2ad - \Delta l + 2ad + \Delta l]}{2l_1^2} = \frac{A'E' \cdot 2a \cdot d}{l_1^2} \tag{3.17}$$

soit  $F$  la force horizontale résultant de la tension  $T$   
(voir figure 3.7)



$F$  est définie comme étant le produit du déplacement ( $d$ ) par la rigidité' du ressort équivalent ( $\alpha$ )

$$F = \alpha \cdot d \tag{3.18}$$

donc 
$$T = \frac{A'E' \cdot 2a \cdot d}{l_1^2} \quad ; \quad F = \alpha d$$

en acceptant l'approche de la théorie des faibles déformations, nous pouvons négliger la variation de l'angle  $\theta$ , d'où :

$$\frac{F/2}{T} = \frac{a}{l_1} \quad (3.19)$$

ce qui implique :  $F = 2Td = \frac{2T \cdot a}{l_1}$  (3.20)

en remplaçant  $T$  par sa valeur, on obtient :

$$\alpha = \frac{4a^2 A' E'}{l_1^3} = \frac{4a^2 \cdot A' \cdot E'}{(a^2 + l^2)^{3/2}} \quad (3.21)$$

on voit à partir de cette expression que le raccourcissement ( $d$ ) n'a pas d'influence sur la valeur de la rigidité équivalente du ressort. Ceci parce que  $d$  a tendance à faire perdre de la tension aussi bien à gauche qu'à droite, donc son effet s'équilibre tout seul. Ce qui reste important de considérer c'est la perte de tension à gauche et le gain de tension à droite qui sont dus à la déflexion  $d$ .

donc nous pouvons conclure que si les câbles sont initialement suffisamment tendus pour qu'ils le restent durant tout le chargement,  $\alpha$  ne dépend que de  $A'$ ,  $E'$ ,  $a$  et  $l$ .

### 3.3 Choix du type d'appui et du système de raidisseur

3.3.1: appuis: notre souci principal c'est d'avoir un appui qui s'approche le plus possible d'une rotule parfaite, et qui permette d'éliminer le mieux possible les excentricités. nous avons choisi un appui avec rainure au V. un rouleau cylindrique sera placé entre la base et la colonne. un graissage du système se fera avant chaque essai (voir figure 3.10)

L'appui du bas est muni d'un système de réglage permettant ainsi de réduire considérablement les effets d'excentricité. l'appui du haut une fois réglé demeure fixe (figure 3.8, appui du bas)

3.3.2 système de raidisseur: notre système doit minimiser les pertes de tension (au mieux, éliminer), ceci parce que des effets de dérapage ont été enregistrés lors des essais de tension des câbles. aussi il faut que la tension soit la même sur tout le long du câble, donc un système permettant de faire glisser le câble est nécessaire, voir figure 3.9.

pour éviter des effets de concentration de contraintes, des joints en aluminium seront placés de part et d'autre des zones de fixation, permettant ainsi de serrer convenablement (voir figure 3.11)

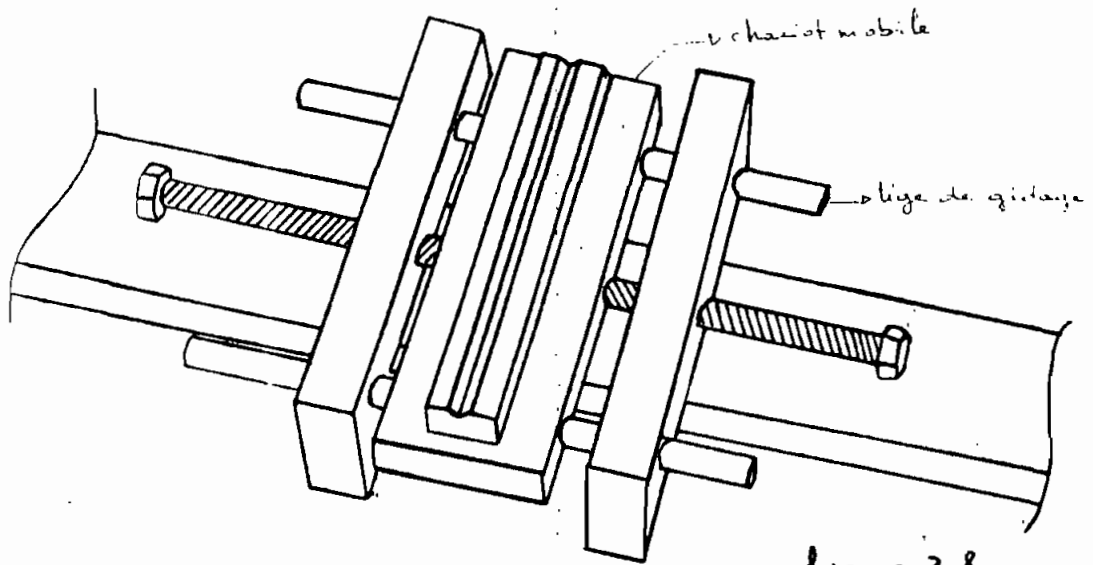


figure 3.8

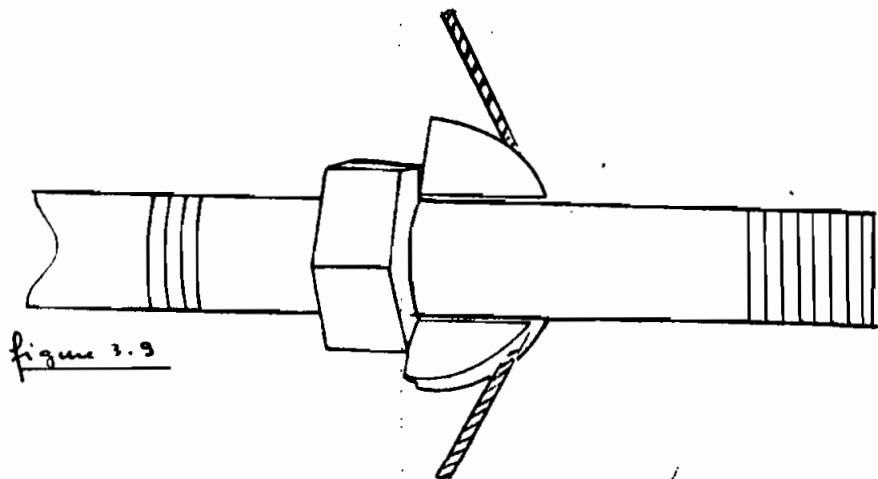


figure 3.9

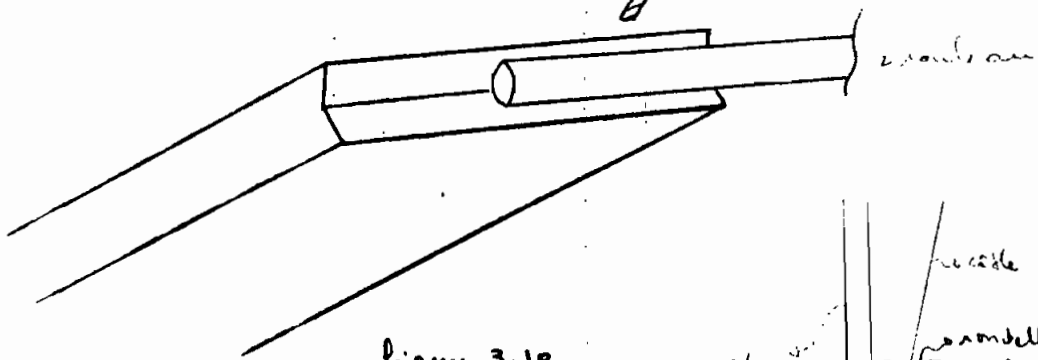


figure 3.10

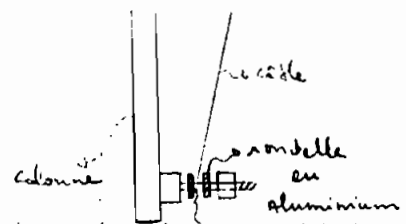


figure 3.11

### 3.4 procédure d'essai

avant tout essai, il faut respecter les recommandations suivantes:

- \* graisser les appuis
- \* régler les appuis avec un fil à plomb
- \* faire quelques essais de chargement pour assurer le rodage, et vérifier s'il n'y a pas de blocage au niveau du micromètre.
- \* Calculer à partir de l'équation suivante la déflexion maximale permise.

$$\sigma_{max} \approx F_y' = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot y_{max} \cdot v}{I} \quad (3.22)$$

$v$  représente la distance du centre de gravité à la fibre extrême (il faudra évidemment prendre un coefficient de sécurité sur  $F_y$ )

## Chapitre 4

Vérification de la théorie et détermination de la précision du système d'appuis à partir d'essais avec des colonnes simples.

### 4.1 introduction

### 4.2 méthode expérimentale de détermination de la charge critique.

### 4.3 vérification de la méthode

#### 4.3.1 introduction

#### 4.3.2 appuis non-tempés

##### 4.3.2.1 influence de la position de la colonne

##### 4.3.2.2 influence du tassement des appuis

#### 4.3.3 appuis tempés

##### 4.3.3.1 introduction

##### 4.3.3.2 influence du tempsage des appuis

#### 4.3.4 vérification du comportement des appuis tempés dans les conditions prévues.

##### 4.3.4.1 introduction

##### 4.3.4.2 analyse des résultats

### 4.4 remarques générales sur le comportement des appuis

#### 4.4.1 appuis non-tempés

#### 4.4.2 appuis tempés

#### 4.4.3 conclusion

### 4.5 charge critique de la colonne avec son système de raidisseur.



#### 4.1 Introduction

étant donné qu'il n'existe pas pratiquement de colonne parfaitement droite, la flexion est un phénomène qui commence dès que le chargement commence. Quand la charge critique <sup>est</sup> approché, les déformations sont très grandes et elles prennent des valeurs disproportionnées par rapport aux faibles accroissements de la charge. Ce qui rend impossible la détermination de la charge critique par une méthode directe, d'où la nécessité de trouver une méthode indirecte.

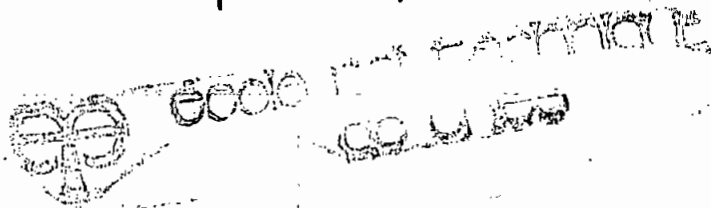
#### 4.2 : méthode pour déterminer $P_{cr}$ d'une colonne simple biarticulée, à partir des résultats expérimentaux.

à la section 2.2.2, nous avons trouvé que pour une colonne biarticulée non rectiligne (équation (2.16))

$$y_{max} = \frac{a}{\frac{P_{cr}}{P} - 1} \quad (4.1)$$

$y_{max}$  correspond à la flèche au milieu de la colonne, causée par l'application de la charge  $P$   
 $a$  correspond à la déflexion initiale au milieu de la colonne, (avant l'application de la charge  $P$ )

à chaque valeur de  $P$  nous pouvons déterminer directement  $y_{max}$  à l'aide d'un micromètre qui sera placé au milieu de la colonne.



