UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Faculté des Sciences et Techniques
(FAST)

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences et Techniques
pour obtenir le diplôme de Doctorat de 3^{e} Cycle.
Spécialité : Mathématiques Pures
(Option : ALGEBRE)

SUR LES SUPERALGEBRES TRIPLES DE LIE

PAR :
Marie Françoise OUEDRAOGO

Soutenue le 22 mars 1999

Jury
Président : Albert OUEDRAOGO, professeur, Université de Ouagadougou
Membres : Daouda SANGARE, professeur, Université de Caen
Akry KOULIBALY, professeur, Université de Ouagadougou
Edmond FEDIDA, professeur, Université d'Abidjan – Cocody
Moussa OUATTARA, Maître de Conférence, Université P. de Bobo

DEDICACE

- *A ma famille qui n'a ménagé aucun effort pour mes succès dans les études jusqu'à ce niveau.*

- *A mon oncle Georges ZANGREYANOGO qui m'a aidé et soutenu durant toute ma scolarité*

- *A la mémoire de mon frère Victor*

REMERCIEMENTS

Tous nos sincères remerciements à Monsieur le Professeur Albert Ouédraogo qui a bien voulu présider le jury.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur Daouda Sangaré d'avoir accepté de rapporter sur notre travail et de faire partie du jury.

Nous remercions également Messieurs les Professeurs Edmond Fedida et Moussa Ouattara d'avoir accepté d'être membres du jury.

A Monsieur le Professeur Akry Koulibaly qui a dirigé ce travail avec beaucoup de patience, de compétence et surtout de conseils, nous disons tout simplement merci, faute de trouver mieux pour lui exprimer notre profonde reconnaissance, ainsi qu'à Madame Koulibaly pour ses encouragements et ses multiples conseils.

Nos remerciements s'adressent également à tous les professeurs de la F.A.S.T., à nos camarades, pour leurs conseils, leurs encouragements et leurs critiques constructives et à tous ceux qui d'une manière ou d'une autre nous ont supporté dans notre travail.

La saisie de ces pages a été assurée par Madame Zoungrana et Madame Koala. Qu'elles trouvent en ces lignes, l'expression de notre sincère gratitude.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

La notion d'algèbre triple de Lie a été introduite par K. Yamaguti sous le nom de système triple général de Lie. Une algèbre triple de Lie est une algèbre anticommutative A munie d'une composition trilinéaire [X Y Z] dans laquelle notamment les applications $\Delta(X,Y)$: $Z \rightarrow [X\ Y\ Z]$ sont des dérivations de A.

Notre travail consiste essentiellement à prolonger certains résultats connus dans le cas des algèbres triples de Lie au cas des algèbres Z_2-graduées.

Au chapitre I, nous donnerons quelques résultats généraux sur les superalgèbres et sur les superalgèbres de Malcèv.

Au chapitre II, nous définirons la notion de super-représentation faible d'une superalgèbre de Malcèv. Par la suite, après avoir montré qu'une super-représentation de Malcèv est une super-représentation faible, nous donnerons une condition pour qu'une super-représentation faible soit une super-représentation de Malcèv. Nous définirons ensuite les notions de superalgèbres triples de Lie et de super-systèmes triples de Lie. Nous définirons enfin les groupes de cohomologie liés à la super-représentation faible d'une superalgèbre de Malcèv.

Dans le dernier chapitre, nous adapterons les travaux de M. Kikkawa sur la projectivité des algèbres triples de Lie au cas des superalgèbres triples de Lie. Nous définirons une famille de superalgèbre de Lie de projectivité d'une superalgèbre triple de Lie. Nous nous intéresserons particulièrement aux cas où la superalgèbre triple de Lie se réduit à une superalgèbre de Lie ou à un super-système triple de Lie.

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES SUPERALGEBRES DE MALCEV

I.1. ESPACES VECTORIELS Z_2 - GRADUES

Soit K un corps commutatif.

Définition I.1.1.

Un K-espace vectoriel Z_2-gradué M est la donnée d'un couple (M_0, M_1) de K-espaces vectoriels tels que $M = M_0 \oplus M_1$.

Les éléments de M_0 sont appelés éléments homogènes de degré 0.
Les éléments de M_1 sont appelés éléments homogènes de degré 1.
On note $\overline{x}$ le degré d'un élément homogène x de M.

Soient $M = M_0 \oplus M_1$ et $N = N_0 \oplus N_1$ deux K-espaces vectoriels Z_2-gradués.
$N \subset M$ signifie $N_0 \subset M_0$ et $N_1 \subset M_1$
$M \oplus N$ est un K-espace vectoriel Z_2-gradué et $(M \oplus N)_i = M_i \oplus N_i$, $i \in Z_2$

$M \otimes N$ est un K-espace vectoriel Z_2-gradué et

$$(M \otimes N)_0 = M_0 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1$$
$$(M \otimes N)_1 = M_0 \otimes N_1 \oplus M_1 \otimes N_0.$$

Définition I.1.2.

Une application K-linéaire f de $M = M_0 \oplus M_1$ dans $N = N_0 \oplus N_1$ est dite de degré k si $f(M_i) \subset N_{i+k}$; $i, k \in Z_2$, $i+k$ calculé modulo 2.

Définition I.1.3.

Une application K-linéaire Z_2-graduée f de $M = M_0 \oplus M_1$ dans $N = N_0 \oplus N_1$ est un couple d'applications linéaires (f_0, f_1) où $f_0 : M_0 \to N_0$ et $f_1 : M_1 \to N_1$.

Remarque I.1.4.

Une application K-linéaire Z_2-graduée est de degré 0.

I.2. SUPERALGEBRES DE MALCEV

Définition I.2.1.

Une K-algèbre Z_2-graduée ou K-superalgèbre est un K-espace vectoriel Z_2-gradué $M = M_0 \oplus M_1$ muni d'une multiplication telle que $M_iM_j \subset M_{i+j}$; $i,j \in Z_2$, $i+j$ calculé modulo 2.

Définition I.2.2.

Soient $M = M_0 \oplus M_1$ et $N = N_0 \oplus N_1$ deux K-superalgèbres. Un morphisme de K-superalgèbres f de M dans N est une application K-linéaire Z_2-graduée telle que $f(xy) = f(x) f(y)$ pour tous x et y dans M.

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une K-superalgèbre

On définit l'application K-trilinéaire

$$\tilde{J} : M \times M \times M \to M \ , \quad (x,y,z) \mapsto \tilde{J}(x,y,z)$$

$$\tilde{J}(x,y,z) = (xy)z - x(yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y \quad \text{où } x,y,z \in M_0 \cup M_1$$

$\tilde{J}$ est appelé super-Jacobien de M.

On définit la multiplication $[\ ,\ ] : M \times M \to M$ telle que

$[x,y] = xy - (-1)^{\bar{x}\bar{y}} yx, \quad x,y \in M_0 \cup M_1$

$[\ ,\ ]$ est appelé super-crochet de Lie.

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une K-superalgèbre et $G = G_0 \oplus G_1$ la K-superalgèbre grassmannienne dont la multiplication vérifie $xy = (-1)^{\bar{x}\bar{y}} yx$ pour tous $x, y \in G_0 \cup G_1$. G est une K-superalgèbre associative. On pose $M(G) = M \otimes G$. $M(G)$ est une K-superalgèbre. On dit que $M(G)$ est l'enveloppe grassmannienne de M si $M(G) = (M \otimes G)_0$.

Soit $\mathcal{C}$ une classe d'algèbres (de Lie, de Malcèv, alternative...).

Théorème I.2.3.

Une K-superalgèbre $M = M_0 \oplus M_1$ appartient à une classe $\mathcal{C}$ si et seulement si l'enveloppe grassmannienne $M(G) = (M \otimes G)_0$ appartient à la classe $\mathcal{C}$.

Dans ce qui suit, nous supposerons que la caractéristique de K est différente de deux.

Corollaire I.2.4.

Une K-superalgèbre $M = M_0 \oplus M_1$ est une superalgèbre de Malcèv si et seulement si son enveloppe grassmannienne $M(G) = (M\otimes G)_0$ est une K-algèbre de Malcèv.

Définition I.2.5.

Une K-superalgèbre $M = M_0 \oplus M_1$ est une superalgèbre de Malcèv si et seulement si

$xy = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}} yx$

$(-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)(yt) = ((xy)z)t + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z}+\bar{t})}((yz)t)x + (-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{t})}((zt)x)y + (-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}((tx)y)z$

pour tous $x,y,z,t \in M_0 \cup M_1$.

Définition I.2.6.

Soit $M = M_0 \oplus M_1$, une K-superalgèbre de Malcèv et

$V = V_0 \oplus V_1$ un K-espace vectoriel Z_2-gradué

$End_K(V)$ muni de la Z_2-graduation définie par

$$\left(End_K(V)\right)_i = \left\{f \in End_K(V) / f\left(V_j\right) \subset V_{i+j} \text{ ; } i, j \in Z_2, i+j \text{ calculé modulo } 2\right\}$$

est une K-superalgèbre associative.

V est appelé un M-module de Malcèv s'il existe une application K-linéaire Z_2-graduée

$\rho : M \longrightarrow End_K(V)$ qui à x associé $\rho(x) = \rho_x$ telle que l'on ait

$$\rho_{(yz)x} = \left[\rho_x, \rho_z o \rho_y\right] + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_{xy} o \rho_z - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_y o \rho_{zx}$$

Dans ce cas ρ est appelé super-représentation de Malcèv de M dans V.

Remarque I.2.7.

L'application K-linéaire $R : M \rightarrow End_K(M)$ telle que $R_x(y) = yx$ est une super-représentation de Malcèv de M dans M, appelée super-représentation régulière de M.

CHAPITRE II : SUPER-REPRESENTATION FAIBLE D'UNE SUPERALGEBRE DE MALCEV

Dans [10], K. Yamaguti montre qu'une algèbre de Malcèv peut être munie d'une structure d'algèbre triple de Lie et définit la notion de représentation faible d'une algèbre de Malcèv. Dans ce chapitre, nous définirons la structure de superalgèbre triple de Lie et la notion de super-représentation faible d'une superalgèbre de Malcèv. Nous définirons aussi les groupes de cohomologie liés à la super-représentation faible d'une superalgèbre de Malcèv.

Dans tout ce qui suit, K est un corps commutatif de caractéristique zéro.
$M = M_0 \oplus M_1$, désignera une superalgèbre de Malcèv, $V = V_0 \oplus V_1$ un espace vectoriel Z_2-gradué.

II.1. DEFINITION ET PROPRIETES DE L'APPLICATION [, ,]

$M = M_0 \oplus M_1$ est une superalgèbre de Malcèv ; alors son enveloppe grassmannienne $M(G) = (M \otimes G)_0$ est une algèbre de Malcèv. D'après [10] M(G) peut être muni d'une structure d'algèbre triple de Lie par l'application K-trilinéaire [, ,] définit par
$[X\ Y\ Z] = X(YZ) - Y(XZ) + (XY)Z$ pour tous $X,Y,Z \in M(G)$.
M(G) a alors les propriétés suivantes :
* $[X\ X\ Y] = 0$
* $[X\ Y\ Z] + [Y\ Z\ X] + [Z\ X\ Y] + (XY)Z + (YZ)X + (ZX)Y = 0$
* $[(XY)\ Z\ V] + [(YZ)\ X\ V] + [(ZX)\ Y\ V] = 0$
* $[X\ Y\ (ZV)] = [X\ Y\ Z]V + Z[X\ Y\ V]$
* $[X\ Y\ [Z\ V\ W]] = [[X\ Y\ Z]\ V\ W] + [Z\ [X\ Y\ V]\ W] + [Z\ V\ [X\ Y\ W]]$

pour tous $X, Y, Z, V, W \in M(G)$.

Soient X, Y, Z, V, W des éléments homogènes de M(G).

posons $X = x \otimes g$; $Y = y \otimes g'$, $Z = z \otimes g''$ $V = v \otimes h$; $W = w \otimes h'$

$x, y, z, v, w \in M_0 \cup M_1$; $g, g', g'', h, h' \in G_0 \cup G_1$

notons que $\bar{x} = \bar{g}$; $\bar{y} = \bar{g}'$; $\bar{z} = \bar{g}''$; $\bar{v} = \bar{h}$ et $\bar{w} = \bar{h}'$;

la multiplication dans M(G) est définie par :

$$XY = (x \otimes g)(y \otimes g') = (-1)^{\bar{g}\,\bar{y}} xy \otimes gg' = (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} xy \otimes gg' .$$

Développons l'expression suivante :

$$[X\ Y\ Z] = X(YZ) - Y(XZ) + (XY)Z$$

$$\begin{aligned}
[X\ Y\ Z] &= (x \otimes g)((y \otimes g')(z \otimes g'')) - (y \otimes g')((x \otimes g)(z \otimes g'')) + ((x \otimes g)(y \otimes g'))(z \otimes g'') \\
&= (x \otimes g)((-1)^{\bar{y}\,\bar{z}} yz \otimes g'g'') - (y \otimes g')((-1)^{\bar{x}\,\bar{z}} xz \otimes gg'') + ((-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} xy \otimes gg')(z \otimes g'') \\
&= (-1)^{\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} x(yz) \otimes gg'g'' - (-1)^{\bar{x}\,\bar{z} + \bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} y(xz) \otimes g'gg'' + \\
&\qquad + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y} + \bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} (xy)z \otimes gg'g'' \\
&= \left((-1)^{\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} x(yz) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{z} + \bar{y}(\bar{x}+\bar{z}) + \bar{x}\,\bar{y}} y(xz) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y} + \bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} (xy)z\right) \otimes gg'g'' \\
&= ((zy)x - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}(zx)y + z(yx)) \otimes gg'g''.
\end{aligned}$$

$$[X\ Y\ Z] = ((zy)x - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}(zx)y + z(yx)) \otimes gg'g''$$

d'où la définition suivante :

Définition II.1.1.

$[\ ,\ ,\ ] : M \times M \times M \to M$ est une application K-trilinéaire définie par

$[x,y,z] = (zy)x - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}(zx)y + z(yx)$ pour tous $x, y, z \in M_0 \cup M_1$.

Remarques II.1.2.

II.1.2.1. $\forall\, X,Y,Z \in M(G)$, $[X\ Y\ Z] = [x,y,z] \otimes gg'g''$.

II.1.2.2. $\forall x,y,z \in M_0 \cup M_1$, $[x, y, z] = [R_x, R_y](z) + R_{yx}(z)$

où $R_x : M \to M$, $y \mapsto yx$.

En effet,

$$[x,y,z] = (zy)x - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}(zx)y + z(yx)$$
$$= (R_x o R_y)(z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}(R_y o R_x)(z) + R_{yx}(z)$$
$$= [R_x, R_y](z) + R_{yx}(z).$$

Déduisons les propriétés de l'application [, ,] dans M.

Pout tous X, Y, Z, V, W des éléments homogènes de M(G)

avec $X = x \otimes g$; $Y = y \otimes g'$, $Z = z \otimes g''$ $V = v \otimes h$; $W = w \otimes h'$

$x, y, z, v, w \in M_0 \cup M_1$; $g, g', g'', h, h' \in G_0 \cup G_1$

- $[X\,X\,Y] = 0$

  $[X\,X\,Y] = [x, x, y] \otimes ggg' = 0$ $\forall\, x, y \in M_0 \cup M_1$; $\forall\, g,g' \in G_0 \cup G_1$ tels que

  $X = x \otimes g$; $Y = y \otimes g'$

d'où $[x, x, y] = 0$.

- $[X\,Y\,Z] + [Y\,Z\,X] + [Z\,X\,Y] + (XY)Z + (YZ)X + (ZX)Y = 0$

  $[X\,Y\,Z] = [x, y, z] \otimes gg'g''$

  $[Y\,Z\,X] = [y,z,x] \otimes g'g''g = (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}[y,z,x] \otimes gg'g''$

  $[Z\,X\,Y] = [z,x,y] \otimes g''gg' = (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,x,y] \otimes gg'g''$

  $$(XY)Z + (YZ)X + (ZX)Y = (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(xy)z \otimes gg'g'' + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}(yz)x \otimes gg'g''$$
  $$+ (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}(zx)y \otimes gg'g''$$

d'où l'on obtient par identification

$$[x,y,z] + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}[y,z,x] + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,x,y] +$$
$$+ (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(xy)z - (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}x(yz) - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}(xz)y = 0$$

alors $[x,y,z] + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}[y,z,x] + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,x,y] + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\ \tilde{J}(x,y,z) = 0.$

- $[(XY)\ Z\ V] + [(YZ)\ X\ V] + [(ZX)\ Y\ V] = 0$

$$[(XY)\ Z\ V] = \left[(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} xy\otimes gg'\ \ z\otimes g''\ \ v\otimes h\right] = (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}[xy, z, v]\otimes gg'g''h$$

$$\begin{aligned}[(YZ)\ X\ V] &= \left[(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}} yz\otimes g'g''\ \ x\otimes g\ \ v\otimes h\right]\\ &= (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}[yz, x, v]\otimes g'g''gh\\ &= (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}[yz, x, v]\otimes gg'g''h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(ZX)\ Y\ V] &= \left[(-1)^{\bar{x}\,\bar{z}} zx\otimes g''g\ \ y\otimes g'\ \ v\otimes h\right]\\ &= (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}}[zx, y, v]\otimes g''gg'h\\ &= (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[zx, y, v]\otimes gg'g''h\end{aligned}$$

d'où l'on obtient $(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}[xy, z, v] + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}[yz, xv] + (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[zx, y, v] = 0$

et $[xy, z, v] + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[yz, x, v] + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}[zx, y, v] = 0.$

- $[X\ Y\ (ZV)] = [X\ Y\ Z]V + Z[X\ Y\ V]$

$$[X\ Y\ (ZV)] = \left[x\otimes g\ \ y\otimes g'\ \ (-1)^{\bar{z}\,\bar{v}} zv\otimes g''h\right] = (-1)^{\bar{z}\,\bar{v}}[x, y, zv]\otimes gg'g''h$$

$$[X\ Y\ Z]V = \left([x, y, z]\otimes gg'g''\right)(v\otimes h) = (-1)^{\bar{v}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}[x, y, z]v\otimes gg'g''h$$

$$\begin{aligned}Z[X\ Y\ V] &= (z\otimes g'')\left([x, y, v]\otimes gg'h\right)\\ &= (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{v})} z[x, y, v]\otimes g''gg'h\\ &= (-1)^{\bar{z}\,\bar{v}} z[x, y, v]\otimes gg'g''h\end{aligned}$$

On obtient donc par identification

$$[x, y, zv] = (-1)^{\bar{v}(\bar{x}+\bar{y})}[x, y, z]v + z[x, y, v].$$

- $[X\ Y\ [Z\ V\ W]] = [[X\ Y\ Z]\ V\ W] + [Z\ [X\ Y\ V]\ W] + [Z\ V\ [X\ Y\ W]]$

$[X\ Y\ [Z\ V\ W]] = [x, y, [z, v, w]] \otimes gg'g''hh'$

$[Z\ [X\ Y\ V]\ W] = [z, [x, y, v], w] \otimes g''gg'hh' = (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z, [x, y, v], w]\otimes gg'g''hh'$

$[Z\ V\ [X\ Y\ W] = [z, v, [x, y, w]] \otimes g''hgg'h' = (-1)^{(\bar{z}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}[z, v, [x, y, w]]\otimes gg'g''hh'$

d'où par identification on obtient

$$[x,y,[z,v,w]]=[[x,y,z],v,w]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}[z,[x,y,v],w]+(-1)^{(\bar x+\bar y)(\bar z+\bar v)}[z,v,[x,y,w]].$$

Nous obtenons la proposition suivante :

Proposition II.1.3.

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv et [, ,] l'application K-trilinéaire définie par $[x,y,z]=(zy)x-(-1)^{\bar x\bar y}(zx)y+z(yx)$

Alors pour tous x, y, z, v, w $\in M_0 \cup M_1$ on a :

$$[x,x,y]=0$$

$$[x,y,z]+(-1)^{\bar x(\bar y+\bar z)}[y,z,x]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}[z,x,y]+(-1)^{\bar x\bar y+\bar z(\bar x+y)}\tilde{J}(x,y,z)=0$$

$$[xy,z,v]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}[yz,x,v]+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}[zx,y,v]=0$$

$$[x,y,zv]=(-1)^{\bar v(\bar x+\bar y)}[x,y,z]v+z[x,y,v]$$

$$[x,y,[z,v,w]]=[[x,y,z],v,w]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}[z,[x,y,v],w]+(-1)^{(\bar x+\bar y)(\bar z+\bar v)}[z,v,[x,y,w]]$$

De plus $[X\ X\ Y]=0 \qquad \forall\, X, Y \in M(G)$ implique

$$0=[X+Y\quad X+Y\quad Z]$$

$$0=[X\ Y\ Z]+[Y\ X\ Z]$$

et $[X\ Y\ Z]=-[Y\ X\ Z]$

alors $[x,y,z]\otimes gg'g''=-[y,x,z]\otimes g'gg''$

$$=-(-1)^{\bar x\bar y}[y,x,z]\otimes gg'g''$$

d'où nous obtenons $\quad [x,y,z]=-(-1)^{\bar x\bar y}[y,x,z]$

Cette proposition nous conduit à définir la structure de superalgèbre triple de Lie de la façon suivante :

Définition II.1.4.

Une superalgèbre triple de Lie $T = T_0 \oplus T_1$ est un K-espace vectoriel Z_2-gradué muni d'une multiplication bilinéaire xy et d'une composition trilinéaire [x,y,z] vérifiant pour tous x, y,z, v,w $\in T_0 \cup T_1$:

$$xy = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}} yx$$

$$[x,y,z] = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}}[y,x,z]$$

$$[x,y,z] + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}[y,z,x] + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,x,y] + (-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\ \tilde{J}(x,y,z) = 0$$

$$[xy,z,v] + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[yz,x,v] + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}[zx,y,v] = 0$$

$$[x,y,zv] = (-1)^{\bar{v}(\bar{x}+\bar{y})}[x,y,z]v + z[x,y,v]$$

$$[x,y,[z,v,w]] = [[x,y,z],v,w] + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,[x,y,v],w] + (-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{v})}[z,v,[x,y,w]].$$

Exemples II.1.5.

II.1.5.1. D'après la définition précédente, il vient immédiatement qu'une superalgèbre de Malcèv M est une superalgèbre triple de Lie munie de la multiplication xy et du triplet $[x,y,z] = (zy)x - (-1)^{\bar{x}\bar{y}}(zx)y + z(yx)$ pour tous x, y, z $\in M_0 \cup M_1$.

