N° d'ordre :   Année 2001

THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES EXACTES
ET APPLIQUÉES DE L'UNIVERSITÉ
DE OUAGADOUGOU

pour obtenir le

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
DE OUAGADOUGOU
Spécialité : Mathématiques et Applications**

ETUDE DE PROBLÈMES ELLIPTIQUES-PARABOLIQUES NON LINÉAIRES EN UNE DIMENSION D'ESPACE

par

Stanislas OUARO

Soutenue le 29 novembre 2001

Après avis de :

Rapporteurs	J.I. DIAZ	Professeur Universidad Complutense de Madrid (Espagne)
	M.T. NIANE	Professeur Université Gaston Berger (Sénégal)
	A.OUEDRAOGO	Professeur Université de Ouagadougou (Burkina Faso)

devant la Commission d'Examen :

Président	A. OUEDRAOGO	Professeur Université de Ouagadougou (Burkina Faso)
Directeur de thèse	H.TOURE	Maître de Conférences Université de Ouagadougou (Burkina Faso)
Examinateurs	A. KOULIBALY	Professeur Université de Ouagadougou (Burkina Faso)
	M.T.NIANE	Professeur Université Gaston Berger (Sénégal)
	F. SIMONDON	Maître de Conférences HDR Université de Franche-Comté (France)
	B. SOME	Maître de Conférences Université de Ouagadougou (Burkina Faso)

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

Président : Monsieur le Professeur Alfred. S. TRAORE

Vices Présidents : S. GUINKO, J. PARE, F.R. TALL

U.F.R. DES SCIENCES EXACTES ET APPLIQUEES

DIRECTEUR
M. Jean Boukary LEGMA, Chimie

DIRECTEUR ADJOINT
M. Gerard SEGDA, Physique

PROFESSEUR HONORAIRE
M.Yembila TOGUIENI

PROFESSEURS

KOULIBALY Akry	: Mathématiques
KABRE Tibo Siméon	: Chimie
LEGMA Jean Boukary	: Chimie
NACRO Mouhoussine	: Chimie
OUATTARA Moussa	: Mathématiques
OUEDRAOGO Albert	: Mathématiques
OUEDRAOGO Guy Venace	: Chimie
SIB Sié Faustin	: Chimie
TRAORE Harouna	: Chimie

MAITRES DE CONFERENCES

BARY Aboudramane	: Chimie
BONZI/COULIBALY Yvonne	: Chimie
KOUDA/FONAFOS Marie	: Chimie
KOULIDIATI Jean	: Physique
OUEDRAOGO Raguilnaaba	: Chimie
SABA Adama	: Chimie
SEGDA Gerard	: Physique
SIE Oumarou	: Informatique
SOME Blaise	: Mathématiques
TAPSOBA I.M.Théodore	: Mathématiques
TOURE Hamidou	: Mathématiques
ZOUGMORE François	: Physique

MAITRES ASSISTANTS

BATIOBO Joseph	: Physique
BAYO Kalifa	: Chimie
BONKIAN.S.Marcel	: Probabilité
BONOU Lucien	: Chimie
BONZI.K. Bernard	: Mathématiques
GADIAGA Dembo	: Probabilité/Statistique
GUEL Boubié	: Chimie
KIENTEGA Gerard	: Mathématiques
KIENOU Florent	: Physique
KOALGA Zacharie	: Physique
CISSE Ousmane	: Physique
GUIGUEMDE Issiaka	: Chimie
OUEDRAOGO Gomtibo	: Physique
OUEDRAOGO Alioune	: Physique
PILABRE Boukary	: Mathématiques
SOME Longin	: Mathématques
SOUGOTI Moussa	: Physique
TRAORE Kalifa	: Mathématiques
TRAORE Karfa	: Chimie
TOURE Alfred	: Mathématiques
AMIDOU Boubacar Yobi	: Mathématiques
ZONGO .O . Michel	: Physique
SEYNOU Aboubacar	:Mathématiques

ASSISTANTS

BERE Come Antoine	: Mathématiques
KAFANDO Pétronille	: Physique
OUEDRAOGO. M. Françoise	: Mathématiques
Tapsoba Edouard	: Chimie

Sécrétaire Principal : DA . D. Auguste

Responsable de la scolarité : KOURAOGO.B. Sidiki

Chef du Service Administratif et Financier : OUEDRAOGO. Marc

REMERCIEMENTS

Je crois sincèrement avoir eu une chance. Pendant quelques années, Hamidou TOURE m'a mené dans le monde de la recherche en ayant su me proposer un sujet d'actualité enrichissant. Parmi tout ce qu'il m'a donné, il m'est difficile de choisir le plus précieux. Peut-être, est-ce le goût pour la beauté des mathématiques ; la volonté de ne pas s'arrêter à mi-chemin, d'aller au fond des choses. Et surtout, la confiance qu'il m'a accordée, au-delà de ce que j'aurais pu espérer. A Hamidou TOURE, j'adresse ma première pensée et ma plus profonde gratitude.

Jesus Ildefonso DIAZ a accepté de donner son avis sur ce mémoire, son appréciation m'est très importante. Je lui suis profondément reconnaissant.

Je suis reconnaissant à Mary Teuw NIANE pour son rapport sur cette thèse, pour avoir pris part à ce jury, et pour tous les encouragements qu'il m'a donné tout au long de ce travail.

Mes remerciements vont à Albert OUEDRAOGO pour l'avis qu'il a donné sur ce travail. De plus, il m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse.

Akry KOULIBALY a bien voulu s'intéresser aux questions abordées dans cette thèse et participer à ce jury. Sa passion pour les mathématiques et ses encouragements constants à mon égard ont été des atouts précieux pour l'accomplissement de ce travail. Je lui suis doublement reconnaissant.

Blaise SOME m'a fait l'honneur de participer à ce jury. Son encouragement constant m'a été précieux. Je lui adresse ma profonde reconnaissance.

Madame Frédérique SIMONDON a bien voulu s'intéresser aux questions abordées dans cette thèse et participer à ce jury. Ses remarques me seront très utiles dans l'avenir ; je la remercie de son engagement.

J'ai eu l'honneur de discuter quelques fois avec Mohamed MALIKI sur la forme et certaines questions de ce travail ; ses conseils m'ont été d'une aide précieuse. Je lui dis « merci ».

Mon ami et professeur de mathématiques de Dédougou, Issa OUEDRAOGO actuellement inspecteur de mathématiques m'a donné le goût de cette discipline par sa rigueur et sa confiance en moi ; qu'il reçoive ici toute ma reconnaissance.

La grande disponibilité de Gerard Kientega, Bernard Bonzi, Marcel.S. Bonkian, Dembo Gadiaga, Sado Traoré, Blaise Koné, Younoussa Millogo m' a facilité la tâche ; leur gentillesse m'a touché. Je leur dis « merci ».

Il m'est agréable d'exprimer toute ma reconnaissance aux divers enseignants du département de mathématiques de l'U.F.R/S.E.A pour l'ambiance amicale, calme et propice au travail dont ils m'ont entouré.

Je dis « merci » à mes amis : ceux de Ouagadougou, de Saint-Louis, de Cotonou, de Nouakchott... On a partagé de bons moments ; leur encouragement m'a beaucoup aidé.
Que chacun de ceux qui ne se verront pas cités ici trouvent l'expression de ma reconnaissance.

DEDICACE

Je dédis ce travail tout d'abord à l'Eternel mon Dieu qui m'a béni tout au long de ce travail.
Ensuite, je voudrais dédier ce travail en la mémoire de mon père qui aurait tant voulu voir ce jour , à mes frères et à ma sœur dont le soutien à été sans faille.
Ma mère et ma fiancée Bertine m'ont apporté un soutien inestimable, je leur dédie cette thèse.
Je voudrai enfin dédier ce travail en la mémoire de Phillipe Bénilan qui ne cessait jamais de m'encourager et avec qui j'ai eu des échanges fructueux.

Table des matières

Première partie

INTRODUCTION GENERALE

Dans ce travail, nous étudions le problème de Cauchy associé à l'équation doublement non linéaire de type elliptique-parabolique dégénéré :

$b(u)_t - a(u, \varphi(u)_x)_x = f$ sur $Q =]0, T[\times I\!R$,

à l'aide de la la théorie générale des équations d'évolutions dans un espace de Banach .

Les fonctions b et φ sont des applications continues , croissantes (au sens large), et $a(k, \xi)$ est une fonction continue , telle que $a(k, .)$ soit croissante (au sens large) ; de plus b est supposée surjective.

Ces types de problèmes où apparait un mixage de phénomènes d'ellipticité et de parabolicité sont rencontrés dans la modélisation de divers phénomènes physiques :

Par exemple , selon Alt et Luckhauss , l'écoulement d'un gaz à travers un milieu poreux est décrit par une équation du type $u_t = (u^m)_{xx}$ en une dimension d'espace avec $m > 1$. Cette équation peut etre transformée en une équation du type $b(u)_t = (u)_{xx}$ avec $b(z) := \max(z, 0)^{\frac{1}{m}}$ ou $(sign\ z)\,|z|^{\frac{1}{m}}$ et dans ce cas, elle tombe dans la classe des équations que nous considérons. Les solutions de ce type de problèmes ont étés intensivement étudiées par Oléinik, Kalashnikov et Yui-lin $[OKY]$ et par Aronson$[Ad]$.

On peut citer également la filtration instable d'un fluide incompressible dans un milieu poreux qui est décrite selon Alt et Luckhauss par une équation du type:

$\theta(p)_t = \nabla.(k(\theta(p)))\ (\nabla p + e)$

où p est la pression inconnue, $-e$ la direction de la gravité , k la conductivité du milieu poreux , θ le contenu d'eau. Ce type de problème est régi par la classe des équations que nous considérons. Il a été étudié de façon intensive par Hornung $[H]$ en utilisant la théorie des opérateurs monotones et par Van Duyn et Peletier $[DP]$ en utilisant la régularisation parabolique.

Lorsque $\varphi \equiv 0$, $b(u) = u$, ce problème se ramène au problème du premier ordre suivant qui est une loi de conservation scalaire :

$u_t - a(u, 0)_x = f$ sur Q pour lequel , il est bien connu que si $a(k, 0)$ n'est pas monotone en k , il n'y a pas en général existence d'une solution u continue sur $I\!R$, ni unicité d'une solution faible .

L'étude de la loi de conservation scalaire a connu une avancée significative grâce à l'introduction par S.N.Kruskhov $[Ks]$ de la notion de solution entropique ; c'est avec cette méthode que les équations du type $b(u)_t - \nabla(a(\nabla u) + e(u)) = f$ ont pu être étudiées sous des conditions e continue lipschitzienne $[AL]$.

Il faut surtout noter que l'étude du problème général a commencé à être bien comprise grâce aux travaux de Alt et Luckauss $[AL]$ où à côté d'hypothèses générales permettant d'utiliser un bon cadre variationnel, apparait clairement la condition de structure : $a(k,\xi) = \tilde{a}(b(k),\xi)$ avec $\tilde{a}$ continue en (k,ξ), et croissante en ξ .

Des résultats récents ont permis d'approfondir et de généraliser ceux de Alt et Luckauss : nous pouvons citer entre autres, les travaux de Bénilan et Touré[$BT2$] et [$BT3$] , Carrillo[Ca], Maliki , Carrillo et Touré [CMT] , et de Bénilan et Wittbold [$BW1$] et [$BW2$].

Bénilan et Touré ont étudié le problème $u_t - a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x = f$ (c'est à dire le cas où $b = id$) pour lequel ils ont dévéloppé l'approche par la théorie des semi-groupes non linéaires du problème aux limites associés (voir [$BT2$], [$BT3$]) ; ils obtiennent ainsi des résultats d'existence et d'unicité de solutions entropiques sans la condition de structure de Alt et Luckhaus. Ils ont aussi dévéloppé la notion de dépendance continue des solutions obtenues par rapport aux données.

Bénilan et Wittbold par contre se sont intéressés à l'étude du problème $b(u)_t - a(u,u_x) = f$ (c'est à dire le cas où $\varphi = id$) pour lequel ils ont aussi dévéloppé l'approche par la théorie des semi-groupes non linéaires du problème aux limites associés ; ils obtiennent ainsi sans la condition de structure, l'existence de "bonnes solutions"au sens de la théorie des semi-groupes non linéaires (voir[$BW1$]). Par la suite, en considérant la condition de structure de Alt et Luckhaus, ils montrent que la "bonne solution" est solution faible du problème (voir[$BW1$]).

Compte tenu de ces résultats, la question naturelle qui se pose est :" la condition de structure est -elle essentielle pour l'obtention de solution faible comme elle parait l'être dans [$BW1$] ? ".

La réponse à cette question a été donnée dans [$BW2$]. Dans cet article, Bénilan et Wittbold ont montré que la condition de structure n'était pas essentielle pour obtenir l'existence de solutions faibles car dans certains cas d'équations comme dans le cas de l'équation $b(u)_t = u_{xx} + F(u)_x$, sous certaines hypothèses sur b,Ils établissent un résultat d'existence (et d'unicité) de solution faible pour le problème de Cauchy-Dirichlet associé sans la condition de structure.

Par contre , l'étude du problème général n'a pas encore été abordé sous les hypothèses de types générales sur b et φ que nous considérons dans cette étude.

Notre travail consiste à utiliser la théorie générale des semi-groupes non linéaires dans $L^1(I\!R)$ pour obtenir des "bonnes solutions"du problème et à faire le lien entre ces solutions, les solutions faibles et les solutions entropiques(au sens de Kruskhov). C'est cette démarche qui a motivé le plan que nous avons suivi :

Le chapitre 1 est consacré à quelques rappels et notations propres à la théorie et aux espaces fonctionnels utilisés.

Dans Le chapitre 2 , nous étudions l'équation résolvante associée au problème d'évolution.