à partir de l'équation (4.1) nous pouvons écrire

$$Y_{\max} = P_u \left( \frac{Y_{\max}}{P} \right) - a \quad (4.2)$$

posons  $Y_1 = Y_{\max}$ ;  $X_1 = Y_{\max}/P$

$$\text{ou a donc} \quad Y_1 = P_u X_1 - a \quad (4.3)$$

ce qui veut dire que si l'hypothèse de la déformée initiale est vérifiée (équation (2.9)) à savoir

$$Y_0 = a \sin \frac{\pi x}{L} \quad (4.4)$$

les points de coordonnées  $(Y_1, X_1)$  représente une droite et la pente de cette droite représente  $P_u$  (figure 4.1)

nous allons donc par  $P$  donné, mesurer  $Y_1$ , puis calculer  $X_1$ . ensuite les points de coordonnées  $(Y_1, X_1)$  seront placés dans un repère orthonormé, et avec les points expérimentaux jugés valables, nous allons faire passer la meilleure droite (régression linéaire), la pente de cette droite représente  $P_u$

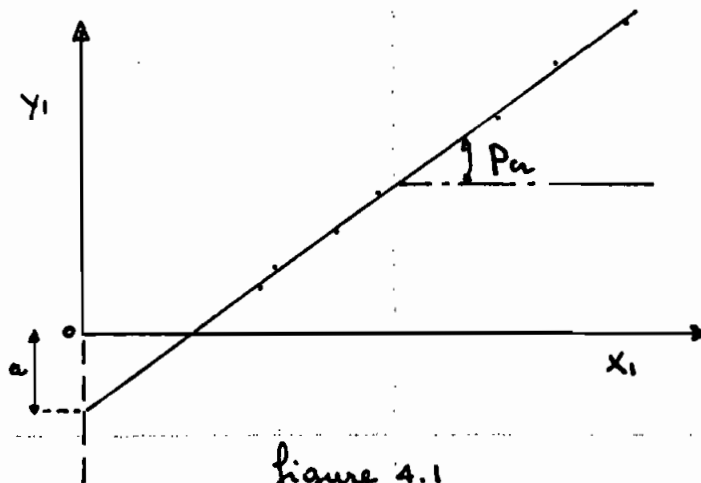


Figure 4.1

on pourrait supposer à la limite une série de sinus et cosinus pour simuler n'importe quelle déflexion initiale, et si la déflexion initiale est telle que prévue, la relation entre  $y_1$  et  $x_1$  est linéaire. Si la relation n'est pas linéaire, cela ne peut être dû qu'aux imprécisions expérimentales (référence

TIMOSHENKO, 1961)

### 4.3: Vérification de la méthode à partir des résultats obtenus avec une colonne simple biarticulée

4.3.1: introduction: avec les premiers essais, nous avons remarqué que la position de la colonne, et le tassement au niveau des appuis avaient une influence considérable sur la charge critique.

en effet des marquages ont été remarqués, ce qui veut dire que la rotation n'est pas totalement permise, d'où  $R < 1$  ( $R = 1$  pour une colonne biarticulée parfaitement).

nous avons par la suite trempé les extrémités de la colonne, ce qui a permis de réduire considérablement le phénomène du tassement des appuis

4.3.2 appuis non-trempés: il faut distinguer l'influence de la position de la colonne, et le phénomène de

l'assemblage au niveau des extrémités de la colonne (appuis)

#### 4.3.2.1 : influence de la position de la colonne

des positions ont été fixées arbitrairement (A, B, C, D). La position A signifie que l'expérimentateur voit en face de lui la lettre (A) à la partie supérieure de la colonne (figure 4.2)

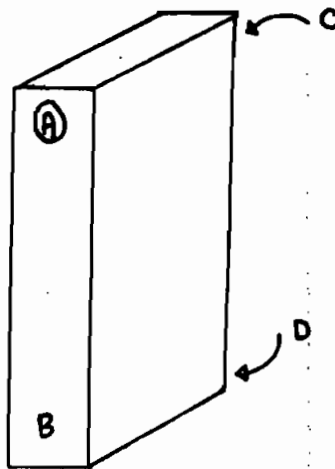


figure 4.2

Le tableau 4.1 représente pour chaque position, la charge critique, le coefficient de corrélation, et l'écart par rapport à la valeur théorique de Euler.

NB les valeurs de charges critiques représentent la moyenne d'au moins 3 essais.

tableau 4.1

Position de la colonne	* Charge critique (kN)	Coefficient de corrélation	écart %
A	10,75	0,9997	45,3
B	9,15	0,9984	23,6
C	10,93	0,9986	47,7
D	10,91	0,9994	47,4

Les coefficients de corrélation trouvés au tableau 4.1 montrent que effectivement la relation entre  $\gamma_1$  et  $x_1$  est linéaire, donc la méthode envisagée à la section 4.2 est valable pour déterminer expérimentalement  $p_u$  (méthode indirecte).  
Nous pouvons aussi conclure que nos appareils de mesure sont satisfaisants, la partie non linéaire de la courbe traduit un phénomène de positionnement de la colonne (figure 4.3)

Le tableau 4.2 représente pour la position A, les valeurs de  $x_1$ ,  $\gamma_1$  qui ont été utilisées pour déterminer la charge critique, la déflexion maximale fictive initiale ( $\gamma_0$ ) correspondante et les valeurs de  $\gamma_1$  estimées à partir de la droite de régression.

pour G qui conserve les positions B, C, D voir annexe B.

4.3.2.1 (suite)

Appuis non dérangés : Position A

effet de la position de la colonne sur P<sub>cr</sub>

- PCR = -10.75 KN      Y0 = .42 MM

Tableau 4.2

X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
13	.97	.97
11	.78	.77
10	.66	.67
9E-2	.54	.54
8.18E-2	.45	.46
7.4E-2	.37	.37
6.89E-2	.31	.32
6.25E-2	.25	.25
5.71E-2	.2	.19

COEF CORR = .9997

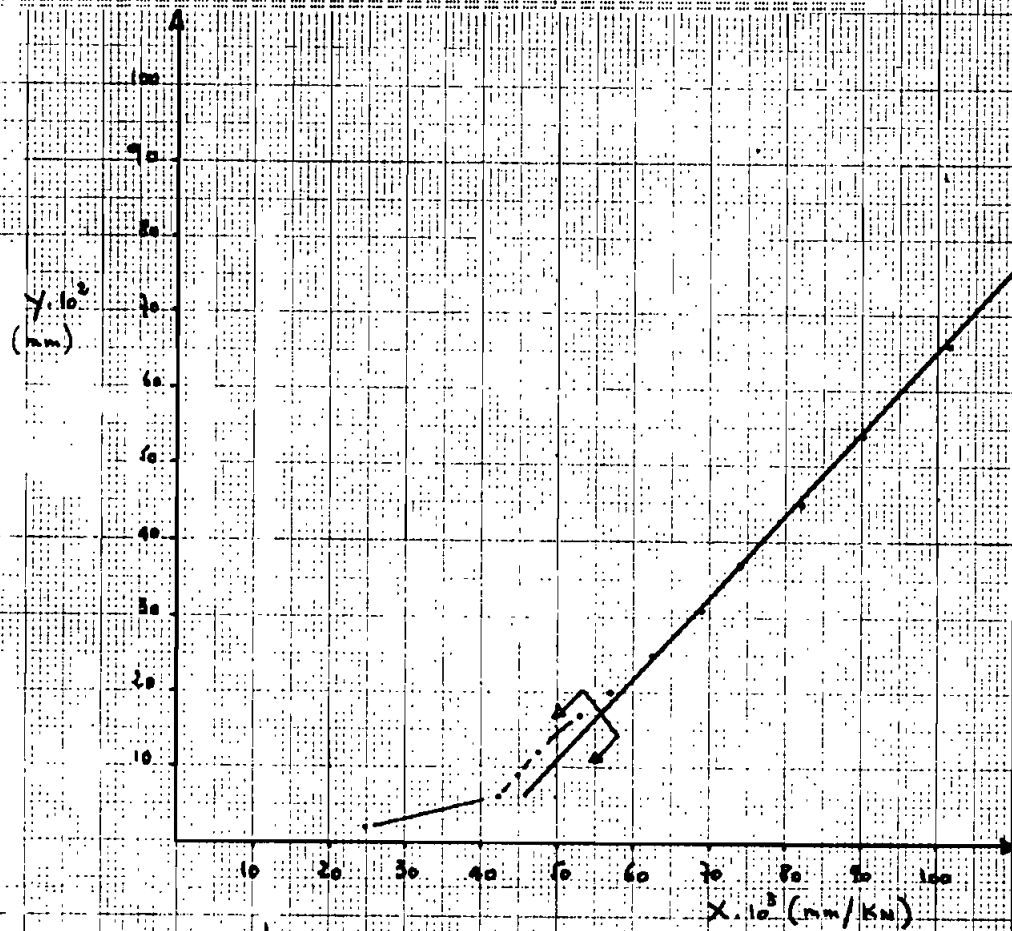


Figure 4.3

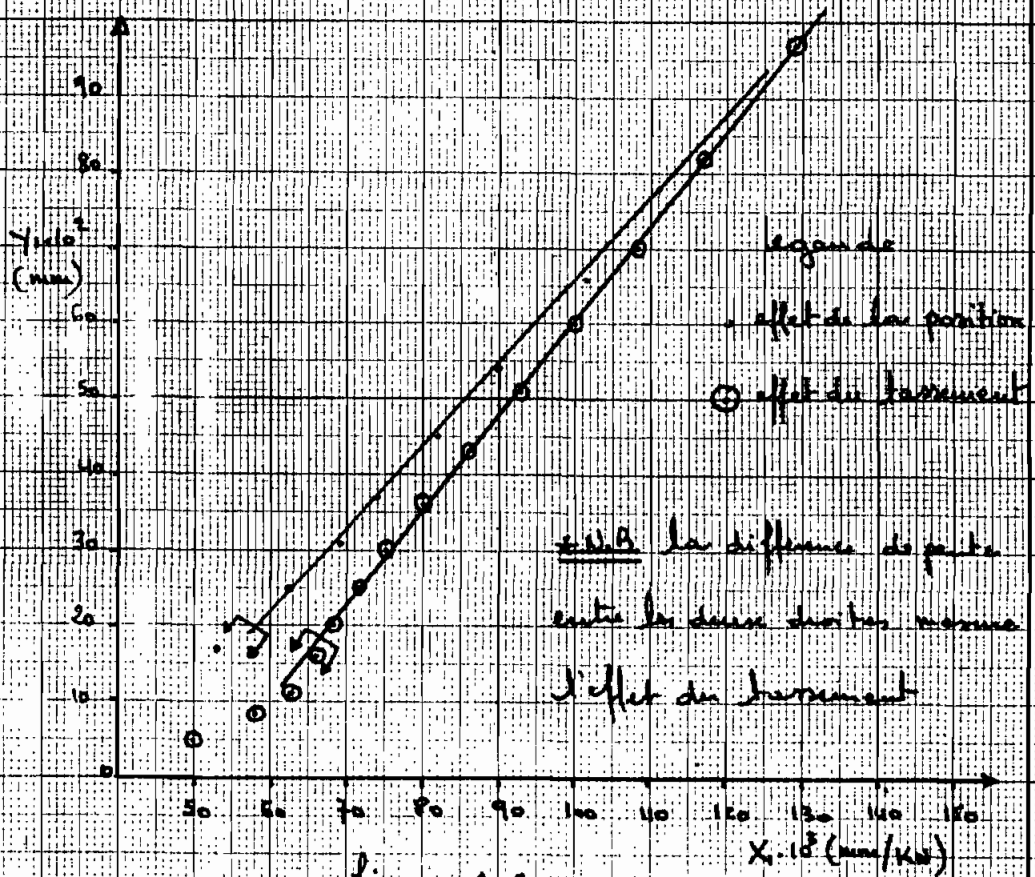
#### 4.3.2.2 : influence du tassement des appuis sur la charge critique.

ayant remarqué que pour la position A, la charge critique est autour de 10,75 kN, une bonne série d'essais de charge - ment a été effectuée avec 10 kN, ensuite une série d'essai dans les mêmes conditions que lors de la détermination de l'effet de la position sur  $P_{cr}$  a été faite (position A). des marquages très nets ont été observés et l'analyse des résultats a montré que l'effet de ces marquages était très important sur la charge critique. les valeurs de charges critiques trouvées se situent entre 12,42 kN et 13,01 kN. les écarts par rapport à la charge critique théorique de Euler varient entre 67,89% et 75,8%, ce qui veut dire que nos appuis ne sont acceptables dans leur état actuel et qu'une solution doit être trouvée pour améliorer leur comportement (minimiser l'effet du tassement).

la figure 4.4 illustre la différence entre l'effet de la position de la colonne et le tassement des appuis.

pour ce qui concerne les résultats expérimentaux et leurs courbes représentatives voir annexe B Tableaux 4.6, 4.7.

Comparaison entre effet de l'axe et effet de la position sur  $\mu$  par la position A





### 4.3.3: comportement des appuis trempés.

4.3.3.1 : introduction: ayant remarqué que l'influence du tassement des appuis est très important, nous avons trempé les extrémités de la colonne ce qui a permis de réduire considérablement l'effet du tassement des appuis sur  $P_{cr}$ .

#### 4.3.3.2 : influence du trempage des appuis pour une colonne simple de longueur L

une position a été fixée, elle doit rester la même pour les essais à venir (colonne simple, colonne avec système de raidisseur seul, colonne haubannée), ceci pour éviter l'influence de la position de la colonne sur la charge critique.