II.1.5.2. Toute superalgèbre de Lie L est une superalgèbre triple de Lie.

En effet, il suffit de poser $xy = [x,y]$ et $[x,y,z] = (-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[[x,y],z]$ où [,] est la multiplication de L.

Remarques II.1.6.

Soit T une superalgèbre triple de Lie

II.1.6.1. Si [x,y,z] = 0 $\forall$ x, y, z $\in T_0 \cup T_1$, alors T devient une superalgèbre de Lie.

II.1.6.2. Si xy = 0 $\forall$ x, y $\in T_0 \cup T_1$ alors nous avons les relations suivantes :

$$[x,y,z] = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}}[y,x,z]$$

$$[x,y,z]=-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}[y,x,z]$$

$$[x,y,z]+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}[y,z,x]+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,x,y]=0$$

$$[x,y,[z,v,w]]=[[x,y,z],v,w]+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,[x,y,v],w]+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{v})}[z,v,[x,y,w]]$$

d'où la définition suivante :

Définition II.1.7.

Un super-système triple de Lie $T = T_0 \oplus T_1$ est un K-espace vectoriel Z_2-gradué munie d'une application K-trilinéaire [, ,] vérifiant pour tous x, y, z, v, w $\in T_0 \cup T_1$

$$[x,y,z]=-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}[y,x,z]$$

$$[x,y,z]+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}[y,z,x]+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,x,y]=0$$

$$[x,y,[z,v,w]]=[[x,y,z],v,w]+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,[x,y,v],w]+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{v})}[z,v,[x,y,w]].$$

II.2. SUPER-REPRESENTATION FAIBLE D'UNE SUPERALGEBRE DE MALCEV

Posons $D(x,y) = [R_x, R_y] + R_{yx}$, $x,y \in M_0 \cup M_1$

$D(x,y)(z) = [R_x, R_y](z) + R_{yx}(z) = [x,y,z]$

$D(x,y)$ est une application K-linéaire de M dans M et on a $\overline{D(x,y)} = \bar{x}+\bar{y}$.

Lemme II.2.1.

Pour tous x,y,z $\in M_0 \cup M_1$, $R_{D(x,y)(z)} = [D(x,y), R_z]$.

En effet, R est une super-représentation de M dans M ;
alors R vérifie la relation suivante

$$R_{(yz)x} = [R_x, R_z o R_y] + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} R_{xy} o R_z - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} R_y o R_{zx}$$

alors $R_{D(x,y)(z)} = R_{[x,y,z]} = R_{(zy)x} - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} R_{(zx)y} + R_{z(yx)}$

$$= R_{(zy)x} + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} R_{(xz)y} + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_{(xy)z}$$

$$R_{(zy)x} = R_x o R_y o R_z - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} R_y o R_z o R_x + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_{xz} o R_y - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_z o R_{yx}$$

$$(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} R_{(xz)y} = (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\Big(R_y o R_z o R_x - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} R_z o R_x o R_y + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} R_{yx} o R_z - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} R_x o R_{zy}\Big)$$

$$(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_{(xy)z} = (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\Big(R_z o R_y o R_x - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_y o R_x o R_z + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} R_{zx} o R_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} R_x o R_{yz}\Big)$$

d'où $R_{D(x,y)(z)} = R_x o R_y o R_z - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} R_y o R_x o R_z + R_{yx} o R_z - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_z o R_x o R_y$

$$+ (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_z o R_y o R_x - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_z o R_{yx}$$

$$= \left(R_x o R_y - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} R_y o R_x + R_{yx}\right) o R_z - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_z o \Big(R_x o R_y - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} R_y o R_x + R_{yx}\Big)$$

$$= D(x,y) o R_z - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} R_z o D(x,y) = \left[D(x,y), R_z\right]$$

d'où $R_{D(x,y)(z)} = \left[D(x,y), R_z\right]$.

Proposition II.2.2.

L'application K-linéaire $\Delta(x,y) : M \to M$ telle que $\Delta(x,y)(z) = (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} D(x,y)(z)$ où $x, y, z \in M_0 \cup M_1$ est une superdérivation de M.

En effet, rappelons qu'une application linéaire $f : M \to M$ homogène de degré k est une superdérivation si $f(xy) = f(x)y + (-1)^{\bar{x}k} x f(y)$ où $x, y \in M_0 \cup M_1$.

$$D(x,y)(tz) = t(D(x,y)(z)) + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(D(x,y)(t))z$$

Par suite $\quad \Delta(x,y)(tz) = (-1)^{(\bar{t}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y})} D(x,y)(tz)$

$$= (-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} t\left((-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} D(x,y)(z)\right) + \left((-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} D(x,y)(t)\right)z$$

$$= (-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} t\Delta(x,y)(z) + \Delta(x,y)(t)z$$

il en résulte que $\Delta(x,y)$ est une superdérivation de M.

Soit maintenant ρ une application linéaire Z_2-graduée de M dans $End_K(V)$. Nous savons que End_K (V) est une K-algèbre associative Z_2-graduée. Nous allons généraliser la définition de D en posant : pour tous x, y $\in M_0 \cup M_1$, $D(x,y) = [\rho_x, \rho_y] + \rho_{yx}$

D(x,y) est une application K-linéaire et $\overline{D(x,y)} = \bar{x} + \bar{y}$.

Définition II.2.3.

Une structure d'espaces vectoriels Z_2-gradués à opérateurs sur K de domaine M est la donnée d'une structure constituée par un K-espace vectoriel Z_2-gradué V et d'une application ρ de M dans la K-superalgèbre associative $End_K(V)$. Les applications linéaires $\rho(x)$ notées ρ_x sont appelées les opérateurs de la structure.

Définition II.2.4.

On dit que ρ est une super-représentation faible de M dans V si

1) ρ est une application K-linéaire Z_2-graduée
2) $[D(x,y), \rho_z] = \rho_{[x,y,z]}$ pout tous x, y, z $\in M_0 \cup M_1$.

Exemples II.2.5.

II.2.5.1. L'application $R: M \to End_K(M)$, $R_x(y) = yx$ est une super-représentation faible de M dans M.

II.2.5.2. Posons $d(x,y) = [\rho_x, \rho_y] - \rho_{yx}$ pour tous $x, y \in M_0 \cup M_1$ et ρ une application K-linéaire Z_2-graduée.

Si $d(x,y) = 0$ pour tous $x, y \in M_0 \cup M_1$ alors ρ est une super-représentation faible de M dans V appelé super-représentation spéciale de M dans V.

En effet $d(x,y) = [\rho_x, \rho_y] - \rho_{yx}$, si $d(x,y) = 0$ alors $[\rho_x, \rho_y] = \rho_{yx}$

d'où $[D(x,y), \rho_z] = 2\,[[\rho_x, \rho_y], \rho_z]$

or $End_K(V)$ muni du super-crochet de Lie est une superalgèbre de Lie ; alors d'après la super-identité de Jacobi on a $\left[[\rho_x,\rho_y],\rho_z\right] = \left[\rho_x,[\rho_y,\rho_z]\right] + (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\left[[\rho_x,\rho_z],\rho_y\right]$

d'où

$$\begin{aligned}
[D(x,y),\rho_z] &= \left[[\rho_x,\rho_y],\rho_z\right] + \left[\rho_x,[\rho_y,\rho_z]\right] + (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\left[[\rho_x,\rho_z],\rho_y\right] \\
&= \left[\rho_{yx},\rho_z\right] + \left[\rho_x,\rho_{zy}\right] + (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\left[\rho_{zx},\rho_y\right] \\
&= \rho_{z(yx)} + \rho_{(zy)x} + (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{y(zx)} \\
&= \rho_{(zy)x-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}(zx)y+z(yx)} \\
&= \rho_{[x,y,z]}.
\end{aligned}$$

Proposition II.2.6.

Si ρ est une super-représentation de Malcèv de M dans V alors ρ est une super-représentation faible de M dans V.

La preuve est analogue à celle du lemme II.2.1. en remplaçant R par ρ.

Théorème II.2.7.

Soit ρ une application K-linéaire Z_2-graduée de M dans V. Alors pour tous x, y,z $\in$ $M_0 \cup M_1$, les conditions suivantes sont équivalentes

(1) $$\rho_{(yz)x} - \rho_{y(zx)} = (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\left[\rho_y o \rho_x, \rho_z\right] + (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}}\left[\rho_z, \rho_{yx}\right] + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{yz} o \rho_x - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o \rho_{zx}$$

(2) $$\rho_{(yz)x} = \left[\rho_x, \rho_z o \rho_y\right] + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{xy} o \rho_z - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o \rho_{zx}$$

(3) (i) $$\rho_{y(zx)} = \rho_x o\left(\rho_z o \rho_y + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}\rho_y o \rho_z\right) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}}\rho_z o\left(\rho_x o \rho_y + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\rho_y o \rho_x\right) - \rho_{zx} o \rho_y - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o \rho_{zx} + \rho_x o \rho_{yz} + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_z o \rho_{xy}$$

(ii) $\left[D(x,y), \rho_z\right] = \rho_{[x,y,z]}$.

En effet,

montrons que $(1) \Rightarrow (2)$

$$\rho_{(yz)x} - \rho_{y(zx)} = (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o \rho_x o \rho_z - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_z o \rho_y o \rho_x + (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}}\rho_z o \rho_{yx} - (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}\rho_{yx} o \rho_z + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{yz} o \rho_x - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o \rho_{zx}$$

$$\rho_{(xy)z} - \rho_{x(yz)} = (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_x o \rho_z o \rho_y - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_y o \rho_x o \rho_z + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}\rho_y o \rho_{xz} - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\rho_{xz} o \rho_y + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{xy} o \rho_z - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_x o \rho_{yz}$$

$$\rho_{(zx)y} - \rho_{z(xy)} = (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_z o \rho_y o \rho_x - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_x o \rho_z o \rho_y + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\rho_x o \rho_{zy} - (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}}\rho_{zy} o \rho_x + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{zx} o \rho_y - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_z o \rho_{xy}$$

d'où d'une part

$$(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\left(\rho_{(yz)x} - \rho_{y(zx)}\right) + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\left(\rho_{(xy)z} - \rho_{x(yz)}\right) + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\left(\rho_{(zx)y} - \rho_{z(xy)}\right) =$$
$$= 2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{(yz)x} + 2(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{(xy)z} + 2(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{(zx)y}$$

et d'autre part

$$(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\left(\rho_{(yz)x}-\rho_{y(zx)}\right)+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\left(\rho_{(xy)z}-\rho_{x(yz)}\right)+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\left(\rho_{(zx)y}-\rho_{z(xy)}\right)=$$
$$=-2(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_z o\rho_{xy}+2(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{xy}o\rho_z+2(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{yz}o\rho_x-2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_x o\rho_{yz}$$
$$+2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{zx}o\rho_y-2(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_y o\rho_{zx}$$

nous obtenons

$$(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{(yz)x}+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{(xy)z}+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{(zx)y}=$$
$$=-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_z o\rho_{xy}+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{xy}o\rho_z+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{yz}o\rho_x$$
$$-(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_x o\rho_{yz}+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{zx}o\rho_y-(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_y o\rho_{zx}$$

de plus

$$-(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{(zx)y}+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{z(xy)}=$$
$$=-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_z o\rho_y o\rho_x+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_x o\rho_z o\rho_y-(-1)^{\bar{x}\,\bar{z}}\rho_x o\rho_{zy}$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\rho_{zy}o\rho_x-(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{zx}o\rho_y+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_z o\rho_{xy}$$

La somme de ces deux égalités nous donne

$$(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{(yz)x}=(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{xy}o\rho_z-(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_y o\rho_{zx}-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_z o\rho_y o\rho_x$$
$$+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_x o\rho_z o\rho_y$$

et $\rho_{(yz)x}=\left[\rho_x,\rho_z o\rho_y\right]+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{xy}o\rho_z-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o\rho_{zx}.$

Montrons que (2) $\Rightarrow$ (3)

On a

$$\rho_{(yz)x} = \rho_x \circ \rho_z \circ \rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_z \circ \rho_y \circ \rho_x + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_{xy} \circ \rho_z - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_y \circ \rho_{zx}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\rho_{(yx)z} &= -(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_{z(yx)} \\
&= \rho_z \circ \rho_x \circ \rho_y - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_x \circ \rho_y \circ \rho_z + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_{zy} \circ \rho_x - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_y \circ \rho_{xz} \\
\rho_{(xy)z} &= -(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_{z(xy)} \\
&= \rho_z \circ \rho_y \circ \rho_x - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_y \circ \rho_x \circ \rho_z + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_{zx} \circ \rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_x \circ \rho_{yz} \\
\rho_{(zx)y} &= -(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_{y(zx)} \\
&= \rho_y \circ \rho_x \circ \rho_z - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_x \circ \rho_z \circ \rho_y + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_{yz} \circ \rho_x - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_z \circ \rho_{xy}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}} \rho_{z(yx)} &= -(-1)^{\bar{x}\,\bar{z}} \rho_z \circ \rho_x \circ \rho_y + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}} \rho_x \circ \rho_y \circ \rho_z - (1)^{\bar{x}\,\bar{z}+\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_{zy} \circ \rho_x \\
&\quad + (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}+\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_y \circ \rho_{xz} \\
(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_{z(xy)} &= -(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_z \circ \rho_y \circ \rho_x + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_y \circ \rho_x \circ \rho_z - \rho_{zx} \circ \rho_y + \rho_x \rho_{yz} \\
\rho_{y(zx)} &= -(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_y \circ \rho_x \circ \rho_z + \rho_x \circ \rho_z \circ \rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_{yz} \circ \rho_x + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_z \circ \rho_{xy}
\end{aligned}$$

La somme membre à membre de ces égalités nous donne

$$\begin{aligned}
\rho_{y(zx)} &= \rho_x \circ \rho_z \circ \rho_y + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}} \rho_x \circ \rho_y \circ \rho_z - (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}} \rho_z \circ \rho_x \circ \rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_z \circ \rho_y \circ \rho_x \\
&\quad + (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}+\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_y \circ \rho_{xz} - \rho_{zx} \circ \rho_y + \rho_x \circ \rho_{yz} + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_z \circ \rho_{xy}
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\rho_{y(zx)} &= \rho_x \circ \left(\rho_z \circ \rho_y + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}} \rho_y \circ \rho_z \right) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}} \rho_z \circ \left(\rho_x \circ \rho_y + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} \rho_y \circ \rho_x \right) \\
&\quad - \rho_{zx} \circ \rho_y - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} \rho_y \circ \rho_{zx} + \rho_x \circ \rho_{yz} + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_z \circ \rho_{xy}
\end{aligned}$$

d'où le (3.i) est vérifié. La deuxième partie correspond à la proposition II.2.6. .

Montrons que (3) $\Rightarrow$ (1)

On a

$$\begin{aligned}\rho_{y(zx)} &= \rho_x o\left(\rho_z o\rho_y + (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_y o\rho_z\right) - (-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_z o\left(\rho_x o\rho_y + (-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_y o\rho_x\right)\\ &\quad - \rho_{zx} o\rho_y - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o\rho_{zx} + \rho_x o\rho_{yz} + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_z o\rho_{xy}\end{aligned}$$

et $\quad [D(x,y),\rho_z] = \rho_{[x,y,z]}$

Transformons la première égalité :

$$\begin{aligned}\rho_{y(zx)} &= \rho_x o\rho_z o\rho_y + (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_x o\left(\rho_y o\rho_z - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_z o\rho_y - \rho_{zy}\right) + \rho_x o\rho_z o\rho_y + (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_x o\rho_{zy}\\ &\quad - (-1)^{\bar{x}\bar{z}}\left(\rho_z o\rho_x - (-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_x o\rho_z - \rho_{xz}\right)o\rho_y - \rho_x o\rho_z o\rho_y - (-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_{xz} o\rho_y\\ &\quad - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_z o\left(\rho_y o\rho_x - (-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_x o\rho_y - \rho_{xy}\right) - (-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_z o\rho_x o\rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_z o\rho_{xy}\\ &\quad - \rho_{zx} o\rho_y + \left(\rho_{zx} o\rho_y - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o\rho_{zx} - \rho_{y(zx)}\right) - \rho_{zx} o\rho_y + \rho_{y(zx)}\\ &\quad + \rho_x o\rho_{yz} + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_z o\rho_{xy}\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}0 &= (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_x od(y,z) - (-1)^{\bar{x}\bar{z}}d(z,x)o\rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_z od(y,x) + d(zx,y) + \rho_x o\rho_z o\rho_y\\ &\quad - (-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_z o\rho_x o\rho_y - \rho_{zx} o\rho_y\end{aligned}$$

où $\; d(x,y) = \rho_x o\rho_y - (-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_y o\rho_x - \rho_{yx} = \left[\rho_x,\rho_y\right] - \rho_{yx}\ \forall x,y \in M_0 \cup M_1$

et donc

$$0 = (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_x od(y,z) - 2(-1)^{\bar{x}\bar{z}}d(z,x)o\rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_z od(y,x) + d(zx,y)$$

interchangeons x et y et aussi y et z dans l'égalité précédente,

nous obtenons les égalités suivantes :

(a) $\quad 0=(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_y o d(x,z)-2(-1)^{\bar{y}\bar{z}}d(z,y)o\rho_x-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_z o d(x,y)+d(zy,x)$

(b) $\quad 0=(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_x o d(z,y)-2(-1)^{\bar{x}\bar{y}}d(y,x)o\rho_z-(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_y o d(z,x)+d(yx,z)$

Transformons l'égalité $\quad [D(x,y),\rho_z]=\rho_{[x,y,z]}$

$$[\rho_x o\rho_y-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_y o\rho_x+\rho_{yx},\rho_z]=\rho_{(zy)x}-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_{(zx)y}+\rho_{z(yx)}$$
$$[d(x,y),\rho_z]+2[\rho_{yx},\rho_z]-\rho_{(zy)x}+(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_{(zx)y}-\rho_{z(yx)}=0$$
$$[d(x,y),\rho_z]+2d(yx,z)-\rho_{(zy)x}+(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_{(zx)y}+\rho_{z(yx)}=0$$

d'où $\quad [d(x,y),\rho_z]+2d(yx,z)+(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{\tilde{J}(x,y,z)}=0$

et en interchangeant x et z : $[d(z,y),\rho_x]+2d(yz,x)+(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{\tilde{J}(z,y,x)}=0$

on obtient les égalités suivantes :

$$\rho_z o d(x,y)=(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}d(x,y)o\rho_z+2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}d(yx,z)+(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_{\tilde{J}(x,y,z)}$$
$$d(z,y)o\rho_x=(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_x o d(z,y)-2d(yz,x)+\rho_{\tilde{J}(x,y,z)}$$

remplaçons ces deux termes dans (a) on obtient

$$\begin{aligned}0=&(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_y o d(x,z)-2(-1)^{\bar{y}\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_x o d(z,y)+4(-1)^{\bar{y}\bar{z}}d(yz,x)-2(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{\tilde{J}(x,y,z)}\\&-(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}d(x,y)o\rho_z-2(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}d(yx,z)-(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{\tilde{J}(x,y,z)}+d(zy,x)\end{aligned}$$

Or $\quad (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_x o d(z,y)+d(yx,z)=2(-1)^{\bar{x}\bar{y}}d(y,x)o\rho_z+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_y o d(z,x)$ **(d'après (b))**

ce qui donne

$$\begin{aligned}0=&(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_y o d(x,z)-4(-1)^{\bar{x}\bar{z}}d(y,x)o\rho_z-2\rho_y o d(z,x)+4(-1)^{\bar{y}\bar{z}}d(yz,x)-2(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{\tilde{J}(x,y,z)}\\&-(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}d(x,y)o\rho_z-(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{\tilde{J}(x,y,z)}+d(zy,x)\end{aligned}$$

$$0=(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_y o d(x,z)+3(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}d(x,y)o\rho_z-2\rho_y o d(z,x)+3(-1)^{\bar{y}\bar{z}}d(yz,x)-3(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{\mathcal{J}(x,y,z)}$$
$$=(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_y o\rho_x o\rho_z-\rho_y o\rho_z o\rho_x-(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_y o\rho_{zx}+3(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_x o\rho_y o\rho_z-3(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_y o\rho_x o\rho_z$$
$$-3(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{yx}o\rho_z-2\rho_y o\rho_z o\rho_x+2(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_y o\rho_x o\rho_z+2\rho_y o\rho_{xz}+3(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{yz}o\rho_x$$
$$-3(-1)^{\bar{y}\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_x o\rho_{yz}\quad -3(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{x(yz)}-3(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{(xy)z}+3(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{x(yz)}+3\rho_{(xz)y}$$

$$=-3\rho_y o\rho_z o\rho_x-3(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_y o\rho_{zx}+3(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_x o\rho_y o\rho_z-3(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{yx}o\rho_z$$
$$+3(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{yz}o\rho_x-3(-1)^{\bar{y}\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_x o\rho_{yz}-3(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\rho_{(xy)z}+3\rho_{(xz)y}$$

d'où

$$-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{(yx)z}+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{y(xz)}=-\left[\rho_y o\rho_z,\rho_x\right]-(-1)^{\bar{y}\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\left[\rho_x,\rho_{yz}\right]$$
$$+\rho_y o\rho_{xz}+(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\rho_{xy}o\rho_z$$

et alors

$$\rho_{(yx)z}-\rho_{y(xz)}=(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\left[\rho_y o\rho_z,\rho_x\right]+(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\left[\rho_x,\rho_{yz}\right]$$
$$-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o\rho_{xz}-(-1)^{\bar{x}\bar{z}+\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{xy}o\rho_z$$

on obtient finalement

$$\rho_{(yz)x}-\rho_{y(zx)}=(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\left[\rho_y o\rho_x,\rho_z\right]+(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\left[\rho_z,\rho_{yx}\right]$$
$$+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_{yz}o\rho_x-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o\rho_{zx}$$

Proposition II.2.8.

Si ρ est une super-représentation faible de M dans V alors pour tous $x, y, z, w \in M_0 \cup M_1$, on a

1) $D(xy,z)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D(yz,x)+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}D(zx,y)=0$

2) $d(xy,z)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}d(yz,x)+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}d(zx,y)=2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{\mathcal{J}(x,y,z)}$

3) $\left[D(x,y),D(z,w)\right]=D([x,y,z],w)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D(z,[x,y,w])$

où $d(x,y) = [\rho_x, \rho_y] - \rho_{yx}$.