Nous définissons dans ce chapitre, l'opérateur A_b associé au problème stationnaire. Nous montrons que cet opérateur est T-accrétif dans $L^1(I\!R)$ à domaine dense et vérifie la condition d'image.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du problème d'évolution :

Une première partie consiste en l'application de la théorie des semi-groupes non linéaires dans $L^1(I\!R)$, compte tenu des résultats dévéloppés au chapitre 2.

L'étude de l'équation résolvante conduite au chapitre 2, nous permet de dévélopper une théorie d'existence (et d'unicité) de solutions générales au sens de la théorie des semi-groupes, de l'équation d'évolution sans la condition de structure de type Alt et Luckhauss.

Enfin dans une troisième et dernière partie, nous montrons que sous la condition de structure, la "bonne solution" est solution faible d'énergie finie du problème d'évolution.

Deuxième partie

ETUDE DU PROBLEME

Chapitre 1

RAPPELS ET NOTATIONS

Nous donnons dans ce chapitre, des définitions et rappels de certaines propriétés des opérateurs accrétifs et des espaces utilisés.

Un opérateur d'un espace de Banach X est une application de X dans $P(X)$, ensemble des parties de X .

Nous identifierons souvent un opérateur A avec son graphe dans $X \times X$, c'est à dire l'ensemble $\{(x,y) \in X \times X$ tel que $y \in Ax\}$.

Nous notons $\bar{A}$ l'adhérence (ou fermeture) dans $X \times X$ du graphe de A .

Pour tout réel λ, λA désignera l'opérateur de graphe :

$$\{(x,y) \in X \times X \text{ tel que } y \in \lambda Ax\}.$$

Si B est un autre opérateur , $A + B = \{(x,y) \in X \times X$ tel que $y \in Ax + Bx\}$.

Le domaine d'un opérateur A de X , est notée $D(A)$ et est égale à :

$$D(A) = \{x \in A;\ \ Ax \neq \emptyset\}.$$

L'image d'un opérateur A de X , est noté $R(A)$ et est égale à :

$$R(A) = \cup_{x \in X} Ax$$

$$f^+ = \sup(f,0)\,; \quad f^- = \sup(-f,0) \quad .$$

Nous poserons :

$$sign_0 r = \begin{cases} +1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

$$sign r = \begin{cases} +1 & \text{si } r > 0 \\ [-1,1] & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

$$sign^+ r = \begin{cases} +1 & \text{si } r > 0 \\ [0,1] & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

$$sign_0^+ r = \begin{cases} +1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r \leq 0 \end{cases}$$

$sign_0^- r \ = sign_0^+(-r\ )$ et $sign^-(r\ ) = sign^+(-r)$.

$H_\varepsilon(s) = \min(\dfrac{s^+}{\varepsilon}, 1)$ et $H_0(s) = sign_0^+(s)$.

Etant donné Q un espace localement compact muni d'une mesure positive (pratiquement Q sera un ouvert de $\mathbb{R}$ où le produit d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par un ouvert de $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue).

Pour tout p , $1 \leq p < \infty$:

$L^p(Q)$ (resp. $L^p_{loc}(Q)$) est l'espace des (classes de) fonctions numériques mesurables de puissance $p - ième$ intégrable sur Q (resp. sur tout compact de Q).

$L^\infty(Q)$ (resp.$L^\infty_{loc}(Q)$) , désigne l'espace des (classes de) fonctions numériques mesurables, essentiellement bornées sur Q (resp. sur tout compact de Q).

Les espaces $L^p(Q)$ (resp. $L^\infty(Q)$) sont normés :

$$\|u\|_{L^p(Q)} = \|u\|_p = (\int_Q |u|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$(\text{resp. } \|u\|_{L^\infty(Q)} = \|u\|_\infty = \sup_Q ess\, |u|)$$

Pour tout entier $m \geq 1$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(Q)$ par :

$$H^m(Q) = \{v \in L^2(Q)\ ,\ \partial^\alpha v \in L^2(Q), |\alpha| \leq m\}$$

$$où \quad \partial^\alpha v = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} v$$

$$avec \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

$H^m_{loc}(Q)$ est l'espace des fonctions appartenant à $H^m(\Omega)$, pour tout compact Ω de Q.

$H^m(Q)$ est muni d'une norme : $\|u\|_{H^m(Q)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{m,Q}$ avec le produit scalaire

$$(u,v)_{m,Q} = \int_Q \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha u\ \partial^\alpha v \right\} dx.$$

$W^{m,p}(Q) = \left\{u \in L^p(Q) \text{ tel que } \partial^k u \in L^p(Q), \text{ avec } |k| \leq m\right\}.$

Etant donné une fonction w localement lipschitzienne , on notera

$$\|w\|_{Lip(|x|\leq R)} = \sup\left\{ \frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|}\ ,\ x \neq y\ ,\ |x| \leq R\ ,\ |y| \leq R \right\}.$$

$$\chi_{]a,b[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a,b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $Q =]0,T[\times I\!R$:

Une fonction f définie et mesurable sur Q est dans l'espace $L^r(0,T; L^p(I\!R))$ si

$$\|f\|_{p,r,Q} = \left(\int_0^T \left(\int_{I\!R} |f|^p \, dr \right)^{\frac{r}{p}} \right)^{\frac{1}{r}} < +\infty \ .$$

$f \in L^{p,r}_{loc}(Q)$ si pour tout sous ensemble compact K de $I\!R$ et tout sous intervalle $[t_1, t_2] \subset]0, T[$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_K |f|^p \, dx \right)^{\frac{r}{p}} d\tau < +\infty \ .$$

$D(Q)$ (resp. $D^+(Q)$) désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de Q dans $I\!R$ de support compact contenu dans Q (resp. et de plus positif).

nous notons F , l'opérateur de dualité d'un espace de Banach X dans son dual X' défini par :

$$F(x) = \{w \in X'; \|w\|_X = 1 \text{ et } \langle w, x \rangle_{X',X} = \|x\|_X\}.$$

F est le sous différentiel de la norme de X .

Soit I un intervalle de $I\!R$, $I =]a, b[$ et u une fonction de I dans X.

On appelle variation totale (au sens usuel) de u sur I , l'expression :

$$Var(u; I) = \sup \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} \|u(a_k) - u(a_{k-1})\|_X & \text{pour toute subdivision} \\ & \\ & a < a_0 < a_1 < \ldots < a_n < b. \end{array} \right\}$$

Si $Var(u; I) < +\infty$, on dit que u est à variation bornée; on désigne par $BV(I; X)$ l'espace des fonctions à variation bornée de I dans X .

Lorsque $X = I\!R$, $BV(I; X)$ est noté $BV(I)$.

Définition 1 *:Un opérateur A de X est accrétif s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

(i)Pour tout $\lambda > 0$, *tout* $(x,y) \in A$, $(\hat{x},\hat{y}) \in A$:

$$\|x-\hat{x}\|_X \leq \|(x-\hat{x})+\lambda(y-\hat{y})\|_X$$

(ii) Pour tout $\lambda > 0$, $J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-1}$ *est une contraction de* $D(J_\lambda^A) = R(I+\lambda A)$ *sur* $D(A)$ (I *étant l'identité de* X).

(iii)Pour tout $(x,y) \in A$, $(\hat{x},\hat{y}) \in A$, *il existe* $w \in F(x-\hat{x})$ *tel que* $\langle w, y-\hat{y}\rangle_{X',X} \geq 0$.

Définition 2 *:Un opérateur A de X est m-accrétif s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

(i)Pour tout $\lambda > 0$, J_λ^A *est une contraction partout définie .*

(ii)A est accrétif et il existe $\lambda > 0$, $R(I+\lambda A) = X$.

(iii)A est accrétif et $\forall\ \lambda > 0$, $R(I+\lambda A) = X$.

Définition 3 *:Un opérateur A de X est T-accrétif s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

(i)Pour tout $\lambda > 0$, *tout* $(x,y) \in A$, $(\hat{x},\hat{y}) \in A$

$$\|(x-\hat{x})^+\|_X \leq \|(x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y}))^+\|_X$$

(ii)Pour tout $\lambda > 0$, $J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-1}$, *est une T-contraction de* $R(I+\lambda A)$ *sur* $D(A)$.

Définition 4 *: Un opérateur A de X est m-T-accrétif s'il est T-accrétif et s'il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $R(I+\lambda A) = X$.

Lemme 5 : *(lemme généralisé de Gronwall)*

Soit $T > 0$, $w \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C([0,T])$ *et* $\psi \in L^1(0,T)$ *. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$(i)\varphi(t) - \varphi(s) \leq w \int_s^t \varphi(\tau)d\tau + \int_s^t \psi(\tau)d\tau \ \textit{pour}\ 0 \leq s \leq t \leq \ T$$

$$(ii)e^{-wt}\varphi(t) - e^{-ws}\varphi(s) \leq \int_s^t e^{-w\tau}\psi(\tau)d\tau \quad \textit{pour} \quad 0 \leq s \leq t \leq \ T$$

$$(iii) \int_0^T \{\varphi(t)\frac{d\xi}{dt}(t) + (w\varphi(t) + \psi\,(t)\,\xi(t))\}dt \geq 0 \ \textit{pour}\ \xi \in D^+(0,T)$$

$$(iv) \int_0^T \{\varphi(t)\frac{d\xi}{dt}(t) + \psi\,(t)\,\xi(t)\}e^{-wt}dt \geq 0 \ \textit{pour}\ \xi \in D^+(0,T).$$

Donnons maintenant des conditions nécessaires et suffisantes d'accrétivité et de T-accrétivité dans $L^1(Q)$.

Proposition 6 :

1) Un opérateur A de $L^1(Q)$ *est accrétif si et seulement si il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

$$(i) \int_Q sign_0(u_1 - u_2)(v_1 - v_2) + \int_{\{u_1=u_2\}} |v_1 - v_2| \geq 0$$

pour tout $[u_i, v_i] \in A$, $i = 1, 2$ *;*

(ii) Pour tout $[u_i, v_i] \in A$, $i = 1, 2$ *il existe* $\alpha \in L^\infty(Q)$, $\alpha(x) \in sign(u_1(x) - u_2(x))$ *p.p* $x \in Q$ *et tel que*

$$\int_Q \alpha(x)\,(v_1 - v_2) \geq 0$$

2) Un opérateur A de $L^1(Q)$ est T-accrétif si et seulement si A vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

$$(i) \int_{\{u_1=u_2\}} (v_1 - v_2)^+ + \int_{\{u_1>u_2\}} (v_1 - v_2) \geq 0$$

pour tout $[u_i, v_i] \in A$, $i = 1, 2$

(ii) pour tout $[u_i, v_i] \in A$, *il existe* $\alpha \in L^\infty(Q)$,
$\alpha(x) \in sign^+(u_1(x) - u_2(x))$ *p.p* $x \in Q$ *et*

$$\int_Q \alpha(x)\,(v_1 - v_2) \geq 0 \quad .$$

On utilisera aussi les ensembles de fonctions ci-après .

$P = \{p : I\!R \longrightarrow I\!R$, croissante lipschitzienne à dérivée à support compact$\}$.

$P_0 = \{p \in P \;;\; p(0) = 0\}$.

Pour toute fonction croissante $p : I\!R \longrightarrow I\!R$, il existe une suite (p_n) d'éléments de P , tels que pour tout $r \in I\!R$: $p_n(r) \longrightarrow p(r)$ et $|\,p_n(r)| \leq |p(r)|$.

Nous donnons aussi la proposition importante suivante ($cf.$ proposition 2-5 de $[Bh2]$) :

Soit A un opérateur maximal monotone de H (H un espace de Hilbert).
Nous notons la convergence faible de x_n vers x par $x_n \rightharpoonup x$, et par $((,))$ le produit scalaire dans H .

Proposition 7 *: Soit* $[x_n, y_n] \in A$ *tel que* $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$ *et* $\limsup((y_n, x_n)) \leq ((y, x))$, *alors* $[x, y] \in A$ *et* $[x_n, y_n] \longrightarrow [x, y]$.

Nous définissons maintenant la notion de "bonne solution" (cf [BCP]) ainsi que des propriétés utiles pour la suite de notre travail.

Soit X un espace de Banach, et I un intervalle de $I\!R$.

Soit $f \in L^1_{loc}(I;X)$, $t_0 < t_1 < ... < t_N$ une partition de l'intervalle $[t_0, t_N]$ et $f_1, ..., f_N$ une suite (finie) d'éléments de X.

Le systeme

$$(1-1) \quad \frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Av_i \ni f_i \quad pour \; i = 1, ..., n,$$

est appelé discrétisation de $u' + Au \ni f$.

$D_A(t_0, t_1, ..., t_N; f_1, ..., f_N)$ désigne la discrétisation définie par les données $A, t_0,...,t_N$, $f_1, ..., f_N$.

Une solution de la discrétisation $D_A(t_0, t_1, ..., t_N; f_1, ..., f_N)$ est une fonction $v : [t_0, t_N] \longrightarrow X$ telle que $v(t_0) = v_0$, $v(t) = v(t_i) = v_i$ sur $]t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., N$ et satisfaisant $(1-1)$.

Soit $[a,b]$ un sous intervalle compact de I, et $\varepsilon > 0$. Alors $D_A(t_0, t_1, ..., t_N; f_1, ..., f_N)$ est dite $\varepsilon-$discrétisation de $u' + Au \ni f$ sur$[a,b]$ si les relations suivantes sont vérifiées :

$$(1-2) \quad 0 \leq t_0 - a < \varepsilon, 0 \leq b - t_N < \varepsilon, t_i - t_{i-1} < \varepsilon \text{ pour } i = 1, ..., N.$$

et

$$(1-3) \qquad \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(s) - f_k\|_X \, ds < \varepsilon.$$

Nous pouvons maintenant définir la notion de "bonne solution" du problème $u' + Au \ni f$.