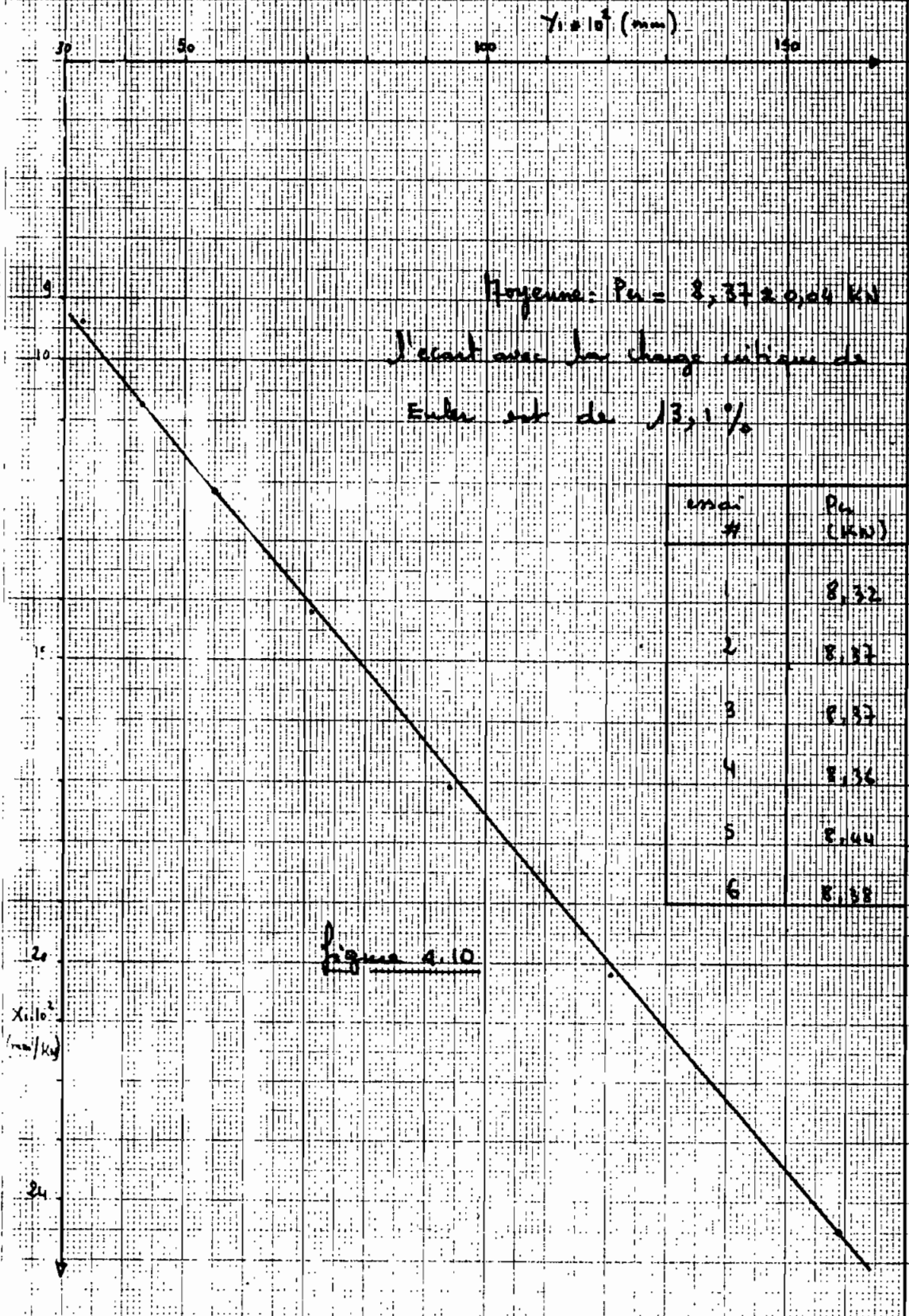
après une série d'essais, aucun marquage n'a été remarqué au niveau des appuis, alors que pour les appuis non-trempés les marquages étaient nettement visibles.

l'écart avec la charge critique de Euler est passé à 13,1% et la charge critique moyenne est de:

$$P_{cr}(\text{moyenne}) = 8,37 \pm 0,04 \text{ (KN)}$$

aux tableaux 4.8 et 4.9 vous trouverez les charges critiques correspondantes aux essais qui ont été faits (annexe B)

## Représentation graphique de l'essai # 3



La figure 4.10 représente l'essai # 3 qui est le plus proche de la moyenne.

#### 4.3.4 : Vérification du comportement des appuis

Jeux pié dans les conditions prévues avec la colonne haubouré.

##### 4.3.4.1 : introduction:

dans certain conditions, la colonne haubouré peut permettre un changement quatre fois plus grand que celui d'une colonne simple. C'est pourquoi nous devons vérifier le comportement des appuis Joumpis avec un changement autour de quatre fois la charge critique théorique de Euler.

Pour cela il suffit de prendre une colonne de longueur  $L/2$  (au lieu de  $L$ ) et de la Joumpis dans les mêmes conditions qui avec la colonne de longueur  $L$

$$L = 1000 \text{ mm} \quad \text{donne} \quad P_e = 7,4 \text{ kN} \quad (4.5)$$

$$\frac{L}{2} = 500 \text{ mm} \quad \text{donne} \quad P_e = 29,6 \text{ kN}. \quad (4.6)$$

##### 4.3.4.2 : Analyse des résultats:

Les résultats obtenus révélant un phénomène de rodage après cinq essais, j'écart avec la charge critique théorique de Euler est passé à 16,3%, tandis qu'avec

La colonne de longueur L, l'écart est de 13,1%. des marquages ont été remarqués, mais cette fin c'est au niveau du rouleau, ce qui veut dire qu'avec un meilleur réglage des appuis l'écart de 16,3% peut être réduit. Le fait que la colonne ne soit pas marquée montre que le tarausage est suffisant pour limiter le phénomène du taralement. Seulement un réglage des appuis et un rodage du système sont indispensables.

Étant donné que le système de rodage ne peut influer ce comportement des appuis, l'observation des appuis après chaque essai est nécessaire, ce qui nous permettra de savoir si la charge critique trouvée doit être soustraite ou tant que telle ou si elle doit être réduite (tenus compte de l'accroissement de ce phénomène de marquage du rouleau).

Si avec la colonne lubrifiée des marquages ne sont pas observés, la charge critique trouvée doit être comparée avec celle de la colonne simple avec son système de rodage. Si non elle doit être réduite de 3,2% (11,3% - 13,1%) avant d'être comparée avec la charge critique de la colonne simple avec son système de rodage. Selon la précision cherchée et le niveau d'erreur

que l'on peut pratiquement atteindre avec la colonne haubannée, ce qui vient d'être dit pourra être appliqué ou tout simplement négligé.

le tableau 4.8 donne les valeurs de charges critiques et la diminution de l'écart qui traduit le rodage.

Tableau 4.8.

essai #	$P_u$ (KN)	écart %
1	39,52	33,5
2	38,63	30,5
3	35,45	19,8
4	34,49	16,5
5	34,42	16,3

la figure 4.12 illustre le phénomène de rodage

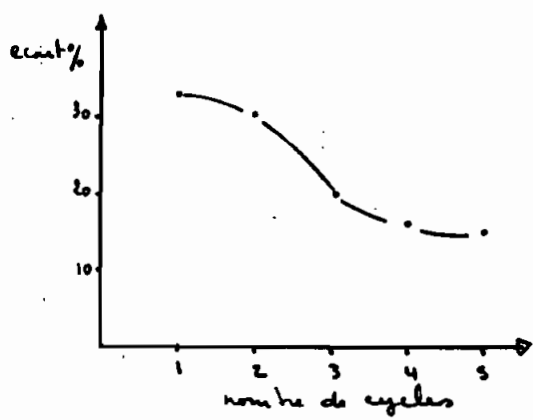
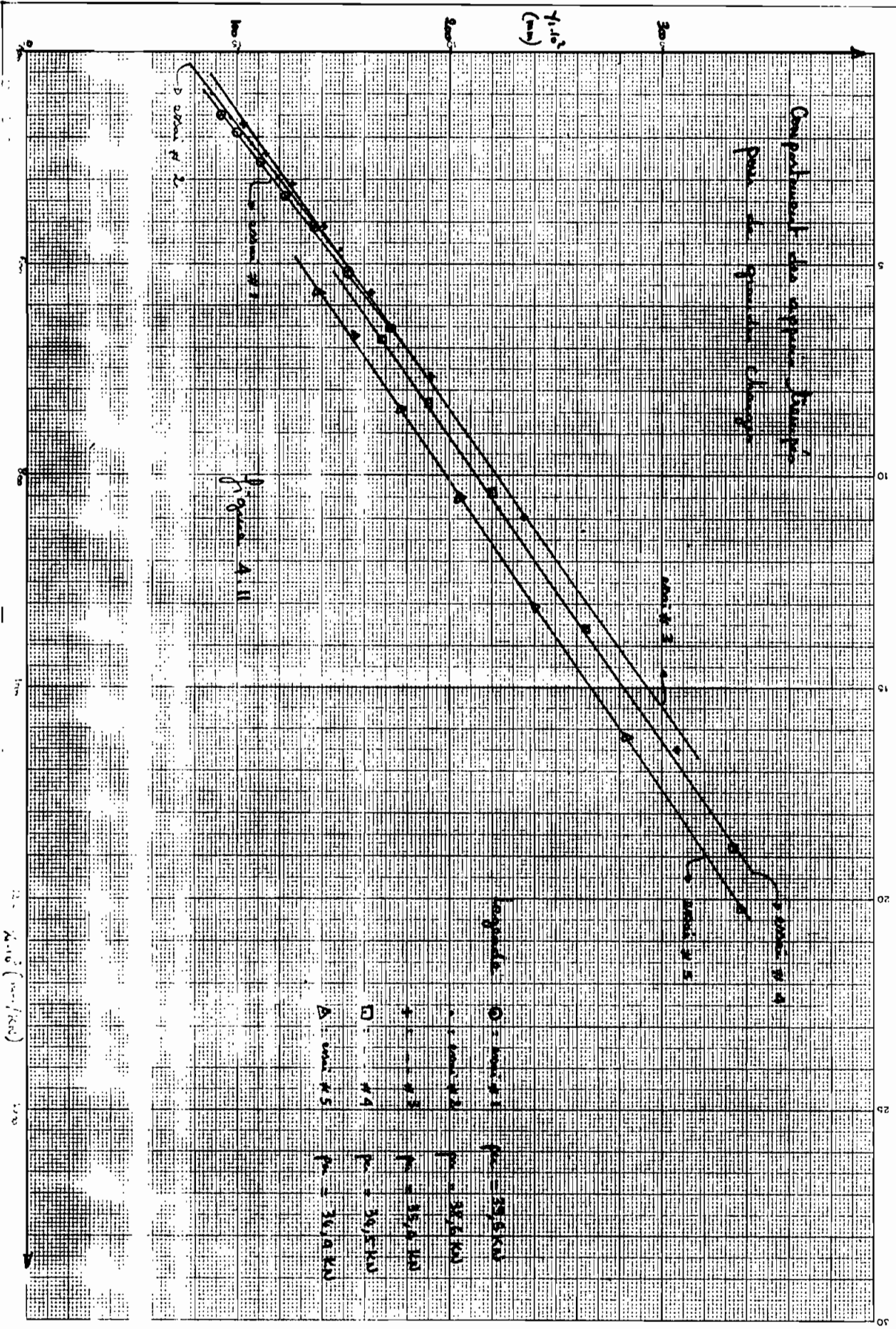


figure 4.12

la figure 4.11 à la page suivante donne une représentation graphique des résultats obtenus.

N.B: recommandations à respecter avec la colonne haubannée

- \* régler les appuis (fil à plomb)
- \* faire une série de chargement pour arriver au rodage.



#### 4.4 Remarques générales sur le comportement des appuis.

nous distinguons le comportement des appuis non-temps, et le comportement des appuis temps.

4.1 appuis non-temps: nous remarquons que le comportement des appuis dépend de la position de la colonne, et de la charge appliquée.

par exemple pour la position A, l'écart avec la charge critique théorique de Euler est de 45%. si l'on charge jusqu'à 7,5 KN alors qu'il peut passer jusqu'à 75,8% si le chargement s'effectue autour de 10 KN

ce qui montre comment il est indispensable de trouver une solution qui permette de limiter ce phénomène.

4.2 appuis temps: nous remarquons que le simple fait de temps les appuis a considérablement diminué l'écart, et que l'influence du chargement pouvait être négligé si au départ les appuis sont bien réglés et si un rodage est effectué

l'écart est de 13,1% pour un faible niveau de chargement, il passe à 16,3% pour le niveau de chargement prévu avec la colonne haussée après un rodage de 5 cycles.

4.9.3 conclusion: maintenant que nous avons préparé le terrain pour notre colonne horizontale on va qui commence le comportement des appuis, nous allons mettre en place notre système de raidisseurs à câbles, et déterminer la charge critique effective de notre colonne avec nos raidisseurs (charge critique de compression).

Toutes fois les recommandations recommandées doivent être respectées pour les essais à venir.

- \* la position de la colonne doit toujours rester la même
- \* affaiblir une réglage des appuis avec un fil à plomb avant chaque essai
- \* avant de commencer un essai charger au moins cinq (5) fois pour arriver le rodage
- \* noter l'état des appuis après chaque essai et changer les valeurs si des marquages sont observés.