En effet,

ρ étant une super-représentation faible alors $\left[D(x,y),\rho_z\right]=\rho_{[x,y,z]}$

$$\Rightarrow \left[\left[\rho_x,\rho_y\right]+\rho_{yx},\rho_z\right]=\rho_{[x,y,z]} \text{ et } \left[\rho_{yx},\rho_z\right]=\rho_{[x,y,z]}-\left[\left[\rho_x,\rho_y\right],\rho_z\right]$$

1) $D(xy,z)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D(yz,x)+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D(zx,y)=$

$$=\left[\rho_{xy},\rho_z\right]+\rho_{z(xy)}+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\left(\left[\rho_{yz},\rho_x\right]+\rho_{x(yz)}\right)+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}\left(\left[\rho_{zx},\rho_y\right]+\rho_{y(zx)}\right)$$

$$=\rho_{[y,x,z]}-\left[\left[\rho_y,\rho_x\right],\rho_z\right]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_{[z,y,x]}-(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\left[\left[\rho_z,\rho_y\right],\rho_x\right]+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}\rho_{[x,z,y]}-$$
$$-(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}\left[\left[\rho_x,\rho_z\right],\rho_y\right]+\rho_{z(xy)}+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_{x(yz)}+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}\rho_{y(zx)}$$

$$=\rho_{[y,x,z]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}[z,y,x]+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}[x,z,y]}-\left[\left[\rho_y,\rho_x\right],\rho_z\right]-(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\left[\left[\rho_z,\rho_y\right],\rho_x\right]-$$
$$-(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}\left[\left[\rho_x,\rho_z\right],\rho_y\right]+\rho_{z(xy)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}x(yz)+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}y(zx)}$$

$(End_K(V), [\ ,\ ])$ étant une superalgèbre de Lie, alors

$$\left[\left[\rho_y,\rho_x\right],\rho_z\right]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\left[\left[\rho_z,\rho_y\right],\rho_x\right]+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}\left[\left[\rho_x,\rho_z\right],\rho_y\right]=$$
$$=\left[\left[\rho_y,\rho_x\right],\rho_z\right]-\left[\rho_y,\left[\rho_x,\rho_z\right]\right]-(-1)^{\bar x\bar z}\left[\left[\rho_y,\rho_z\right],\rho_x\right]=\tilde J(\rho_z,\rho_y,\rho_x)=0.$$

De plus $[y,x,z]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}[z,y,x]+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}[x,z,y]=-(-1)^{\bar x\bar y+\bar z(\bar x+\bar y)}\tilde J(y,x,z)$

d'après la proposition II.1.3.

et $z(xy)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}x(yz)+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}y(zx)=$

$$=(-1)^{\bar x\bar y+\bar z(\bar x+\bar y)}(yx)z-(-1)^{\bar x\bar y+\bar z(\bar x+\bar y)}y(xz)-(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}(yz)x$$

$$=(-1)^{\bar x\bar y+\bar z(\bar x+\bar y)}\tilde J(y,x,z)$$

d'où $D(xy,z)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D(yz,x)+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D(zx,y)=0$.

2) $d(x,y)=\left[\rho_x,\rho_y\right]-\rho_{yx}=D(x,y)-2\rho_{yx}$

$$d(xy,z)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}d(yz,x)+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}d(zx,y)=$$

$$=D(xy,z)-2\rho_{z(xy)}+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D(yz,x)-2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_{x(yz)}$$

$$+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D(zx,y)-2(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}\rho_{y(zx)}$$

$$=D(xy,z)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D(yz,x)+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D(zx,y)+2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_{(xy)z}$$

$$-2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_{x(yz)}-2(-1)^{\bar x\,\bar z}\rho_{(xz)y}$$

$$=2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\left(\rho_{(xy)z}-\rho_{x(yz)}-(-1)^{\bar y\,\bar z}\rho_{(xz)y}\right)=2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_{\tilde J(x,y,z)}.$$

3) $\left[D(x,y),D(z,w)\right]=\left[D(x,y),\left[\rho_z,\rho_w\right]+\rho_{wz}\right]$

$$=\left[D(x,y),\rho_z o\rho_w-(-1)^{\bar z\,\bar w}\rho_w o\rho_z+\rho_{wz}\right]$$

$$=\left[D(x,y),\rho_z o\rho_w\right]-(-1)^{\bar z\,\bar w}\left[D(x,y),\rho_w o\rho_z\right]+\left[D(x,y),\rho_{wz}\right]$$

$$=D(x,y)o\rho_z o\rho_w-(-1)^{(\bar x+\bar y)(\bar z+\bar w)}\rho_z o\rho_w oD(x,y)-(-1)^{\bar z\,\bar w}D(x,y)o\rho_w o\rho_z$$

$$+(-1)^{\bar z\,\bar w+(\bar x+\bar y)(\bar z+\bar w)}\rho_w o\rho_z oD(x,y)+\left[D(x,y),\rho_{wz}\right]$$

$$=\left[D(x,y),\rho_z\right]o\rho_w+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_z oD(x,y)o\rho_w+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_z o\left[D(x,y),\rho_w\right]$$

$$-(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_z oD(x,y)o\rho_w-(-1)^{\bar z\,\bar w}\left[D(x,y),\rho_w\right]o\rho_z-(-1)^{\bar z\,\bar w+\bar w(\bar x+\bar y)}\rho_w oD(x,y)o\rho_z$$

$$-(-1)^{\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}\rho_w o\left[D(x,y),\rho_z\right]+(-1)^{\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}\rho_w oD(x,y)o\rho_z+\left[D(x,y),\rho_{wz}\right]$$

$$=\rho_{[x,y,z]}o\rho_w+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_z o\rho_{[x,y,w]}-(-1)^{\bar z\,\bar w}\rho_{[x,y,w]}o\rho_z$$

$$-(-1)^{\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}\rho_w o\rho_{[x,y,z]}+\rho_{[x,y,wz]}$$

$$=\left[\rho_{[x,y,z]},\rho_w\right]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\left[\rho_z\ ,\ \rho_{[x,y,w]}\right]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\rho_{[x,y,w]z}+\rho_{w[x,y,z]}$$

$$=D([x,y,z],w)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D(z,[x,y,w]).$$

Soit A une superalgèbre

Soit $\rho : A \to End_K(V)$ une application K-linéaire Z_2-graduée et

$\phi : A(G) \to End_K(V\otimes G)$ une application K-linéaire.

X, Y, Z, T des éléments homogènes de A(G).

Posons $X = x\otimes g$, $Y = y\otimes g'$, $Z = z\otimes g''$, $T = t\otimes h$

Théorème II.2.9.

Posons $\phi_X(T) = (-1)^{\bar{x}\bar{t}}\rho_x(t)\otimes gh$

ϕ est une représentation de Lie de A(G) dans V⊗G si et seulement si

ρ est une super-représentation de Lie de A dans V.

En effet, si A(G) est une algèbre de Lie et ϕ une représentation de Lie de A(G) dans V⊗G, alors $\phi_{XY} = [\phi_X, \phi_Y] = \phi_X o\phi_Y - \phi_Y o\phi_X$

$$\phi_{XY}(T) = \phi_{(-1)^{\bar{x}\bar{y}}xy\otimes gg'}(t\otimes h) = (-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{xy}(t)\otimes gg'h$$

$$\begin{aligned}\phi_X o\phi_Y(T) - \phi_Y o\phi_X(T) &= \phi_X\left((-1)^{\bar{y}\bar{t}}\rho_y(t)\otimes g'h\right) - \phi_Y\left((-1)^{\bar{x}\bar{t}}\rho_x(t)\otimes gh\right)\\ &= (-1)^{\bar{y}\bar{t}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{t})}\rho_x o\rho_y(t)gg'h - (-1)^{\bar{x}\bar{t}+\bar{y}(\bar{x}+\bar{t})}\rho_y o\rho_x(t)\otimes g'gh\\ &= \left((-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_x o\rho_y(t) - (-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{x}\bar{y}}\right)\otimes gg'h\end{aligned}$$

d'où par identification nous avons

$$\rho_{xy}(t) = \rho_x o\rho_y(t) - (-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_y o\rho_x(t)$$

$\Rightarrow \rho_{xy} = \rho_x o\rho_y - (-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_y o\rho_x$ et ρ est une surper-représentation de Lie de A dans V.

Réciproquement si ρ est une super-représentation de Lie de A dans V alors

$\rho_{xy} = \rho_x o\rho_y - (-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_y o\rho_x$

alors

$$\phi_{XY}(T)=\phi_{(-1)^{\bar{x}\bar{y}}xy\otimes gg'}(t\otimes h)$$
$$=(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_{xy}(t)\otimes gg'h$$
$$=(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})}\left(\rho_x o\rho_y(t)-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho_y o\rho_x(t)\right)\otimes gg'h$$
$$=(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_x o\rho_y(t)\otimes gg'h-(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_y o\rho_x(t)\otimes g'gh$$
$$=(-1)^{\bar{t}\bar{y}}\phi_X\left(\rho_y(t)\otimes g'h\right)-(-1)^{\bar{t}\bar{x}}\phi_Y\left(\rho_x(t)\otimes gh\right)$$
$$=\phi_X o\phi_Y(T)-\phi_Y o\phi_X(T)=\left(\phi_X o\phi_Y-\phi_Y o\phi_X\right)(T)$$

d'où $\phi_{XY}=\phi_X o\phi_Y-\phi_Y o\phi_X$ et ϕ est une représentation de Lie de A(G) dans V⊗G.

<u>Théorème II.2.10.</u>

Posons $\phi_X(T)=(-1)^{\bar{x}\bar{t}}\rho_x(t)\otimes hg$

ϕ est une représentation de Malcèv de A(G) dans V⊗G si et seulement si ρ est une super-représentation de Malcèv de A dans V.

En effet, si A(G) est une algèbre de Malcèv et ϕ une représentation de Malcèv de A(G) dans V⊗G alors ϕ vérifie la relation

$$\phi_{(XY)Z}=\left[\phi_Z,\phi_Y o\phi_X\right]+\phi_{ZX}o\phi_Y-\phi_X o\phi_{YZ}$$
$$=\phi_Z o\phi_Y o\phi_X-\phi_Y o\phi_X o\phi_Z+\phi_{ZX}o\phi_Y-\phi_X o\phi_{YZ}$$
$$\phi_{(XY)Z}(T)=\phi_{(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(xy)z\otimes gg'g''}(t\otimes h)$$
$$=(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}\rho_{(xy)z}(t)\otimes hgg'g''$$

$$\phi_Z o\phi_y o\phi_X(T)-\phi_Y o\phi_X o\phi_Z(T)+\phi_{ZX}o\phi_Y(T)-\phi_X o\phi_{YZ}(T)=$$
$$=(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}\Big((-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_z o\rho_y o\rho_x(t)\otimes hgg'g''-(-1)^{\bar{x}\bar{z}+\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_y o\rho_x o\rho_z(t)\otimes hg''gg'$$
$$+(-1)^{\bar{x}\bar{z}+\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\rho_{zx}o\rho_y(t)\otimes hg'g''g-(-1)^{\bar{y}\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\rho_x o\rho_{yz}(t)\otimes hg'g''g\Big)$$
$$=(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_z o\rho_y o\rho_x(t)\otimes hgg'g''-(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+\bar{x}\bar{y}}\rho_y o\rho_x o\rho_z(t)\otimes hgg'g''$$
$$+(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+\bar{y}\bar{z}}\rho_{zx}o\rho_y(t)\otimes hgg'g''-(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+\bar{y}\bar{z}}\rho_x o\rho_{yz}(t)\otimes hgg'g''$$

d'où par identification on a :

$$\rho_{(xy)z} = \rho_z o \rho_y o \rho_x - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_y o \rho_x o \rho_z + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_{zx} o \rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_x o \rho_{yz}$$

$$= \left[\rho_z, \rho_y o \rho_x\right] + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_{zx} o \rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_x o \rho_{yz}$$

et ρ est une super-représentation de Malcèv de A dans V.

Réciproquement, si ρ est une super-représentation de Malcèv de A dans V alors

$$\rho_{(xy)z} = \rho_z o \rho_y o \rho_x - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_y o \rho_x \rho_z + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_{zx} o \rho_y - (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_x o \rho_{yz}$$

$$\phi_{(XY)Z}(T) = \phi_{(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(xy)z\otimes gg'g''}(t\otimes h) = (-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})} \rho_{(xy)z}(t)\otimes hgg'g''$$

$$= (-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}\Big(\rho_z o \rho_y o \rho_x(t) - (-1)^{z(x+y)} \rho_y o \rho_x o \rho_z(t) + (-1)^{x(y+z)} \rho_{zx} o \rho_y(t)$$

$$-(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} \rho_x o \rho_{yz}(t)\Big) \otimes hgg'g''$$

$$= (-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})} \rho_z o \rho_y o \rho_x(t)\otimes hgg'g'' - (-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})} \rho_y o \rho_x o \rho_z(t)\otimes hgg'g''$$

$$+(-1)^{\bar{y}\bar{z}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})} \rho_{zx} o \rho_y(t)\otimes hgg'g'' - (-1)^{\bar{y}\bar{z}+\bar{t}(x+y+z)} \rho_x o \rho_{yz}(t)\otimes hgg'g''$$

$$= (-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+\bar{x}\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\Big(\rho_z o \rho_y o \rho_x(t)\otimes hgg'g'' - \rho_y o \rho_x o \rho_z(t)\otimes hg''gg'$$

$$+\rho_{zx} o \rho_y(t)\otimes hg'g''g - \rho_x o \rho_{yz}(t)\otimes hg'g''g\Big)$$

$$= (-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} \phi_Z\Big(\rho_y o \rho_x(t)\otimes hgg'\Big) - (-1)^{\bar{x}\bar{z}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{z})} \phi_Y\Big(\rho_x o \rho_z(t)\otimes hg''g\Big)$$

$$+ (-1)^{\bar{y}\bar{t}} \phi_{ZX}\Big(\rho_y(t)\otimes hg'\Big) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}+\bar{t}(\bar{y}+\bar{z})} \phi_X\Big(\rho_{yz}(t)\otimes hg'g''\Big)$$

$$= (-1)^{\bar{x}\bar{t}} \phi_Z o \phi_Y\Big(\rho_x(t)\otimes hg\Big) - (-1)^{\bar{z}\bar{t}} \phi_Y o \phi_X\Big(\rho_z(t)\otimes hg''\Big) + \phi_{ZX} o \phi_Y(T) - \phi_X o \phi_{YZ}(T)$$

$$= \phi_Z o \phi_Y o \phi_X(T) - \phi_Y o \phi_X o \phi_Z(T) + \phi_{ZX} o \phi_Y(T) - \phi_X o \phi_{YZ}(T)$$

Ce qui nous donne

$$\phi_{(XY)Z} = \left[\phi_Z, \phi_Y o \phi_X\right] + \phi_{ZX} o \phi_Y - \phi_X o \phi_{YZ}$$

et ϕ est une représentation de Malcèv de A(G) dans V⊗G.

Théorème II.2.11.

Posons $\phi_X(T) = -(-1)^{\bar{x}\bar{t}} \rho_x(t) \otimes hg$

ϕ est une représentation faible de A(G) dans V⊗G si et seulement si ρ est super-représentation faible de A dans V.

En effet, si A(G) est une algèbre de Malcèv et ϕ une représentation faible de A(G) dans V⊗G alors

$$[D(X,Y),\phi_Z] = \phi_{[X\,Y\,Z]}$$

$$[X\,Y\,Z] = [x,y,z] \otimes gg'g''$$

$$\begin{aligned} D(X,Y)(T) &= \phi_X o \phi_Y(T) - \phi_Y o \phi_X(T) + \phi_{XY}(T) \\ &= (-1)^{\bar{y}\bar{t}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{t})} \rho_x o \rho_y(t) \otimes hg'g - (-1)^{\bar{x}\bar{t}+\bar{y}(\bar{x}+\bar{t})} \rho_y o \rho_x(t) \otimes hgg' \\ &\quad -(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_{xy}(t) \otimes hgg' \\ &= (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{x}\,\bar{y}} \rho_x o \rho_y(t) \otimes hgg' - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_y o \rho_x(t) \otimes hgg' \\ &\quad + (-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_{yx}(t) \otimes hgg' \\ &= (-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} \left(\rho_x o \rho_y(t) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} \rho_y o \rho_x(t) + \rho_{yx}(t) \right) \otimes hgg' \\ &= (-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} D(x,y)(t) \otimes hgg' \end{aligned}$$

d'où

$$\phi_{[X\,Y\,Z]}(T) = \phi_{[x,y,z]\otimes gg'g''}(t \otimes h) = -(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})} \rho_{[x,y,z]}(t) \otimes hgg'g''$$

$$[D(X,Y),\phi_Z](T) = D(X,Y) o \phi_Z(T) - \phi_Z o D(X,Y)(T)$$

$$\begin{aligned} &= D(X,Y)\left(-(-1)^{\bar{z}\bar{t}} \rho_z(t) \otimes hg''\right) - \phi_Z\left((-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})} D(x,y)(t) \otimes hgg'\right) \\ &= -(-1)^{\bar{z}\bar{t}+(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{t})} D(x,y) o \rho_z(t) \otimes hg''gg' \\ &\quad + (-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{t})} \rho_z o D(x,y)(t) \otimes hgg'g'' \\ &= -(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})} \left(D(x,y) o \rho_z(t) - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} \rho_z o D(x,y)(t) \right) \otimes hgg'g'' \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\rho_{[x,y,z]} = D(x,y)o\rho_z - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_z o D(x,y) = [D(x,y),\rho_z]$$

et ρ est une super-représentation faible de A dans V.

Réciproquement, si ρ est une super-représentation faible de A dans V alors

$$[D(x,y),\rho_z] = \rho_{[x,y,z]}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{[X\,Y\,Z]}(T) &= \phi_{[x,y,z]\otimes gg'g''}(t\otimes h)\\
&= -(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}\rho_{[x,y,z]}(t)\otimes hgg'g''\\
&= -(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}[D(x,y),\rho_z](t)\otimes hgg'g''\\
&= -(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}D(x,y)o\rho_z(t)\otimes hgg'g''+(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_z oD(x,y)(t)\otimes hgg'g''\\
&= -(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D(x,y)o\rho(t)\otimes hg''gg'+(-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho_z oD(x,y)(t)\otimes hgg'g''\\
&= -(-1)^{\bar{z}\bar{t}}D(X,Y)(\rho_z(t)\otimes hg'') - (-1)^{\bar{t}(\bar{x}+\bar{y})}\phi_Z(D(x,y)(t)\otimes hgg')\\
&= D(X,Y)o\phi_Z(T) - \phi_Z oD(X,Y)(T)
\end{aligned}$$

d'où $\phi_{[X\,Y\,Z]} = [D(X,Y),\phi_Z]$ et ϕ est une représentation faible de l'algèbre de Malcèv A(G) dans V⊗G.

<u>Remarque II.2.12</u>

On aboutit aux mêmes résultats en définissant ϕ de la façon suivante :

Théorème II.2.9	:	$\phi_X(T) = \rho_x(t)\otimes hg$
Théorème II.2.10	:	$\phi_X(T) = \rho_x(t)\otimes gh$
Théorème II.2.11	:	$\phi_X(T) = -\rho_x(t)\otimes gh$

II.3. COHOMOLOGIE ASSOCIEE A LA SUPER-REPRESENTATION FAIBLE D'UNE SUPERALGEBRE DE MALCEV

Dans ce paragraphe, nous définissons les groupes de cohomologie liés à la super-représentation faible d'une superalgèbre de Malcèv. Pour cela, nous définissons l'opérateur cobord δ.

Soit ρ une super-représentation faible de M dans V.

Soit f une application (2p-1)-linéaire de M dans V telle que

$f\left(x_1,\ldots,x_{2k-1},x_{2k},\ldots,x_{2p-1}\right)=0$ dès que $x_{2k-1} = x_{2k}$

Désignons par $C^{2p-1}(M,V)$ l'ensemble de telles applications.

Posons $C^0(M,V) = V$

Posons $\delta_0 : V \to C^1(M,V)$

$$v \mapsto \delta_0(v) : x \mapsto -(-1)^{\bar{x}\,\bar{v}}\rho_x(v), v \in V_0 \cup V_1, x \in M_0 \cup M_1$$

Définissons $\delta_{2p-1} : C^{2p-1}(M,V) \to C^{2p+1}(M,V)$ une application linéaire Z_2-graduée i.e. $\bar{\delta}_{2p-1} = 0$ par

$$\begin{aligned}
&\left(\delta_{2p-1}f\right)\left(x_1,\ldots,x_{2p+1}\right) = \\
&= (-1)^{p+\bar{x}_{2p+1}\left(\bar{x}_1+..+\bar{x}_{2p}+\bar{f}\right)}\rho_{x_{2p+1}}\Big[(-1)^{\bar{x}_{2p-1}\left(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_{2p-2}+\bar{f}\right)}\rho_{x_{2p-1}}\left(f\left(x_1,\ldots,x_{2p-2},x_{2p}\right)\right) \\
&-(1)^{\bar{x}_{2p}\left(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_{2p-1}+\bar{f}\right)}\rho_{x_{2p}}\left(f\left(x_1,\ldots,x_{2p-1}\right)\right)+f\left(x_1,\ldots,x_{2p-2},x_{2p}x_{2p-1}\right)\Big] \\
&+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1+\left(\bar{x}_{2k-1}+\bar{x}_{2k}\right)\left(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_{2k-2}+\bar{f}\right)}D\left(x_{2k-1},x_{2k}\right)\left(f\left(x_1,\ldots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\ldots,x_{2p+1}\right)\right) \\
&+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=2k+1}^{2p+1}(-1)^{k+\left(\bar{x}_{2k-1}+\bar{x}_{2k}\right)\left(\bar{x}_{2k+1}+\ldots+\bar{x}_{j-1}\right)}f\left(x_1,\ldots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\ldots,\left[x_{2k-1},x_{2k},x_j\right],\ldots,x_{2p+1}\right)
\end{aligned}$$

où le symbole "$\wedge$" sur un élément indique que cet élément doit être omis.

Nous commençons par démontrer quelques lemmes importants pour la suite. Pour cela définissons les deux applications suivantes :

$\kappa(x,y):C^{2p-1}(M,V)\to C^{2p-1}(M,V)$ $\forall p\geq 1$ par

$$(\kappa(x,y)f)(x_1,\ldots,x_{2p-1})=D(x,y)(f(x_1,\ldots,x_{2p-1}))$$
$$-\sum_{j=1}^{2p-1}(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_{j-1}+\bar{f})}f(x_1,\ldots,[x,y,x_j],\ldots,x_{2p-1}),$$

$x,y\in M_0\cup M_1$. $\kappa(x,y)$ est une application K- linéaire et $\overline{\kappa(x,y)}=\bar{x}+\bar{y}$;

$\iota(x,y):C^{2p-1}(M,V)\to C^{2p-3}(M,V), \forall p>1$ par

$$(\iota(x,y)f)(x_1,\ldots,x_{2p-3})=(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}f(x,y,x_1,\ldots,x_{2p-3}),$$

$x,y\in M_0\cup M_1$. $\iota(x,y)$ est une application K-linéaire et $\overline{\iota(x,y)}=\bar{x}+\bar{y}$. De plus $\iota(x,y)$ est une injection $\forall$ $x,y\in M_0\cup M_1$.