Définition 8 : *(i) Soit $f \in L^1_{loc}(I;X)$ et $[a,b]$ un sous intervalle compact de I. Une "bonne solution" de $u' + Au \ni f$ sur $[a,b]$ est une fonction $u \in C([a,b];X)$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une $\varepsilon-$discrétisation $D_A(t_0, t_1, ..., t_N; f_1, ..., f_N)$ de $u' + Au \ni f$ sur $[a,b]$ qui a une solution v satisfaisant :*

$(1-4)$ $\|u(t) - v(t)\|_X < \varepsilon$ *pour* $t_0 \leq t \leq t_N$.

(ii) Soit $f \in L^1_{loc}(I;X)$ et I' un sous intervalle quelconque de I. Une "bonne solution" de $u' + Au \ni f$ sur I' est une fonction $u \in C(I';X)$ dont la restriction à chaque sous intervalle compact $[a,b]$ de I' est une bonne solution sur $[a,b]$.

Théorème 9 : *Soit* $f \in L^1_{loc}(I;X)$ *alors :*

(i) Si u est une "bonne solution" de $u' + Au \ni f$ *sur I, alors u(t) est dans la fermeture de* $D(A)$ *pour tout* $t \in I$.

(ii) Si u est une "bonne solution" de $u' + Au \ni f$ *dans le sous intervalle compact* $[a,b]$ *de I et* $\varepsilon > 0$, *alors il existe une solution v de la* $\varepsilon-$*discrétisation* $D_A(t_0, t_1, ..., t_N; f_1, ..., f_N)$ *de* $u' + Au \ni f$ *sur* $[a,b]$ *telle que* $\|u(t) - v(t)\|_X < \varepsilon$ *pour* $t_0 \leq t \leq t_N$ *et* $t_0 = a$. *Plus précisément, il est possible d'avoir* $t_N = b$.

(iii) Soit I_1, I_2 *deux sous intervalles de I avec* $I \subset \overline{I_1 \cup I_2}$. *Si* $u \in C(I;X)$ *est une bonne solution de* $u' + Au \ni f$ *sur* I_1 *et* I_2 *alors u est une "bonne solution" sur I.*

(iv) Soit $\overline{A}$ *l'opérateur dont le graphe est la fermeture du graphe de A dans* $X \times X$. *Alors u est une "bonne solution" de* $u' + Au \ni f$ *sur I si et seulement si u est une bonne solution de* $u' + \overline{A}u \ni f$ *sur I.*

(v) Soit $(u_n) \subset C(I;X)$, $(f_n) \subset L^1_{loc}(I;X)$ *et* u_n *une "bonne solution" de* $u'_n + Au_n \ni f_n$ *sur I . Supposons* $u \in C(I;X)$, $f \in L^1_{loc}(I;X)$ *et pour tout sous intervalle compact* $[a,b]$ *de I,*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\int_a^b \|f_n(\tau) - f(\tau)\| \, d\tau + \max_{a \leq t \leq b} \|u_n(t) - u(t)\| \right) = 0,$$

alors u est une bonne solution de $u' + Au \ni f$ *sur I.*

(vi) Si u est une bonne solution de $u' + Au \ni f$ *sur I et* $h \in I\!R$, *alors* $u_h(t) = u(t-h)$ *est une "bonne solution" de* $u'_h + Au_h \ni f_h$ *sur* $I + h$ *où* $f_h = f(t-h)$.

(vii) Si p est une application continue de $\overline{D(A)}$ *dans X, alors u est une "bonne solution" de* $u' + Au + p(u) \ni f$ *sur I si et seulement si* $u \in C(I;X)$, $u(t) \in \overline{D(A)}$ *pour tout* $t \in I$ *et u est une "bonne solution"de* $u' + Au \ni g$ *sur I où g(t)=f(t)-p(u(t)).*

Nous donnons maintenant un résultat d'existence et d'unicité de "bonne solution"siuvant $[BCP]$; pour ce faire, il convient d'utiliser la définition suivante :

Définition 10 : *Soit A un opérateur dans X, T>0,* $f \in L^1(0,T;X)$ *et* $x_0 \in X$. *Une solution* $\varepsilon -$ *approchée de* $u' + Au \ni f$ *sur [0,T] est une solution v de la* $\varepsilon -$ *discrétisation* $D_A(t_0, t_1, ..., t_N; f_1, ..., f_N)$ *de* $u' + Au \ni f$ *sur* $[0,T]$.

De plus v est une solution $\varepsilon -$ *approchée du problème de Cauchy*

(1-5) $u' + Au \ni f$, $u(0) = x_0$

si en plus $t_0 = 0$ *et* $\|v(0) - x_0\|_X < \varepsilon$.

Il découle de cette définition que u est une "bonne solution" de $u'+Au \ni f$ sur [0,T] avec $u(0) = x_0$ si et seulement si $u \in C([0,T];X)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution $\varepsilon - $*approchée* v du problème de Cauchy (1-5) sur $[0,T]$ tel que $\|u(t) - v(t)\|_X < \varepsilon$ sur le domaine de définition de v.

Théorème 11 : *(Existence et unicité de "bonne solution")*

Soit A un opérateur accrétif dans X, $x_0 \in \overline{D(A)}$ et T>0. Si le problème de Cauchy (1-5) admet une solution $\varepsilon -$approchée sur $[0,T]$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors il admet une unique "bonne solution" sur $[0,T]$ vers laquelle la solution $\varepsilon -$ approchée du problème de Cauchy (1-5) converge quand $\varepsilon \downarrow 0$.

Nous donnons ensuite une propriété de continuité de la "bonne solution".

Théorème 12 : *Soit A un opérateur accrétif dans X, et soit u une "bonne solution" de $u' + Au \ni 0$ sur [0,T].*

(i) Si v est une solution $\varepsilon -$ approchée de $u' + Au \ni 0$ sur [0,T] avec $[0,s] \subset [0,T]$, $0 \le t \le T$ et $(x,y) \in A$, alors
$\|u(t) - v(s)\|_X \le \|u(0) - x\|_X + \|y\| \, |t-s| + 3\|y\| \sqrt{\varepsilon}\sqrt{T+\varepsilon} + 2\varepsilon.$

(ii) Si (x,y)$\in$ A, alors
$\|u(t) - u(s)\|_X \le 2\|u(0) - x\|_X + \|y\| \, |t-s|$ *pour* $0 \le s,\ t \le T$.

(iii) Si $\hat{u}$ est une "bonne solution" de $\hat{u}' + A\hat{u} \ni 0$ sur [0,T], alors
$\|u(t) - \hat{u}(t)\|_X \le \|u(0) - \hat{u}\,(0)\|_X$ *pour* $0 \le t \le T$.

Nous donnons dans cette partie la définition et certaines propriétés élémentaires du domaine généralisé d'un opérateur suivant $[BCP]$.

Définition 13 : *Soit A un opérateur dans X. Pour $x \in X$, on a*

$$|x|_A = \liminf_{r\downarrow 0}\{\|\hat{y}\| : \hat{x} \in X, \hat{y} \in A\hat{x} \ \ et\ \ \|x - \hat{x}\| \le r\}.$$

Le domaine généralisé de A, $\hat{D}(A)$ est l'ensemble

$$\hat{D}(A) = \{x \in X; |x|_A < \infty\}.$$

Soit $w \in I\!R$.

Théorème 14 : *Soit A+wI un opérateur m-accrétif dans X, $f \in BV(0,T;X)$ et u une "bonne solution" de $u' + Au \ni f$ sur [0,T]. Alors :*

(i) u est continue lipschitzienne sur $[0,T]$ si et seulement si $u_0 \in \hat{D}(A)$.

(ii) Si $u(0) \in \hat{D}(A)$ alors $u(t) \in \hat{D}(A)$ pour t$\in [0,T]$ et

$$|u(t)|_{(A-f(t+))} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\|u(t+h)-u(t)\|}{h}$$

(iii) De plus $t \longmapsto |u(t)|_{(A-f(t+))}$ *est continue à droite et*

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_{(A-f(t+))} \leq w\,|u(t)|_{(A-f(t+))} + \frac{d}{dt}v(f,t+) \text{ dans } D'(0,T)$$

$$\text{où } v(f,t+) = \limsup_{h\downarrow 0} \int_0^t \frac{\|f(\tau+h)-f(\tau)\|}{h}d\tau \text{ pour } 0 \leq t < T.$$

Nous donnons enfin la définition et certaines propriétés des solutions intégrales (Voir $[BCP]$).

Considérons l'inégalité intégrale suivante :

$$(1-6)\ \ \|u(t)-x\| - \|u(s)-x\| \leq w\int_s^t \|u(\tau)-x\|\,d\tau + \int_s^t [u(\tau)-x, f(\tau)-y]\,d\tau$$

où $[x,y] = \lim\limits_{\lambda\downarrow 0}[x,y]_\lambda$ avec $[x,y]_\lambda = \dfrac{\|x+\lambda y\|_X - \|x\|_X}{\lambda}$ $\forall\lambda \neq 0$.

Pour $w \in I\!R$, on définie $\mathcal{A}(w)$ comme l'ensemble des opérateurs A de X tels que $A + wI$ est accrétif.

Définition 15 : *Soit $A \in \mathcal{A}(w)$ et $f \in L^1(0,T;X)$. Une fonction $u \in C([0,T];X)$ est une solution intégrale de $u' + Au \ni f$ sur [0,T] si u vérifie $(1-6)$ $\forall(x,y) \in A$ et $0 \leq s \leq t \leq T$.*

Une solution intégrale du problème de Cauchy $v' + Av \ni f$, $v(0) = x$, sur $[0,T]$ est une solution intégrale u de $v' + Av \ni f$ vérifiant $u(0) = x$.

Théorème 16 : *Soit $w \in I\!R$, $A \in \mathcal{A}(w)$ et $f, g \in L^1(0,T;X)$. Si v est une solution intégrale de $v' + Av \ni g$ sur [0,T] et u une "bonne solution" de $u' + Au \ni f$ sur [0,T], alors*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-v(t)\|_X \leq w\,\|u(t)-v(t)\| + [u(t)-v(t), f(t)-g(t)] \text{ dans } D'(0,T).$$

Théorème 17 : *Soit* $w \in \mathbb{R}$, $x \in X$ *et* $A \in \mathcal{A}(w)$. *Alors :*

(i) toute "bonne solution" de $u' + Au \ni f$ *sur* $[0, T]$ *est aussi une solution intégrale sur* $[0, T]$.

(ii) Le problème de Cauchy a au plus une "bonne solution" sur $[0, T]$.

(iii) Si le problème de Cauchy $u' + Au \ni f$, $u(0) = x$ *a une "bonne solution"* u *sur* $[0, T]$, *alors* u *est aussi l'unique solution intégrale de ce problème sur* $[0, T]$.

Théorème 18 : *On suppose que* $A + wI$ *est m-accrétif dans* X *et* $f \in L^1(0, T; X)$. *Alors :*

(i) Pour tout $x \in \overline{D(A)}$, *le problème de Cauchy* $u' + Au \ni f$, $u(0) = x$ *a une unique "bonne solution" sur* $[0, T]$.

(ii) $\forall x \in \overline{D(A)}$, *le problème de Cauchy* $u' + Au \ni f$, $u(0) = x$ *a une unique solution intégrale sur* $[0, T]$. *De plus, cette solution intégrale est la "bonne solution".*

(iii) Une solution intégrale de $u' + Au \ni f$ *sur* $[0, T]$ *est une "bonne solution" de* $u' + Au \ni f$ *sur* $[0, T]$.

Chapitre 2

ETUDE DU PROBLEME STATIONNAIRE

2.1 Position du problème

On se donne d'une part :

$(2-1)$ $\quad a : I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$, $b : I\!R \longrightarrow I\!R$, $\varphi : I\!R \longrightarrow I\!R$ continues et on suppose que :

$$(2-2) \qquad \begin{cases} a(k,\xi) \text{ est croissante en } \xi \\ \\ b(k) \text{ et } \varphi(k) \text{ sont croissantes avec } b \text{ surjective} \end{cases} .$$

On pose

$(2-3)$ $\;H(k) = a(k,0)$ pour $k \in I\!R$.

On se donne d'autre part $f \in L^1(I\!R) \cap L^\infty(I\!R)$ et on considère le problème stationnaire suivant :

$$(PS) \qquad b(u) - a(u, \varphi(u)_x)_x = f \quad \text{sur } I\!R \; .$$

On fait l'hypothèse principale de coercivité :

$$(H1) \qquad \lim_{|\varsigma| \longrightarrow +\infty} \inf_{|k|<R} |a(k,\varsigma)| = +\infty \quad \text{pour tout } R > 0.$$

Définition 19 : *On appelle solution faible de* (PS) , *une fonction mesurable* $u \in L^\infty(I\!R)$ *vérifiant* $\varphi(u) \in W^{1,\infty}(I\!R)$ *tel que :*

$$b(u) - a(u, \varphi(u)_x)_x = f \qquad \text{dans } D'(I\!R) \quad .$$

2.2 L'équation résolvante

Nous étudions dans cette partie la question d'existence et d'unicité de solution pour le problème (PS).

Afin d'obtenir un problème (PS) bien posé dans le cas général, nous introduisons la notion de solution entropique de (PS) à l'aide d'inégalités correspondant à celles de S.N.Kruskhov $[Ks]$ dans le cas d'une loi de conservation.

On utilisera pour cela des fonctions $u \in L^\infty(I\!R)$ réglées , c'est-à-dire vérifiant :

$$(2-4) \quad u(x^+) = \lim_{h \downarrow 0} ess\ u(x+h), \quad u(x^-) = \lim_{h \downarrow 0} ess\ u(x-h)$$

existent pour tout $x \in I\!R$.