4.5: Charge critique de la colonne avec son système de raidisseur à câbles

Après avoir monté le système de raidisseur à câbles (sans les câbles), une série d'essais a été effectuée pour déterminer la charge critique de comparaison. en effet le gain de résistance doit être déterminé à partir de la charge critique de comparaison et celle de la colonne haubannée. le gain de résistance représente donc la différence entre la charge critique de la colonne haubannée (avec câble) et celle de la colonne avec son système de raidisseur à câbles seul (sans câbles).

les résultats au tableau 4.12 révèlent un accroissement de la charge critique, comparé à celle d'une colonne simple. ce qui est normal parce que l'inertie de la section a été augmentée au milieu et aux extrémités de la colonne, par les systèmes de raidisseur à câbles et de fixation.

tableau 4.12

essai #	$P_c$ (Kw)	$y_0$ (mm)	Coefficient de corrélation
1	9,89	1,12	0,9997
2	9,56	1,00	0,9997
3	9,68	1,04	0,9998
4	9,63	1,04	0,9998
5	9,68	1,04	0,9998

$P_c$  colonne simple: 8,37 Kw

$y_0$  colonne simple: 0,48 mm

$y_0$  représente la deflection initiale au milieu de la colonne.

on obtient  $P_{cr \text{ moyen}} = 9,7 \text{ KN}$  ;  $\gamma_0 \text{ moyen} = 1,05 \text{ mm}$

on remarque aussi une augmentation de  $\gamma_0$  (déflexion initiale au milieu de la colonne), ce qui veut dire que les imperfections de la colonne ont augmenté avec la mise en place du système de raidisseur, chose à laquelle on devait s'attendre à cause des travaux d'atelier.

(voir tableau 4.13)

tableau 4.13

	$P_{cr} \text{ (moyen)}$ (KN)	$\gamma_0 \text{ (moyen)}$ (mm)
Colonne simple	8,37	0,48
colonne avec système de raidisseur	9,7	1,05

nous retenons donc que notre charge critique de comparaison vaut :

$$P_{cr} \text{ (comparaison)} = 9,7 \text{ KN}$$

pour ce qui concerne les résultats expérimentaux qui nous ont permis de déterminer les différentes charges critiques, voir annexe B, tableaux 4.14, 4.15.

## Chapitre 5

analyse des résultats obtenus avec la colonne  
haubannée.

5.1 méthode de détermination de la charge critique

5.2 analyse des résultats.

## 5.1 méthode pour déterminer la charge critique d'une colonne biarticulée, houbannée.

5.1.1 : introduction : ayant accepté que la colonne houbannée se comporte comme une colonne avec un ressort au son milieu, nous allons utiliser la méthode énergétique décrite à la section 2.6 pour trouver la charge critique d'une colonne houbannée initialement non rectiligne.

Étant donné que pour une colonne réelle la flexion commence dès l'application d'une charge, il est impossible de déterminer directement la charge critique. Ce qui nous amène nécessairement à trouver une méthode indirecte à partir des résultats expérimentaux.

### 5.1.2 : mise en équation

soient  $y_1 = A \cos \frac{\pi x}{2l} + B \sin \frac{\pi x}{l}$  l'équation de la déformée qui se produit par l'application de la charge  $P$

$y_0 = a_0 \cos \frac{\pi x}{2l}$ , l'équation de la déformée initiale avant l'application de la charge  $P$ ,  $a_0$  correspond à la déflexion initiale maximale à  $x=0$  (voir figure 5.1)

en acceptant la théorie des faibles déformations, nous

peuons écrire que  $\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -M/EI$  (5.1)

$y$  représentant la déflexion totale à une section d'abscisse  $x$  ( $y = y_1 + y_0$ ), et  $M$  le moment fléchissant correspondant

ou a 
$$y = (A + a_0) \cos \frac{\pi x}{2l} + B \sin \frac{\pi x}{l} \quad (5.2)$$

ou a alors 
$$M = Py + \frac{\alpha A}{2} x - \frac{\alpha A}{2} l \quad \text{si } x > 0 \quad (5.3)$$

$$M = Py - \frac{\alpha A}{2} x - \frac{\alpha A}{2} l \quad \text{si } x < 0 \quad (5.4)$$

(voir figure

à partir de l'équation de  $y$ , on peut écrire que

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{4l^2} \left( A \cos \frac{\pi x}{2l} + 4B \sin \frac{\pi x}{l} \right) \quad (5.5)$$

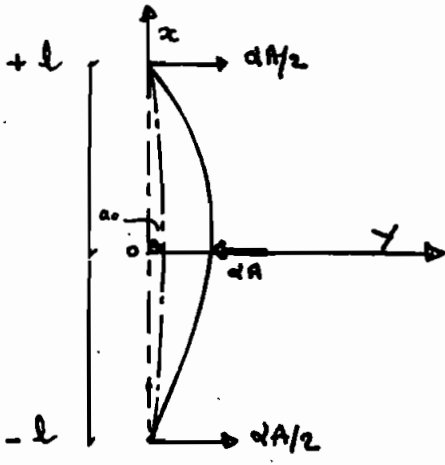


figure 5.1

soit  $UF$  l'énergie de flexion du système, à partir de l'équation

nous pouvons écrire que:

$$UF = \int_0^l \frac{M}{2} \left( \frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx + \int_{-l}^0 \frac{M}{2} \left( \frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx \quad (5.6)$$

en remplaçant  $U$  et  $\frac{d^2y}{dx^2}$  par leur valeur, on obtient:

$$\begin{aligned}
 U.F. &= \frac{\pi^2}{8l^2} \int_0^l P.A(A+a_0) \cos^2 \frac{\pi x}{2l} + 4PB(A+a_0) \cos \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi x}{l} \\
 &\quad + PAB \cos \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi x}{l} + 4PB^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} \\
 &\quad - \frac{2Al}{2} \left( A \cos \frac{\pi x}{2l} + 4B \sin \frac{\pi x}{l} \right) + \frac{2A}{2} \left[ A \cos \frac{\pi x}{2l} + 4B \sin \frac{\pi x}{l} \right] \cdot dx \\
 &+ \frac{\pi^2}{8l^2} \int_{-l}^l P.A(A+a_0) \cos^2 \frac{\pi x}{2l} + 4PB(A+a_0) \cos \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi x}{l} \\
 &\quad + PAB \cos \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi x}{l} + 4PB^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} \\
 &\quad - \frac{2Al}{2} \left( A \cos \frac{\pi x}{2l} + 4B \sin \frac{\pi x}{l} \right) - \frac{2A}{2} \left[ A \cos \frac{\pi x}{2l} + 4B \sin \frac{\pi x}{l} \right] \cdot dx
 \end{aligned}$$

or nous savons que

$$\int \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \left| \frac{x}{2} + \frac{l}{2\pi} \sin \frac{\pi x}{l} \right|; \quad \int_0^l = \frac{l}{2}; \quad \int_{-l}^0 = \frac{l}{2}$$

$$\int \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \left| \frac{x}{2} - \frac{l}{4\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} \right|; \quad \int_0^l = \frac{l}{2}; \quad \int_{-l}^0 = \frac{l}{2}$$

$$\int \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi x}{2l} dx = \left| -\frac{\cos \frac{\pi x}{2l}}{\frac{\pi}{l}} - \frac{\cos \frac{3\pi x}{2l}}{\frac{3\pi}{l}} \right|; \quad \int_0^l = \frac{4l}{3\pi}; \quad \int_{-l}^0 = -\frac{4l}{3\pi}$$

$$\int \cos \frac{\pi x}{2l} dx = \left| \frac{2l}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2l} \right|; \quad \int_0^l = \frac{2l}{\pi}; \quad \int_{-l}^0 = \frac{2l}{\pi}$$

$$\int \sin \frac{\pi x}{l} dx = \left| -\frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2l} \right|; \quad \int_0^l = \frac{l}{\pi}; \quad \int_{-l}^0 = -\frac{l}{\pi}$$

$$\int x \cos \frac{\pi x}{2l} dx = \left| \frac{4l^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{2l} + \frac{2lx}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2l} \right|; \quad \int_0^l = \frac{4l^2}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \\
 \int_{-l}^0 = \frac{-4l^2}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$

$$\int x \sin \frac{\pi x}{l} = \left| \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - \frac{x}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \right|; \int_0^l = \frac{l^2}{\pi}; \int_{-l}^0 = \frac{l^2}{\pi}$$

d'où finalement on obtient :

$$UF \Big|_0^l = \frac{\pi^2}{8l^2} \left[ PA(A+a_0) \frac{l}{2} + 4PB(A+a_0) \left( \frac{4l}{3\pi} \right) + PAB \left( \frac{4l}{3\pi} \right) \right. \\ \left. + 4PB^2 \frac{l}{2} - A \frac{dl}{2} \left( A \cdot \frac{2l}{\pi} + \frac{4B}{\pi} \right) \right. \\ \left. + \frac{2A}{2} \left[ A \cdot \frac{4l^2}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) + 4B \frac{l^2}{\pi} \right] \right]$$

$$UF \Big|_{-l}^0 = \frac{\pi^2}{8l^2} \left[ PA(A+a_0) \frac{l}{2} + 4PB(A+a_0) \left( -\frac{4l}{3\pi} \right) + PAB \left( -\frac{4l}{3\pi} \right) \right. \\ \left. + 4PB^2 \frac{l}{2} - A \frac{dl}{2} \left( A \frac{l}{\pi} - \frac{4B}{\pi} \right) \right. \\ \left. - \frac{2A}{2} \left[ -4A \frac{l^2}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) + 4B \frac{l^2}{\pi} \right] \right]$$

en arrangeant, et après simplification, on obtient

$$UF = \frac{\pi^2}{8l} \left[ P[A(A+a_0) + 4B^2] - 4dA^2 \frac{l}{\pi^2} \right] \quad (5.7)$$

en posant  $a_0 = 0$  (colonne initialement rectiligne)

l'expression de UF devient :

$$UF = \frac{\pi^2}{8l} \left[ P(A^2 + 4B^2) - 4dA^2 \frac{l}{\pi^2} \right] \quad (5.8)$$

on se rappelle que nous avons trouvé à la section 2.7.2

$$U_f = \frac{\pi^2 EI}{32 l^3} [A^2 + 16B^2] \text{ pour une colonne initialement droite}$$

$U_f$  représente l'énergie de flexion.



en égalant les deux expressions ( $UF$  et  $uf$ ) après avoir posé  $a_0 = 0$  dans l'expression de  $UF$ , on obtient:

$$\frac{\pi^2}{8l} \left[ P(A^2 + 4B^2) - 4\alpha A^2 \frac{l}{\pi^2} \right] = \frac{\pi^4 EI}{32 l^3} [A^2 + 16B^2] \quad (5.9)$$

après simplification on obtient

$$P(A^2 + 4B^2) - 4\alpha A^2 \frac{l}{\pi^2} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} [A^2 + 16B^2] \quad (5.10)$$

on sait que pour une colonne biarticulée,  $P_e = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$   
( $L = 2l =$  longueur totale)

donc l'expression devient:

$$P = P_e \cdot \frac{(A^2 + 16B^2)}{A^2 + 4B^2} + \frac{4\alpha A^2 l}{\pi^2} \left( \frac{1}{A^2 + 4B^2} \right) \quad (5.11)$$

en posant  $N = A^2 + 16B^2$ ;  $H = A^2$ ;  $D = A^2 + 4B^2$ , on obtient

$$P = P_e \frac{N}{D} + \frac{4\alpha l}{\pi^2} \frac{H}{D} \quad (5.12)$$

on se rappelle que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial x} \cdot P + \frac{4\alpha l}{\pi^2} \frac{\partial H}{\partial x} + P \frac{\partial N}{\partial x} \quad (\text{voir équation 2.52})$$

en dérivant par rapport à  $A$  puis par rapport à  $B$  pour trouver la charge minimal qui crée le flambement, on obtient



$$\frac{\partial P}{\partial A} = 0 \text{ donne } -P + 2A + 2A p_e + 2A \left( \frac{4dl}{\pi^2} \right) = 0$$

en simplifiant on obtient

$$P_a = P_e + \frac{4dl}{\pi^2} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial B} = 0 \text{ donne } -8PB + 32 p_e B = 0$$

en simplifiant on trouve

$$P_a = 4 p_e \quad (5.14)$$

Ce qui confirme que notre développement est bon  
parce que nous sommes en conformité avec les résultats  
trouvés à la section 2.7.2

### 5.1.3 méthode proprement dite :

en égalant l'expression de  $U_F$  ( $a_0 \neq 0$ ), et  $U_f$  on a

$$P = P_e \frac{(A^2 + 16B^2)}{A(A+a_0) + 4B^2} + \frac{4dl}{\pi^2} \cdot \frac{A^2}{A(A+a_0) + 4B^2} \quad (5.15)$$

en écrivant  $\frac{\partial P}{\partial A} = 0$  on obtient

$$-P(2A+a_0) + \left( P_e + \frac{4dl}{\pi^2} \right) \cdot 2A = 0 \quad (5.16)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{P_a}$  (voir équation 5.13)

$$\text{d'où } -P(2A+a_0) + 2A \cdot P_a = 0 \quad (5.17)$$

$$\text{ou } A = \frac{A}{P} P_a - \frac{a_0}{2}, \quad (A = \gamma_1 \text{ pour } x=0) \quad (5.18)$$

$\gamma_1$  correspondant à la déflexion causée par l'application de  $P$ .

nous pouvons donc expérimentalement mesurer  $\gamma_1$  (déflexion au milieu de la colonne) et calculer  $\gamma_1/p$ .

en posant  $\gamma_1/p = x_1$ , on a

$$\gamma_1 = x_1 p_u - \frac{a_0}{2} \quad (5.19)$$

ainsi en reportant les points de coordonnées  $(x_1, \gamma_1)$  sur un repère orthonormé, à partir des points expérimentaux jugés valables, nous faisons passer la meilleure droite (une méthode de régression linéaire sera utilisée). la pente de cette droite représente la charge critique ( $P_u$ ). (voir figure 5.2).