<u>Lemme II.3.1.</u>

$\forall p>1,\ \delta_{2p-3}\circ\iota(x,y)+\iota(x,y)\circ\delta_{2p-1}=\kappa(x,y)$.

En effet, soit $f\in C^{2p-1}(M,V)$ où $p>1$;

$$C^{2p-1}(M,V)\xrightarrow{\iota(x,y)}C^{2p-3}(M,V)\xrightarrow{\delta_{2p-3}}C^{2p-1}(M,V)$$
$$C^{2p-1}(M,V)\xrightarrow{\delta_{2p-1}}C^{2p+1}(M,V)\xrightarrow{\iota(x,y)}C^{2p-1}(M,V)$$

$$(\delta_{2p-3}\circ\iota(x,y)f)(x_1,\ldots,x_{2p-1})=(\delta_{2p-3}(\iota(x,y)f))(x_1,\ldots,x_{2p-1})=$$
$$=(-1)^{p-1+\alpha_1}\rho_{x_{2p-1}}\Big[(-1)^{\bar{x}_{2p-3}(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_{2p-4}+\overline{\iota(x,y)f})}\rho_{x_{2p-3}}((\iota(x,y)f)(x_1,\ldots,x_{2p-4},x_{2p-2}))$$
$$-(-1)^{\bar{x}_{2p-2}(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_{2p-3}+\overline{\iota(x,y)f})}\rho_{x_{2p-2}}((i(x,y)f)(x_1,\ldots,x_{2p-3}))$$
$$+(\iota(x,y)f)(x_1,\ldots,x_{2p-4},x_{2p-2}x_{2p-3})\Big]$$

$$+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1+\alpha_2} D\left(x_{2k-1},x_{2k}\right)\left(\left(\iota(x,y)f\right)\left(x_1,\ldots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\ldots,x_{2p-1}\right)\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=2k+1}^{2p-1}(-1)^{k+\alpha_3}\left(\iota(x,y)f\right)\left(x_1,\ldots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\ldots,\left[x_{2k-1},x_{2k},x_j\right],\ldots,x_{2p-1}\right)$$

où

$$\alpha_1=\overline{x}_{2p-1}\left(\overline{x}_1+\ldots+\overline{x}_{2p-2}+\overline{\iota(x,y)f}\right)$$
$$\alpha_2=\left(\overline{x}_{2k-1}+\overline{x}_{2k}\right)\left(\overline{x}_1+\ldots+\overline{x}_{2k-2}+\overline{\iota(x,y)f}\right)$$
$$\alpha_3=\left(\overline{x}_{2k-1}+\overline{x}_{2k}\right)\left(\overline{x}_{2k+1}+\ldots+\overline{x}_{j-1}\right)$$

$$\left(\delta_{2p-3}o\iota(x,y)f\right)\left(x_1,\ldots,x_{2p-1}\right)=$$
$$=(-1)^{p-1+\alpha_1+(\overline{x}+\overline{y})\overline{f}}\rho_{x_{2p-1}}\left[(-1)^{\overline{x}_{2p-3}\left(\overline{x}_1+\ldots+\overline{x}_{2p-4}+\overline{x}+\overline{y}+\overline{f}\right)}\rho_{x_{2p-3}}\left(f\left(x,y,x_1,\ldots,x_{2p-4},x_{2p-2}\right)\right)\right.$$
$$-(-1)^{\overline{x}_{2p-2}\left(\overline{x}_1+\ldots+\overline{x}_{2p-3}+\overline{x}+\overline{y}+\overline{f}\right)}\rho_{x_{2p-2}}\left(f\left(x,y,x_1,\ldots,x_{2p-3}\right)\right)$$
$$\left.+f\left(x,y,x_1,\ldots,x_{2p-4},x_{2p-2}x_{2p-3}\right)\right]$$
$$+(-1)^{(\overline{x}+\overline{y})\overline{f}}\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1+\alpha_2}D\left(x_{2k-1},x_{2k}\right)\left(f\left(x,y,x_1,\ldots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\ldots x_{2p-1}\right)\right)$$
$$+(-1)^{(\overline{x}+\overline{y})\overline{f}}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=2k+1}^{2p-1}(-1)^{k+\alpha_3}f\left(x,y,x_1,\ldots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\ldots,\left[x_{2k-1},x_{2k},x_j\right],\ldots,x_{2p-1}\right)$$

$$\left(\iota(x,y)\delta_{2p-1}f\right)\left(x_1,\ldots x_{2p-1}\right)=(-1)^{(\overline{x}+\overline{y})\overline{\delta_{2p-1}f}}\left(\delta_{2p-1}f\right)\left(x,y,x_1,\ldots,x_{2p-1}\right)$$
$$=(-1)^{(\overline{x}+\overline{y})\overline{f}}\left(\delta_{2p-1}f\right)\left(x,y,x_1,\ldots,x_{2p-1}\right).$$

Posons $x=y_1$, $y=y_2$, $x_i=y_{i+2}$, $i=1,\ldots,2p-1$

$$\Rightarrow\left(\iota(x,y)\delta_{2p-1}f\right)\left(x_1,\ldots,x_{2p-1}\right)=(-1)^{(\overline{x}+\overline{y})\overline{f}}\left(\delta_{2p-1}f\right)\left(y_1,y_2,\ldots,y_{2p+1}\right)$$
$$=(-1)^{p+\beta_1+(\overline{x}+\overline{y})\overline{f}}\rho_{y_{2p+1}}\left[(-1)^{\overline{y}_{2p-1}\left(\overline{y}_1+\ldots+\overline{y}_{2p-2}+\overline{f}\right)}\rho_{y_{2p-1}}\left(f\left(y_1,\ldots,y_{2p-2},y_{2p}\right)\right)\right.$$

$$-(-1)^{\bar{y}_{2p}\left(\bar{y}_1+\ldots+\bar{y}_{2p-1}+\bar{f}\right)}\rho_{y_{2p}}\left(f\left(y_1,\ldots,y_{2p-1}\right)\right)+f\left(y_1,\ldots,y_{2p-2},y_{2p}y_{2p-1}\right)\Big]$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}+(\bar{y}_1+\bar{y}_2)\bar{f}}D\left(y_1,y_2\right)\left(f\left(y_3,\ldots,y_{2p+1}\right)\right)$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\sum_{k=2}^{p}(-1)^{k+1+\beta_2}D\left(y_{2k-1},y_{2k}\right)\left(f\left(y_1,\ldots\hat{y}_{2k-1},\hat{y}_{2k},\ldots,y_{2p+1}\right)\right)$$

$$-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\sum_{j=3}^{2p+1}(-1)^{(\bar{y}_1+\bar{y}_2)(\bar{y}_3+\ldots+\bar{y}_{j-1})}f\left(y_3,\ldots,\left[y_1,y_2,y_j\right],\ldots,y_{2p+1}\right)$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\sum_{k=2}^{p}\sum_{j=2k+1}^{2p+1}(-1)^{k+\beta_3}f\left(y_1,\ldots,\hat{y}_{2k-1},\hat{y}_{2k},\ldots,\left[y_{2k-1},y_{2k},y_j\right],\ldots,y_{2p+1}\right)$$

où

$$\beta_1=\bar{y}_{2p+1}\left(\bar{y}_1+\ldots+\bar{y}_{2p}+\bar{f}\right)$$
$$\beta_2=\left(\bar{y}_{2k-1}+\bar{y}_{2k}\right)\left(\bar{y}_1+\ldots+\bar{y}_{2k-2}+\bar{f}\right)$$
$$\beta_3=\left(\bar{y}_{2k-1}+\bar{y}_{2k}\right)\left(\bar{y}_{2k+1}+\ldots+\bar{y}_{j-1}\right)$$

Posons $k'=k-1 \Rightarrow k=k'+1$

$j'=j-2 \Rightarrow j=j'+2$

$$\Rightarrow\left(\iota(x,y)\delta_{2p-1}f\right)\left(x_1,\ldots,x_{2p-1}\right)=$$

$$=(-1)^{p+\beta_1+(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\rho_{y_{2p+1}}\left[(-1)^{\bar{y}_{2p-1}\left(\bar{y}_1+\ldots+\bar{y}_{2p-2}+\bar{f}\right)}\rho_{y_{2p-1}}\left(f\left(y_1,\ldots,y_{2p-2},y_{2p}\right)\right)\right.$$

$$\left.-(-1)^{\bar{y}_{2p}\left(\bar{y}_1+\ldots+\bar{y}_{2p-1}+\bar{f}\right)}\rho_{y_{2p}}\left(f\left(y_1,\ldots,y_{2p-1}\right)\right)+f\left(y_1,\ldots,y_{2p-2},y_{2p}y_{2p-1}\right)\right]$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}+(\bar{y}_1+\bar{y}_2)\bar{f}}D\left(y_1,y_2\right)\left(f\left(y_3,\ldots,y_{2p+1}\right)\right)$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\sum_{k'=1}^{p-1}(-1)^{k'+\beta_4}D\left(y_{2k'+1},y_{2k'+2}\right)\left(f\left(y_1,\ldots,\hat{y}_{2k'+1},\hat{y}_{2k'+2},\ldots,y_{2p+1}\right)\right)$$

$$-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\sum_{j'=1}^{2p-1}(-1)^{(\bar{y}_1+\bar{y}_2)(\bar{y}_3+\ldots+\bar{y}_{j'+1})}f\left(y_3,\ldots,\left[y_1,y_2,y_{j'+2}\right],\ldots,y_{2p+1}\right)$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\sum_{k'=1}^{p-1}\sum_{j'=2k'+1}^{2p-1}(-1)^{k'+1+\beta_5}f\left(y_1,\ldots,\hat{y}_{2k'+1},\hat{y}_{2k'+2},\ldots,\left[y_{2k'+1},y_{2k'+2},y_{j'+1}\right],\ldots,y_{2p+1}\right)$$

$$\beta_4=\left(\bar{y}_{2k'+1}+\bar{y}_{2k'+2}\right)\left(\bar{y}_1+\ldots+\bar{y}_{2k'}+\bar{f}\right)$$

$$\beta_5=\left(\bar{y}_{2k'+1}+\bar{y}_{2k'+2}\right)\left(\bar{y}_{2k'+3}+\ldots+\bar{y}_{j'+1}\right)$$

$$\big(\iota(x,y)\delta_{2p-1}f\big)(x_1,\dots,x_{2p-1}) =$$

$$= (-1)^{p+\alpha_1+(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\rho_{x_{2p-1}}\Big[(-1)^{\bar{x}_{2p-3}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_1+\dots+\bar{x}_{2p-4}+\bar{f})}\rho_{x_{2p-3}}\big(f(x,y,x_1,\dots,x_{2p-4},x_{2p-2})\big)$$

$$-(-1)^{\bar{x}_{2p-2}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_1+\dots+\bar{x}_{2p-3}+\bar{f})}\rho_{x_{2p-2}}\big(f(x,y,x_1,\dots,x_{2p-3})\big)+f(x,y,x_1,\dots,x_{2p-2}x_{2p-3})\Big]$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}+(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}D(x,y)\big(f(x_1,\dots x_{2p-1})\big)$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+\alpha_2}D(x_{2k-1},x_{2k})\big(f(x,y,x_1,\dots\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\dots,x_{2p-1})\big)$$

$$-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\sum_{j=1}^{2p-1}(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\dots+\bar{x}_{j-1})}f(x_1,\dots,[x,y,x_j],\dots,x_{2p-1})$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=2k+1}^{2p-1}(-1)^{k+1+\alpha_3}f(x,y,x_1,\dots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\dots,[x_{2k-1},x_{2k},x_j],\dots,x_{2p-1})$$

d'où

$$\big(\delta_{2p-3}o\iota(x,y)f\big)(x_1,\dots,x_{2p-1})+\big(\iota(x,y)(\delta_{2p-1}f)\big)(x_1,\dots,x_{2p-1}) =$$

$$= D(x,y)\big(f(x_1,\dots,x_{2p-1})\big)-\sum_{j=1}^{2p-1}(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\dots+\bar{x}_{j-1}+\bar{f})}f(x_1,\dots,[x,y,x_j],\dots,x_{2p-1})$$

$$= \big(\kappa(x,y)f\big)(x_1,\dots,x_{2p-1})$$

et par suite $\quad \delta_{2p-3}o\iota(x,y)f+\iota(x,y)o\delta_{2p-1}f=\kappa(x,y)f$

et $\quad \delta_{2p-3}o\iota(x,y)+\iota(x,y)o\delta_{2p-1}=\kappa(x,y)$.

Lemme II.3.2.

$$\forall p>1,\quad [\kappa(x,y),\iota(z,w)]=\iota([x,y,z];w)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\iota(z;[x,y,w]).$$

En effet $[\kappa(x,y),\iota(z,w)]=\kappa(x,y)o\iota(z,w)-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\iota(z,w)o\kappa(x,y)$

$$C^{2p-1}(M,V)\xrightarrow{\iota(z,w)}C^{2p-3}(M,V)\xrightarrow{\kappa(x,y)}C^{2p-3}(M,V)$$

$$C^{2p-1}(M,V)\xrightarrow{\kappa(x,y)}C^{2p-1}(M,V)\xrightarrow{\iota(z,w)}C^{2p-3}(M,V)$$

$$\big(\kappa(x,y)(\iota(z,w)f)\big)(x_1,\dots,x_{2p-3}) = D(x,y)\Big(\big(\iota(z,w)f\big)(x_1,\dots,x_{2p-3})\Big)$$
$$-\sum_{j=1}^{2p-3}(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\dots+\bar{x}_{j-1}+\overline{\iota(z,w)f})}\big(\iota(z,w)f\big)\big(x_1,\dots,[x,y,x_j],\dots,x_{2p-3}\big)$$
$$=(-1)^{(\bar{z}+\bar{w})\bar{f}}D(x,y)\Big(f\big(z,w,x_1,\dots,x_{2p-3}\big)\Big)$$
$$-(-1)^{(\bar{z}+\bar{w})\bar{f}}\sum_{j=1}^{2p-3}(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\dots+\bar{x}_{j-1}+\bar{z}+\bar{w}+\bar{f})}f\big(z,w,x_1,\dots[x,y,x_j],\dots,x_{2p-3}\big)$$

$$(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\big(\iota(z,w)(\kappa(x,y)f)\big)(x_1,\dots,x_{2p-3}) =$$
$$=(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})+(\bar{z}+\bar{w})\overline{\kappa(x,y)f}}\big(\kappa(x,y)f\big)\big(z,w,x_1,\dots,x_{2p-3}\big)$$
$$=(-1)^{(\bar{z}+\bar{w})\bar{f}}D(x,y)\Big(f\big(z,w,x_1,\dots,x_{2p-3}\big)\Big)-(-1)^{(\bar{z}+\bar{w})\bar{f}+(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}f\big([x,y,z],w,x_1,\dots,x_{2p-3}\big)$$
$$-(-1)^{(\bar{z}+\bar{w})\bar{f}+(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{f})}f\big(z,[x,y,w],x_1,\dots,x_{2p-3}\big)$$
$$-(-1)^{(\bar{z}+\bar{w})\bar{f}}\sum_{j=1}^{2p-3}(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w}+\bar{x}_1+\dots+\bar{x}_{j-1}+\bar{f})}f\big(z,w,x_1,\dots,[x,y,x_j],\dots,x_{2p-3}\big)$$

d'où

$$\big([\kappa(x,y),\iota(z,w)]f\big)(x_1,\dots,x_{2p-3})=(-1)^{(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})\bar{f}}f\big([x,y,z],w,x_1,\dots,x_{2p-3}\big)$$
$$+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})\bar{f}}f\big(z,[x,y,w],x_1,\dots,x_{2p-3}\big)$$
$$=\big(\iota([x,y,z];w)f\big)(x_1,\dots,x_{2p-3})+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\big(\iota(z;[x,y,w])f\big)(x_1,\dots,x_{2p-3})$$

Par suite $\quad [\kappa(x,y),\iota(z,w)]=\iota([x,y,z];w)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\iota(z;[x,y,w]).$

<u>Lemme II.3.3.</u>

$$\forall p\geq 1,\quad [\kappa(x,y),\kappa(z,w)]=\kappa([x,y,z];w)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\kappa(z;[x,y,w]).$$

En effet : supposons $p = 1$ et $f\in C^1$ (M,V) alors

$$\big(\kappa(x,y)(\kappa(z,w)f)\big)(x_1)=D(x,y)\big((\kappa(z,w)f)(x_1)\big)-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\overline{K(z,w)f}}\big(\kappa(z,w)f\big)([x,y,x_1])$$

$$= D(x,y)oD(z,w)(f(x_1)) - (-1)^{(\bar z+\bar w)\bar f} D(x,y)(f([z,w,x_1])) - (-1)^{(\bar x+\bar y)(\bar z+\bar w+\bar f)} D(z,w)(f([x,y,x_1])$$
$$+(-1)^{(\bar x+\bar y)(\bar z+\bar w+\bar f)+(\bar z+\bar w)\bar f} f([z,w,[x,y,x_1]])$$

De même

$$(\kappa(z,w)(\kappa(x,y)f))(x_1) = D(z,w)oD(x,y)(f(x_1)) - (-1)^{(\bar x+\bar y)\bar f} D(z,w)(f([x,y,x_1]))$$
$$-(-1)^{(\bar z+\bar w)(\bar x+\bar y+\bar f)} D(x,y)(f([z,w,x_1])) + (-1)^{(\bar z+\bar w)(\bar x+\bar y+\bar f)+(\bar x+\bar y)\bar f} f([x,y,[z,w,x_1]])$$

d'où

$$([\kappa(x,y),\kappa(z,w)]f)(x_1) = [D(x,y),D(z,w)](f(x_1)) +$$
$$+(-1)^{(\bar x+\bar y)(\bar z+\bar w+\bar f)+(\bar z+\bar w)\bar f} f([z,w,[x,y,x_1]]) - (-1)^{\bar f(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)} f([x,y,[z,w,x_1]])$$

or nous savons d'après la proposition II.1.3 que

$$-[x,y,[z,w,x_1]] + (-1)^{(\bar x+\bar y)(\bar z+\bar w)}[z,w,[x,y,x_1]] = -[[x,y,z],w,x_1]$$
$$-(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}[z,[x,y,w],x_1]$$

et d'après la proposition II.2.8. $[D(x,y),D(z,w)] = D([x,y,z],w) + (-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)} D(z,[x,y,w])$

alors

$$([\kappa(x,y),\kappa(z,w)]f)(x_1) =$$
$$= D([x,y,z],w)(f(x_1)) + (-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)} D(z,[x,y,w])(f(x_1))$$
$$-(-1)^{\bar f(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)} f([[x,y,z],w,x_1]) - (-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)+\bar f(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)} f([z,w,[x,y,x_1]])$$
$$= (\kappa([x,y,z],w)f)(x_1) + (-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}(\kappa(z,[x,y,w])f)(x_1)$$

par suite pour $p = 1$, $[\kappa(x,y),\kappa(z,w)] = \kappa([x,y,z],w) + (-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\kappa(z,[x,y,w])$.