On posera

$$(2-5)\ \underline{u}(x) = u(x^+) \wedge u(x^-), \bar{u}(x) = u(x^+) \vee u(x^-)$$

$$I(u,x) =]\underline{u}(x), \bar{u}(x)[\quad .$$

Définition 20 : *On appelle solution entropique de* (PS) , *toute solution faible réglée u vérifiant :*

(i) il existe $h \in C(I\!R)$ *telle que* $h = a(u, \varphi(u)_x)$ *p.p sur* $I\!R$

(ii)pour tout $\xi \in D^+(I\!R)$, *tout* $k \in I\!R$, *les inégalités suivantes :*

$$(2-6) \int_{I\!R} sign_0(b(u) - b(k)) \{\xi_x (H(k) - h) + \xi (f - b(u))\} dx \geq 0$$

$$(2-7) \int_{I\!R} sign_0(b(k) - b(u)) \{\xi_x (H(k) - h) + \xi (f - b(u))\} dx \leq 0.$$

2.2.1 Existence

Dans cette partie , nous montrons l'existence de solution entropique pour le problème (PS) sous les hypothèses générales que nous considérons.

Nous commençons d'abord par énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 21 *: Soit* $f \in L^1(I\!R) \cap L^\infty(I\!R)$ *; sous les hypothèses* $(2-1)$, $(2-2)$ *et* $(H1)$, *le problème* (PS) *admet au moins une solution entropique.*

Preuve :

Pour la preuve de ce théorème , nous procédons en plusieurs étapes :

Etape 1 :

Nous approchons le problème (PS) par un problème régulier de la manière suivante :

$$(PS_n) \qquad b_{n,m}(u_{n,m}) - a(u_{n,m}, \varphi(u_{n,m})_x)_x = f^{n,m} \qquad \text{sur } I\!R$$

où , $f^{n,m} = f^+\chi_{[-n,n]} - f^-\chi_{[-m,m]}$ et $b_{n,m}(\sigma) = b(\sigma) + \frac{1}{n}\sigma^+ - \frac{1}{m}\sigma^-$

$\forall\ m\ ,\ n\ \in I\!N^*$.

Remarque 22 : *Puisque les fonctions $v \mapsto v^+$ et $v \mapsto v^-$ sont continues alors $b_{n,m}$ est continue comme somme de fonctions continues. De plus $b_{n,m}$ est strictement croissante pour m , n fixés* :

En effet , pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in I\!R$ tels que $\sigma_1 > \sigma_2$, on a $(\sigma_1^+ - \sigma_2^+) > 0$ et $(\sigma_1^- - \sigma_2^-) < 0$ et comme $b(\sigma_1) - b(\sigma_2) \geq 0$ alors :

$$b_{n,m}(\sigma_1) - b_{n,m}(\sigma_2) = b(\sigma_1) - b(\sigma_2) + \frac{1}{n}(\sigma_1^+ - \sigma_2^+) - \frac{1}{m}(\sigma_1^- - \sigma_2^-) > 0 \ .$$

Etablissons divers résultats préliminaires .

Lemme 23 : *Sous les hypothèses du théorème* 21 , *on a :*

(i) $\|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall\ 1 \leq p \leq +\infty$

(ii) $\|u_{n,m}\|_\infty \leq c(b, \|f\|_\infty)$; c *une constante positive* .

Preuve du lemme 23 :

Prouvons d'abord (i) .

Soit $p : I\!R \longrightarrow I\!R$ une application continue avec $p' \geq 0$, $p(0) = 0$, p lipschitzienne à dérivée à support compact c'est à dire , $p \in P_0$.

Multiplions (PS_n) par $p(b_{n,m}(u_{n,m}))$, on a :

$$(a_1) \begin{cases} p(b_{n,m}(u_{n,m}))(b_{n,m}(u_{n,m})) - p(b_{n,m}(u_{n,m}))a(u_{n,m}, \varphi(u_{n,m})_x)_x = \\ \qquad\qquad = p(b_{n,m}(u_{n,m}))f^{n,m}. \end{cases}$$

Intégrant (a_1) sur $I\!R$, on a :

$$
(a_2)\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(b_{n,m}(u_{n,m}))(b_{n,m}(u_{n,m}))dx - \int_{\mathbb{R}} p(b_{n,m}(u_{n,m}))a(u_{n,m},\varphi(u_{n,m})_x)_x dx = \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(b_{n,m}(u_{n,m}))f^{n,m}dx, \end{cases}
$$

aprés intégration par partie du second terme , nous obtenons :

$$
\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(b_{n,m}(u_{n,m}))(b_{n,m}(u_{n,m}))dx + \int_{\mathbb{R}} p(b_{n,m}(u_{n,m}))_x a(u_{n,m},\varphi(u_{n,m})_x)dx = \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(b_{n,m}(u_{n,m}))f^{n,m}dx \quad . \end{cases}
$$

Considérons maintenant le terme :

$$
(a_3)\ \int_{\mathbb{R}} p(b_{n,m}(u_{n,m}))_x a(u_{n,m},\varphi(u_{n,m})_x)dx.
$$

Par régularisation , on peut toujours supposer que $b_{n,m}$ et $u_{n,m}$ sont réguliers , et donc :

$$
(a_3)\ \Leftrightarrow\ \int_{\mathbb{R}} p'(b_{n,m}(u_{n,m}))b'_{n,m}(u_{n,m})(u_{n,m})_x a(u_{n,m},\varphi(u_{n,m})_x)dx
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p'(b_{n,m}(u_{n,m}))b'_{n,m}(u_{n,m})(u_{n,m})_x[a(u_{n,m},\varphi(u_{n,m})_x) - a(u_{n,m},0)]dx+ \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p'(b_{n,m}(u_{n,m}))b'_{n,m}(u_{n,m})(u_{n,m})_x a(u_{n,m},0)dx. \end{cases}
$$

On a d'autre part $p' \geq 0$, $b'_{n,m} \geq 0$, $\varphi'_{n,m} \geq 0$, et a est croissante par rapport à la deuxième variable , ce qui implique :

$$
p'(b_{n,m}(u_{n,m}))b'_{n,m}(u_{n,m})(u_{n,m})_x[a(u_{n,m},\varphi(u_{n,m})_x) - a(u_{n,m},0)] \geq 0
$$

puisque $\varphi'_{n,m}(u_{n,m}) \geq 0$.

Ainsi donc :

$$(a_4) \int_{\mathbb{R}} p'(b_{n,m}(u_{n,m}))b'_{n,m}(u_{n,m})(u_{n,m})_x[a(u_{n,m},\varphi(u_{n,m})_x)-a(u_{n,m},0)]dx \geq 0 \ .$$

Considérons maintenant le terme :

$$(a_5) \quad \int_{\mathbb{R}} p'(b_{n,m}(u_{n,m}))b'_{n,m}(u_{n,m})(u_{n,m})_x a(u_{n,m},0)dx$$

$$(a_5) \qquad = \int_{\mathbb{R}} p'(b_{n,m}(u_{n,m}))b'_{n,m}(u_{n,m})(u_{n,m})_x H(u_{n,m})dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} q(u_{n,m})_x dx$$

$$avec \ \ q(r) = \int_0^r p'(b_{n,m}(s))b'_{n,m}(s)H(s)ds,$$

puisque $q'(s) = p'(b_{n,m}(s))b'_{n,m}(s)H(s)$
et
$q(u_{n,m})_x = q'(u_{n,m}) \times (u_{n,m})_x$.

Il en resulte que

$$\int_{\mathbb{R}} q(u_{n,m})_x dx = 0 \quad .$$

D'où

$$(a_6) \ \int_{\mathbb{R}} p'(b_{n,m}(u_{n,m}))b'_{n,m}(u_{n,m})(u_{n,m})_x a(u_{n,m},0)dx = 0.$$

(a_2) , (a_4) , (a_6) donnent :

$$(a_7) \ \int_{\mathbb{R}} p(b_{n,m}(u_{n,m}))(b_{n,m}(u_{n,m}))dx \leq \int_{\mathbb{R}} p(b_{n,m}(u_{n,m}))f^{n,m}dx.$$

Par approximation de p , on peut prendre $p(u) = |u|^{p-2}u$
avec $1 \leq p < +\infty$.
(a_7) devient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{I\!R} |b_{n,m}(u_{n,m})|^{p-2}(b_{n,m}(u_{n,m}))^2dx \leq \int_{I\!R} |b_{n,m}(u_{n,m})|^{p-2}(b_{n,m}(u_{n,m}))f^{n,m}dx \\ \qquad\qquad \displaystyle\leq \left(\int_{I\!R} (|b_{n,m}(u_{n,m})|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_{I\!R} |f^{n,m}|^p\right)^{\frac{1}{p}} dx \end{cases}$$

(avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

D'où on a :

$$\int_{I\!R} |b_{n,m}(u_{n,m})|^p\, dx \leq \left(\int_{I\!R} |b_{n,m}(u_{n,m})|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \times \left(\int_{I\!R} |f^{n,m}|^p\right)^{\frac{1}{p}} dx$$

et donc on obtient : $\|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p^p \leq \|f^{n,m}\|_p \times \|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p^{p-1}$.

Ce qui implique que $\|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p^p \times \|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p^{1-p} \leq \|f^{n,m}\|_p$,

de ce qui précède , on a $\|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p \leq \|f^{n,m}\|_p$.

Par conséquent $\|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p \leq \|f^{n,m}\|_p \leq \|f\|_p$ (car $|f^{n,m}| \leq |f|$) .

Ainsi donc $\|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall \;\; p \in [1, +\infty[$.

Puisque $f \in L^1(I\!R\,) \cap L^\infty(I\!R\,)$ alors :

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

Par conséquent $\|b_{n,m}(u_{n,m})\|_\infty \leq \|f\|_\infty$;

ainsi $\|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall \;\; p \in [1, +\infty]$.

Prouvons maintenant (ii).

On multiplie $b_{n,m}(u_{n,m})$ par $p(b(u_{n,m}))$ où $p \in P_0$ et on intègre sur $I\!R$.

On a :

$$(a_8)\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(b(u_{n,m}))(b_{n,m}(u_{n,m}))dx = \int_{\mathbb{R}} p(b(u_{n,m}))(b(u_{n,m}))dx+ \\ \displaystyle+\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} u^+_{n,m}p(b(u_{n,m}))dx - \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} u^-_{n,m}p(b(u_{n,m}))dx \end{cases}$$

$$\text{or}\begin{cases} \displaystyle\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} u^+_{n,m}p(b(u_{n,m}))dx - \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} u^-_{n,m}p(b(u_{n,m}))dx = \\ \displaystyle= \frac{1}{n}\int_{\{u_{n,m}\geq 0\}} u^+_{n,m}p(b(u_{n,m}))dx + \frac{1}{m}\int_{\{u_{n,m}\leq 0\}} (-u^-_{n,m})p(b(u_{n,m}))dx \\ \geq 0 \end{cases}$$

car si $u_{n,m} \geq 0$, $p(b(u_{n,m})) \geq 0$ et si $u_{n,m} \leq 0$, $p(b(u_{n,m})) \leq 0$; d'où d'après (a_8) , on a :

$$(a_9) \quad \int_{\mathbb{R}} p(b(u_{n,m}))(b_{n,m}(u_{n,m}))dx \geq \int_{\mathbb{R}} p(b(u_{n,m}))(b(u_{n,m}))dx.$$

Par approximation de p , on peut prendre $p(u) = |u|^{p-2}\, u$

(avec $1 \leq p < +\infty$) dans (a_9) , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} |b(u_{n,m})|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} b_{n,m}(u_{n,m})\, |b(u_{n,m})|^{p-2}\, b(u_{n,m})dx$$

$$\leq \left\|b_{n,m}(u_{n,m})\right\|_p \times \left\|b(u_{n,m})^{p-1}\right\|_q \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ce qui implique que

$$\left\|b(u_{n,m})\right\|_p^p \leq \left\|b_{n,m}(u_{n,m})\right\|_p \times \left\|b(u_{n,m})\right\|_p^{p-1}.$$

On a ensuite

$$\|b(u_{n,m})\|_p^p \times \|b(u_{n,m})\|_p^{1-p} \leq \|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p .$$

On obtient enfin

$$\|b(u_{n,m})\|_p \leq \|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p \qquad \forall \ \ 1 \leq p < +\infty .$$

Comme $b_{n,m}(u_{n,m}) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ alors

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} \|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p = \|b_{n,m}(u_{n,m})\|_\infty .$$

Par conséquent

$$\|b(u_{n,m})\|_\infty \leq \|b_{n,m}(u_{n,m})\|_\infty .$$

On obtient donc que $\|b(u_{n,m})\|_p \leq \|b_{n,m}(u_{n,m})\|_p$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Comme b est surjective alors d'après l'inégalité précédente et (i) ,

$$\|u_{n,m}\|_\infty \leq c(b, \|f\|_\infty) \ ;$$

d'ou (ii) .

Lemme 24 : *Sous les hypothèses du théorème* 21 , *la suite* $(u_{n,m})$ *est convergente.*

Preuve :

rappelons tout d'abord que $b_{n,m}$ (pour n , m fixés) est une fonction continue et strictement croissante .

On montre que $(f^{n,m})_n$ est croissante en n et que $(f^{n,m})_m$ est décroissante en m.

Considérons maintenant l'équation :

$$(PS_n) \qquad b(u_{n,m}) + \frac{1}{n}u^+_{n,m} - \frac{1}{m}u^-_{n,m} - a(u_{n,m}, \varphi(u_{n,m})_x)_x = f^{n,m} .$$

Posons $w_{n,m} = b_{n,m}(u_{n,m})$;

on a donc $u_{n,m} = b^{-1}_{n,m}(\, w_{n,m})$.

L'équation (PS_n) s'écrit :

$$(PS'_n) \qquad w_{n,m} - \tilde{a}(w_{n,m}, \tilde{\varphi}_{n,m}(w_{n,m})_x)_x = f^{n,m}$$

où $\tilde{\varphi}_{n,m} = \varphi \circ b^{-1}_{n,m}$ et $\tilde{a}\,(\varsigma, \eta) = a\left(b^{-1}_{n,m}\,(\varsigma)\,, \eta\right)$.