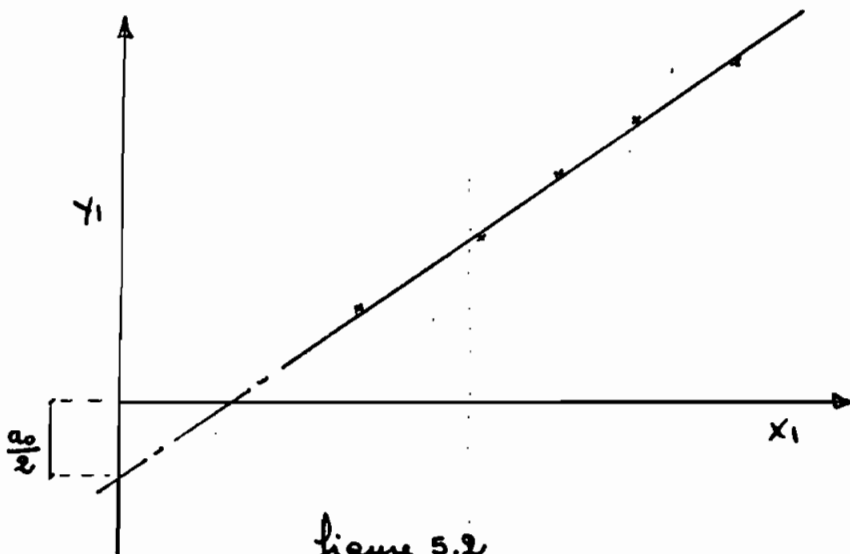


figure 5.2

## 5.2 Analyse des résultats obtenus avec la colonne laubannée

Comme nous l'avons démontré à la section 3.2, si une tension suffisante est mise au niveau des câbles au départ, le système de raidisseur se comporte comme un ressort dont la rigidité équivalente peut être calculée à partir de l'équation 3.21. Pour cela nous fixons un poids de 20kg au câble de droite par exemple, puis nous serrouons, ensuite nous faisons la même chose avec le câble de gauche, puis nous desserrons le câble de droite pour lui appliquer à nouveau la tension de 20kg, ainsi de suite jusqu'à ce que l'on juge que les câbles ont à peu près la même tension initiale.

nous avons réalisé une première série d'essais avec soin pour les paramètres suivants (tableau 5.1), (figure 5.3)

tableau 5.1

$a$ (mm)	$l^*$ (mm)	$E'A'$ (N)	$\alpha$ (N/mm)	$\frac{\alpha}{P_e}$
238	490	40394	56,62	3,82

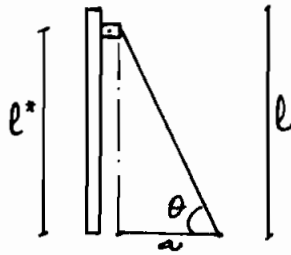


figure 5.3

$\alpha$  est calculé à partir  
de l'équation 3.21  
( $l^*$  à la place de  $l$ )

à partir de la courbe  $\alpha l / p_c$  en fonction de  $p_u / p_{c\text{comparaison}}$ ,  
 $p_{c\text{comparaison}}$  représentant la charge critique de la  
colonne avec son système de rigidité (sans câble)  
on obtient : figure 2.12

$$P_u / p_{c\text{comparaison}} = 2,48$$

sachant que  $p_{c\text{comparaison}}$  vaut :  $9,7 \pm 0,1$  KN  
on obtient :

$$P_u = 24,0 \pm 0,2 \text{ KN}$$

le tableau 5.2 donne la charge critique, les écarts relatifs  
et les coefficients de corrélation pour la première série d'essais

tableau 5.2

essai #	1	2	3	4	moyenne
$p_u$ (KN)	25,1	24,24	23,42	23,21	23,99
écart %	+3,7	+0,2	-1,6	-2,5	$\approx 0$
coeff corrélat	0,9992	0,9990	0,9976	0,9978	—

à partir du tableau 5.2 on voit que les écarts varient entre  $+3,7\%$  et  $-2,5\%$ , ces résultats sont satisfaisants, et ils confirment que si les câbles sont initialement suffisamment tendus, l'effet du raccourcissement de la colonne ne peut pas influencer la rigidité du ressort équivalent, donc notre système de raidisseur se comporte comme un ressort.

pour pouvoir se prononcer de façon définitive, il est indispensable de réaliser une bonne série d'essais en faisant varier le paramètre  $a$  (voir figure 5.3).

C'est pourquoi deux autres séries d'essais ont été réalisées dans le but de vérifier les résultats obtenus avec la première série.

au tableau 5.3 vous trouverez les différents paramètres qui ont été utilisés pour la deuxième et la troisième série.

tableau 5.3

Série #	$a$ (mm)	$l^*$ (mm)	$E'A'$ (N)	$\alpha$ (N/mm)	$\alpha l / P_0$
2 <sup>e</sup> (deuxième)	138	490	40394	23,32	1,58
3 <sup>e</sup> (troisième)	53	490	40394	3,79	0,26

à partir des valeurs de  $\alpha/p_e$ , nous pouvons déterminer les charges critiques théoriques (figure 2.12)

la figure 2.12 donne les valeurs de  $P_u/P_e$  comparaison.

Connaissant  $P_e$  comparaison (9,7 kN), on détermine  $P_u$  théorique

au tableau 5.4 vous trouverez les charges critiques théoriques et expérimentales pour les trois (3) séries.

tableau 5.4

Serie #	$\alpha$ (N/mm)	$P_u$ théorique (kN)	$P_u$ expérimentale (kN)	écart %
1 <sup>er</sup> (première)	56,62	24	(25,1 ; 23,2)	(+3,7 ; -2,5)
2 <sup>em</sup> (deuxième)	23,32	15,7	≈ 25,5	62,4
3 <sup>em</sup> (troisième)	3,75	11,4	≈ 15,2	33,3

le fait que pour la deuxième série, la charge critique trouvée soit plus grande que celle de la première série, alors que la rigidité des ressort équivalents de la première série soit plus grande que celle de la deuxième série montre qu'il y a un problème au niveau des

dispositif expérimental. La deuxième et la troisième série ont été réalisées dans les mêmes conditions, cependant les dispositions prises concernant le rodage et le réglage des appuis n'ont pas été satisfaisantes, car des marquages nets ont été remarqués au niveau des rouleaux, ce qui traduit un frottement considérable (glissement difficile). Aussi nous n'avons pas pu réaliser d'autres séries d'essais faute de temps.

Il est donc indispensable de disposer d'un dispositif expérimental satisfaisant et de réaliser une bonne série d'essais pour diverses valeurs du paramètre  $a$ , dans le but de déterminer une loi générale de comportement du système de raidisseur, et de vérifier expérimentalement les développements théoriques qui ont été faits.

N.B avec une tension initiale de  $20\text{kg}$ ,<sup>m</sup> est assuré de travailler sur une portion de courbe (charge-déformations : câble) linéaire ( $E'A' = \text{constante}$ ).

Vous trouverez les résultats de la première série en annexe (annexe C). Cependant vous ne trouverez pas les résultats de la deuxième et troisième série parce que nous n'avons pas eu le temps de les analyser par ordinateur.

## Chapite 6

### Conclusion et recommandations

#### 6.1 conclusions générales

#### 6.2 recommandations

#### 6.3 sujet de recherche proposé



## 6.1 conclusions générales

Cette présente étude ne permet pas de se prononcer de façon certaine sur le comportement d'une colonne haubannée biarticulée en général, parce que certains essais ont porté des difficultés au niveau d'interprétation des résultats, à cause de l'imperfection de notre dispositif expérimental.

Aussi il est clair qu'une extrapolation n'est pas suffisante tant qu'une vérification expérimentale ne sera pas faite pour diverses valeurs des paramètres concernés, dans le but de vérifier les développements théoriques effectués.

De la même manière, on ne peut pas se prononcer sur le comportement du système de raidisseur pour d'autres modes de fixation, tant que les développements théoriques et les vérifications expérimentales nécessaires ne seront pas effectués.

aussi comme vous avez pu le remarquer, les difficultés d'ordre technique rencontrées sont diverses telles que : la possibilité de dérapage des câbles au niveau des attaches ; le marquage des rouleaux traduisant une concentration de contrainte qui entraîne par la suite une plastification locale, d'où un frottement considérable (au lieu de glissement) ; le blocage des micros-mètres ;

l'obtention d'une tension initiale au niveau des câbles peu certaine parce que la méthode utilisée est itérative, (à cause du manque de matériel nous permettant de connaître la tension effective au niveau des câbles). nous avons essayé d'améliorer le système en apportant certaines modifications, cependant certaines imperfections demeurent, et le fait de remarquer des marquages au niveau des rouleaux montre que le problème du frottement n'est pas résolu. Aussi les techniciens nous ont signalé que le trempage effectué est superficiel, ce qui veut dire qu'à la suite d'un chargement répété, les concentrations de contraintes (plastifications locales) pouvant détruire progressivement la pellicule résistante, ce qui entraînerait un frottement considérable, ceci peut expliquer certains écarts qui sont très grands (2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> série : colonne haubannée). Il existe évidemment d'autres méthodes de trempage, mais le laboratoire de chimie n'est pas équipé pour cela.

## 6.2 Recommandations :

il est essentiel suite à ce qui vient d'être dit de disposer d'un dispositif expérimental qui permette pratiquement de s'approcher le mieux possible des

hypothèses théoriques : appuis réalisés avec de l'acier traité pour éviter les frottements résultants des concentrations de contraintes ; jauges de contraintes adaptées aux câbles pour assurer une tension initiale constante de part et d'autre de la colonne ; un système d'attache plus sûr permettant d'éviter les phénomènes de dérapages des câbles.

Ces conditions remplies, nous pouvons déterminer avec certitude le comportement de la colonne haubannée en question, et par conséquent la précision de nos méthodes d'analyse.

en connaissant le comportement réel du système de raidisseur pour une colonne haubannée biarticulée, les développements théoriques nécessaires pourront être effectués pour les autres modes de fixation, et on essayera d'optimiser les différents paramètres concernés en vue d'une meilleure utilisation du système.

### 6.3 Sujet de recherche proposé :

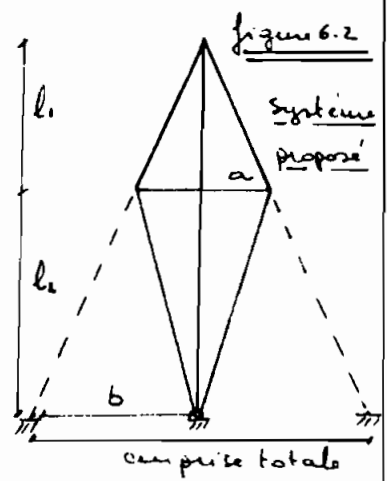
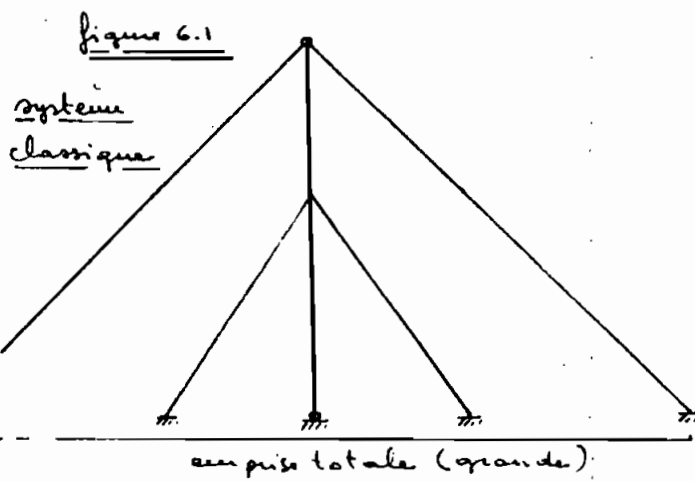
Pour ce qui concerne les pylônes élancés, notre but principal est de trouver un système de raidisseur ne nécessitant un espace considérable et permettant de limiter les déplacements et d'améliorer le comportement au

flambage. Le système classique a le désavantage de nécessiter une grande emprise au sol, pour l'efficacité des câbles supérieurs qui assurent l'équilibre de l'ensemble en limitant les déplacements. Il comporte des câbles intérieurs qui en obligeant le système à flamber en plusieurs demi-ondes, améliorent le comportement au flambage.

Le nouveau système de raidisseur étudié a l'avantage de ne pas nécessiter d'appuis intermédiaires, tout en améliorant considérablement le comportement au flambage.

notre objectif est donc de profiter de l'avantage de chacun des systèmes, en les combinant. C'est pour quoi nous nous sommes à modifier l'ancien système en supprimant les câbles supérieurs et en incorporant le nouveau système de raidisseur (figure 6.2)

des études pourront être faites à partir de modèles réduits, et on cherchera à optimiser les différents paramètres concernés dépendamment des modes de sollicitation.