Supposons la relation vraie pour toute application $f \in C^{2p-1}(M,V)$

et prenons f dans $C^{2p+1}(M,V)$ alors $\forall$ u, v$\in M_0 \cup M_1$ on a

$$\iota(u,v)o[\kappa(x,y),\kappa(z,w)] = \iota(u,v)o\kappa(x,y)o\kappa(z,w) - (-1)^{(\bar x+\bar y)(\bar z+\bar w)}\iota(u,v)o\kappa(z,w)o\kappa(x,y);$$

Utilisons le lemme II.3.2., nous avons alors

$$\iota(u,v)o[\kappa(x,y),\kappa(z,w)] =$$

$$= (-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}\Big(\kappa(x,y)o\iota(u,v)o\kappa(z,w) - \iota([x,y,u];v)o\kappa(z,w) - (-1)^{\bar{u}(\bar{x}+\bar{y})}\iota(u;[x,y,v])o\kappa(z,w)\Big)$$
$$-(1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})+(\bar{z}+\bar{w})(\bar{u}+\bar{v})}\Big(\kappa(z,w)oi(u,v)o\kappa(x,y) - \iota([z,w,u];v)o\kappa(x,y)$$
$$-(-1)^{\bar{u}(\bar{z}+\bar{w})}\iota(u;[z,w,v])o\kappa(x,y)\Big)$$

$$= (-1)^{(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})(\bar{u}+\bar{v})}\Big(\kappa(x,y)o\kappa(z,w)o\iota(u,v) - \kappa(x,y)o\iota([z,w,u]);v)$$
$$-(-1)^{\bar{u}(\bar{z}+\bar{w})}\kappa(x,y)o\iota(u;[z,w,v])\Big)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})+(\bar{z}+\bar{w})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}\Big(\kappa(z,w)o\iota([x,y,u];v) - \iota([z,w,[x,y,u]];v)$$
$$-(-1)^{(\bar{z}+\bar{w})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u})}\iota([x,y,u];[z,w,v])\Big)$$
$$-(-1)^{\bar{v}(\bar{x}+\bar{y})+(\bar{z}+\bar{w})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}\Big(\kappa(z,w)o\iota(u;[x,y,v]) - \iota([z,w,u];[x,y,v])$$
$$-(-1)^{\bar{u}(\bar{z}+\bar{w})}\iota(u;[z,w,[x,y,v]])\Big)$$
$$-(-1)^{(\bar{z}+\bar{w})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})+(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}\Big(\kappa(z,w)o\kappa(x,y)o\iota(u,v) - \kappa(z,w)o\iota([x,y,u];v)$$
$$-(-1)^{\bar{u}(\bar{x}+\bar{y})}\kappa(z,w)o\iota(u;[x,y,v])\Big)$$
$$+(-1)^{(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})}\Big(\kappa(x,y)o\iota([z,w,u];v) - \iota([x,y,[z,w,u]];v)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w}+\bar{u})}\iota([z,w,u];[x,y,v])\Big)$$
$$+(-1)^{\bar{v}(\bar{z}+\bar{w})+(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}\Big(\kappa(x,y)o\iota(u;[z,w,v]) - \iota([x,y,u];[z,w,v])$$
$$-(-1)^{\bar{u}(\bar{x}+\bar{y})}\iota(u;[x,y,[z,w,v]])\Big)$$

$$= (-1)^{(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})}[\kappa(x,y),\kappa(z,w)]o\iota(u,v) + (-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})+(\bar{z}+\bar{w})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}\iota([z,w,[x,y,u]];v)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{v}+\bar{z}+\bar{w})+\bar{v}(\bar{z}+\bar{w})}\iota(u;[z,w,[x,y,v]]) - (-1)^{(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})}\iota([x,y,[z,w,u]];v)$$
$$-(-1)^{\bar{v}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})}\iota(u;[x,y,[z,w,v]])$$

d'autre part,

$$\iota(u,v)o\kappa([x,y,z];w) + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\iota(u,v)o\kappa(z;[x,y,w]) =$$

$$= (-1)^{(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})}\Big(\kappa([x,y,z];w)o\iota(u,v) - \iota([[x,y,z],w,u];v) - (-1)^{\bar{u}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{w})}\iota(u;[[x,y,z],w,v])\Big)$$

$$+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)+(\bar u+\bar v)(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)}\left(\kappa(z;[x,y,w])o\iota(u,v)-\iota([z,[x,y,w],u]\ ;v)\right)$$
$$-(-1)^{\bar u(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)}\iota(u;[z,[x,y,z,w],v])$$
$$=(-1)^{(\bar u+\bar v)(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)}\left(\kappa([x,y,z];w)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\kappa(z;[x,y,w])\right)o\iota(u,v)$$
$$-(-1)^{\bar v(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)}\iota(u;[[x,y,z],w,v])$$
$$-(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)+\bar v(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)}\iota(u;[z,[x,y,w],v])-(-1)^{(\bar u+\bar v)(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)}\iota([[x,y,z],w,u,];v)$$
$$-(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)+(\bar u+\bar v)(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)}\iota([z,[x,y,w],u];v)$$

en utilisant la proposition II.1.3 on sait que

$$[[x,y,z]w,v]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}[z,[x,y,w],v]=[x,y,[z,w,v]]-(-1)^{(\bar z+\bar w)(\bar x+\bar y)}[z,w,[x,y,v]]$$
$$[[x,y,z],w,u]+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}[z,[x,y,w],u]=[x,y,[z,w,u]]-(-1)^{(\bar z+\bar w)(\bar x+\bar y)}[z,w,[x,y,u]]$$

d'où

$$\iota(u,v)o\left([\kappa(x,y),\kappa(z,w)]-\kappa([x,y,z];w)-(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\kappa(z;[x,y,w])\right)=$$
$$=(-1)^{(\bar u+\bar v)(\bar x+\bar y+\bar z+\bar w)}\left([\kappa(x,y),\kappa(z,w)]o\iota(u,v)-\kappa([x,y,z];w)o\iota(u,v)\right.$$
$$\left.-(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\kappa(z;[x,y,w])o\iota(u,v)\right).$$

Cette dernière expression est nulle par hypothèse de récurrence par suite, comme $\iota(u,v)$ est injectif alors on a

$$[\kappa(x,y),\kappa(z,w)]=\kappa([x,y,z];w)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}\kappa(z;[x,y,w])\quad\forall\ p\geq 1.$$

Lemme II.3.4.

$$\forall\ p\geq 1,\ \left[\delta_{2p_{-1}},\kappa(x,y)\right]=0 \text{ i.e. } \delta_{2p_{-1}}o\kappa(x,y)=\kappa(x,y)o\delta_{2p_{-1}}.$$

En effet :

Supposons $f\in C^1(M,V)$ $\qquad C^1(M,V)\xrightarrow{\kappa(x,y)}C^1(M,V)\xrightarrow{\delta_1}C^3(M,V)$

$$C^1(M,V)\xrightarrow{\delta_1}C^3(M,V)\xrightarrow{\kappa(x,y)}C^3(M,V)$$

$$\begin{aligned}
&(\delta_1(\kappa(x,y)f))(x_1,x_2,x_3)=-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})}\rho_{x_3}\Big[(-1)^{\bar{x}_1(\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})}\rho_{x_1}((\kappa(x,y)f)(x_2))\\
&\quad-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})}\rho_{x_2}((\kappa(x,y)f)(x_1))+(\kappa(x,y)f)(x_2x_1)\Big]\\
&\quad+(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})}D(x_1,x_2)((\kappa(x,y)f)(x_3))-(\kappa(x,y)f)([x_1,x_2,x_3])\\
&=-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})}\rho_{x_3}\Big[(-1)^{\bar{x}_1(\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})}\rho_{x_1}oD(x,y)(f(x_2))\\
&\quad-(-1)^{\bar{x}_1(\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})+(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\rho_{x_1}(f([x,y,x_2]))-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})}\rho_{x_2}oD(x,y)(f(x_1))\\
&\quad+(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})+(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}\rho_{x_2}(f([x,y,x_1]))+D(x,y)(f(x_2x_1))\\
&\quad-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}f([x_1,y_2,x_2x_1])\Big]+(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})}D(x_1,x_2)oD(x,y)(f(x_3))\\
&\quad-(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{f})+(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}D(x_1,x_2)(f([x,y,x_3]))-D(x,y)(f([x_1,x_2,x_3]))\\
&\quad+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}f([x,y,[x_1,x_2,x_3]])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\kappa(x,y)(\delta_1 f))(x_1,x_2,x_3)=D(x,y)((\delta_1 f)(x_1,x_2,x_3))-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}(\delta_1 f)([x,y,x_1],x_2,x_3)\\
&\quad-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\bar{f})}(\delta_1 f)(x_1,[x,y,x_2],x_3)-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}(\delta_1 f)(x_1,x_2,[x,y,x_3])\\
&=-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}D(x,y)o\rho_{x_3}\Big[(-1)^{\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_1}(f(x_2))-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_2}(f(x_1))+f(x_2x_1)\Big]\\
&\quad+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D(x,y)oD(x_1,x_2)(f(x_3))-D(x,y)(f([x_1,x_2,x_3]))\\
&\quad+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}+\bar{x}_3(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_3}\Big[(-1)^{(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_1)\bar{f}}\rho_{[x,y,x_1]}(f(x_2))\\
&\quad-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_2}(f[x,y,x_1])+f(x_2[x,y,x_1])\Big]\\
&\quad-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}+(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_1+\bar{x}_2)\bar{f}}D([x,y,x_1]\ ;x_2)(f(x_3))+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{f}}f([[x,y,x_1],x_2,x_3])\\
&\quad+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\bar{f})+\bar{x}_3(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_3}\Big[(-1)^{\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_1}(f([x,y,x_2]))\\
&\quad-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_2)(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{[x,y,x_2]}(f(x_1))+f([x,y,x_2]x_1)\Big]
\end{aligned}$$

$$-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\bar{f})+(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_1+\bar{x}_2)\bar{f}}D(x_1;[x,y,x_2])(f(x_3))$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\bar{f})}f([x_1,[x,y,x_2],x_3])$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+(\bar{x}+\bar{y}+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{[x,y,x_3]}\Big[(-1)^{\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_1}(f(x_2))$$

$$-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_2}(f(x_1))+f(x_2x_1)\Big]-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+(\bar{x}_1+\bar{x}_2)\bar{f}}D(x_1,x_2)(f([x,y,x_3]))$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}f([x_1,x_2,[x,y,x_3]]).$$

En utilisant judicieusement la proposition II.1.3., la définition II.2.4 et la proposition II.2.8, nous obtenons : $\delta_1 o\kappa(x,y)-\kappa(x,y)o\delta_1=0$ i.e. $[\delta_1,\kappa(x,y)]=0$

Supposons $[\delta_{2p_{-1}},\kappa(x,y)]=0$ pour p supérieur à 1, alors

$\iota(z,w)o[\delta_{2p_{+1}},\kappa(x,y)]=\iota(z,w)o\delta_{2p_{+1}}o\kappa(x,y)-\iota(z,w)o\kappa(x,y)o\delta_{2p_{+1}}$

d'après le lemme II.3.1 et le lemme II.3.2.

$$\iota(z,w)o[\delta_{2p_{+1}},\kappa(x,y)]=\kappa(z,w)o\kappa(x,y)-\delta_{2p_{-1}}o\,\iota(z,w)o\kappa(x,y)$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\Big(-\kappa(x,y)o\,\iota(z,w)o\delta_{2p_{+1}}+\iota([x,y,z]\ ;\ w)o\,\delta_{2p_{+1}}$$

$$+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\iota(z\ ;\ [x,y,w])o\delta_{2p_{+1}}\Big)$$

$$=\kappa(z,w)o\kappa(x,y)+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\Big(-\delta_{2p_{-1}}o\kappa(x,y)o\iota(z,w)+\delta_{2p_{-1}}o\iota([x,y,z]\ ;\ w)$$

$$+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\delta_{2p_{-1}}o\iota(z\ ;\ [x,y,w])\Big)-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\kappa(x,y)o\kappa(z,w)$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\kappa(x,y)o\delta_{2p_{-1}}o\iota(z,w)+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\kappa([x,y,z]\ ;\ w)$$

$$-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\delta_{2p_{-1}}o\iota([x,y,z]\ ;\ w)+(-1)^{\bar{w}(\bar{x}+\bar{y})}\kappa(z\ ;\ [x,y,w])$$

$$-(-1)^{\bar{w}(\bar{x}+\bar{y})}\delta_{2p_{-1}}o\iota(z\ ;\ [x,y,w])$$

$$=[\kappa(z,w),\kappa(x,y)]+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\kappa([x,y,z]\ ;\ w)+(-1)^{\bar{w}(\bar{x}+\bar{y})}\kappa(z\ ;\ [x,y,w])$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}[\kappa(x,y),\delta_{2p_{-1}}]o\iota(z,w)$$

$$=-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}[\kappa(x,y),\kappa(z,w)]+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}\kappa([x,y,z];w)$$

$$+(-1)^{\bar{w}(\bar{x}+\bar{y})}\kappa(z;[x,y,w])+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{w})}[\kappa(x,y),\delta_{2p_{-1}}]o\iota(z,w)$$

$= 0$, d'après le lemme II.3.3. et notre hypothèse de récurrence.

Par suite, puisque ι(z,w) est injectif alors :

$$[\delta_{2p_{+1}},\kappa(x,y)]=0\quad\forall p\geq 1.$$

Théorème II.3.5.

δ est un opérateur cobord i.e. $\delta_1 o \delta_0 = 0$ et $\forall p \geq 1 \quad \delta_{2p_{+1}} o \delta_{2p_{-1}} = 0$.

En effet :

a) vérifions que $\delta_1 o \delta_0 = 0$

$$\delta_0(v)(x) = -(-1)^{\bar{x}\,\bar{v}} \rho_x(v)$$
$$\left(\delta_1(\delta_0(v))\right)(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= -(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\overline{\delta_0(v)})} \rho_{x_3}\Big[(-1)^{\bar{x}_1\overline{\delta_0(v)}} \rho_{x_1}\left(\delta_0(v)(x_2)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\overline{\delta_0(v)})} \rho_{x_2}\left(\delta_0(v)(x_1)\right) + \delta_0(v)(x_2 x_1)\Big]$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)\overline{\delta_0(v)}} D(x_1, x_2)\left(\delta_0(v)(x_3)\right) - \delta_0(v)\left([x_1, x_2, x_3]\right)$$
$$= -(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{v})} \rho_{x_3}\Big[-(-1)^{\bar{v}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)} \rho_{x_1} o \rho_{x_2}(v) + (-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{v})+\bar{x}_1\bar{v}} \rho_{x_2} o \rho_{x_1}(v)$$
$$-(-1)^{\bar{v}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)} \rho_{x_2 x_1}(v)\Big] - (-1)^{\bar{v}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)} D(x_1, x_2) o \rho_{x_3}(v) + (-1)^{\bar{v}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)} \rho_{[x_1, x_2, x_3]}(v)$$
$$= (-1)^{\bar{v}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)+\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)} \rho_{x_3}\left[\rho_{x_1} o \rho_{x_2}(v) - (-1)^{\bar{x}_1\bar{x}_2} \rho_{x_2} o \rho_{x_1}(v) + \rho_{x_2 x_1}(v)\right]$$
$$-(-1)^{\bar{v}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)} D(x_1, x_2) o \rho_{x_3}(v) + (-1)^{\bar{v}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)} \rho_{[x_1, x_2, x_3]}(v)$$
$$= (-1)^{\bar{v}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)}\left((-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)} \rho_{x_3} o D(x_1, x_2)(v) - D(x_1, x_2) o \rho_{x_3}(v) + \rho_{[x_1, x_2, x_3]}(v)\right)$$
$$= (-1)^{\bar{v}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)}\left(-\left[D(x_1, x_2), \rho_{x_3}\right] + \rho_{[x_1, x_2, x_3]}(v)\right) = 0,$$ car r est une super-représentation faible.

Par suite $\delta_1 o \delta_0 = 0$.

b) Vérifions que $\delta_3 o \delta_1 = 0$

$$(\delta_3 f)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$= (-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})} \rho_{x_5}\Big[(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})} \rho_{x_3}\left(f(x_1, x_2, x_4)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})} \rho_{x_4}\left(f(x_1, x_2, x_3)\right) + f(x_1, x_2, x_4 x_3)\Big]$$
$$+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)} D(x_1, x_2)\left(f(x_3, x_4, x_5)\right) - (-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})} D(x_3, x_4)\left(f(x_1, x_2, x_5)\right)$$

$$-f([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5)-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}f(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)(\bar{x}_3+\bar{x}_4)}f(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5])+f(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5])$$

$$(\delta_3(\delta_1 f))(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=$$
$$=(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\Big[(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_3}((\delta_1 f)(x_1,x_2,x_4))$$
$$-(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{x_4}((\delta_1 f)(x_1,x_2,x_3))+(\delta_1 f)(x_1,x_2,x_4x_3)\Big]$$
$$+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D(x_1,x_2)((\delta_1 f)(x_3,x_4,x_5))$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}D(x_3,x_4)((\delta_1 f)(x_1,x_2,x_5))-(\delta_1 f)([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}(\delta_1 f)(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5)-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}(\delta_1 f)(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5])$$
$$+(\delta_1 f)(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5])$$

Développons ces expressions :

(1) $$(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\Big[(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_3}((\delta_1 f)(x_1,x_2,x_4))$$
$$-(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{x_4}((\delta_1 f)(x_1,x_2,x_3))+(\delta_1 f)(x_1,x_2,x_4x_3)\Big]=$$
$$=(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\Big[(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_3}\Big((-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_4}\Big[(-1)^{\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_1}(f(x_2))$$
$$-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_2}(f(x_1))+f(x_2x_1)\Big]+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D(x_1,x_2)(f(x_4))-f([x_1,x_2,x_4])\Big)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{x_4}\Big(-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_3}\Big[(-1)^{\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_1}(f(x_2))$$
$$-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_2}(f(x_1))+f(x_2x_1)\Big]+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D(x_1,x_2)(f(x_3))-f([x_1,x_2,x_3])\Big)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_4x_3}\Big[(-1)^{\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_1}(f(x_2))-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_2}(f(x_1))+f(x_2x_1)\Big]$$
$$+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D(x_1,x_2)(f(x_4x_3))-f([x_1,x_2,x_4x_3])\Big]$$
$$=(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\Big[-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_5}o\rho_{x_3}o\rho_{x_4}o\rho_{x_1}(f(x_2))$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_3}o\rho_{x_4}o\rho_{x_2}(f(x_1))$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_3}o\rho_{x_4}(f(x_2x_1))$$
$$+(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}\rho_{x_5}o\rho_{x_3}oD(x_1,x_2)(f(x_4))$$

$$-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_3}\left(f\left(\left[x_1,x_2,x_4\right]\right)\right)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_5}o\rho_{x_4}o\rho_{x_3}o\rho_{x_1}\left(f\left(x_2\right)\right)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_4}o\rho_{x_3}o\rho_{x_2}\left(f\left(x_1\right)\right)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_3\bar{x}_4}\rho_{x_5}o\rho_{x_4}o\rho_{x_3}\left(f\left(x_2x_1\right)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})+\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}\rho_{x_5}o\rho_{x_4}oD\left(x_1,x_2\right)\left(f\left(x_3\right)\right)$$
$$+(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_4}\left(f\left(\left[x_1,x_2,x_3\right]\right)\right)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_5}o\rho_{x_4x_3}o\rho_{x_1}\left(f\left(x_2\right)\right)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_4x_3}o\rho_{x_2}\left(f\left(x_1\right)\right)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_4x_3}\left(f\left(x_2x_1\right)\right)$$
$$\left.+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}\rho_{x_5}oD\left(x_1,x_2\right)\left(f\left(x_4x_3\right)\right)-\rho_{x_5}\left(f\left(\left[x_1,x_2,x_4x_3\right]\right)\right)\right]$$
$$=(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\left[-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_5}oD\left(x_3,x_4\right)o\rho_{x_1}\left(f\left(x_2\right)\right)\right.$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_5}oD\left(x_3,x_4\right)o\rho_{x_2}\left(f\left(x_1\right)\right)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_5}oD\left(x_3,x_4\right)\left(f\left(x_2x_1\right)\right)$$
$$+(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}\rho_{x_5}o\rho_{x_3}oD\left(x_1,x_2\right)\left(f\left(x_4\right)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_3}\left(f\left(\left[x_1,x_2,x_4\right]\right)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})+\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}\rho_{x_5}o\rho_{x_4}oD\left(x_1,x_2\right)\left(f\left(x_3\right)\right)$$
$$+(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_4}\left(f\left(\left[x_1,x_2,x_3\right]\right)\right)$$
$$\left.+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}\rho_{x_5}oD\left(x_1,x_2\right)\left(f\left(x_4x_3\right)\right)-\rho_{x_5}\left(f\left(\left[x_1,x_2,x_4x_3\right]\right)\right)\right]$$

(2) $(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D\left(x_1,x_2\right)\left(\left(\delta_1 f\right)\left(x_3,x_4,x_5\right)\right)$

$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}D\left(x_3,x_4\right)\left(\left(\delta_1 f\right)\left(x_3,x_4,x_5\right)\right)=$$
$$=(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D\left(x_1,x_2\right)\left(-(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\left[(-1)^{\bar{x}_3\bar{f}}\rho_{x_3}\left(f\left(x_4\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{x_4}\left(f\left(x_3\right)\right)+f\left(x_4x_3\right)\right]+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_3+\bar{x}_4)}D\left(x_3,x_4\right)\left(f\left(x_5\right)\right)-f\left(\left[x_3,x_4,x_5\right]\right)\right)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}D\left(x_3,x_4\right)\left(-(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{x_5}\left[(-1)^{\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_1}\left(f\left(x_2\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_2}\left(f\left(x_1\right)\right)+f\left(x_2x_1\right)\right]+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D\left(x_1,x_2\right)\left(f\left(x_5\right)\right)-f\left(\left[x_1,x_2,x_5\right]\right)\right)$$

$$= -(-1)^{\bar f(\bar x_1+\bar x_2)+\bar x_5(\bar x_3+\bar x_4+\bar f)+\bar x_3\bar f} D(x_1,x_2) o \rho_{x_5} o \rho_{x_3}\left(f(x_4)\right)$$
$$+(-1)^{\bar f(\bar x_1+\bar x_2)+\bar x_5(\bar x_3+\bar x_4+\bar f)+\bar x_4(\bar x_3+\bar f)} D(x_1,x_2) o \rho_{x_5} o \rho_{x_4}\left(f(x_3)\right)$$
$$-(-1)^{\bar f(\bar x_1+\bar x_2)+\bar x_5(\bar x_3+\bar x_4+\bar f)} D(x_1,x_2) o \rho_{x_5}\left(f(x_4 x_3)\right)$$
$$+(-1)^{\bar f(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3+\bar x_4)} D(x_1,x_2) o D(x_3,x_4)\left(f(x_5)\right) - (-1)^{\bar f(\bar x_1+\bar x_2)} D(x_1,x_2)\left(f([x_3,x_4,x_5])\right)$$
$$+(-1)^{(\bar x_3+\bar x_4)(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)+\bar x_5(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)+\bar x_1\bar f} D(x_3,x_4) o \rho_{x_5} o \rho_{x_1}\left(f(x_2)\right)$$
$$-(-1)^{(\bar x_3+\bar x_4)(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)+\bar x_5(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)+\bar x_2(\bar x_1+\bar f)} D(x_3,x_4) o \rho_{x_5} o \rho_{x_2}\left(f(x_1)\right)$$
$$+(-1)^{(\bar x_3+\bar x_4)(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)+\bar x_5(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)} D(x_3,x_4) o \rho_{x_5}\left(f(x_2 x_1)\right)$$
$$-(-1)^{(\bar x_3+\bar x_4)(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)+\bar f(\bar x_1+\bar x_2)} D(x_3,x_4) o D(x_1,x_2)\left(f(x_5)\right)$$
$$+(-1)^{(\bar x_3+\bar x_4)(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)} D(x_3,x_4)\left(f([x_1,x_2,x_5])\right)$$