Puisque $f^{n,m} \geq f^{n,m'}$ pour $m' \geq m$ (voir $[Os]$, $[MT1]$), alors appliquant le théorème $(1-4)$ de $[BT2]$ on a :

$(a_{10}) \qquad w_{n,m} \geq w_{n,m'}$ pour $m' \geq m$ (n est fixé) ;

$$(a_{10}) \Leftrightarrow b\,(u_{n,m}) - b\,(u_{n,m'}) + \frac{1}{n}u^+_{n,m} - \frac{1}{n}u^+_{n,m'} + \frac{1}{m'}u^-_{n,m'} - \frac{1}{m}u^-_{n,m} \geq 0.$$

Puisque $m' \geq m \Rightarrow \dfrac{1}{m} \geq \dfrac{1}{m'}$ et comme $u^-_{n,m} \geq 0$ alors on a :

$\dfrac{1}{m}u^-_{n,m} \geq \dfrac{1}{m'}u^-_{n,m}$;

et donc en remplaçant dans l'inégalité précédente $\dfrac{1}{m}u^-_{n,m}$ par $\dfrac{1}{m'}u^-_{n,m}$, on a :

$$(a_{11}) \quad b\,(u_{n,m}) - b\,(u_{n,m'}) + \frac{1}{n}(u^+_{n,m} - u^-_{n,m'}) + \frac{1}{m'}(u^-_{n,m'} - u^-_{n,m}) \geq 0 \quad .$$

On vérifie ensuite assez aisément que les trois termes de (a_{11}) ont le même signe ; par conséquent ils sont tous positifs.

On a donc $u^+_{n,m} - u^+_{n,m'} \geq 0$ et $u^-_{n,m'} - u^-_{n,m} \geq 0$ ce qui implique que

$u_{n,m} \geq u_{n,m'}$;

d'où la suite $(u_{n,m})_m$ est monotone décroissante .

Pour tout $n \geq n'$, $f^{n,m} \geq f^{n',m}$ (voir $[Os]$, $[MT1]$) ; appliquant le théorème $(1-4)$ de $[BT2]$, on a :

(a_{12}) $\quad w_{n,m} \geq w_{n',m}$ pour $n \geq n'$ (m fixé).

$(a_{12}) \Leftrightarrow b\,(u_{n,m}) - b\,(u_{n',m}) + \dfrac{1}{n}u^+_{n,m} - \dfrac{1}{n'}u^+_{n',m} + \dfrac{1}{m}(u^-_{n',m} - u^-_{n,m}) \geq 0.$

Comme $n \geq n'$ alors $\dfrac{1}{n'} \geq \dfrac{1}{n}$ et donc :

$\dfrac{1}{n'}u^+_{n,m} \geq \dfrac{1}{n}u^+_{n,m}$;

par conséquent en remplaçant dans l 'inégalité précédente $\dfrac{1}{n}u^+_{n,m}$ par $\dfrac{1}{n'}u^+_{n,m}$, on a :

$$b\,(u_{n,m}) - b\,(u_{n',m}) + \frac{1}{n'}(u^+_{n,m} - u^+_{n',m}) + \frac{1}{m}(u^-_{n',m} - u^-_{n,m}) \geq 0.$$

On vérifie assez aisément que les trois termes de cette inégalité ont le même signe ; par conséquent ils sont tous positifs.

On a donc : $u^+_{n,m} - u^+_{n',m} \geq 0$ et $u^-_{n',m} - u^-_{n,m} \geq 0$; ce qui implique que

$u_{n,m} \geq u_{n',m}$. Par conséquent $(u_{n,m})_n$ est monotone croissante.

Puisque $(u_{n,m})_n$ est croissante et bornée dans $L^\infty(I\!R\,)$, alors elle converge :

$u_{n,m} \longrightarrow u_{\infty,m}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ et $u_{\infty,m} \in L^\infty(I\!R\,)$.

Pour $p \geq m$, on a $u_{n,m} \geq u_{n,p}$ car $(u_{n,m})_m$ est monotone décoissante , ce qui implique que $u_{\infty,m} \geq u_{\infty,p}$ par passage à la limite.

Ainsi la suite $(u_{\infty,m})_m$ est monotone décroissante (on montre de même que $(u_{n,\infty})_n$ est monotone croissante).

$(u_{\infty,m})_m$ est décroissante et bornée dans $L^\infty(I\!R\,)$, elle converge :

$u_{\infty,m} \longrightarrow \underline{u} \in L^\infty(I\!R\,)$; d'où le lemme .

Etape 2 :

On a d'après le lemme 23 , $\varphi(u_{n,m}) \in L^\infty(I\!R)$; $h_{n,m_x} = b(u_{n,m}) - f^{n,m} \in L^1(I\!R)$; par conséquent $h_{n,m} \in AC(I\!R)$ uniformément en n, m.

On a $h_{n,m} \in C(I\!R)$ et donc $h_{n,m}$ est finie en un certain point ; ce qui entraine que $h_{n,m}$ est borné uniformément en n, m.

Utilisant $(H1)$, on déduit que $\varphi(u_{n,m})_x \in L^\infty(I\!R)$ puisque $u_{n,m} \in L^\infty(I\!R)$.

Par conséquent $\varphi(u_{n,m}) \in W^{1,\infty}(I\!R)$.

$\varphi(u_{n,m}) \longrightarrow \varphi(\underline{u})$ avec $\varphi(\underline{u}) \in W^{1,\infty}(I\!R)$.

$b(u_{n,m}) \longrightarrow b(\underline{u})$ avec $b(\underline{u}) \in L^\infty(I\!R)$.

En interprétant (PS'_n) d'après $[L]$, $[BT2]$, on a que $u_{n,m}$ est solution entropique de (PS_n) et donc vérifie les inégalités entropiques suivantes :

$$(a_n) \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{I\!R} sign_0^+ (b_{n,m}(u_{n,m}) - b_{n,m}(k))\{\xi_x (H(k) - h_{n,m}) + \\ \qquad\qquad +\xi(f^{n,m} - (b_{n,m}(u_{n,m})))\}dx \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(b_n) \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{I\!R} sign_0^+ (b_{n,m}(k) - b_{n,m}(u_{n,m}))\{\xi_x (H(k) - h_{n,m}) + \\ \qquad\qquad +\xi(f^{n,m} - (b_{n,m}(u_{n,m})))\}dx \leq 0. \end{array} \right.$$

On déduit des lemmes 23 et 24 qu'il existe $w \in L^\infty(I\!R)$ tel que $b_{n,m}(u_{n,m}) \rightharpoonup w$ et comme $u_{n,m}$ converge vers $\underline{u}$ et $b_{n,m} \longrightarrow b$ quand $n, m \longrightarrow +\infty$ alors $w = b(\underline{u})$.

Passant à la limite quand $n, m \longrightarrow +\infty$ dans les deux inégalités précédentes , on obtient :

$$\text{il existe } \alpha_1 \text{ , } \alpha_2 \in L^\infty(I\!R) \text{ , } \alpha_1 \in sign_0(b(u) - b(k)),$$

$$\alpha_2 \in sign_0(b(k) - b(u))$$

tels que :

$$(a) \int_{I\!R} \alpha_1 \left\{ \xi_x \left(H\left(k \right) - h \right) + \xi \left(f - b\left(u \right) \right) \right\} dx \geq 0$$

$$(b) \int_{I\!R} \alpha_2 \left\{ \xi_x \left(H\left(k \right) - h \right) + \xi \left(f - b\left(u \right) \right) \right\} dx \leq 0 \quad .$$

D'après $[Bp1]$, $[T1]$, ces inégalités sont équivalentes aux inégalités entropiques ; d'où la preuve du théorème .

2.2.2 Unicité

Dans cette partie, nous étudions la question de l'unicité des solutions entropiques pour le problème stationnaire (PS).

Il faut noter ici qu'il s'agit de l'unicité de $b(u)$, car sous les hypothèses générales que nous considérons, l'unicité de $b(u)$ n'entraine pas nécessairement l'unicité de u.

Dans le cas où b est strictement croissante, il y a équivalence entre l'unicité de u et l'unicité de $b(u)$.

Nous commençons d'abord par énoncer le résultat principal de cette section .

Théorème 25 *: sous les hypothèses* $(2-1)$, $(2-2)$, *et* $(H1)$, *le problème* (PS) *admet au moins une solution entropique* u. *De plus , pour* u_1 , u_2 *deux solutions entropiques de* (PS) *associées à* f_1 , f_2 *respectivement , on a le principe de contraction* L^1 *: il existe* $\alpha \in sign^+ \left(b(u_1) - b\left(u_2\right)\right)$ *p.p.*$x \in I\!R$ *tel que*

$$\int_{I\!R} \left(b(u_1) - b\left(u_2\right)\right)^+ dx \leq \int_{I\!R} \alpha \left(f_1 - f_2\right) dx \quad .$$

Pour la preuve de ce théorème , nous adaptons la preuve du théorème $(1-4)$ de $[BT2]$ à notre cas .

Rappelons d'abord certaines notions dues à $[BT2]$:
on considère le problème (PS_0) suivant :

$$(PS_0) \qquad \begin{cases} -a\left(u, \varphi\left(u\right)_x\right)_x = f & sur \quad]a, b[\\ \\ u = l & sur \quad \{a, b\} \ . \end{cases}$$

Définition 26 *: On appelle solution entropique de (PS_0) toute solution faible réglée u vérifiant : il existe $h \in C(I\!R)$ telle que $h = a(u, \varphi(u)_x)$ p.p sur $]a, b[$ et pour tout $x \in I\!R$ avec $u(x^+) \neq u(x^-)$,*

$$(2-8) \qquad \left(u\left(x^+\right) - u\left(x^-\right)\right)\left(h\left(x\right) - H\left(k\right)\right) \geq 0 \quad \forall \ k \in I\left(u, x\right) \quad .$$

Nous énonçons ensuite un résultat préliminaire que nous utiliserons par la suite pour la preuve du théorème .

Lemme 27 *: Etant donné u_1, u_2 des solutions entropiques de (PS_0) correspondant respectivement à f_1 , f_2 dans $L^1(I\!R)$. Alors :*

$$(a_{13}) \qquad \int_{I\!R} sign_0^+(\underline{u}_1 - \bar{u}_2)\left(f_1 - f_2\right) dx \geq 0.$$

avec $\underline{u}_1$ et $\bar{u}_2$ définies selon $(2-5)$.

En effet ,$\forall \ ]a, b[\subset I\!R$, u_1, u_2 des solutions entropiques du problème (PS_0) associées à f_1, f_2 respectivement où $l_i(a) = u_i(a^-)$ et
$l_i(b) = u_i(b^+)$ pour $i = 1, 2$; alors utilisant le théorème $(1-4)$ de $[BT2]$, on a :

$$\int_a^b sign_0^+\left(\underline{u}_1 - \overline{u}_2\right)\left(f_1 - f_2\right) dx \geq -sign_0^+\left(\underline{u}_1\left(b^+\right) - \overline{u}_2\left(b^+\right)\right)\left[h_1\left(b\right) - h_2\left(b\right)\right] +$$

$$+ sign_0^+\left(\underline{u}_1\left(a^-\right) - \overline{u}_2\left(a^-\right)\right)\left[h_1\left(a\right) - h_2\left(a\right)\right].$$

Suivant la preuve du théorème $(3-1)$ de $[BT2]$, on a :

$$\lim_{a \longrightarrow -\infty} h_i\left(a\right) = 0 \quad et \quad \lim_{b \longrightarrow +\infty} h_i\left(b\right) = 0 \qquad \text{pour } i = 1, 2 \ .$$

Par conséquent , on obtient après passage à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sign_0^+ \left(\underline{u}_1 - \overline{u}_2\right)(f_1 - f_2)\, dx \geq 0 \quad .$$

Preuve du théorème 25 :

Le problème (PS) $b(u) - a(u, \varphi(u)_x)_x = f$ sur $I\!R$ est équivalent au problème $-a(u, \varphi(u)_x)_x = f - b(u)$ sur $I\!R$.

Ainsi d'après le lemme 27, on a :

$$\int_{I\!R} sign_0^+(\underline{u}_1 - \bar{u}_2)\,(f_1 - b(u_1) - (f_2 - b\,(u_2)))dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{I\!R} sign_0^+(\underline{u}_1 - \bar{u}_2)(f_1 - b(u_1) - f_2 + b\,(u_2))dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ (a_{14}) \int_{I\!R} sign_0^+(\underline{u}_1 - \bar{u}_2)(b(u_1) - b\,(u_2))dx \leq \int_{I\!R} sign_0^+(\underline{u}_1 - \bar{u}_2)(f_1 - f_2)dx$$

Or par définition de $\underline{u}_1$ et $\bar{u}_2$, on a que $\underline{u}_1 > \bar{u}_2 \implies u_1 > u_2$; ce qui donne :

$$\int_{I\!R} sign_0^+(\underline{u}_1 - \bar{u}_2)(b(u_1) - b\,(u_2))dx = \int_{I\!R} (b(u_1) - b\,(u_2))^+ dx.$$

Finalement , d'après (a_{14}) et l'inégalité précédente on obtient :

il existe $\alpha \in sign^+\,(b(u_1) - b\,(u_2))$ tel que

$$\int_{I\!R} (b(u_1) - b\,(u_2))^+ dx \leq \int_{I\!R} \alpha(f_1 - f_2)dx.$$

Remarque 28 *: Utiliant la technique du dédoublement des variables de Kruskhov (voir [Ca] et [CMT]), on obtient la caractérisation suivante pour deux solutions entropiques u et $\tilde{u}$ de (PS) associées respectivement à f et $\tilde{f}$:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega sign_0^+ (b(u) - b(\tilde{u})) (b(u) - b(\tilde{u})) \xi dx + \\ \displaystyle + \int_\Omega sign_0^+ (b(u) - b(\tilde{u})) \left(h - \tilde{h}\right) \xi_x dx \leq \int_\Omega \left(f - \tilde{f}\right)^+ \xi dx \end{cases}$$

$\forall\ \xi \in D^+(\Omega)$ *; dans ce cas, si Ω est borné, on peut déduire le résultat de contraction compte tenu du fait que les constantes sont intégrables. Par contre, lorsque $\Omega = I\!R$, nous ne savons pas s'il est possible de déduire le résultat de contraction.*

2.3 L'opérateur A_b associé au problème

On reprend les hypothèses précédentes .