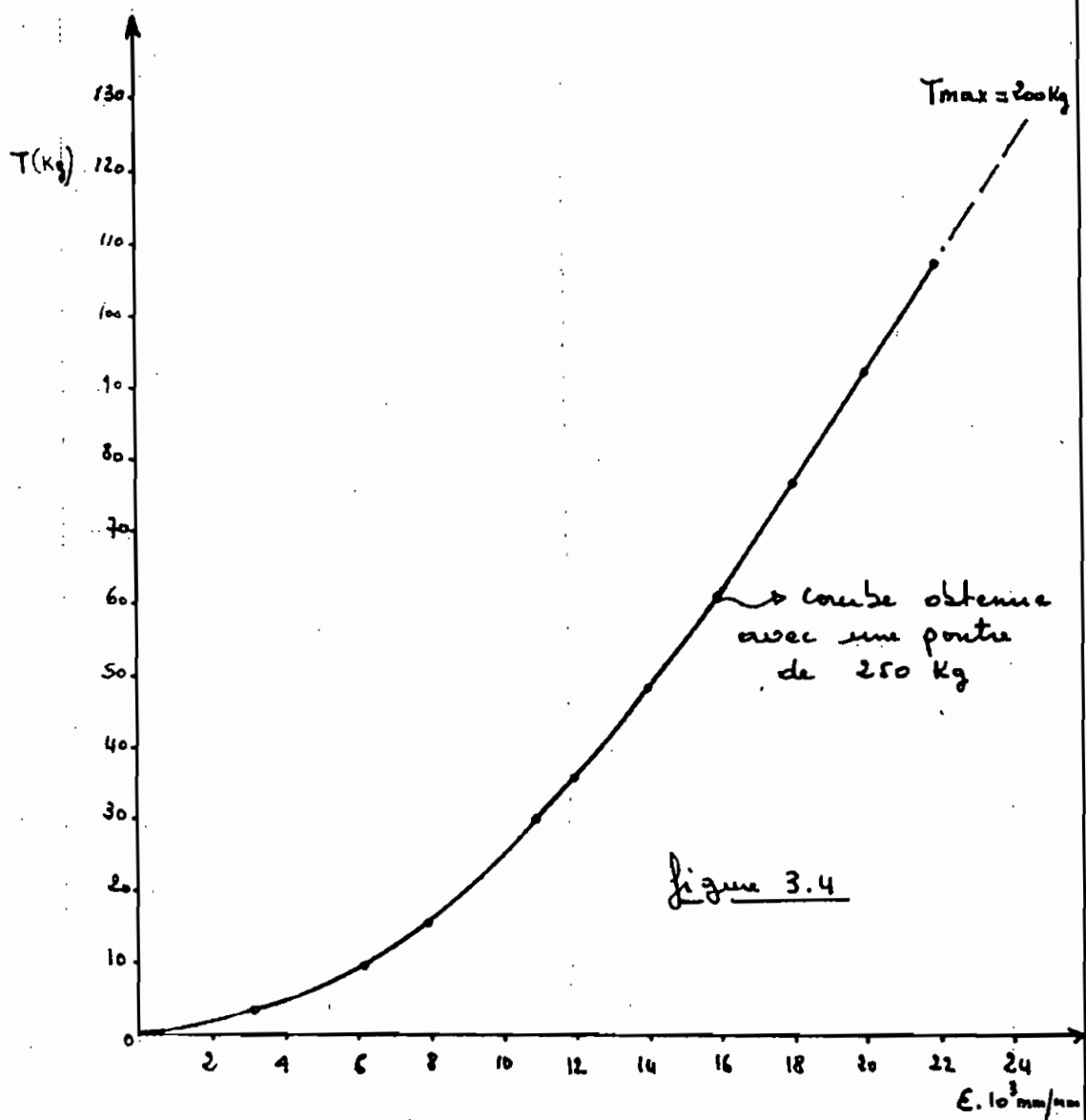
## Annexes:

Annexe A: courbes charge - déformation du câble utilisé

Annexe B: résultats obtenus avec une colonne simple,  
et avec le système de raidisseurs

Annexe C: résultats obtenus avec la colonne hardanée.  
- courbe de détermination de la charge critique en  
fonction de la rigidité du ressort équivalent.

## Courbes charge - déformation du câble

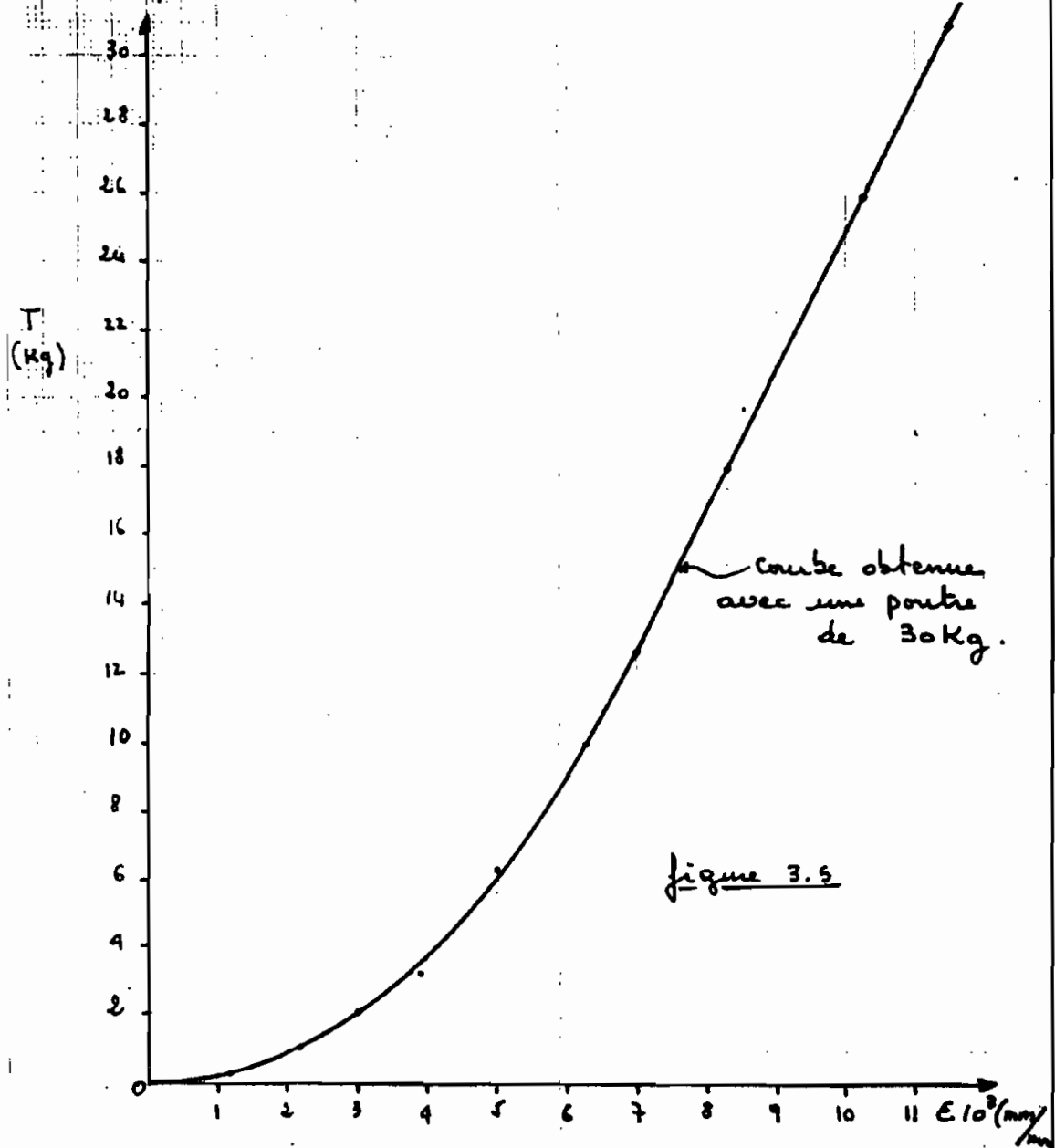


des difficultés particulières ont été rencontrées en ce qui a trait aux attaches (dérapages aux extrémités) une autre courbe a été obtenue avec une pointe de 30 Kg, pour avoir une meilleure précision (page suivante)

Annonce 4 (suite)

Cette présente courbe permet de déterminer la tension au niveau du câble même pour de faibles déformations.

Il a été remarqué qu'un changement répété avant l'essai de tension en question permet d'améliorer le phénomène de dérapage constaté au niveau des points d'attaches.



Ames B 4.32 (mm)

Requisito de Diseño: Posición B

Elit de la punta de la columna en B.

PCR= 10.75 KN      Y0= .42 MM

Tabla 4.2

X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
.13	.97	.97
.11	.78	.77
.10	.66	.67
9E-2	.54	.54
8.18E-2	.45	.46
7.4E-2	.37	.37
6.89E-2	.31	.32
6.25E-2	.25	.25
5.71E-2	.2	.19

COEF CORR= .9997

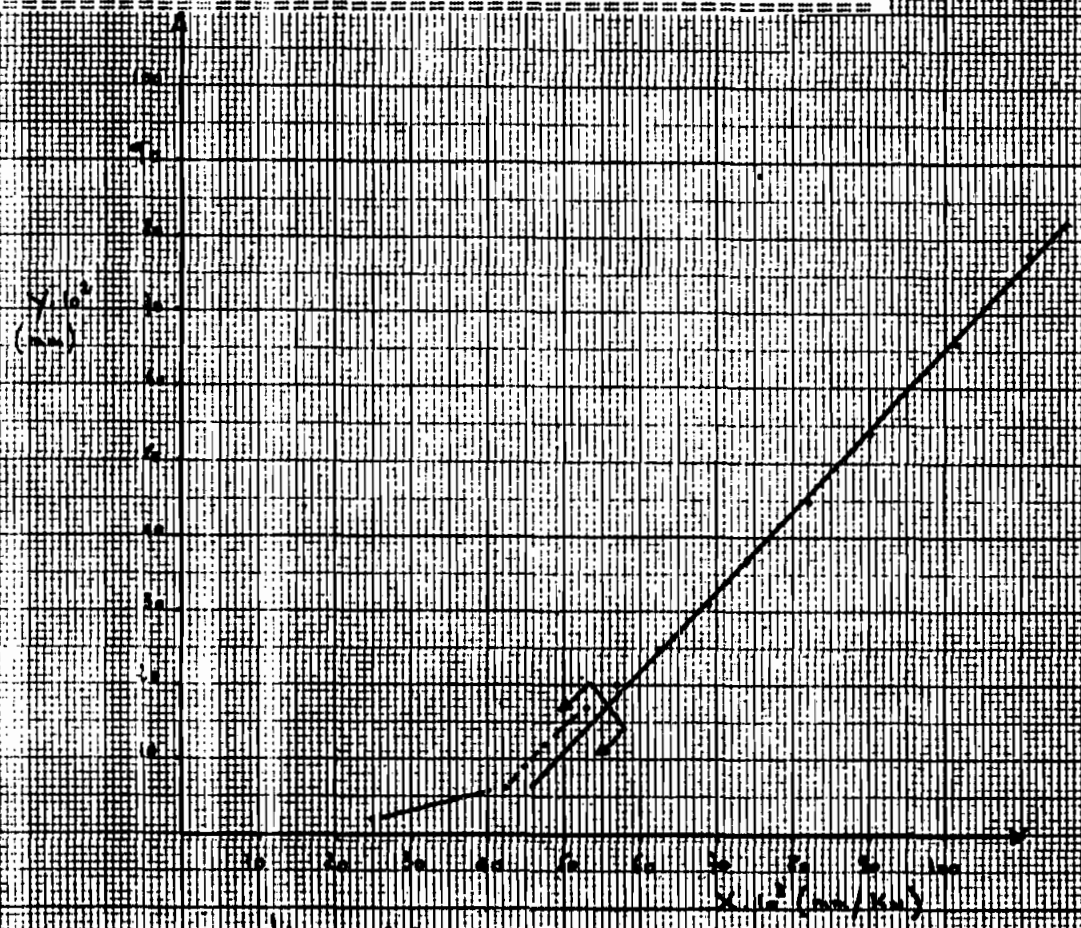


Figura 4.3



Annexe B

Appuis non triangulés : Position B  
effet de la position de la colonne sur P<sub>cr</sub>

P<sub>CR</sub> = 9.15 KN Y<sub>0</sub> = .17 MM

Tableau 4.3

X1 (MM. KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
9.47E-2	.71	.70
8E-2	.56	.56
6.77E-2	.44	.45
5.83E-2	.35	.36
4.91E-2	.27	.28
4E-2	.2	.20
3.33E-2	.15	.15