(1) + (2) nous donne

$$(-1)^{(\bar x_3+\bar x_4+\bar x_5)(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)+\bar x_1\bar f}\left[D(x_3,x_4),\rho_{x_5}\right] o \rho_{x_1}\left(f(x_2)\right)$$
$$-(1)^{(\bar x_3+\bar x_4+\bar x_5)(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)+\bar x_2(\bar x_1+\bar f)}\left[D(x_3,x_4),\rho_{x_5}\right] o \rho_{x_2}\left(f(x_1)\right)$$
$$+(-1)^{(\bar x_3+\bar x_4+\bar x_5)(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)}\left[D(x_3,x_4),\rho_{x_5}\right]\left(f(x_2 x_1)\right)$$
$$+(-1)^{\bar f(\bar x_1+\bar x_2)+\bar x_5(\bar x_3+\bar x_4+\bar f)+\bar x_4(\bar x_3+\bar f)}\Big(D(x_1,x_2) o \rho_{x_5} o \rho_{x_4}$$
$$-(-1)^{(\bar x_1+\bar x_2)(\bar x_4+\bar x_5)}\rho_{x_5} o \rho_{x_4} o D(x_1,x_2)\Big)\left(f(x_3)\right)$$
$$-(-1)^{\bar f(\bar x_1+\bar x_2)+\bar x_5(\bar x_3+\bar x_4+\bar f)+\bar x_3\bar f}\Big(D(x_1,x_2) o \rho_{x_5} o \rho_{x_3}$$
$$-(-1)^{(\bar x_1+\bar x_2)(\bar x_3+\bar x_5)}\rho_{x_5} o \rho_{x_3} o D(x_1,x_2)\Big)\left(f(x_4)\right)$$
$$-(-1)^{\bar f(\bar x_1+\bar x_2)+\bar x_5(\bar x_3+\bar x_4+\bar f)}\Big(D(x_1,x_2) o \rho_{x_5} - (-1)^{\bar x_5(\bar x_1+\bar x_2)}\rho_{x_5} o D(x_1,x_2)\Big) f(x_4 x_3)$$
$$+(-1)^{\bar f(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3+\bar x_4)}\left[D(x_1,x_2),D(x_3,x_4)\right]\left(f(x_5)\right)$$
$$-(-1)^{\bar x_3(\bar x_1+\bar x_2+\bar f)+\bar x_5(\bar x_1+\ldots+\bar x_4+\bar f)}\rho_{x_5} o \rho_{x_3}\left(f([x_1,x_2,x_4])\right)$$
$$+(-1)^{\bar x_4(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3+\bar f)+\bar x_5(\bar x_1+\ldots+\bar x_4+\bar f)}\rho_{x_5} o \rho_{x_4}\left(f([x_1,x_2,x_3])\right)$$

$$-(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\left(f\left([x_1,x_2,x_4x_3]\right)\right)-(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D(x_1,x_2)f\left([x_3,x_4,x_5]\right)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)+(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}D(x_3,x_4)\left(f\left([x_1,x_2,x_5]\right)\right)$$

$$=(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{x}_5)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{[x_3,x_4,x_5]}\Big((-1)^{\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{x_1}\left(f(x_2)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{x_2}\left(f(x_1)\right)+f(x_2x_1)\Big)-(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)+\bar{x}_5(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{[x_1,x_2,x_5]}o\rho_{x_3}\left(f(x_4)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)+\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{[x_1,x_2,x_4]}\left(f(x_3)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)+\bar{x}_5(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{[x_1,x_2,x_5]}\left(f(x_4x_3)\right)$$
$$+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)}\left[D(x_1,x_2),D(x_3,x_4)\right]\left(f(x_5)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_3}\left(f\left([x_1,x_2,x_4]\right)\right)$$
$$+(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})+\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_4}\left(f\left([x_1,x_2,x_3]\right)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\left(f\left([x_1,x_2,x_4x_3]\right)\right)-(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D(x_1,x_2)\left(f\left([x_3,x_4,x_5]\right)\right)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4)+(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}D(x_3,x_4)\left(f\left([x_1,x_2,x_5]\right)\right)$$

(3) $-(\delta_1 f)\left([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5\right)=$

$$=(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\Big[(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)}\rho_{[x_1,x_2,x_3]}\left(f(x_4)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{x_4}\left(f\left([x_1,x_2,x_3]\right)\right)+f\left(x_4[x_1,x_2,x_3]\right)\Big]$$
$$-(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)}D\left([x_1,x_2,x_3];x_4\right)\left(f(x_5)\right)+f\left(\left[[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5\right]\right)$$
$$=(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})+\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)}\rho_{x_5}o\rho_{[x_1,x_2,x_3]}\left(f(x_4)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})+\bar{x}_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{x_4}\left(f\left([x_1,x_2,x_3]\right)\right)$$
$$+(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\left(f\left(x_4[x_1,x_2,x_3]\right)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)}D\left([x_1,x_2,x_3];x_4\right)\left(f(x_5)\right)+f\left(\left[[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5\right]\right)$$

(4) $-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}(\delta_1 f)\left(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5\right)=$

$$=(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)+\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})+\bar{x}_3\bar{f}}\rho_{x_5}o\rho_{x_3}\left(f\left([x_1,x_2,x_4]\right)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)+\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})+(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_4)(\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{x_5}o\rho_{[x_1,x_2,x_4]}\left(f(x_3)\right)$$

$$+(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)+\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\left(f\left([x_1,x_2,x_4]x_3\right)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)+\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)}D\left(x_3\ ;\ [x_1,x_2,x_4]\right)\left(f(x_5)\right)$$
$$+(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}f\left(\left[x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5\right]\right)$$

(5) $-(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)(\bar{x}_3+\bar{x}_4)}(\delta_1 f)\left(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]\right)=$
$$=(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{f})+\bar{x}_3\bar{f}}\rho_{[x_1,x_2,x_5]}o\rho_{x_3}\left(f(x_4)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{f})+\bar{x}_4(\bar{x}_3+\bar{f})}\rho_{[x_1,x_2,x_5]}o\rho_{x_4}\left(f(x_3)\right)+(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{[x_1,x_2,x_5]}\left(f(x_4x_3)\right)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)(\bar{x}_3+\bar{x}_4)+\bar{f}(\bar{x}_3+\bar{x}_4)}D(x_3,x_4)\left(f\left([x_1,x_2,x_5]\right)\right)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)(\bar{x}_3+\bar{x}_4)}f\left(\left[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]\right]\right)$$

(6) $(\delta_1 f)\left(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]\right)=$
$$=-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{x}_5)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_1\bar{f}}\rho_{[x_3,x_4,x_5]}o\rho_{x_1}\left(f(x_2)\right)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{x}_5)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})+\bar{x}_2(\bar{x}_1+\bar{f})}\rho_{[x_3,x_4,x_5]}o\rho_{x_2}\left(f(x_1)\right)$$
$$-(-1)^{(\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{x}_5)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{f})}\rho_{[x_3,x_4,x_5]}\left(f(x_2x_1)\right)$$
$$+(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}D(x_1,x_2)\left(f\left([x_3,x_4,x_5]\right)\right)-f\left(\left[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]\right]\right)$$

La somme (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) nous donne

$$(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)}\left[D(x_1,x_2),D(x_3,x_4)\right]\left(f(x_5)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\left(f\left([x_1,x_2,x_4x_3]\right)\right)+(-1)^{\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\left(f\left(x_4[x_1,x_2,x_3]\right)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)}D\left([x_1,x_2,x_3]\ ;\ x_4\right)\left(f(x_5)\right)$$
$$+f\left(\left[[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5\right]\right)+(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)+\bar{x}_5(\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_4+\bar{f})}\rho_{x_5}\left(f\left([x_1,x_2,x_4]x_3\right)\right)$$
$$-(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)+\bar{f}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)}D\left(x_3\ ;\ [x_1,x_2,x_4]\right)\left(f(x_5)\right)$$
$$+(-1)^{\bar{x}_3(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}f\left(\left[x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5\right]\right)+(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)(\bar{x}_3+\bar{x}_4)}f\left(\left[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]\right]\right)$$
$$-f\left(\left[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]\right]\right)$$

en utilisant la proposition II.1.3. et la proposition II.2.8. nous obtenons $\left(\delta_3(\delta_1 f)\right)(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=0$ et par suite $\delta_3 o\delta_1=0$.

c) Vérifions pour le cas général

Nous savons déjà que $\delta_3 o \delta_1 = 0$

supposons $\delta_{2p+1} o \delta_{2p-1} = 0$ pour p supérieur à 1

alors $\iota(x,y) o \delta_{2p+3} o \delta_{2p+1} = \kappa(x,y) o \delta_{2p+1} - \delta_{2p+1} o\, \iota(x,y) o \delta_{2p+1}$

$$= \kappa(x,y) o \delta_{2p+1} - \delta_{2p+1} o \kappa(x,y) + \delta_{2p+1} o \delta_{2p-1} o\, \iota(x,y)$$

$$= \left[\kappa(x,y), \delta_{2p+1}\right] + \delta_{2p+1} o \delta_{2p-1} o\, \iota(x,y)$$

$$= 0.$$

Par suite $\delta_{2p+3} o \delta_{2p+1} = 0$.

δ est un opérateur cobord.

Définition II.3.6.

$H^{2P-1}(M,V) = \mathrm{Ker}\delta_{2P+1} / \mathrm{Im}\,\delta_{2P-1}, \forall p \geq 1$ est le (2p-1)-ième groupe de cohomologie de M dans V.

$H^0(M,V) = \{v \in V / \rho_x(v) = 0, \forall x \in M\}$.

On appelle cocycle une élément f de $C^{2P-1}(M,V)$ tel que $\delta_{2p-1}(f) = 0$.

On appelle cobord un élément de $C^{2P-1}(M,V)$ de la forme $g = \delta_{2p-3}(f)$.

CHAPITRE III : PROJECTIVITE DES SUPERALGEBRES TRIPLES DE LIE

La notion de superalgèbre triple de Lie a été introduite dans le chapitre II. Dans ce chapitre, nous adaptons les travaux de M. Kikkawa sur les algèbres triples de Lie [3] au cas des superalgèbres triples de Lie.

Nous définirons la notion de projectivité des superalgèbres triples de Lie puis nous étudierons les superalgèbres de Lie de projectivité d'une superalgèbre triple de Lie.

Enfin, nous voyons les cas particuliers où la superalgèbre triple de Lie est une superalgèbre de Lie ou un super-système triple de Lie.

Dans tout ce qui suit, K est un corps commutatif de caractéristique zéro et V est un K-espace vectoriel Z_2-gradué.

III.1. PROJECTIVITE DES SUPERALGEBRES TRIPLES DE LIE

Nous savons d'après la définition II.1.4. qu'une superalgèbre triple de Lie $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$ est un K-espace vectoriel Z_2-gradué muni d'une multiplication bilinéaire xy et d'une composition trilinéaire [x, y, z] vérifiant pour tous $x, y, z, u, v, w \in \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1$

$$xy = -(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} yx$$

$$[x,y,z] = -(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}[y,x,z]$$

$$[x,y,z] + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}[y,z,x] + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[z,x,y] + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{J}(x,y,z) = 0$$

$$[xy,z,w] + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}[yz,x,w] + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}[zx,y,w] = 0$$

$$[u,v,xy] = (-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}[u,v,x]y + x[u,v,y]$$

$$[u,v,[x,y,z]] = [[u,v,x],y,z] + (-1)^{\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}[x,[u,v,y],z] + (-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}[x,y,[u,v,z]].$$

Posons $B(x,y) = xy$ et $D(x,y,z) = [x,y,z]$.

Nous obtenons la définition équivalente suivante :

Définition III.1.1.

Une superalgèbre triple de Lie $\mathcal{G} = \{V; B, D\}$ est la donnée d'un K-espace vectoriel Z_2-gradué V, d'une multiplication bilinéaire $B: V \times V \to V$ et d'une composition trilinéaire $D: V \times V \times V \to V$ vérifiant pour tous $x, y, z, u, v, w \in V_0 \cup V_1$ les relations suivantes :

(1) $B(x,y) = -(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} B(x,y)$

(2) $D(x,y,z) = -(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} D(y,x,z)$

(3) $D(x,y,z) + (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})} D(y,z,x) + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} D(z,x,y) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} B(B(x,y),z)$
$+ (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}} B(B(y,z),x) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} B(B(z,x),y) = 0$

(4) $D(B(x,y),z,w) + (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} D(B(y,z),x,w) + (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})} D(B(z,x),y,w) = 0$

(5) $D(u,v,B(x,y)) = (-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})} B(D(u,v,x),y) + B(x,D(u,v,y))$

(6) $D(u,v,D(x,y,z)) = D(D(u,v,x),y,z)$
$+ (-1)^{\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})} D(x,D(u,v,y),z) + (-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})} D(x,y,D(u,v,z)).$

Supposons qu'il existe sur V une structure de superalgèbre de Lie notée $\mathcal{L} = \{V; L\}$ dont la multiplication est donnée par $[x,y]_{\mathcal{L}} = L(x,y)\ \forall x,y \in V_0 \cup V_1$.

Définition III.1.2.

Une superalgèbre de Lie $\mathcal{L} = \{V; L\}$ sera appelée superalgèbre de Lie de projectivité d'une superalgèbre triple de Lie $\mathcal{G} = \{V; B, D\}$ si elle vérifie les relations suivantes

(7) $L(x,B(y,z)) = B(L(x,y),z) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}} B(y,L(x,z))$

(8) $L(x,D(y,z,w)) = (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})} D(L(x,y),z,w) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}} D(y,L(x,z),w)$
$+ D(y,z,L(x,w))$

(9) $D(u,v,L(x,y)) = (-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})} L(D(u,v,x),y) + L(x,D(u,v,y)).$

Théorème III.1.3.

Soit $\mathcal{G} = \{V; B, D\}$ une superalgèbre triple de Lie et $\mathcal{L} = \{V; L\}$ une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$. Alors $\tilde{\mathcal{G}} = \{V; \tilde{B}, \tilde{D}\}$ définie par

$\tilde{B}(x,y) = B(x,y) + 2L(x,y)$

$\tilde{D}(x,y,z) = D(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} L(B(x,y),z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} L(L(x,y),z)$ pour tous $x,y,z \in V_0 \cup V_1$ est une superalgèbre triple de Lie.

En effet, les relations (1) et (2) sont évidentes.

Vérifions (3) pour $\tilde{\mathcal{G}}$

$$\tilde{D}(x,y,z)+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\tilde{D}(y,z,x)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{D}(z,x,y)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{B}\big(\tilde{B}(x,y),z\big)+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}\tilde{B}\big(\tilde{B}(y,z),x\big)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\tilde{B}\big(\tilde{B}(z,x),y\big)=$$
$$=D(x,y,z)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(B(x,y),z\big)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(L(x,y),z\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}D(y,z,x)-(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L\big(B(y,z),x\big)-(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L\big(L(y,z),x\big)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D(z,x,y)$$
$$-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(B(z,x),y\big)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(L(z,x),y\big)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B\big(B(x,y),z\big)$$
$$+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B\big(L(x,y),z\big)+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(B(x,y),z\big)$$
$$+4(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(L(x,y),z\big)+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B\big(B(y,z),x\big)+2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B\big(L(y,z),x\big)$$
$$+2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L\big(B(y,z),x\big)+4(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L\big(L(y,z),x\big)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B\big(B(z,x),y\big)$$
$$+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B\big(L(z,x),y\big)+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(B(z,x),y\big)+4(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(L(z,x),y\big).$$

Nous savons que (3) est vérifié dans $\mathcal{G}$ donc

$$D(x,y,z)+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}D(y,z,x)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D(z,x,y)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B\big(B(x,y),z\big)$$
$$+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B\big(B(y,z),x\big)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B\big(B(z,x),y\big)=0.$$

Il reste donc

$$(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(B(x,y),z\big)+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L\big(B(y,z),x\big)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(B(z,x),y\big)$$
$$+3(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(L(x,y),z\big)+3(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L\big(L(y,z),x\big)+3(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(L(z,x),y\big)$$
$$+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B\big(L(x,y),z\big)+2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B\big(L(y,z),x\big)+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B\big(L(z,x),y\big)$$

or $(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(L(x,y),z\big)+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L\big(L(y,z),x\big)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(L(z,x),y\big)=$

$$=(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{J}_{\mathcal{L}}(x,y,z)=0$$

et finalement

$$(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(B(x,y),z\big)+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L\big(B(y,z),x\big)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(B(z,x),y\big)$$
$$+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B\big(L(x,y),z\big)+2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B\big(L(y,z),x\big)+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B\big(L(z,x),y\big)=$$

$$=-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L(z,B(x,y))-(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}L(x,B(y,z))-(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L(y,B(z,x))$$
$$+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B(L(x,y),z)+2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B(L(y,z),x)+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B(L(y,z),x)$$
$$=-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B(L(z,x),y)-(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}B(x,L(z,y))-(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}B(L(z,x),y)$$
$$-(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B(y,L(x,z))-(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B(L(y,z),x)-B(z,L(y,x))$$
$$+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B(L(x,y),z)+2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B(L(y,z),x)+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B(L(z,x),y)$$
$$=-2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B(L(z,x),y)-2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B(L(y,z),x)$$
$$-2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}B(L(x,y),z)+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B(L(x,y),z)$$
$$+2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}B(L(y,z),x)+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B(L(z,x),y)=0$$

d'où le (3) est vérifié.

Vérifions la relation (4)

$$\tilde{D}(\tilde{B}(x,y),z,w)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{D}(\tilde{B}(y,z),x,w)+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\tilde{D}(\tilde{B}(z,x),y,w)=$$
$$=\tilde{D}(B(x,y),z,w)+2\tilde{D}(L(x,y),z,w)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{D}(B(y,z),x,w)$$
$$+2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{D}(L(y,z),x,w)+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\tilde{D}(B(z,x),y,w)+2(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}\tilde{D}(L(z,x),y,w)$$
$$=D(B(x,y),z,w)-(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(B(B(x,y),z),w)$$
$$-(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(L(B(x,y),z),w)+2D(L(x,y),z,w)$$
$$-2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(B(L(x,y),z),w)-2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(L(L(x,y),z),w)$$
$$+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D(B(y,z),x,w)-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(B(B(y,z),x),w)$$
$$-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(L(B(y,z),x),w)+2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D(L(y,z),x,w)$$
$$-2(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(B(L(y,z),x)w)-2(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(L(L(y,z),x),w)$$
$$+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}D(B(z,x),y,w)-(-1)^{\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(B(B(z,x),y),w)$$
$$-(-1)^{\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(L(B(z,x),y),w)+2(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}D(L(z,x),y,w)$$
$$-2(-1)^{\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(B(L(z,x),y),w)-2(-1)^{\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L(L(L(z,x),y),w)$$

On a déjà montré que $(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L(B(x,y),z)+(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}L(B(y,z),x)$
$+L(B(z,x),y)+2(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B(L(x,y),z)+2(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})}B(L(y,z),x)+2B(L(z,x),y)=0$

en utilisant aussi le (4) qui est vérifié dans $\mathcal{G}$ et la super-identité de Jacobi il nous reste donc :

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)+\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}L\big(B(B(x,y),z),w\big)+2D\big(L(x,y),z,w\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)+\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}L\big(B(B(y,z),x),w\big)+2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D\big(L(y,z),x,w\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}L\big(B(B(z,x),y),w\big)+2(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D\big(L(z,x),y,w\big)=\\
&=(-1)^{\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}L\Big((-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}B\big(B(x,y),z\big)+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}B\big(B(y,z),x\big)+B\big(B(z,x),y\big),w\Big)\\
&\quad+2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D\big(L(y,z),x,w\big)+2(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D\big(L(z,x),y,w\big)+2D\big(L(x,y),z,w\big)\\
&=(-1)^{\bar x\,\bar y+\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}L\Big(D(x,y,z)+(-1)^{\bar x(\bar y+\bar z)}D(y,z,x)+(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D(z,x,y),w\Big)\\
&\quad+2D\big(L(x,y),z,w\big)+2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D\big(L(y,z),x,w\big)+2(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D\big(L(z,x),y,w\big)\quad\textbf{(cf(3))}\\
&=(-1)^{\bar x\,\bar y+\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}L\big(D(x,y,z),w\big)+(-1)^{\bar x\,\bar z+\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}L\big(D(y,z,x),w\big)\\
&\quad+(-1)^{\bar x\,\bar y+\bar z(\bar x+\bar y)+\bar w(\bar x+\bar y+\bar z)}L\big(D(z,x,y),w\big)+2D\big(L(x,y),z,w\big)\\
&\quad+2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D\big(L(y,z),x,w\big)+2(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D\big(L(z,x),y,w\big)\\
&=(-1)^{\bar x\,\bar y+\bar w\,\bar z}D\big(x,y,L(z,w)\big)-(-1)^{\bar x\,\bar y+\bar z\,\bar w}L\big(z,D(x,y,w)\big)+(-1)^{\bar x(\bar z+\bar w)}D\big(y,z,L(x,w)\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar x(\bar z+\bar w)}L\big(x,D(y,z,w)\big)+(-1)^{\bar y(\bar x+\bar w)+\bar z(\bar x+\bar y)}D\big(z,x,L(y,w)\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar y(\bar x+\bar w)+\bar z(\bar x+\bar y)}L\big(y,D(z,x,w)\big)+2D\big(L(x,y),z,w\big)\\
&\quad+2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D\big(L(y,z),x,w\big)+2(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D\big(L(z,x),y,w\big)\qquad\textbf{(cf (9))}\\
&=-(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D\big(L(z,x),y,w\big)-(-1)^{\bar x\,\bar y}D\big(x,L(z,y),w\big)-D\big(L(x,y),z,w\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar x\,\bar z}D\big(y,L(x,z),w\big)-(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D\big(L(y,z),x,w\big)-(-1)^{\bar x\,\bar y+\bar z(\bar x+\bar y)}D\big(z,L(y,x),w\big)\\
&\quad+2D\big(L(x,y),z,w\big)+2(-1)^{\bar z(\bar x+\bar y)}D\big(L(y,z),x,w\big)\\
&\quad+2(-1)^{\bar y(\bar x+\bar z)}D\big(L(z,x),y,w\big)\qquad\textbf{(cf (8))}\\
&=0
\end{aligned}
$$

d'où le (4) est vérifié.

Vérifions le (5)

$$\tilde{D}\big(u,v,\tilde{B}(x,y)\big)=\tilde{D}(u,v,B(x,y))+2\tilde{D}(u,v,L(x,y))=$$
$$=D(u,v,B(x,y))-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(B(u,v),B(x,y))$$

$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(L(u,v),B(x,y))+2D(u,v,L(x,y))$$
$$-2(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(B(u,v),L(x,y))-2(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(L(u,v),L(x,y))$$

$$D(u,v,B(x,y))=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}B(D(u,v,x),y)+B(x,D(u,v,y))\qquad \textbf{(cf (5))}$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(B(u,v),B(x,y))=-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}B(L(B(u,v),x),y)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}B(x,L(B(u,v),y))\qquad \textbf{(cf (7))}$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(L(u,v),B(x,y))=-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}B(L(L(u,v),x),y)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}B(x,L(L(u,v),y))\qquad \textbf{(cf (7))}$$
$$2D(u,v,L(x,y))=2(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}L(D(u,v,x),y)+2L(x,D(u,v,y))\qquad \textbf{(cf (9))}$$
$$-2(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(B(u,v),L(x,y))=-2(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(L(B(u,v),x),y)$$
$$+2(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}\,\bar{y}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(L(B(u,v),y),x)\ \textbf{(cf super-identité de Jacobi)}$$
$$-2(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(L(u,v),L(x,y))=-2(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(L(L(u,v),x),y)$$
$$+2(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}\,\bar{y}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L(L(L(u,v),y),x)\ \textbf{(cf super-identité de Jacobi)}$$

faisons la somme ; nous obtenons

$$\tilde{D}\big(u,v,\tilde{B}(x,y)\big)=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}(B+2L)(D(u,v,x),y)+(B+2L)(x,D(u,v,y))$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}(B+2L)(L(B(u,v),x),y)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}(B+2L)(x,L(B(u,v),y))$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}(B+2L)(L(L(u,v),x),y)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}(B+2L)(x,L(L(u,v),y))$$
$$=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}(B+2L)\Big(D(u,v,x)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}L(B(u,v),x)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}L(L(u,v),x),$$
$$+(B+2L)\Big(x,D(u,v,y)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}L(B(u,v),x)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}L(L(u,v),y)\Big)$$
$$=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}(B+2L)\big(\tilde{D}(u,v,x),y\big)+(B+2L)\big(x,\tilde{D}(u,v,y)\big)$$
$$=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{B}\big(\tilde{D}(u,v,x),y\big)+\tilde{B}\big(x,\tilde{D}(u,v,y)\big)$$

d'où $\tilde{D}\big(x,v,\tilde{B}(x,y)\big)=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{B}\big(\tilde{D}(u,v,x),y\big)+\tilde{B}\big(x,\tilde{D}(u,v,y)\big)$ et le (5) est vérifié.