On va associer au problème stationnaire (PS) un opérateur dans l'espace de Banach $L^1(I\!R)$.

On note A_b l'opérateur de $L^1(I\!R)$ défini par :

$$\begin{cases} v \in A_b b(u) \Leftrightarrow b(u) \in L^1(I\!R)\ ,\ v \in L^1(I\!R) \cap L^\infty(I\!R)\ , \\ \text{et } u \text{ est solution entropique de } (PS) \text{ avec } f = v + b(u). \end{cases}$$

On montre que :

$$A_b \subset \left\{ \left(b(u), -a\left(u, \varphi(u)_x\right)_x\right) ; \varphi(u) \in W^{1,\infty}(I\!R), u \in L^\infty(I\!R), b(u) \in L^1(I\!R) \right\}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal sur l'opérateur A_b.

Proposition 29 *: sous les hypothèses $(2-1), (2-2)$ et $(H1)$, l'opérateur A_b défini ci-dessus vérifie :*

(i) A_b est T-accrétif dans $L^1(I\!R)$

(ii) $R(I + \lambda A_b)$ est dense dans $L^1(I\!R)$ pour tout $\lambda > 0$

(iii) $D(A_b)$ *est dense dans* $L^1(I\!R\,)$.

Preuve :

Pour la preuve de cette proposition , on adapte les preuves de la proposition $(2-8)$ de $[BT2]$ et de la proposition $(2-4)$ de $[BW1]$.

La T-accrétivité est une conséquence directe du théorème 25 .

D'après le théorème d'existence (théorème 21), $R(I+\lambda A_b) \supset L^1(I\!R) \cap L^\infty(I\!R)$; ce qui implique que $R(I+\lambda A_b)$ est dense dans $L^1(I\!R)$.

Ainsi donc, il nous reste à prouver (iii).

Posons $D_0 = \{v \in L^1(I\!R\,)\,;\text{il existe } u \in L^\infty(I\!R\,)\ ,\ \text{avec } v = b(u)\}$.

On a $D(A_b) \subset D_0$.

Il suffit donc de montrer que $\overline{D(A_b)} \supset D_0$ car D_0 est dense dans $L^1(I\!R\,)$.

En effet :

soit $u \in D(I\!R\,)$, on a $(b^{-1})_0(u) \in L^\infty(I\!R\,)$ car $(b^{-1})_0(0) = 0$ et u est à support compact.

Si $w = b((b^{-1})_0(u))$, on a $w = u$ $p.p$ et $w \in L^1(I\!R\,)$;

donc $\overline{D(I\!R\,)} \subset \overline{D_0}$ ce qui entraine que $\overline{D_0} = L^1(I\!R\,)$.

Soit maintenant $w_0 \in D_0$ et pour tout $\lambda > 0$, considérons le problème

$$b(u_\lambda) - \lambda a(u_\lambda, \varphi(u_\lambda)_x)_x = w_0$$

$$ie\ \ b(u_\lambda) - \lambda h_{\lambda,x} = w_0 \quad .$$

Ce qui équivaut à $\quad b(u_\lambda) = \lambda h_{\lambda,x} + w_0$.

Pour prouver donc que $b(u_\lambda) \longrightarrow w_0$ dans $L^1(I\!R\,)$ quand $\lambda \longrightarrow 0$, il suffit de montrer que $\lambda h_{\lambda,x} \longrightarrow 0$ dans $D'(I\!R\,)$.

Puisque $\lambda h_{\lambda,x}$ est borné dans $L^\infty(I\!R\,)$, il suffit de montrer que :

(a_{15}) $\quad \lambda h_\lambda \longrightarrow 0$ en mesure sur $I\!R$ lorsque $\lambda \longrightarrow 0.$

Nous allons montrer que $\lambda h_\lambda \longrightarrow 0$ en mesure sur tout borné de $I\!R$.
Considérons I un intervalle borné de $I\!R$, $R > \|w_0\|_\infty$ et pour $r > 0$,

posons

$$C(r) = \inf\left\{\frac{a(k,\varsigma).\varsigma}{|a(k,\varsigma)|}; |k| \leq R, |a(k,\varsigma)| \geq r\right\} .$$

Utilisant $(H1)$, on voit que

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} C(r) = +\infty.$$

Il est clair que $C(r)$ est croissante et qu'on a

$$C(|h_\lambda|) \leq \frac{a(u_\lambda, w_{\lambda,x}).w_{\lambda,x}}{|a(u_\lambda, w_{\lambda,x})|}$$

avec $w_\lambda = \varphi(u_\lambda)$.

Ce qui implique que $C(|h_\lambda|).|h_\lambda| \leq h_\lambda.w_{\lambda,x}$.

Fixons maintenant $\delta > 0$ et $r_0 > 0$ tel que $C(r_0) \geq 0$.

Posons $\lambda > 0$, vérifiant $\lambda r_0 \leq \delta$, on a :

si $\quad |h_\lambda| > \dfrac{\delta}{\lambda} \quad$ alors $\quad C(|h_\lambda|) \geq C\left(\dfrac{\delta}{\lambda}\right)$.

Par conséquent , $C\left(\dfrac{\delta}{\lambda}\right)\delta \leq \lambda C(|h_\lambda|).|h_\lambda|$.

On a :

$$\left\{\begin{aligned} \int_{\{\lambda|h_\lambda|>\delta\}} C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)\delta dx &= C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)\delta\left|\{\lambda|h_\lambda| > \delta\}\right| \\ &\leq \int_{\{\lambda|h_\lambda|>\delta\}} \lambda C(|h_\lambda|).|h_\lambda|\, dx \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \int_{\{\lambda|h_\lambda|>\delta\}} C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)\delta dx \leq \int_{\{\lambda|h_\lambda|>\delta\}} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx$$

$$\Rightarrow \int_{\{\lambda|h_\lambda|>\delta\}} C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)\delta dx \leq \int_{\{\ |h_\lambda|>r_0\}} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx$$

car $\{\ |h_\lambda| > r_0\} \supset \{\lambda\,|h_\lambda| > \delta\}$ puisque $(\lambda r_0 \leq \delta)$.

Or

$$\int_{I\!R} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx = \int_{\{\ |h_\lambda|>r_0\}} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx + \int_{\{\ |h_\lambda|\leq r_0\}} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx \quad ;$$

donc

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\{\lambda|h_\lambda|>\delta\}} C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)\delta dx \leq \int_{\{\ |h_\lambda|>r_0\}} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx \\ &\qquad \leq \int_{I\!R} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ .dx - \int_{\{\ |h_\lambda|\leq r_0\}} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx, \end{aligned}\right.$$

c'est à dire

$$\int_{\{\lambda|h_\lambda|>\delta\}} C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)\delta dx \leq \int_{I\!R} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx - \int_{\{\ |h_\lambda|\leq r_0\}} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx$$

$$= \int_{I\!R} (w_0 - b(u_\lambda))\, w_\lambda dx - \int_{\{\ |h_\lambda|\leq r_0\}} \lambda h_\lambda.w_{\lambda,x}\ dx$$

d'où

$$\int_{\{\lambda|h_\lambda|>\delta\}} C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)\delta dx \leq \int_{I\!R} (w_0 - b(u_\lambda))\, w_\lambda dx - \int_{\{\ |h_\lambda|\leq r_0\}} \lambda h_\lambda . w_{\lambda,x}\ dx,$$

ce qui équivaut à dire que

$$C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)\delta\left|\{\lambda\,|h_\lambda| > \delta\}\right| \leq \int_{I\!R} (w_0 - b(u_\lambda))\, w_\lambda\ dx - \int_{\{\ |h_\lambda|\leq r_0\}} \lambda h_\lambda . w_{\lambda,x}\ dx \quad .$$

D'après l'hypothèse de coercivité $(H1)$, λh_λ et $w_{\lambda,x}\chi_{\{\ |h_\lambda|\leq r_0\}}$ sont bornés dans $L^\infty(I\!R\ )$; par conséquent $C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)\delta\left|\{\lambda\,|h_\lambda| > \delta\}\right|$ est borné .

Puisque

$$\lim_{r\longrightarrow+\infty} C(r) = +\infty \quad .$$

alors nécessairement

$$\lim_{\lambda\longrightarrow 0} \left|\{\lambda \quad |h_\lambda| > \delta\}\right| = 0 \quad ;$$

on a donc $\lambda h_\lambda \longrightarrow 0$ en mesure sur tout intervalle borné de $I\!R$ quand $\lambda \longrightarrow 0$; donc $\lambda h_\lambda \longrightarrow 0$ en mesure sur $I\!R$ quand $\lambda \longrightarrow 0$.

Par conséquent $b(u_\lambda) \longrightarrow w_0$ dans $L^1(I\!R\ )$ quand $\lambda \longrightarrow 0$; d'où la densité.

Ce qui achève la preuve de (iii) .

Remarque 30 *: La notion de dépendance continue de l'opérateur A_b par rapport aux données a, b et φ peut être établie uniquement dans le cas où b est strictement croissante; mais dans ce cas ,par un changement de variable, on se ramène au cas étudié dans* $[BT2]$.

Sous des hypothèses complémentaires sur les fonctions a , b , φ , nous montrons d'abord dans la deuxième section que cette "bonne solution" est dans $Lip(0,T;L^1(I\!R)) \cap L^\infty(Q)$ et est solution entropique du problème (PE) ; nous montrons ensuite que les solutions entropiques de (PE) vérifient le principe de comparaison en adaptant les résultats de $[CMT]$, $[MT2]$.

Enfin dans la troisième section , nous montrons que la "bonne solution" est solution faible d'énergie finie du problème (PE) sous des hypothèses complémentaires sur les données .

3.2 Bonnes solutions

On reprend les hypothèses de l'étude du problème stationnaire .

Dans ce chapitre , on se donne d'une part :

$(2-1)$ $a : I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$, $b : I\!R \longrightarrow I\!R$, $\varphi : I\!R \longrightarrow I\!R$ continues et vérifiant :

$$(2-2)\quad \left\{ \begin{array}{l} a(k,\varsigma) \text{ est croissante en } \varsigma \text{ , } b(k) \text{ et } \varphi(k) \text{ sont} \\ \qquad \text{croissantes en } k \text{ et } b \text{ est surjective} \end{array} \right. .$$

On pose

$$H(k) = a(k,0) \quad \text{et} \quad h = a(u, \varphi(u)_x) \quad .$$

On se donne ensuite $0 < T < +\infty$;

on pose $\qquad Q =]0,T[\times I\!R$.

Pour tout $v_0 \in L^1(I\!R)$, $f \in L^1(Q)$, on considère le problème d'évolution :

$$(PE) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} b(u)_t - a(u, \varphi(u)_x)_x = f & \text{sur } Q =]0,T[\times I\!R \\ \qquad b(u(0,.)) = v_0 & \text{sur } \quad I\!R \end{array} \right. .$$

On fait l'hypothèse de coercivité suivante :

$$(H1) \qquad \lim_{|\varsigma| \longrightarrow +\infty} \inf_{|k|<R} |a(k,\varsigma)| = +\infty \qquad \forall R > 0 \quad .$$

On définit le problème discrétisé de (PE) par :

$$(PDE) \quad \begin{cases} \dfrac{b(u_i) - b(u_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = a(u_i, \varphi(u_i)_x)_x + f_i \\ \\ u_i \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad , \quad b(u_i) \in L^1(\mathbb{R}) \quad , \quad \varphi(u_i) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

pour $i = 1, ..., n$.

Où :

$$(DE) \begin{cases} t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n \leq T \ , \ t_i - t_{i-1} \leq \varepsilon \quad , \quad t_0 \leq \varepsilon \ , \ T - t_n \leq \varepsilon \\ \\ f_1, ..., f_n \in L^\infty(\mathbb{R}) \ , \ \sum_i \displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_i\|_1 \, dt \leq \varepsilon \\ \\ u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \ , \ \|v_0 - b(u_0)\|_1 \leq \varepsilon \quad . \end{cases}$$

On définit ensuite la notion de "bonne solution" du problème (PE) suivant $[BW1]$, $[BCP]$, $[BB]$.