COEF CORR = .9984

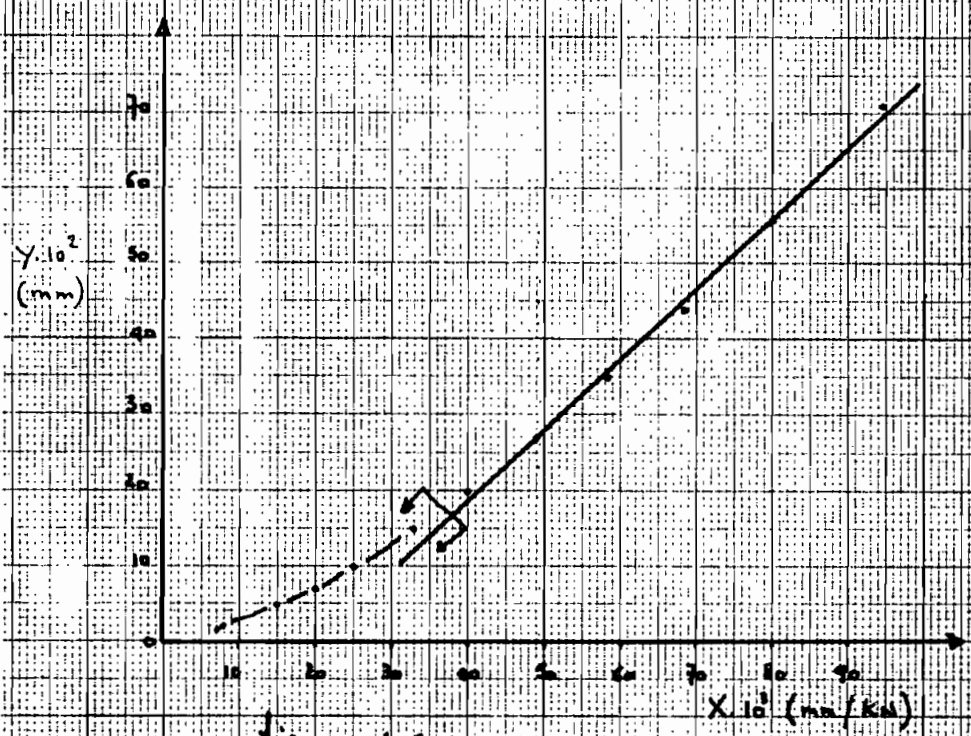


Figure 4.5

Annexe B

Appuis non-trapezoidaux : Position C  
 effet de la position de la colonne sur Pa

PCR= 10.93 KN      Y0= .27 MM

Tableau 4.4

X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
7.47E-2	.56	.55
6.71E-2	.47	.47
6.15E-2	.4	.41
5.5E-2	.33	.33
5.09E-2	.28	.29
4.6E-2	.23	.24
4.22E-2	.19	.19
3.75E-2	.15	.14
3.43E-2	.12	.11

COEFF CORR = .986

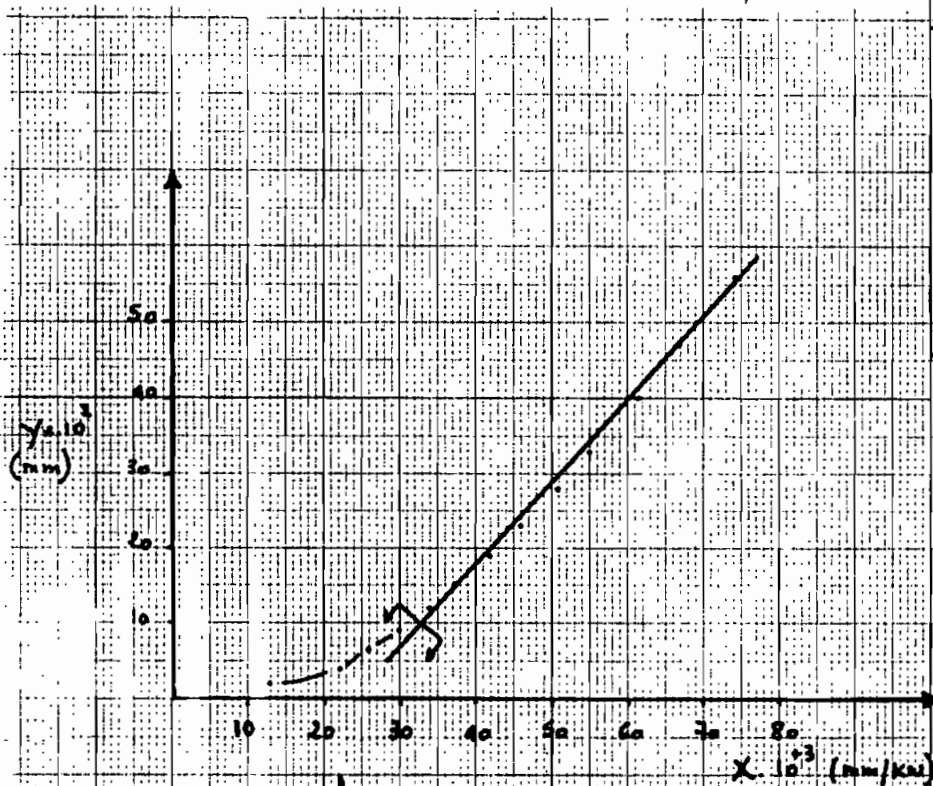


Figure 4.6

Annexe 4

Appuis non-encastrés position D  
effet de la position de la colonne sur P<sub>cr</sub>

PCR= 10.91 KN      Y0= .34 MM

Tableau 4.5

X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
9.8E-2	.74	.73
8.77E-2	.62	.62
7.92E-2	.52	.52
7.08E-2	.43	.43
6.45E-2	.36	.36
5.9E-2	.30	.30
5.22E-2	.24	.23
4.88E-2	.20	.19

COEF CORR= .9994

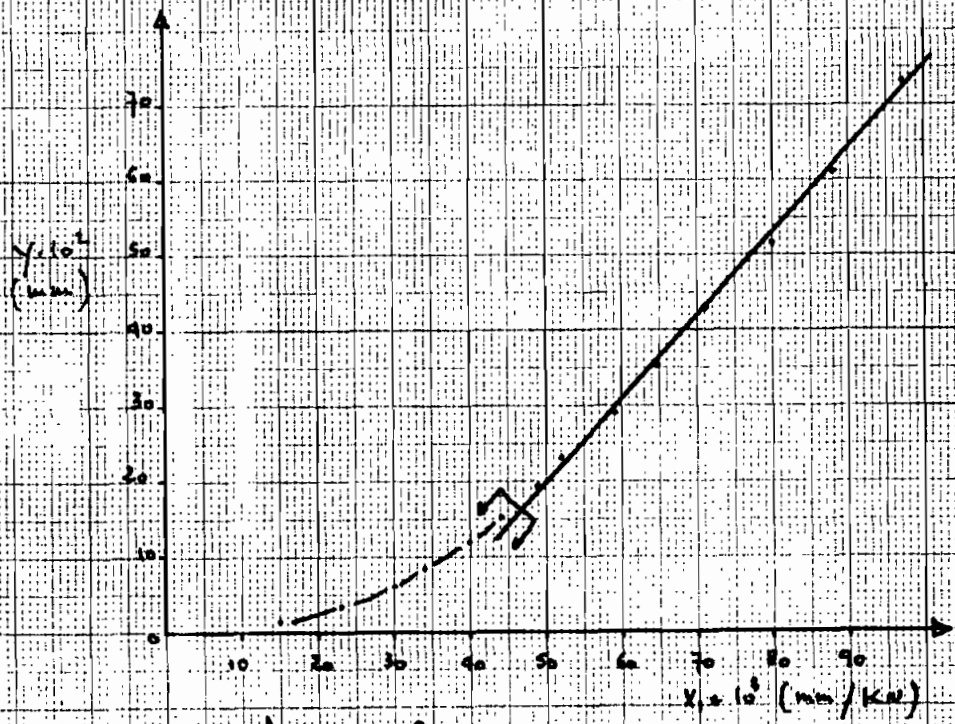


Figure 4.7



Appuis non-trempés : Position A  
 effet du tassement des appuis sur  $P_u$

PCR= 12.42 KN       $Y_0 = .64$  MM

TABLEAU 4.6

$X_1$ (MM/KN)	$Y_1$ (MM)	YESTI (MM)
.13	.97	.97
.11	.82	.82
.11	.71	.71
.1	.6	.60
$9.27E-2$	.51	.51
$8.6E-2$	.43	.43
$8E-2$	.36	.36
$7.5E-2$	.3	.29
$7.14E-2$	.25	.25
$6.83E-2$	.21	.21

COEF CORR= .9999

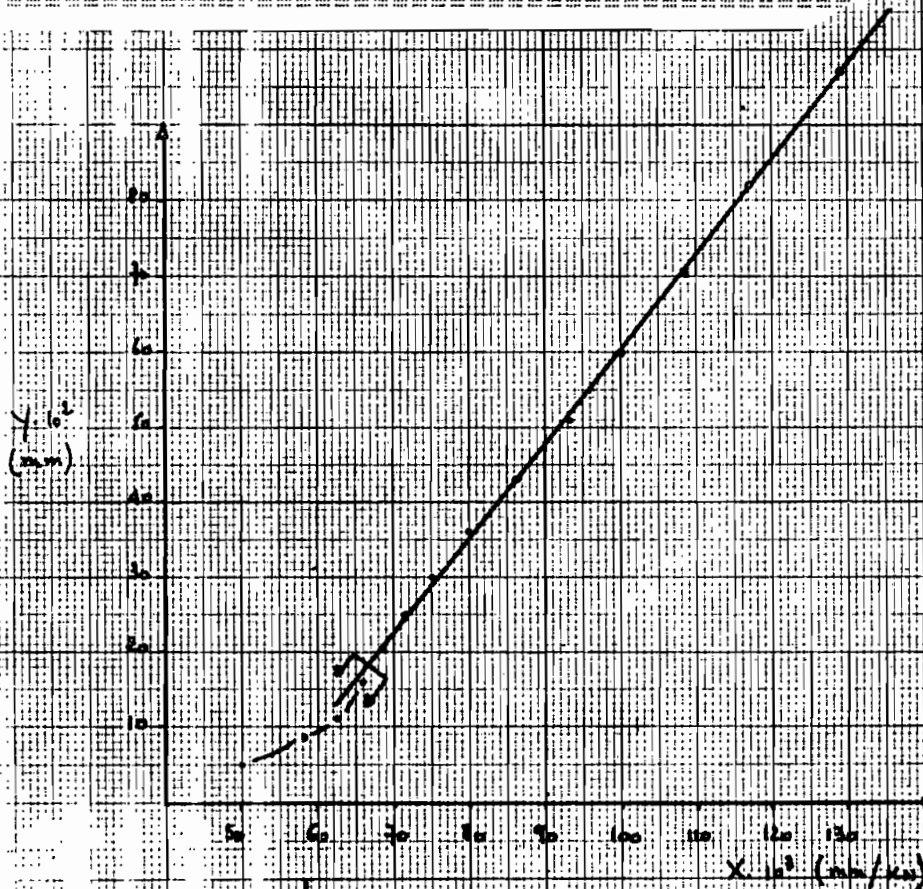


Figure 4.8

Annexe B

Appuis non-fixés : position A  
 effet du tassement des appuis sur P<sub>in</sub>

PCR= 13.01 KN		Y0= .69 MM
Tableau 4.7		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
.13	.94	.94
.11	.8	.80
.10	.68	.67
9.67E-2	.58	.57
8.91E-2	.49	.47
8.2E-2	.41	.38
7.78E-2	.35	.33
7.25E-2	.29	.26
6E-2	.24	.35
COEF CORR= .9822		