Vérifions pour terminer le (6)

$$\tilde{D}\left(u,v,\tilde{D}(x,y,z)\right)=\tilde{D}\Big(u,v,D(x,y,z)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(B(x,y),z\big)$$
$$-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(L(x,y),z\big)\Big)=\tilde{D}\big(u,v,D(x,y,z)\big)$$

$$-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{D}\big(u,v,L(B(x,y),z)\big)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{D}\big(u,v,L(L(x,y),z)\big)$$
$$=D\big(u,v,D(x,y,z)\big)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B(u,v),D(x,y,z)\big)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L(u,v),D(x,y,z)\big)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D\big(u,v,L(B(x,y),z)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B(u,v),L(B(x,y),z)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L(u,v),L(B(x,y),z)\big)$$
$$-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D\big(u,v,L(L(x,y),z)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B(u,v),L(L(x,y),z)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L(u,v),L(L(x,y),z)\big)$$

transformons chaque terme de cette somme :

$$D\big(u,v,D(x,y,z)\big)=$$
$$=D\big(D(u,v,x),y,z\big)+(-1)^{\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}D\big(x,D(u,v,y),z\big)+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}D\big(x,y,D(u,v,z)\big)$$

$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B(u,v),D(x,y,z)\big)=$$
$$=-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}D\big(L(B(u,v),x),y,z\big)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}D\big(x,L(B(u,v),y),z\big)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}D\big(x,y,L(B(u,v),z)\big)$$

$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L(u,v),D(x,y,z)\big)=-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}D\big(L(L(u,v),x),y,z\big)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}D\big(x,L(B(u,v),y),z\big)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}D\big(x,y,L(B(u,v),z)\big)$$

$$-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D\big(u,v,L(B(x,y),z)\big)=$$
$$=-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(D(u,v,B(x,y)),z\big)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(B(x,y),D(u,v,z)\big)$$

$$
\begin{aligned}
&=-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{u}+\bar{v})+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(B\big(D(u,v,x),y\big),z\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(B\big(x,D(u,v,y)\big),z\big)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(B(x,y),D(u,v,z)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B(u,v),L\big(B(x,y),z\big)\big)=\\
&=(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(B(u,v),B(x,y)\big),z\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(B(u,v),z\big),B(x,y)\big)\\
&=(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B\big(L\big(B(u,v),x\big),y\big),z\big)\\
&\quad+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B\big(x,L\big(B(u,v),y\big)\big),z\big)\\
&\quad+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(B(x,y),L\big(B(u,v),z\big)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L(u,v),L\big(B(x,y),z\big)\big)=\\
&=(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(L(u,v),B(x,y)\big),z\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(L(u,v),z\big),B(x,y)\big)\\
&=(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B\big(L\big(L(u,v),x\big),y\big),z\big)\\
&\quad+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{y}+\bar{z})}L\big(B\big(x,L\big(L(u,v),y\big)\big),z\big)\\
&\quad+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(B(x,y),L\big(L(u,v),z\big)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D\big(u,v,L\big(L(x,y),z\big)\big)=\\
&=-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(D\big(u,v,L(x,y)\big),z\big)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(L(x,y),D,(u,v,z)\big)\\
&=-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{u}+\bar{v})+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(L\big(D(u,v,x),y\big),z\big)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(L\big(x,D(u,v,y)\big),z\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(L(x,y),D(u,v,z)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B(u,v),L\big(L(x,y),z\big)\big)=\\
&=(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(B(u,v),L(x,y)\big),z\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(B(u,v),z\big),L(x,y)\big)\\
&=(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(L\big(B(u,v),x\big),y\big),z\big)\\
&\quad-(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(L\big(B(u,v),y\big),x\big),z\big)\\
&\quad+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(L(x,y),L\big(B(u,v),z\big)\big)
\end{aligned}
$$

$$=(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(L\big(B(u,v),x\big),y\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(x,L\big(B(u,v),y\big)\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{u}\,\overline{v}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y}+\overline{u}+\overline{v})}L\big(L(x,y),L\big(B(u,v),z\big)\big)$$

$$(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(L(u,v),L\big(L(x,y),z\big)\big)=$$
$$=(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(L(u,v),L(x,y)\big),z\big)$$
$$-(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(L(u,v),z\big),L(x,y)\big)$$
$$=(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(L\big(L(u,v),x\big),y\big),z\big)$$
$$-(-1)^{\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(L\big(L(u,v),y\big),x\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{u}\,\overline{v}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y}+\overline{u}+\overline{v})}L\big(L(x,y),L\big(L(u,v),z\big)\big)$$
$$=(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(L\big(L(u,v),x\big),y\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(x,L\big(L(u,v),y\big)\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{u}\,\overline{v}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y}+\overline{u}+\overline{v})}L\big(L(x,y),L\big(L(u,v),z\big)\big)$$

La somme membre à membre nous donne

$$\tilde{D}\big(u,v,\tilde{D}(x,y,z)\big)=$$
$$=D\big(D(u,v,x),y,z\big)-(-1)^{\overline{y}(\overline{x}+\overline{u}+\overline{v})+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y}+\overline{u}+\overline{v})}L\big(B\big(D(u,v,x),y\big),z\big)$$
$$-(-1)^{\overline{y}(\overline{x}+\overline{u}+\overline{v})+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y}+\overline{u}+\overline{v})}L\big(L\big(D(u,v,x),y\big),z\big)-(-1)^{\overline{u}\,\overline{v}+\overline{x}(\overline{u}+\overline{v})}D\big(L\big(B(u,v),x\big),y,z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(B\big(L\big(B(u,v),x\big),y\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(L\big(B(u,v),x\big),y\big),z\big)$$
$$-(-1)^{\overline{u}\,\overline{v}+\overline{x}(\overline{u}+\overline{v})}D\big(L\big(L(u,v),x\big),y,z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(B\big(L\big(L(u,v),x\big),y\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}L\big(L\big(L\big(L(u,v),x\big),y\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}(\overline{u}+\overline{v})}D\big(x,D(u,v,y),z\big)-(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y}+\overline{u}+\overline{v})}L\big(B\big(x,D(u,v,y)\big),z\big)$$
$$-(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y}+\overline{u}+\overline{v})}L\big(L\big(x,D(u,v,y)\big),z\big)-(-1)^{\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{x}+\overline{y})}D\big(x,L\big(B(u,v),y\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})+\overline{u}\,\overline{v}+(\overline{u}+\overline{v})(\overline{y}+\overline{z})}L\big(B\big(x,L\big(B(u,v),y\big)\big),z\big)$$

$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(x,L(B(u,v),y)\big),z\big)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}D\big(x,L(L(u,v),y),z\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{y}+\bar{z})}L\big(B\big(x,L(L(u,v),y)\big),z\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(x,L(L(u,v),y)\big),z\big)$$

$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}D(x,y,D(u,v,z))-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(B(x,y),D(u,v,z)\big)$$
$$-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\big(L(x,y),D(u,v,z)\big)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}D\big(x,y,L(B(u,v),z)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(B(x,y),L(B(u,v),z)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(L(x,y),L(B(u,v),z)\big)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}D\big(x,y,L(L(u,v),z)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(B(x,y),L(L(u,v),z)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{u}\,\bar{v}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}+\bar{v})}L\big(L(x,y),L(L(u,v),z)\big)$$
$$=\tilde{D}\big(D(u,v,x),y,z\big)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{D}\big(L(B(u,v),x),y,z\big)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{D}\big(L(L(u,v),x),y,z\big)+(-1)^{\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{D}\big(x,D(u,v,y),z\big)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{D}\big(x,L(B(u,v),y),z\big)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{D}\big(x,L(L(u,v),y),z\big)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{D}\big(x,y,D(u,v,z)\big)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}\tilde{D}\big(x,y,L(B(u,v),z)\big)$$
$$-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}\tilde{D}\big(x,y,L(L(u,v),z)\big)$$
$$=\tilde{D}\big(\tilde{D}(u,v,x),y,z\big)+(-1)^{\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{D}\big(x,\tilde{D}(u,v,y),z\big)+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{D}\big(x,y,\tilde{D}(u,v,z)\big)$$

nous avons en définitive

$$\tilde{D}\big(u,v,\tilde{D}(u,y,z)\big)=\tilde{D}\big(\tilde{D}(u,v,x),y,z\big)+(-1)^{\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{D}\big(x,D(u,v,y),z\big)$$
$$+(-1)^{(x+y)}\tilde{D}\big(x,y,\tilde{D},(u,v,z)\big)$$

d'où le (6) est vérifié.

Remarque III.1.4.

Soit $\mathcal{G}=\{V;B,D\}$, $\mathcal{L}=\{V;L\}$ et $\tilde{\mathcal{G}}=\{V;\tilde{B},\tilde{D}\}$ vérifiant le théorème III.1.3. Alors la superalgèbre de Lie $-\mathcal{L}=\{V;-L\}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de la superalgèbre triple de Lie $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{G}}$ induit la superalgèbre triple de Lie $\mathcal{G}$ par les relations

$$B(x,y)=\tilde{B}(x,y)-2L(x,y)$$

$$D(x,y,z)=\tilde{D}(x,y,z)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L(\tilde{B}(x,y),z)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L(L(x,y),z).$$

Ainsi nous pouvons donner la définition suivante :

Définition III.1.5.

Deux superalgèbres triples de Lie $\mathcal{G}$ et $\tilde{\mathcal{G}}$ sur le même espace vectoriel Z_2-gradué V sont dites en relation projective s'il existe une superalgèbre de Lie $\mathcal{L}=\{V;L\}$ de projectivité de $\mathcal{G}$ telle que $\tilde{\mathcal{G}}$ se déduit de $\mathcal{G}$ par le théorème III.1.3.

III.2 SUPERALGEBRES DE LIE DE PROJECTIVITE DES SUPERALGEBRES TRIPLES DE LIE

Dans ce paragraphe, nous étudions la somme et le produit par un élément de K des superalgèbres de Lie de projectivité d'une superalgèbre triple de Lie et nous en définissons une famille.

Soit $\mathcal{L}=\{V\,;\,L\}$ une superalgèbre de Lie. Nous rappelons qu'une application linéaire $f:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ est une superdérivation de degré k si pour tous $x,y\in V_0\cup V_1$, $f(L(x,y))=L(f(x),y)+(-1)^{\bar{x}k}L(x,f(y))$. Soit $a\in V_0\cup V_1$, alors l'application linéaire $L_a:x\to L_a(x)=L(a,x)$ est une superdérivation de degré $\bar{a}$ appelée superdérivation intérieure de $\mathcal{L}$. i.e. $\forall x,y,z\in V_0\cup V_1, L(x,L(y,z))=L(L(x,y),z)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L(y,L(x,z))$ cela vient du fait que $\tilde{J}_{\mathcal{L}}(x,y,z)=L(L(x,y),z)-L(x,L(y,z))-(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L(L(x,z),y)=0$

Commençons par donner le lemme suivant :

Lemme III.2.1.

Soit $\mathcal{L}_1 = \{V; L_1\}$ et $\mathcal{L}_2 = \{V; L_2\}$ deux superalgèbres de Lie sur le même espace vectoriel Z_2-gradué V. Supposons que les superdérivations intérieures de $\mathcal{L}_i$ sont des superdérivations de $\mathcal{L}_j$ $i, j = 1, 2,\ i \neq j$. Alors la somme $L = L_1 + L_2$ forme une superalgèbre de Lie sur V notée $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

En effet, il est facile de voir que pour tous $x, y \in V_0 \cup V_1$ $L(x,y) = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}} L(y,x)$. $L(x,y) = L_1(x,y) + L_2(x,y)$. Posons $L_x(y) = L(x,y)$. Par hypothèse L_x est une superdérivation pour L_1 et pour L_2.

$$
\begin{aligned}
L(x, L(y,z)) = L_x(L(y,z)) &= L_x(L_1(y,z) + L_2(y,z)) \\
&= L_1(L_x(y),z) + (-1)^{\bar{x}\bar{y}} L_1(y, L_x(z)) + L_2(L_x(y),z) + (-1)^{\bar{x}\bar{y}} L_2(y, L_x(z)) \\
&= (L_1 + L_2)(L_x(y),z) + (-1)^{\bar{x}\bar{y}} (L_1 + L_2)(y, L_x(z)) \\
&= L(L(x,y),z) + (-1)^{\bar{x}\bar{y}} L(y, L(x,z))
\end{aligned}
$$

d'où $L(L(x,y),z) - L(x, L(y,z)) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}} L(L(x,z),y) = 0$, soit $J_{\mathcal{L}}(x,y,z) = 0$ et par suite, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ est une superalgèbre de Lie.

Théorème III.2.2.

Soit $\mathcal{G} = \{V; B, D\}$ une superalgèbre triple de Lie et $\mathcal{L} = \{V; L\}$ et $\tilde{\mathcal{L}} = \{V; \tilde{L}\}$ deux superalgèbres de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$. Supposons que toute superdérivation intérieure de l'une est une superdérivation de l'autre.
Alors $\mathcal{L} + \tilde{\mathcal{L}} = \{V; L + \tilde{L}\}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$.

En effet, d'après le lemme III.2.1., nous savons que $\mathcal{L} + \tilde{\mathcal{L}}$ est une superalgèbre de Lie. Vérifions les relations (7) (8) et (9).

Soient $x, y, z \in V_0 \cup V_1$;

$$
\begin{aligned}
(L + \tilde{L})(x, B(y,z)) &= L(x, B(y,z)) + \tilde{L}(x, B(y,z)) \\
&= B(L(x,y),z) + (-1)^{\bar{x}\bar{y}} B(y, L(x,z)) + B(\tilde{L}(x,y),z) \\
&\quad + (-1)^{\bar{x}\bar{y}} B(y, \tilde{L}(x,z)) \qquad \textbf{(cf(7))} \\
&= B(L(x,y) + \tilde{L}(x,y), z) + (-1)^{\bar{x}\bar{y}} B(y, L(x,z) + \tilde{L}(x,z)) \\
&= B((L + \tilde{L})(x,y), z) + (-1)^{\bar{x}\bar{y}} B(y, (L + \tilde{L})(x,z))
\end{aligned}
$$

Par suite la relation (7) est vérifiée pour $L + \tilde{L}$.

De même

$$\left(L+\tilde{L}\right)\left(x,D(y,z,w)\right)=L\left(x,D(y,z,w)\right)+\tilde{L}\left(x,D(y,z,w)\right)$$

$$=(-1)^{\overline{x}(\overline{z}+\overline{w})}D\left(L(x,y),z,w\right)+(-1)^{\overline{x}\,\overline{w}}D\left(y,L(x,z),w\right)+D\left(y,z,L(x,w)\right)$$

$$+(-1)^{\overline{x}(\overline{z}+\overline{w})}D\left(\tilde{L}(x,y),z,w\right)+(-1)^{\overline{x}\,\overline{w}}D\left(y,\tilde{L}(x,z),w\right)+D\left(y,z,\tilde{L}(x,w)\right) \qquad \textbf{(cf(8))}$$

$$=(-1)^{\overline{x}(\overline{z}+\overline{w})}D\left(L(x,y)+\tilde{L}(x,y),z,w\right)+(-1)^{\overline{x}\,\overline{w}}D\left(y,L(x,z)+\tilde{L}(x,z),w\right)$$

$$+D\left(y,z,L(x,w)+\tilde{L}(x,w)\right)$$

$$=(-1)^{\overline{x}(\overline{z}+\overline{w})}D\left(\left(L+\tilde{L}\right)(x,y),z,w\right)+(-1)^{\overline{x}\,\overline{w}}D\left(y,\left(L+\tilde{L}\right)(x,z),w\right)+D\left(y,z,\left(L+\tilde{L}\right)(x,w)\right)$$

par suite la relation (8) est vérifiée pour $L+\tilde{L}$.

De même

$$D\left(u,v,\left(L+\tilde{L}\right)(x,y)\right)=D\left(u,v,L(x,y)\right)+D\left(u,v,\tilde{L}(x,y)\right)$$

$$=(-1)^{\overline{y}(\overline{u}+\overline{v})}L\left(D(u,v,x),y\right)+L\left(x,D(u,v,y)\right)+(-1)^{\overline{y}(\overline{u}+\overline{v})}\tilde{L}\left(D(u,v,x),y\right)$$

$$\cdot\tilde{L}\left(x,D(u,v,y)\right) \qquad \textbf{(cf(9))}$$

$$=(-1)^{\overline{y}(\overline{u}+\overline{v})}\left(L+\tilde{L}\right)\left(D(u,v,x),y\right)+\left(L+\tilde{L}\right)\left(x,D(u,v,y)\right)$$

Par suite la relation (9) est vérifiée par $L+\tilde{L}$ et donc $\mathcal{L}+\tilde{\mathcal{L}}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$.

<u>Thèorème III.2.3.</u>

Soient $\mathcal{L}=\{V;L\}$ une superalgèbre de Lie de projectivité d'une superalgèbre triple de Lie $\mathcal{G}=\{V;B,D\}$ et $\tilde{\mathcal{G}}=\left\{V;\tilde{B},\tilde{D}\right\}$ la superalgèbre triple de Lie en relation projective avec $\mathcal{G}$. Si $\tilde{\mathcal{L}}=\left\{V;\tilde{L}\right\}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\tilde{\mathcal{G}}$ et si toute superdérivation intérieure de $\mathcal{L}$ est une superdérivation de $\tilde{\mathcal{L}}$ et réciproquement alors $\tilde{\mathcal{L}}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$.
De plus, toute superalgèbre triple de Lie en relation projective avec $\tilde{\mathcal{G}}$ est en relation projective avec $\mathcal{G}$.

En effet, commençons par démontrer que $\tilde{\mathcal{L}}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$. Pour cela, vérifions les relations (7) ; (8) et (9).

D'après les hypothèses, nous avons les relations suivantes :

$$\tilde{B}(x,y)=B(x,y)+2L(x,y)$$

$$\tilde{D}(x,y,z)=D(x,y,z)-(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})}L\left(B(x,y),z\right)-(-1)^{\overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}(\overline{x}+\overline{y})}L\left(L(x,y),z\right)$$

pour tous $x, y, z \in V_0 \cup V_1$

$$\tilde{L}(x, B(y,z)) = \tilde{L}\big(x, \tilde{B}(y,z)\big) - 2\tilde{L}(x, L(y,z))$$

$$= \tilde{B}\big(\tilde{L}(x,y), z\big) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\tilde{B}\big(y, \tilde{L}(x,z)\big) - 2L\big(\tilde{L}(x,y), z\big) - 2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(y, \tilde{L}(x,z)\big)$$

(cf (7) pour $\tilde{\mathscr{L}}$ et le fait que les superdérivations intérieures de $\tilde{\mathscr{L}}$ sont des superdérivations de $\mathscr{L}$).

Par suite $\tilde{L}(x, B(y,z)) = B\big(\tilde{L}(x,y), z\big) + 2L\big(\tilde{L}(x,y)z\big) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B\big(y, \tilde{L}(x,z)\big)$

$+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(y, \tilde{L}(x,z)\big) - 2L\big(\tilde{L}(x,y), z\big) - 2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(y, \tilde{L}(x,z)\big)$

$= B\big(\tilde{L}(x,y), z\big) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B\big(y, \tilde{L}(x,z)\big)$ et la relation (7) est vérifiée.

$$\tilde{L}(x, D(y,z,w)) = \tilde{L}\big(x, \tilde{D}(y,z,w)\big) + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}\tilde{L}\big(x, L(B(y,z), w)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}\tilde{L}\big(x, L(L(y,z), w)\big)$$
$$= (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}\tilde{D}\big(\tilde{L}(x,y), z, w\big) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}\tilde{D}\big(y, \tilde{L}(x,z), w\big) + \tilde{D}\big(y, z, \tilde{L}(x,w)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}\tilde{L}\big(x, L(B(y,z), w)\big) + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}\tilde{L}\big(x, L(L(y,z), w)\big) \quad \big(\textbf{cf(8) pour } \tilde{\mathbf{L}}\big)$$
$$= (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}\Big(D\big(\tilde{L}(x,y), z, w\big) - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B\big(\tilde{L}(x,y), z\big), w\big)$$
$$-(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(\tilde{L}(x,y), z\big), w\big)\Big) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}\Big(D\big(y, \tilde{L}(x,z), w\big)$$
$$-(-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(B\big(y, \tilde{L}(x,z)\big), w\big) - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}L\big(L\big(y, \tilde{L}(x,z)\big), w\big)\Big)$$
$$+\Big(D\big(y, z, \tilde{L}(x,w)\big) - (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+(\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{w})}L\big(B(y,z), \tilde{L}(x,w)\big)$$
$$-(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+(\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{w})}L\big(L(y,z), \tilde{L}(x,w)\big)\Big)$$
$$+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}L\big(\tilde{L}(x, B(y,z)), w\big) + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}L\big(B(y,z), \tilde{L}(x,w)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}L\big(\tilde{L}(x, L(y,z)), w\big) + (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})+\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}L\big(L(y,z), \tilde{L}(x,w)\big)$$
$$= (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}D\big(\tilde{L}(x,y), z, w\big) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}D\big(y, \tilde{L}(x,z), w\big) + D\big(y, z, \tilde{L}(x,w)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}L\big(-B\big(\tilde{L}(x,y), z\big) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B\big(y, \tilde{L}(x,z)\big) + \tilde{L}\big(x, B(y,z)\big), w\big)$$
$$+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}L\big(-L\big(\tilde{L}(x,y), z\big) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\big(y, \tilde{L}(x,z)\big) + \tilde{L}\big(x, L(y,z)\big), w\big)$$
$$= (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}D\big(\tilde{L}(x,y), z, w\big) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}D\big(y, \tilde{L}(x,z), w\big) + D\big(y, z, \tilde{L}(x,w)\big)$$
$$+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}L\big(-\tilde{B}\big(\tilde{L}(x,y), z\big) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\tilde{B}\big(y, \tilde{L}(x,z)\big) + \tilde{L}\big(x, \tilde{B}(y,z)\big), w\big)$$

$$+(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}L\left(L\left(\tilde{L}(x,y),z\right)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\left(y,\tilde{L}(x,z)\right)-\tilde{L}(x,L(y,z)),w\right)$$

$$=(-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}D\left(\tilde{L}(x,y),z,w\right)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}D\left(y,\tilde{L}(x,z),w\right)+D\left(y,z,\tilde{L}(x,w)\right)$$

et la relation (8) est vérifiée.

$$D\left(u,v,\tilde{L}(x,y)\right)=\tilde{D}\left(u,v,\tilde{L}(x,y)\right)+(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L\left(B(u,v),\tilde{L}(x,y)\right)$$

$$+(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L\left(L(u,v),\tilde{L}(x,y)\right)$$

$$=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{L}\left(\tilde{D}(u,v,x),y\right)+\tilde{L}\left(x,\tilde{D}(u,v,y)\right)+(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L\left(B(u,v),\tilde{L}(x,y)\right)$$

$$+(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}L\left(L(u,v),\tilde{L}(x,y)\right) \qquad \textbf{(cf(9))}$$

$$=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{L}\left(D(u,v,x)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}L(B(u,v),x)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}L(L(u,v),x),y\right)$$

$$+\tilde{L}\left(x,D(u,v,y)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}L(B(u,v),y)-(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}L(L(u,v),y)\right)$$

$$+(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(L(B(u,v),x),y\right)+(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{L}\left(x,L(B(u,v),y)\right)$$

$$+(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(L(L(u,v),x),y\right)+(-1)^{\bar{u}\,\bar{v}+\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{L}\left(x,L(L(u,v),y)\right)$$

$$=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}\tilde{L}(D(u,v,x),y)+\tilde{L}(x,D(u,v,y))$$

Par suite la relation (9) est vérifiée.