Définition 31 *:On appelle "bonne solution" du problème d'évolution (PE), une fonction mesurable $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant $v = b(u) \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}))$, $v(0) = v_0$, et , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(t_0, ..., t_n, f_1, ..., f_n, u_0, ..., u_n)$ satisfaisant (DE) et (PDE) , tels que $\|v(t) - b(u_i)\|_1 \leq \varepsilon$ pour tout $t \in]t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., n$.*

Appliquant la théorie des semi-groupes non linéaires $(cf.[Bp1], [BCP])$, en interprétant le problème (PE) sous la forme de l'équation d'évolution dans $L^1(\mathbb{R})$:

$$\frac{dv}{dt} + A_b v \ni f \quad \text{sur } [0,T] \ , \ v(0) = v_0$$

$$\text{avec } \ b(u) = v \ ;$$

on déduit immédiatement

Théorème 32 : *sous les hypothèses* $(2-1)$, $(2-2)$ *et* $(H1)$, *pour tout* $v_0 = b(u_0) \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in L^1(Q)$, *il existe une unique "bonne solution"* u *de* (PE) *qui est caractérisée par la propriété :*

$$(3-1)\begin{cases} b(u(0,.)) = v_0 \quad \text{et pour tout} \quad \underline{u} \in D(A_b) \ , \xi \in D(]0,T[) \ , \\ \xi \geq 0 \ , \quad \text{il existe } \alpha \in L^{\infty}(Q) \ , \ \alpha \in sign(b(u) - b(\underline{u})) \quad \text{sur } Q \\ \text{tel que} \\ \displaystyle\iint_Q \alpha\left\{(b(u) - b(\underline{u}))\xi_t + (f - A_b b(\underline{u}))\xi\right\} dxdt \geq 0 \ ; \end{cases}$$

de plus , si u_1 , u_2 *sont les "bonnes solutions" correspondant à* $(v_{0,1}; f_1)$, $(v_{0,2}; f_2)$ *respectivement , on a :*

$$(3-2)\begin{cases} \displaystyle\max_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}} (b(u_1(t)) - b(u_2(t)))^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}} (v_{0,1} - v_{0,2})^+ dx + \\ \displaystyle\qquad + \int\int_Q (f_1 - f_2)^+ dxdt \end{cases}$$

en particulier :

$$(3-3) \qquad v_{0,1} \leq v_{0,2} \ \ p.p \ \ sur \ \mathbb{R} \quad , f_1 \leq f_2 \ p.p \ sur \ \ Q \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b(u_1) \leq b(u_2) \ \ p.p \ \ sur \ \ Q \quad .$$

Remarque 33 : *Comme nous l'avons dit dans le deuxième chapitre, on peut étudier la dépendance continue des "bonnes solutions" par rapport aux données uniquement dans le cas où b est strictement croissante ; dans ce cas, par un changement de variable , on ramène le problème* (PE) *au problème* (E) *de* $[BT3]$ *pour lequel le résultat de dépendance continue a été prouvé .*

On suppose maintenant que les données v_0 , f vérifient :

$$(3-4) \ v_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}) \ , \ f \in L^1(Q) \ \text{ et } \int_0^T \|f(t,.)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} dt < \infty.$$

Alors la "bonne solution" u de (PE) est essentiellement bornée ; plus précisément on a l'estimation suivante :

Proposition 34 : *Supposant* $(3-4)$ *et soit* u *la "bonne solution" de* (PE), *alors* $u \in L^{\infty}(Q)$ *et*

$$(3-5) \quad \|b(u)\|_{L^{\infty}(Q)} \leq \|v_0\|_{L^{\infty}(I\!R)} + \int_0^T \|f(t,.)\|_{L^{\infty}(I\!R)}\, dt.$$

Preuve :

Définissons la fonctionnelle N sur $L^1(I\!R)$ par

$$N(b(u)) = \|b(u)\|_{\infty}.$$

D'après le lemme 23 , on a :

$$(3-6) \qquad \|b(u)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}.$$

Puisque $b(u) + \lambda A_b b(u) = f$ c'est à dire $b(u) = (I + \lambda A_b)^{-1} f$; on a d'après $(3-6)$:

$$(3-7) \qquad N\left((I+\lambda A_b)^{-1} f\right) \leq N(f).$$

Ainsi , on a :

$$(3-8) \qquad N\left((I+\lambda A_b)^{-1} b(u)\right) \leq N(b(u)) \quad \forall \lambda > 0 \;, \quad \forall \; b(u) \in R(I+\lambda A_b) \;.$$

La fermeture $\bar{A}_b$ de A_b est m-accrétive ; notons $J_\lambda = \left(I + \lambda\, \bar{A}_b\right)^{-1}$ sa résolvante.

Fixons $R > 0$; d'après $[BT2]$ ($cf.$ théorème 2-4) :

$$R(I+\lambda A_b) \supset \{b(u) \in L^1(I\!R) \cap BV(I\!R) \; ; \; \|b(u)\|_{\infty} \leq R\} \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0 \;.$$

Par approximation dans $(3-8)$, on obtient :

$$(3-9) \qquad N(J_\lambda(b(u))) \leq N(b(u)) \quad \text{pour} \quad \lambda > 0 \text{ et } b(u) \in L^1(I\!R) \text{ avec } N(b(u)) \leq R.$$

Considérons maintenant une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n \leq T$ et $u_1, ..., u_n$; $f_1, f_2, ..., f_n \in L^1(I\!R)$ telle que

$$(3-10) \qquad \frac{b(u_i) - b(u_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} + \bar{A}_b b(u_i) \ni f_i \quad pour\ i = 1, ..., n,$$

où v_0 est la donnée initiale du problème (PE).

$(3-10)$ donne

$(3-11) \quad b(u_{i-1}) + \lambda_i f_i = b(u_i) + \lambda_i A_b b(u_i)$ où $\lambda_i = t_i - t_{i-1}$.

Il en résulte donc que :

$$b(u_i) = (I + \lambda_i A_b)^{-1}(b(u_{i-1}) + \lambda_i f_i) ;$$

par conséquent , $N(\ b(u_i)) \leq \ N(\ b(u_{i-1}) + \lambda_i f_i)$

$$\leq N(\ b(u_{i-1})) + \lambda_i \|f_i\|_\infty .$$

Par itération , on a :

$$(3-12) \quad N(b(u_i)) \leq \ N(b(u_0)) + \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \|f_j\|_\infty \qquad pour\ \ i = 1, ..., n$$

à condition que

$$(3-13) \quad N(b(u_0)) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \|f_j\|_\infty \leq R \ .$$

Si l'on choisit $R > R_0 = N(b(u_0)) + \int_0^T \|f(t,.)\|_\infty dt$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n \leq T$ et $f_1, f_2, ..., f_n \in L^1(I\!R)$ telles que $(3-13)$ soit satisfaite et

$$(3-14) \quad \max \lambda_i \leq \varepsilon \ , \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{I\!R} |f(t,x) - f_i(x)| \, dxdt \leq \varepsilon \quad .$$

Il existe $b(u_1)$, ..., $b(u_n)$ telles que $(3-10)$ soit satisfaite ; d'après $(3-12)$ on a :

$$(3-15) \quad N(b(u_\varepsilon)) \leq R \ \text{ où } \ b(u_\varepsilon(t)) = b(u_i) \text{ pour } \ t \in]t_{i-1}, t_i].$$

Et comme ceci est vrai $\forall \ R > R_0$ alors on aura :

$$(3-16) \qquad N(b(u_\varepsilon)) \leq R_0.$$

Puisque $b(u_\varepsilon) \longrightarrow b(u)$ dans $C([0,T]; L^1(I\!R))$, on obtient par passage à la limite dans $(3-16)$ le résultat de la proposition .

3.3 Solutions entropiques

3.3.1 Introduction

Il existe une vaste littérature sur le problème parabolique dégénéré que nous considérons. En effet il existe plusieurs résultats d'existence de solution faible, entropique du problème de Cauchy associé et du problème de Cauchy-Dirichlet associé ainsi des résultats d'unicité sous différentes conditions sur les données a, b et φ.

Parmi ces travaux, on peut citer tout d'abord ceux de Bénilan et Touré $[BT2]$, $[BT3]$ sous la condition $b = id$. Ils obtiennent des résultats d'existence et d'unicité de solution entropique sans la condition de structure de Alt et Luckhaus.

On peut également citer les travaux de Bénilan et Wittbold $[BW1]$ sous la condition $\varphi = id$. Ils obtiennent des résultats d'existence (et d'unicité) de solutions faibles d'énergie finie avec la condition de structure et des résultats d'unicité de solutions fortes sans la condition de structure pour un cas particulier d'équation où $b(k) = (k-1)^+$.

Par contre dans cette partie, nous abordons l'étude du problème parabolique avec des conditions plus générales sur b et φ : b et φ sont continues, croissantes au sens large avec b surjective. Sous ces hypothèses, nous obtenons des résultats d'existence (et d'unicité) de solution entropique sans la condition de structure de type Alt et Luckhaus.

On définit le domaine généralisé de l'opérateur A_b par :

$$\hat{D}(A_b) = \{v_0 \in L^1(\mathbb{R})\,;\ \text{il existe } v_n = b(u_n) \in D(A_b)\ ,\ \text{tel que}\ v_n \longrightarrow v_0 \ \text{dans } L^1(\mathbb{R}), A_b v_n \text{ est borné dans } L^1(\mathbb{R})\}.$$

On considère le problème :

$$(PE) \qquad \begin{cases} b(u)_t - a(u, \varphi(u)_x)_x = f & \text{sur } Q =]0,T[\times \mathbb{R} \\ \\ b(u(0,.)) = v_0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}.$$

Si $f \in BV(0,T;L^1(\mathbb{R}))$ et $v_0 \in \hat{D}(A_b)$, alors d'après la théorie générale des équations d'évolutions (voir $[BCP]$), la "bonne solution" u de (PE) est telle que $b(u)$ est lipschitzienne de $[0,T]$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Introduisons maintenant les notions de solution faible et entropique du problème d'évolution.

Définition 35 : *Soit $f \in L^2(0,T;H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}))$ et $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle solution faible du problème (PE) toute fonction u telle que $\varphi(u) \in L^2(0,T;H^1_{loc}(\mathbb{R}))$, $b(u) \in L^1_{loc}(Q)$ vérifiant :*

i) $b(u)_t \in L^2(0,T;H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}))$, $h = a(u,\varphi(u)_x) \in L^2_{loc}(Q)$

ii) $b(u)_t - h_x = f$ *dans* $D'(Q)$ *et* $b(u(0)) = v_0$.

La dernière condition doit être comprise au sens suivant :

$$\int_0^T \langle b(u)_t, \xi\rangle\, dt = -\int_Q b(u)\,\xi_t dt - \int_{\mathbb{R}} v_0 \xi(0)\, dx$$

pour tout $\xi \in L^2(0,T;D(\mathbb{R})) \cap W^{1,1}(0,T;L^\infty(\mathbb{R}))$, telle que $\xi(T) = 0$, où $\langle , \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H^{-1}(\mathbb{R})$ et $H^1(\mathbb{R})$.

Définition 36 : *Soit* $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})\right) \cap L^1(Q)$ *et* $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$. *On appelle solution entropique de* (PE), *toute solution faible* u *satisfaisant :*

$$(a)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_Q sign_0(u-k)\left\{(h-H(k))\,\xi_x - (b(u)-b(k))\,\xi_t - f\xi\right\}dxdt- \\ \qquad\qquad \displaystyle -\int_{\mathbb{R}} (b(u_0)-b(k))^+\,\xi(0)\,dx \le 0 \end{cases}$$

et

$$(b)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_Q sign_0(k-u)\left\{(h-H(k))\,\xi_x - (b(u)-b(k))\,\xi_t - f\xi\right\}dxdt+ \\ \qquad\qquad \displaystyle +\int_{\mathbb{R}} (b(u_0)-b(k))^-\,\xi(0)\,dx \ge 0 \end{cases}$$

$$\forall\quad \xi \in D^+([0,T]\times\mathbb{R})\ ,\ k\in\mathbb{R}\ ,\ \text{et}\ \ \xi(T)=0\ .$$

3.3.2 Existence de solution entropique

Dans cette section , nous supposons que

$$(H2)\quad \begin{cases} v_0 \in \hat{D}(A_b)\cap L^\infty(\mathbb{R})\,, f\in BV\left(0,T;L^1(\mathbb{R})\right)\ \text{et} \\ \displaystyle\int_0^T \|f(t,.)\|_\infty\,dt < +\infty \end{cases}$$

de telle sorte que la "bonne solution" u de (PE) est telle que $b(u)$ est dans $Lip(0,T;L^1(\mathbb{R}))\cap L^\infty(Q)$.

Sous certaines hypothèses additives , la "bonne solution" u de (PE) est alors solution entropique de (PE) .

Enonçons maintenant le premier résultat de cette section .

Nous supposons d'abord que :

$(H3)$ $\quad b+\varphi$ est inversible ;

alors on a :

Théorème 37 : *sous les hypothèses* $(H1)$, $(H2)$ *et* $(H3)$, *la "bonne solution" u de* (PE) *est telle que* $b(u) \in Lip\,(0,T;L^1\,(\mathbb{R})) \cap L^\infty\,(Q)$ *et est solution entropique* .

Preuve :

Par définition du domaine généralisé . on peut toujours choisir $v_\varepsilon\,(0) \in D\,(A_b)$ avec $A_b v_\varepsilon\,(0)$ borné dans $L^1\,(\mathbb{R})$.

On peut également choisir f_ε borné dans $BV\,(0,T;L^1\,(\mathbb{R}))$; comme A_b est accrétif alors , il en résulte que $A_b v_\varepsilon$ est borné dans $L^\infty\,(0,T;L^1\,(\mathbb{R}))$ (car $A_b v_\varepsilon\,(0)$ est borné dans $L^1\,(\mathbb{R})$) et donc , on montre que $h_\varepsilon = a\,(u_\varepsilon, \varphi\,(u_\varepsilon)_x)$ est borné dans $L^\infty\,(0,T;BV\,(\mathbb{R}))$ d'après l'hypothèse de coercivité $(H1)$ (voir la preuve de la proposition 29); utilisant encore $(H1)$, on obtient que $\varphi\,(u_\varepsilon)_x$ est borné dans $L^\infty\,(0,T;L^\infty\,(\mathbb{R}))$.

D'après $(3-16)$, on a que $b\,(u_\varepsilon)$ est borné dans $L^\infty\,(Q)$ et comme b est surjective alors u_ε est borné dans $L^\infty\,(Q)$.

Ainsi , on obtient : $u_\varepsilon \in L^\infty\,(Q)$ et $\varphi\,(u_\varepsilon) \in H^1_{loc}\,(Q)$.

D'après le théorème de Rellick , on a $\varphi\,(u_{\varepsilon_k}) \rightharpoonup w$ dans $H^1_{loc}\,(Q)$ et $\varphi\,(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow w$ dans $L^2_{loc}\,(Q)$ $((u_{\varepsilon_k})$ suite extraite de $(u_\varepsilon))$.