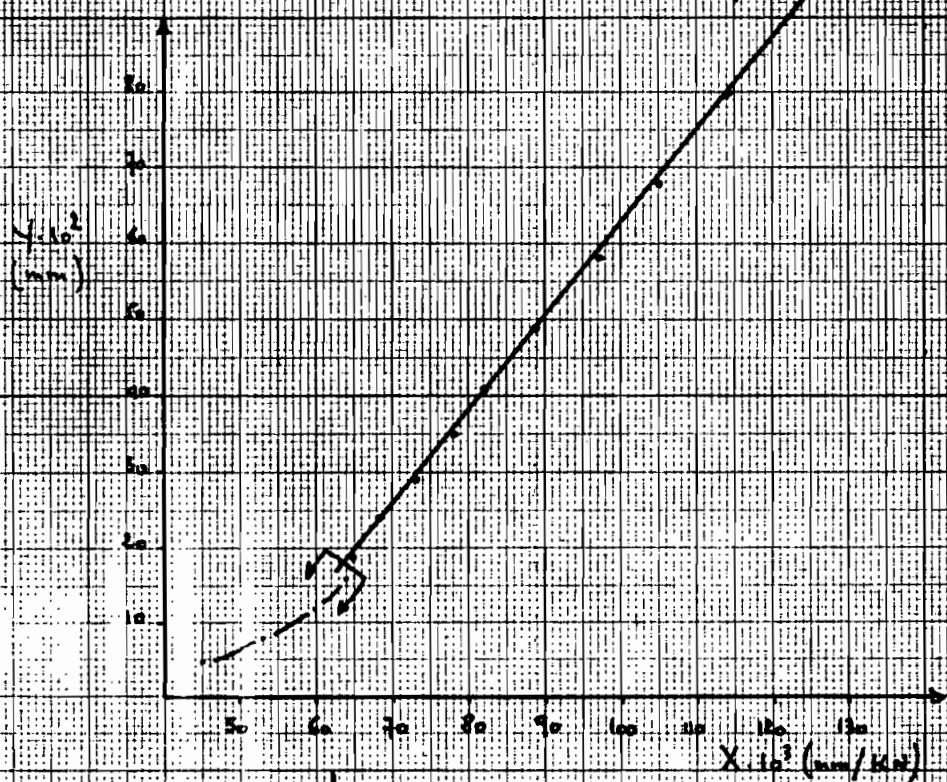


Figure 4.9

Avenue A

## Charges critiques avec appuis trempés.

Tableau 4.9

PCR= 8.32 KN Y0= .49 MM # 1		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
9.71E-2	.34	.32
.11	.45	.44
.13	.59	.60
.15	.76	.77
.18	1.01	1.04
.21	1.28	1.28
.26	1.68	1.66
COEF CORR= .9993		

PCR= 8.37 KN Y0= .44 MM # 2		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
9.75E-2	.39	.38
.11	.51	.51
.13	.66	.67
.16	.87	.88
.19	1.13	1.14
.23	1.48	1.47
COEF CORR= .9996		

PCR= 8.37 KN Y0= .47 MM # 3		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
9.43E-2	.33	.32
.11	.43	.43
.12	.55	.55
.14	.71	.72
.17	.94	.96
.20	1.21	1.22
.24	1.59	1.57
COEF CORR= .9997		

Annex 5

tableau 4.3 suite

=====		
PCR= 8.36	KN	Y0= .49 MM # 4
X1(MM/KN)	Y1(MM)	YESTI(MM)
9.43E-2	.33	.30
.11	.44	.43
.13	.58	.59
.15	.75	.77
.18	.97	.99
.21	1.25	1.26
.25	1.61	1.59
COEF CORR= .9991		
=====		

=====		
PCR= 8.44	KN	Y0= .48 MM # 6
X1(MM/KN)	Y1(MM)	YESTI(MM)
9.43E-2	.33	.31
.11	.43	.43
.12	.55	.55
.14	.72	.73
.17	.93	.95
.2	1.2	1.21
.24	1.55	1.53
COEF CORR= .9995		
=====		

=====		
PCR= 8.38	KN	Y0= .48 MM # 6
X1(MM/KN)	Y1(MM)	YESTI(MM)
9.43E-2	.33	.31
.11	.43	.42
.12	.56	.56
.15	.74	.76
.17	.96	.98
.21	1.23	1.24
.25	1.57	1.54
COEF CORR= .9991		
=====		

## Annexe B

Comportement des appuis trempés dans les conditions  
de chargement prévues avec les colonnes haubannées.

=====		
PCR= 39.52 KN	Y0= .89 MM	#1
=====		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
=====		
4.6E-2	.92	.93
4.76E-2	1	1.0
5.05E-2	1.11	1.11
5.35E-2	1.23	1.23
5.67E-2	1.36	1.35
6.08E-2	1.52	1.52
6.62E-2	1.72	1.73
COEF CORR= .9997		
=====		
PCR= 38.63 KN	Y0= .81 MM	#2
=====		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
=====		
4.4E-2	.88	.89
4.62E-2	.97	.97
4.86E-2	1.07	1.06
5.17E-2	1.19	1.18
5.63E-2	1.35	1.36
5.96E-2	1.49	1.49
COEF CORR= .9997		
=====		
PCR= 35.45 KN	Y0= .61 MM	#3
=====		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
=====		
4.68E-2	1.03	1.05
4.96E-2	1.14	1.15
5.25E-2	1.26	1.25
5.64E-2	1.41	1.39
6.27E-2	1.63	1.61
7.07E-2	1.91	1.90
8.39E-2	2.35	2.37
COEF CORR= .9994		

TABLEAU 4.10



Annexe B

(suite)

Tableau A.11

PCR= 34.49 KN		Y0= .62 MM # 4
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
6.72E-2	1.68	1.70
7.31E-2	1.9	1.90
8.15E-2	2.2	2.19
9.43E-2	2.64	2.63
.12	3.34	3.35
COEF CORR= .9998		

PCR= 34.42 KN		Y0= .77 MM # 5
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
6.27E-2	1.38	1.38
6.78E-2	1.56	1.56
7.38E-2	1.77	1.76
8.2E-2	2.05	2.05
9.23E-2	2.4	2.40
.10	2.83	2.83
.12	3.37	3.37
COEF CORR= 1.000		

N.B: Avant de faire une expérience avec la colonne hauban-  
née, les dispositions suivantes sont indispensables:

- \* régler convenablement les appuis (avec un fil à plomb)
- \* faire une bonne série de chargement pour assurer le rodage
- \* noter l'état des appuis après l'expérience.

Annex B

column + system de sa dimension

Tableau 4.14

PCR= 9.89 KN Y0= 1.12 MM

# 1

X1 (MM/KN) Y1 (MM) YESTI (MM)

.15	.38	.39
.16	.48	.47
.17	.6	.58
.19	.76	.76
.21	.96	.99
.23	1.14	1.14
.25	1.4	1.40
.29	1.71	1.70
.33	2.13	2.13

COEF CORR= .9997

PCR= 9.56 KN Y0= 1.0 MM

# 2

Y1 (MM/KN) Y1 (MM) YESTI (MM)

.14	.35	.34
.15	.45	.44
.16	.57	.56
.18	.73	.75
.20	.89	.89
.22	1.12	1.14
.25	1.36	1.37
.28	1.68	1.68
.32	2.08	2.06

COEF CORR= .9997

PCR= 9.68 KN Y0= 1.04 MM

# 3

X1 (MM/KN) Y1 (MM) YESTI (MM)

.15	.37	.39
.16	.47	.47
.17	.58	.56
.18	.73	.72
.20	.91	.91
.22	1.12	1.12
.25	1.37	1.37
.28	1.69	1.68
.33	2.15	2.16

COEF CORR= .9998

Anexo B

Colonne simple avec son système de rigidité

Tableau 4.15  
(suite)

PCR= 9.63 KN      Y0= 1.04 MM

# 4

X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
.15	.37	.39
.16	.47	.47
.17	.58	.56
.19	.74	.74
.20	.91	.91
.23	1.13	1.14
.25	1.39	1.39
.29	1.71	1.71
.33	2.16	2.16

COEF CORR= .9998

PCR= 9.68 KN      Y0= 1.04 MM

# 5

X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
.15	.37	.39
.16	.47	.47
.17	.58	.56
.18	.73	.72
.20	.91	.91
.22	1.12	1.12
.25	1.37	1.37
.28	1.69	1.68
.33	2.15	2.16

COEF CORR= .9998

Moyenne:  $P_u = 9,7 \text{ KN } (\pm 0,1)$

Annexe C

Resultats obtenus avec colonne handrauni  
(premiere serie)

Tableau 5.3

PCR= 25.10 KN $\frac{(Y_0)}{2} = .31$ MM		
#1		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
3E-2	.45	.44
3.5E-2	.56	.57
3.94E-2	.67	.68
4.44E-2	.8	.80
5E-2	.95	.94
COEF CORR= .9992		

PCR= 24.24 KN $\frac{(Y_0)}{2} = .29$ MM		
#2		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
3E-2	.45	.44
3.63E-2	.58	.59
4.12E-2	.7	.71
4.67E-2	.84	.84
5.37E-2	1.02	1.01
COEF CORR= .9990		

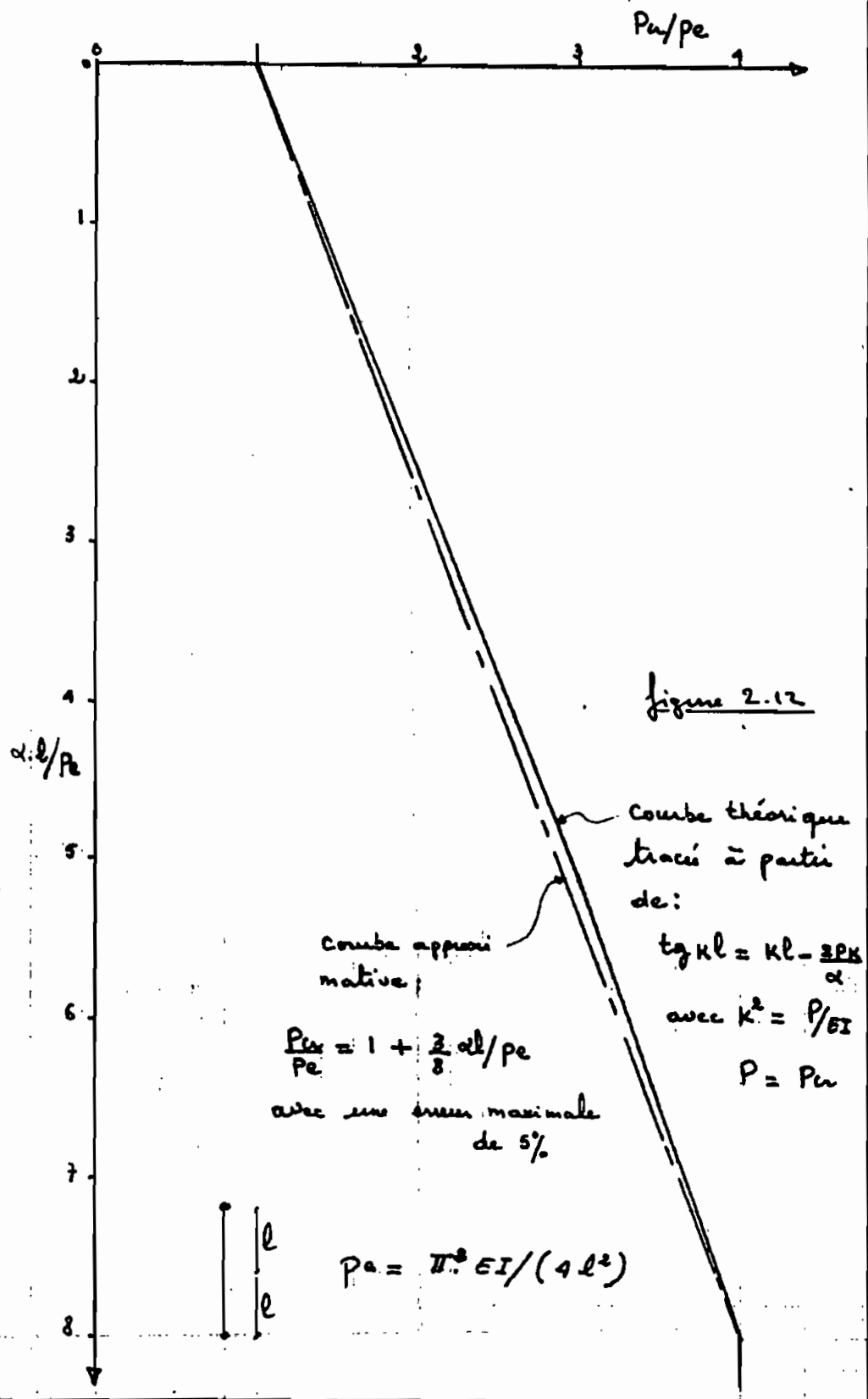
PCR= 23.42 KN $\frac{(Y_0)}{2} = .24$ MM		
#3		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
2.29E-2	.32	.30
2.87E-2	.43	.44
3.38E-2	.54	.56
3.88E-2	.66	.67
4.39E-2	.79	.79
4.89E-2	.93	.91
COEF CORR= .9976		

Annexe C

Tabelle 5.3 (suite)

=====		
PCR= 23.21 KN	$\frac{(Y_0)}{2} = .23$ MM	
-----		
X1 (MM/KN)	Y1 (MM)	YESTI (MM)
-----		
2.29E-2	.32	.30
2.8E-2	.42	.42
3.38E-2	.54	.56
3.94E-2	.67	.69
4.44E-2	.8	.80
4.95E-2	.94	.92
-----		
COEF CORR= .9978		
=====		

# Influence de la rigidité du ressort sur la charge critique



## Bibliographie:

- ① Jean Robert Murat: notes de calculs sur la méthode énergétique
- ② Picard et Beaulieu: calcul au stade limites des charpentes d'acier (1981)
- ③ Lucien Geminard, Armand GIOT: stabilité des constructions (1971)
- ④ Mc Guire: steel structures (1968)
- ⑤ Friedrich Bleich: buckling strength of metal structures (1952)
- ⑥ Stephen P. Timoshenko: theory of elastic stability (1961)
- ⑦ Samuel. M. Selby: Abridged mathematical tables (1965)