Donc $\tilde{\mathcal{L}}=\left\{V;\tilde{L}\right\}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$. D'après le théorème III.2.2., $\mathcal{L}_1=\mathcal{L}+\tilde{\mathcal{L}}=\left\{V;L+\tilde{L}\right\}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$.

Montrons que $L\left(\tilde{L}(x,y),z\right)=\tilde{L}(L(x,y),z)\ \ \forall x,y,z\in V_0\cup V_1$.

$$L\left(\tilde{L}(x,y),z\right)=\left(\tfrac{1}{2}\tilde{B}-\tfrac{1}{2}B\right)\left(\tilde{L}(x,y),z\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\tilde{B}\left(\tilde{L}(x,y),z\right)-\tfrac{1}{2}B\left(\tilde{L}(x,y),z\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\tilde{L}\left(x,\tilde{B}(y,z)\right)-\tfrac{1}{2}(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\tilde{B}\left(y,\tilde{L}(x,z)\right)-\tfrac{1}{2}\tilde{L}\left(x,B(y,z)\right)+\tfrac{1}{2}(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B\left(y,\tilde{L}(x,z)\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\tilde{L}\left(x,\tilde{B}(y,z)-B(y,z)\right)-\tfrac{1}{2}(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\left(\tilde{B}-B\right)\left(y,\tilde{L}(x,z)\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\tilde{L}\left(x,2L(y,z)\right)-\tfrac{1}{2}(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}2L\left(y,\tilde{L}(x,z)\right)$$

$$=\tilde{L}\left(x,L(y,z)\right)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}L\left(y,\tilde{L}(x,z)\right)$$

$$=\tilde{L}\left(x,L(y,z)\right)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\left(\tilde{L}\left(L(y,x),z\right)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\tilde{L}\left(x,L(y,z)\right)\right)$$

$$=-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}\tilde{L}\left(L(y,x),z\right)=\tilde{L}\left(L(x,y),z\right)$$

$\tilde{\mathcal{L}} = \left\{V;\tilde{L}\right\}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité $\tilde{\mathcal{G}}$. Posons $\mathcal{G}' = \{V;B',D'\}$ la superalgèbre triple deLie en relation projective avec $\tilde{\mathcal{G}}$; alors nous avons les relations suivantes

$$B'(x,y) = \tilde{B}(x,y) + 2\tilde{L}(x,y)$$

$$D'(x,y,z) = \tilde{D}(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(\tilde{B}(x,y),z\right) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(\tilde{L}(x,y),z\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} B'(x,y) &= \tilde{B}(x,y) + 2\tilde{L}(x,y) = B(x,y) + 2L(x,y) + 2\tilde{L}(x,y) \\ &= B(x,y) + 2L_1(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'(x,y,z) &= \tilde{D}(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(\tilde{B}(x,y),z\right) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(\tilde{L}(x,y),z\right) \\ &= D(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\left(B(x,y),z\right) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\left(L(x,y),z\right) \\ &-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(B(x,y),z\right) - 2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(L(x,y),z\right) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(\tilde{L}(x,y),z\right) \\ &= D(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L_1\left(B(x,y),z\right) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L_1\left(L_1(x,y),z\right) \end{aligned}$$

et alors $\mathcal{G}$ est en relation projective avec $\mathcal{G}'$ à travers la superalgèbre de Lie de projectivté $\mathcal{L}_1 = \{V;L_1\}$.

De la démonstration du théorème précédent, nous tirons le lemme suivant :

Lemme III.2.4.

Sous les hypothèses du théorème précédent on a $L\left(\tilde{L}(x,y),z\right) = \tilde{L}\left(L(x,y),z\right)\ \forall x,y \in V_0 \cup V_1$.

Maintenant, soit $\mathcal{L} + \tilde{\mathcal{L}}$ la superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$ obtenue dans le théorème III.2.2. ; alors la superalgèbre triple de Lie en relation projective avec $\mathcal{G}$ est définie par $\mathcal{G}^{\mathcal{L}+\tilde{\mathcal{L}}} = \left\{V\ ;\ B^{\mathcal{L}+\tilde{\mathcal{L}}}, D^{\mathcal{L}+\tilde{\mathcal{L}}}\right\}$

avec $B^{\mathcal{L}+\tilde{\mathcal{L}}}(x,y) = B(x,y) + 2L(x,y) + 2\tilde{L}(x,y)$

$$\begin{aligned} D^{\mathcal{L}+\tilde{\mathcal{L}}}(x,y,z) &= D(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L\left(B(x,y),z\right) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{L}\left(B(x,y),z\right) \\ &- (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\left(L+\tilde{L}\right)\left(\left(L+\tilde{L}\right)(x,y),z\right). \end{aligned}$$

Il est clair que si $\mathcal{L}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de la superalgèbre triple de Lie $\mathcal{G}$, alors la superalgèbre de Lie $\mathcal{L}^k = k\mathcal{L} = \{V;kL\}$ avec $k \in K$, k non nul est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$.

Il est évident que $\mathcal{L}^k + \mathcal{L}^h = \mathcal{L}^{k+h}$, $\forall h,k \in K$ et $\mathcal{L}^0$ est une superalgèbre de Lie abelienne. Ceci nous conduit au corollaire suivant :

Corollaire III.2.5.

Pour toute superalgèbre de Lie $\mathcal{L}$ de projectivité de la superalgèbre triple de Lie $\mathcal{G}$, il existe une famille $\left\{\mathcal{L}^k, k \in K\right\}$ de superalgèbres de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$. De plus pour tout $\mathcal{L}^k$, la superalgèbre triple de Lie en relation projective avec $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^k$ est définie par

$$\mathcal{G}^k = \left\{V \,;\, B^k, D^k\right\}$$

$$B^k(x,y) = B(x,y) + 2kL(x,y)$$

$$D^k(x,y,z) = D(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} kL(B(x,y),z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} k^2 L(L(x,y),z)$$

$$\forall x,y,z \in V_0 \cup V_1.$$

Deux quelconques superalgèbres triples de Lie $\mathcal{G}^k$ et $\mathcal{G}^h$ sont en relation projective à travers la superalgèbre de Lie de projectivité $\mathcal{L}^{h-k}$.

En effet, $\left\{\mathcal{L}^k, k \in K\right\}$ est une famille de superalgèbres de Lie de projectivité de $\mathcal{G}$. De plus, pour tout $q \in K$, $\mathcal{L}^q$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{G}^k$. Soit $\tilde{\mathcal{G}}$ la superalgèbre triple de Lie en relation projective avec $\mathcal{G}^k$ par $\mathcal{L}^{h-k}$ alors nous avons $\tilde{B}$ et $\tilde{D}$ qui sont définies par

$$\begin{aligned}\tilde{B}(x,y) &= B^k(x,y) + 2(h-k)L(x,y)\\ &= B(x,y) + 2kL(x,y) + 2(h-k)L(x,y)\\ &= B^h(x,y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}(x,y,z) &= D^k(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(h-k)L\left(B^k(x,y),z\right)\\ &\quad - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(h-k)^2 L(L(x,y),z)\\ &= D(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} kL(B(x,y),z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} k^2 L(L(x,y),z)\\ &\quad - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(h-k)L(B(x,y),z) - 2(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(h-k)kL(L(x,y),z)\\ &\quad - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}(h-k)^2 L(L(x,y),z)\\ &= D(x,y,z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} hL(B(x,y),z) - (-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})} h^2 L(L(x,y),z)\\ &= D^h(x,y,z)\end{aligned}$$

III.3 PROJECTIVITE DES SUPERALGEBRES DE LIE ET DES SUPER-SYSTEMES TRIPLES DE LIE

Dans ce paragraphe, nous étudions la projectivité de deux cas particuliers de superalgèbres triples de Lie. Le cas où B = 0 et le cas où D = 0.

Il est évident que toute superalgèbre de Lie $\mathcal{G}=\{V;B\}$ peut être considérée comme une superalgèbre triple de Lie avec D = 0. De même un super-système triple de Lie $\mathcal{S}=\{V;D\}$peut être vu comme une superalgèbre triple de Lie avec B = 0. D'où la définition suivante qui est équivalente à la définition II.1.7.

Définition III.3.1.

Un super-système triple de Lie $\mathcal{S}=\{V;D\}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué V muni d'une application trilinéaire $D: V\times V\times V \to V$ telle que

$$D(x,y,z)=-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}D(y,x,z)$$

$$D(x,y,z)+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}D(y,z,x)+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}D(z,x,y)=0$$

$$D(u,v,D(x,y,z))=D(D(u,v,x),y,z)+(-1)^{\bar{x}(\bar{u}+\bar{v})}D(x,D(u,v,y),z)$$
$$+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}D(x,y,D(u,v,z))$$

pour tous $x,y,z,u,v \in V_0 \cup V_1$.

Voyons d'abord le cas des suparalgèbres de Lie

Soit $\mathcal{G}=\{V;B\}$ une superalgèbre de Lie considérée comme une superalgèbre triple de Lie avec D = 0. Dans ce cas, toute superalgèbre de Lie $\mathcal{L}=\{V;L\}$ de projectivité de $\mathcal{G}$ est définie par la relation

$L(x,B(y,z))=B(L(x,y),z)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}B(y,L(x,z)),\qquad \forall x,y,z \in V_0 \cup V_1$ d'après la définition III.1.2

Si L vérifie cette relation alors d'après le théorème III.1.3. $\mathcal{G}$ induit une superalgèbre triple de Lie $\tilde{\mathcal{G}}=\{V;\tilde{B},\tilde{D}\}$ définie par les relations

$$\tilde{B}(x,y)=B(x,y)+2L(x,y)$$

$$\tilde{D}(x,y,z)=-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L(B(x,y),z)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L(L(x,y),z).$$

Or $\mathcal{G}$ étant une superalgèbre de Lie, $\mathcal{G}$ vérifie cette relation ; donc toute superalgèbre de Lie $\mathcal{G}=\{V;B\}$ admet une superalgèbre de Lie de projectivité qui est elle-même.

D'après le corollaire III.2.3. nous obtenons une famille de superalglèbres de Lie $k\mathcal{G}=\{V;kB\}$ de projectivité de $\mathcal{G}$ et par conséquent une famille de superalgèbres triples de Lie $\mathcal{G}^k=\{V;B^k,D^k\}$ $k\in K$, définie par les relations :

$B^k(x,y)=(2k+1)B(x,y)$

$D^k(x,y,z)=-k(1+k)(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}B(B(x,y),z)\ \forall x,y,z\in V_0\cup V_1,$

qui sont en relation projective avec $\mathcal{G}^0=\mathcal{G}$.

Voyons maintenant le cas des super-systèmes triples de Lie.

Soit $\mathcal{L}=\{V;L\}$ une superalgèbre de Lie.

En posant $D_L(x,y,z)=(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L(L(x,y),z)\ \forall x,y,z\in V_0\cup V_1$, alors le système $\{V;D_L\}$ devient un super-système triple de Lie.

Soit $\mathcal{S}=\{V;D\}$ un super-système triple de Lie ; alors $\mathcal{S}$ est une superalgèbre triple de Lie avec B = 0. La projectivité de $\mathcal{S}$ peut être vu de la façon suivante : soit $\mathcal{L}=\{V;L\}$ une superalgèbre de Lie. Alors d'après la définition III.1.2, $\mathcal{L}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\mathcal{S}$ si les relations suivantes sont satisfaites pour tous x, y, z, u, v, w $\in V_0\cup V_1$

$L(x,D(y,z,w))=(-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}D(L(x,y),z,w)+(-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}D(y,L(x,z),w)+D(y,z,L(x,w))$

$D(u,v,L(x,y))=(-1)^{\bar{y}(\bar{u}+\bar{v})}L(D(u,v,x),y)+L(x,D(u,v,y)).$

Supposons que $\mathcal{L}=\{V;L\}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité du super-système triple de Lie $\mathcal{S}=\{V;D\}$. Alors, d'après le théorème III.1.3, la superalgèbre triple de Lie $\tilde{\mathcal{G}}=\{V;\tilde{B},\tilde{D}\}$ en relation projective avec $\mathcal{S}$ se définit comme suit :

$$\tilde{B}(x,y)=2L(x,y)$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}(x,y,z)&=D(x,y,z)-(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}L(L(x,y),z)\\&=D(x,y,z)-D_L(x,y,z)\end{aligned}$$

d'où nous vérifions aisément que : $\tilde{\mathcal{L}}=\{V;\tilde{B}\}$ est une superalgèbre de Lie et $\tilde{\mathcal{S}}=\{V;\tilde{D}\}$ est un super-système triple de Lie.

De plus $\tilde{B}(x,\tilde{D}(y,z,w))=\tilde{B}\left(x,D(y,z,w)-(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}L(L(y,z),w)\right)$

$=2L(x,D(y,z,w))-2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}L(x,L(L(y,z),w))$

$=2(-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}D(L(x,y),z,w)+2(-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}D(y,L(x,z),w)+2D(y,z,L(x,w))$

$\quad-2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})}L(L(x,L(y,z)),w)+2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}}L(L(x,w),L(y,z))$

$$= 2(-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})} D(L(x,y),z,w) + 2(-1)^{\bar{x}\,\bar{w}} D(y,L(x,z),w) + 2D(y,z,L(x,w))$$
$$- 2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})} L(L(L(x,y),z),w) + 2(-1)^{\bar{w}(\bar{y}+\bar{z})} L(L(L(x,z),y),w)$$
$$- 2(-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+(\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{w})} L(L(y,z),L(x,w))$$
$$= (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}\Big(D(2L(x,y),z,w) - (-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})} L(L(2L(x,y),z),w)\Big)$$
$$+ (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}\Big(D(y,2L(x,z),w) - (-1)^{\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})+\bar{w}(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})} L(L(y,2L(x,z)),w)\Big)$$
$$+ D(y,z,2L(x,w)) - (-1)^{\bar{y}\,\bar{z}+(\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{w})} L(L(y,z),L(x,w))$$

d'où $\tilde{B}(x,\tilde{D}(y,z,w)) = (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}\tilde{D}(\tilde{B}(x,y),z,w) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}\tilde{D}(y,\tilde{B}(x,z),w)$
$+ \tilde{D}(y,z,\tilde{B}(x,w))$

Cela nous amène au théorème suivant :

Théorème III.3.2.

Une superalgèbre triple de Lie $\tilde{\mathcal{G}} = \{V;\tilde{B},\tilde{D}\}$ est en relation projective avec un super-système triple de Lie $\mathcal{S} = \{V;D\}$ si et seulement si $\tilde{\mathcal{L}} = \{V\ ;\ \tilde{B}\}$ est une superalgèbre de Lie, $\tilde{\mathcal{S}} = \{V\ ;\ \tilde{D}\}$ est un super-système triple de Lie et la relation suivante est vérifiée pour tous $x,y,z,w \in V_0 \cup V_1$

$$\tilde{B}(x,\tilde{D}(y,z,w)) = (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}\tilde{D}(\tilde{B}(x,y),z,w) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}\tilde{D}(y,\tilde{B}(x,z),w) + \tilde{D}(y,z,\tilde{B}(x,w)).$$

En effet, on a déjà montré que si $\tilde{\mathcal{G}} = \{V;\tilde{B},\tilde{D}\}$ est en relation projective avec un super-système triple de Lie $\mathcal{S} = \{V;D\}$ alors $\tilde{\mathcal{L}} = \{V\ ;\ \tilde{B}\}$ est une superalgèbre de Lie, $\tilde{\mathcal{S}} = \{V\ ;\ \tilde{D}\}$ est un super-système triple de Lie et la relation suivante est vérifiée pour tous $x,y,z,w \in V_0 \cup V_1$

$$\tilde{B}(x,\tilde{D}(y,z,w)) = (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}\tilde{D}(\tilde{B}(x,y),z,w) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}\tilde{D}(y,\tilde{B}(x,z),w) + \tilde{D}(y,z,\tilde{B}(x,w)).$$

Réciproquement, soit $\tilde{\mathcal{G}} = \{V;\tilde{B},\tilde{D}\}$ une superalgèbre triple de Lie telle que $\tilde{\mathcal{L}} = \{V;\tilde{B}\}$ est une superalgèbre de Lie, $\tilde{\mathcal{S}} = \{V;\tilde{D}\}$ est un super-système triple de Lie et $\forall x,y,z,w \in V_0 \cup V_1$, on a

$$\tilde{B}(x,\tilde{D}(y,z,w)) = (-1)^{\bar{x}(\bar{z}+\bar{w})}\tilde{D}(\tilde{B}(x,y),z,w) + (-1)^{\bar{x}\,\bar{w}}\tilde{D}(y,\tilde{B}(x,z),w) + \tilde{D}(y,z,\tilde{B}(x,w)).$$

Nous définirons une superalgèbre de Lie de projectivité de $\tilde{\mathcal{G}}$ et la superalgèbre triple de Lie induite par $\tilde{\mathcal{G}}$ par le théorème III.1.3.

Posons $L(x,y) = -\frac{1}{2}\tilde{B}(x,y), \ \forall x,y \in V_0 \cup V_1$.

Alors nous vérifions que $\mathcal{L} = \{V;L\}$ est une superalgèbre de Lie de projectivité de $\tilde{\mathcal{G}}$. La superalgèbre triple de Lie $\mathcal{G} = \{V;B,D\}$ induite par $\tilde{\mathcal{G}}$ est définie par les relations :

$$B(x,y) = \tilde{B}(x,y) + 2\left(-\frac{1}{2}\tilde{B}(x,y)\right) = 0$$

$$\begin{aligned} D(x,y,z) &= \tilde{D}(x,y,z) + \frac{1}{2}(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{B}\left(\tilde{B}(x,y),z\right) - \frac{1}{4}(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\tilde{B}\left(\tilde{B}(x,y),z\right) \\ &= \tilde{D}(x,y,z) + \frac{1}{4}\tilde{B}\left(\tilde{B}(x,y),z\right) = \tilde{D}(x,y,z) + \frac{1}{4}D_{\tilde{B}}(x,y,z) \end{aligned}$$

alors $\mathcal{G} = \{V;B,D\}$ se ramène à $\mathcal{S} = \{V;D\}$ qui est un super-système triple de Lie en relation projective avec $\tilde{\mathcal{G}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. J. A. BERE , Superalgèbre de Malcèv, Thèse de Doctorat 3e cycle mathématiques, soutenue le 29 avril 1998 à la FAST (Université de Ouagadougou).

[2] V.G. KAC, Lie superalgebras, Advances in Math **26** (1977) 8-96.

[3] M. KIKKAWA, Projectivity of Lie triple algebras, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Series B : Mathematical Science **31** (1998), pp. 11 - 20.

[4] A. KOULIBALY, S. TOURE :`Superalgèbres de Malcèv. Preprint

[5] E. N. KUZ'MIN, Mal'tsev algebras and their representations, Algebra i Logika, Vol. **7**, n° 4, pp. 48-69, July-August, 1968.

[6] M. F. OUEDRAOGO, Sur les superalgèbres de Lie, Mémoire de D.E.A. (Décembre 1994) FA.S.T. , Université de Ouagadougou.

[7] L. E. ROSS, Representations of graded Lie algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965) 17-23.

[8] M. SCHEUNERT, The theory of Lie superalgebras. An introduction, Lectures notes in Math. **716**, Springer-Verlag, Heidelberg 1979.

[9] K. TRAORE, Cohomologie des algèbres de Malcèv, Thèse de Doctorat de 3e cycle mathématiques soutenue le 18 mai 1990 à l'IMP (Université de Ouagadougou).

[10] K. YAMAGUTI, On the theory of Malcev algebras, Kumamoto J. Sci. **A6** n° 1, 9 - 45 (1963).

RESUME

Nous apportons par cette thèse notre modeste contribution à l'étude des superalgèbres triples de Lie. Elle est subdivisée en trois chapitres.

Le premier chapitre est un rappel de définitions et de propriétés connues sur les superalgèbres et les superalgèbres de Malcèv. Dans le deuxième chapitre après avoir donné les définitions de la notion de superalgèbres triples de Lie et de supersystèmes triples de Lie, nous étudions la super-représentation faible d'une superalgèbre de Malcèv. Nous montrons qu'une super-représentation de Malcèv est une super-représentation faible, nous donnons une condition pour qu'une super-représentation faible soit une super-représentation de Malcèv et nous établissons les groupes de cohomologie liés à la super-représentation faible. Dans le troisième chapitre, nous définissons la notion de relation projective entre superalgèbles triples de Lie. Nous étudions la famille des superalgèbres de Lie de projectivité d'une superalgèbre triple de Lie. Nous montrons qu'une superalgèbre de Lie admet une famille de superalgèbres de Lie de projectivité et nous donnons une condition qu'une superalgèbre triple de Lie soit en relation projective avec un super-système triple de Lie.

Mots clés : Espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, enveloppe grassmannienne. Superalgèbre, superalgèbre triple de Lie, super-représentation faible, superalgèbre de Lie de projectivité.