On a $\left\{ \begin{array}{l} b\,(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow b\,(u) \quad \text{dans} \quad C\,([0,T]\,;L^1\,(\mathbb{R})) \\ \\ \varphi\,(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow w \quad \text{dans} \qquad L^2_{loc}\,(Q)\,. \end{array} \right.$

Puisque $\varphi \circ b^{-1}$ est un graphe maximal monotone alors $w \in \varphi \circ b^{-1}\,(v)$ (car $\varphi\,(\,u_{\varepsilon_k}) \in \varphi \circ b^{-1}\,(v_{\varepsilon_k})$ où $v_{\varepsilon_k} = b\,(u_{\varepsilon_k})$) où $v = b\,(u)$.

Par conséquent , il existe $\tilde{u} \in b^{-1}\,(v)$ tel que $w = \varphi\,(\tilde{u})$.

$v = b\,(\tilde{u})$ car $\tilde{u} \in b^{-1}\,(v)$; donc $b\,(u) = b\,(\tilde{u})$.

Puisque $b\,(u_{\varepsilon_k}) \in L^2_{loc}\,(Q)$, $b\,(\tilde{u}) \in L^2_{loc}\,(Q)$; on a :

$b\,(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow b\,(\tilde{u})$ dans $L^2_{loc}\,(Q)$.

Ce qui nous donne :

$$(3-17) \qquad \begin{cases} b(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow b(\tilde{u}) & dans\ L^2_{loc}(Q) \\ \varphi(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow \varphi(\tilde{u}) & dans\ L^2_{loc}(Q). \end{cases}$$

Compte tenu de $(3-17)$ et $(H3)$, on obtient :

$$u_{\varepsilon_k} \longrightarrow \tilde{u} \quad \text{dans} \quad L^2_{loc}(Q) \quad .$$

On a aussi :

$$\varphi(u_{\varepsilon_k})_x \rightharpoonup \tilde{w} \quad \text{dans} \quad L^2_{loc}(Q) \quad .$$

Soit maintenant $\xi \in D(Q)$, on a :

$$\int_Q \xi\varphi(u_{\varepsilon_k})_x\, dxdt = -\int_Q \xi_x\varphi(u_{\varepsilon_k})\, dxdt \longrightarrow -\int_Q \xi_x\varphi(\tilde{u})\, dxdt$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$,

or $\displaystyle\int_Q \xi\varphi(u_{\varepsilon_k})_x\, dxdt \longrightarrow \int_Q \xi\tilde{w}dxdt$,

donc on a $\langle\tilde{w},\xi\rangle = -\langle\varphi(\tilde{u}),\xi_x\rangle \Leftrightarrow \langle\tilde{w},\xi\rangle = \langle\varphi(\tilde{u})_x,\xi\rangle$
$\forall\ \xi \in D(Q)$;

par conséquent , $\varphi(\tilde{u})_x = \tilde{w}$.

En résumé , on a :

$$(3-18) \qquad \begin{cases} u_{\varepsilon_k} \longrightarrow \tilde{u} & \text{dans} \quad L^2_{loc}(Q) \quad \text{et} \quad p.p \\ \varphi(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow \varphi(\tilde{u}) & \text{dans} \quad L^2_{loc}(Q) \\ \varphi(u_{\varepsilon_k})_x \rightharpoonup \varphi(\tilde{u})_x & \text{dans} \quad L^\infty(Q) \quad . \end{cases}$$

$h_\varepsilon(t)$ est borné dans $BV(\mathbb{R})$; par conséquent d'après le théorème de Weil (voir [T1]), $(h_\varepsilon(t))$ est relativement compact dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ uniformément pour tout $t \in [0,T]$.

Compte tenu de la monotonie de $a(k,.)$, de la proposition 7, et de $(3-18)$, on a :

$$h_{\varepsilon_k} = a\left(u_{\varepsilon_k}, \varphi\left(u_{\varepsilon_k}\right)_x\right) \longrightarrow h = a\left(\tilde{u}, \varphi\left(\tilde{u}\right)_x\right) \quad \text{dans} \quad L^1_{loc}(Q) \quad .$$

On sait que $b(u)$ est une limite uniforme par rapport à t , sur $[0,T]$, d'une suite de fonctions en escalier $b(u_\varepsilon)$ définie par :

$$0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n \le T \ , \ t_0 \le \varepsilon \ ; \ t_i - t_{i-1} \le \varepsilon \ , \ T - t_n \le \varepsilon \ ,$$

$$b\left(u_\varepsilon(t)\right) = b\left(u^i_\varepsilon\right) \quad \text{sur} \quad]t_{i-1}, t_i] \ , \ b\left(u_\varepsilon(t)\right) = b\left(u^0_\varepsilon\right) \quad \text{pour} \quad t \le t_0 \ ,$$

$$b\left(u^0_\varepsilon\right) \in D\left(A_b\right) \qquad \text{avec} \quad :$$

$$\frac{b\left(u^i_\varepsilon\right) - b\left(u^{i-1}_\varepsilon\right)}{t_i - t_{i-1}} + A_b b\left(u^i_\varepsilon\right) = f.$$

Par conséquent , d'après la définition de A_b , on a :

$\forall \quad \xi \in D^+(\mathbb{R}) \ , \quad \forall \quad k \in \mathbb{R} \quad ;$

$$\int_{\mathbb{R}} sign_0\left(b\left(u^i_\varepsilon\right) - b(k)\right)\left\{-\left[h_\varepsilon(t_i) - H(k)\right]\xi_x + \left[f - \frac{b\left(u^i_\varepsilon\right) - b\left(u^{i-1}_\varepsilon\right)}{t_i - t_{i-1}}\right]\xi\right\}dx \ge 0$$

d'où :

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} sign_0\left(b\left(u^i_\varepsilon\right) - b(k)\right)\left\{-\left[h_\varepsilon(t_i) - H(k)\right]\xi_x + f\xi\right\}dx \ge \\ &\qquad \ge \int_{\mathbb{R}} sign_0\left(b\left(u^i_\varepsilon\right) - b(k)\right)\frac{b\left(u^i_\varepsilon\right) - b\left(u^{i-1}_\varepsilon\right)}{t_i - t_{i-1}}\xi dx. \end{aligned}\right.$$

Intégrons cette dernière inégalité sur $]t_{i-1}, t_i]$:

$$(3-19)\left\{\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}}\int_{t_{i-1}}^{t_i} sign_0\left(b\left(u^i_\varepsilon\right) - b(k)\right)\left\{-\left[h_\varepsilon(t_i) - H(k)\right]\xi_x + f\xi\right\}dx \ge \\ &\qquad \ge \int_{\mathbb{R}} sign_0\left(b\left(u^i_\varepsilon\right) - b(k)\right)\left(b\left(u^i_\varepsilon\right) - b(u^{i-1}_\varepsilon)\right)\xi dx. \end{aligned}\right.$$

On a d'autre part :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{I\!R} sign_0\left(b\left(u_\varepsilon^i\right)-b\left(k\right)\right)\left(b\left(u_\varepsilon^i\right)-b(u_\varepsilon^{i-1})\right)\xi dx = \\ \displaystyle = \int_{I\!R} sign_0\left(b\left(u_\varepsilon^i\right)-b\left(k\right)\right)\left(b\left(u_\varepsilon^i\right)-b(u_\varepsilon^{i-1})\right)\xi dx \\ \displaystyle \geq \int_{I\!R}\left|b\left(u_\varepsilon^i\right)-b\left(k\right)\right|\xi dx - \int_{I\!R}\left|b\left(u_\varepsilon^{i-1}\right)-b\left(k\right)\right|\xi dx. \end{array}\right.$$

Ainsi donc $(3-19)$ devient :

$$(3-20)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{I\!R}\int_{t_{i-1}}^{t_i} sign_0\left(b\left(u_\varepsilon^i\right)-b\left(k\right)\right)\left\{-\left[h_\varepsilon\left(t_i\right)-H\left(k\right)\right]\xi_x+f\xi\right\}dxdt \geq \\ \displaystyle \geq \int_{I\!R}\left|b\left(u_\varepsilon^i\right)-b\left(k\right)\right|\xi dx - \int_{I\!R}\left|b\left(u_\varepsilon^{i-1}\right)-b\left(k\right)\right|\xi dx \end{array}\right.$$

$\forall\ s\ ,\ t$ tels que $0 \leq s \leq t \leq T$, il existe $j\ ,\ i$ tels que $t\ \in]t_{j-1}, t_j]$ et $s \in]t_{i-1}, t_i]$.

Faisons alors la somme des intégrales obtenues de $i+1$ à j :

$$(3-21)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{I\!R}\int_{s}^{t} sign_0\left(b\left(u_\varepsilon\right)-b\left(k\right)\right)\left\{-\left[h_\varepsilon\left(\tau\right)-H\left(k\right)\right]\xi_x+f\xi\right\}dxd\tau \geq \\ \displaystyle \geq \int_{I\!R}\left|b\left(u_\varepsilon\left(t\right)\right)-b\left(k\right)\right|\xi dx - \int_{I\!R}\left|b\left(u_\varepsilon\left(s\right)\right)-b\left(k\right)\right|\xi dx \end{array}\right.$$

car $u_\varepsilon^j = u_\varepsilon\left(t\right)$ et $u_\varepsilon^i = u_\varepsilon\left(s\right)$.

Par passage à la limite dans $(3-21)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, il existe $\alpha \in L^\infty\left(Q\right)$, $\alpha \in sign\left(b\left(u\right)-b\left(k\right)\right)$, $p.p\ \ (t,x) \in Q$, tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{I\!R}\int_{s}^{t} \alpha\left\{-\left[h-H\left(k\right)\right]\xi_x+f\xi\right\}dxd\tau \geq \\ \displaystyle \geq \int_{I\!R}\left|b\left(u\left(t\right)\right)-b\left(k\right)\right|\xi dx - \int_{I\!R}\left|b\left(u\left(s\right)\right)-b\left(k\right)\right|\xi dx \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à : $\forall \quad \psi \in D^{+}(]0,T[)$:

$$\int_Q [|b(u) - b(k)| \psi_t \xi + \alpha \{-[h - H(k)] \xi_x \psi + f \xi \psi\}] \, dxdt \geq 0;$$

et comme l'ensemble $\{\psi\xi \ , \ \xi \in D^{+}(I\!R) \ , \psi \in D^{+}(]0,T[)\}$ est une partie totale de $D^{+}(Q)$, alors u est solution entropique du problème d'évolution.

Remarque 38 *:Sous les seules hypothèses $(H1)$, $(H2)$, lorsque de plus b est inversible alors la "bonne solution" u de (PE) est solution entropique.*

En effet , dans ce cas , faisant le changement de fonction $\tilde{u} = b(u)$, le problème se ramène à :

$$\tilde{u}_t - \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{\varphi}(\tilde{u})_x)_x = f$$

$$\text{où} \;\; \tilde{a}(k,\varsigma) = a(b^{-1}(k), \varsigma) \quad , \quad \tilde{\varphi} = \varphi \circ b^{-1} \quad .$$

D'après le théorème 3.1 de $[BT3]$, $\tilde{u}$ est solution entropique du problème ; et donc on déduit que u est solution entropique de (PE).

Dans le cas général , lorsque b est croissante (au sens large), avec la condition de structure due à Alt et Luckauss $[AL]$, nous établissons l'existence d'une solution entropique, plus précisément, on a le résultat suivant :

Nous supposons que :

$(H4)$ Il existe $\tilde{a} : I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$ continue , croissante par rapport à la deuxième variable et telle que $\tilde{a}(b(u), \varphi(u)_x) = a(u, \varphi(u)_x)$.

Théorème 39 : *Sous les hypothèses $(H1)$, $(H2)$, et $(H4)$, la " bonne solution" u de (PE) est telle que $b(u) \in Lip(0,T;L^1(I\!R)) \cap L^{\infty}(Q)$ et est solution entropique .*

Preuve :

Comme dans la preuve du théorème 37, on montre que :

$\varphi(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow \varphi(u)$ dans $L^2_{loc}(Q)$, $\varphi(u_{\varepsilon_k})_x \rightharpoonup \varphi(u)_x$ dans $L^{\infty}(Q)$.

On a donc

$$(3-22)\quad \begin{cases} b\left(u_{\varepsilon_k}\right) \longrightarrow b\left(u\right) & \text{dans} \quad C\left(0,T;L^1\left(I\!R\right)\right) \\ \varphi\left(u_{\varepsilon_k}\right)_x \rightharpoonup \varphi\left(u\right)_x & \text{faiblement dans} \quad L^\infty\left(Q\right). \end{cases}$$

Par conséquent , utilisant la monotonie de $\tilde{a}(k,.)$, $(3-22)$ et la proposition (7), on obtient :

$(3-23)$. $\tilde{h}_{\varepsilon_k} = \tilde{a}\left(b\left(u_{\varepsilon_k}\right), \varphi\left(u_{\varepsilon_k}\right)_x\right) \longrightarrow \tilde{h} = \tilde{a}\left(b\left(u\right), \varphi\left(u\right)_x\right)$;
$(3-23)$ est équivalent à :

$$h_{\varepsilon_k} = a\left(u_{\varepsilon_k}, \varphi\left(u_{\varepsilon_k}\right)_x\right) \longrightarrow h = a\left(u, \varphi\left(u\right)_x\right) \quad \text{dans} \quad L^1_{loc}\left(Q\right).$$

Ainsi , par des calculs analogues à ceux faits dans la preuve du théorème 37, on montre que u est solution entropique de (PE).

Remarque 40 *: Sous les seules hypothèses $(H1)$ et $(H2)$, lorsque de plus b est inversible et φ est strictement croissante , alors la "bonne solution" u de (PE) qui est telle que $b(u) \in Lip\left(0,T;L^1\left(I\!R\right)\right) \cap L^\infty\left(Q\right)$ est l'unique solution faible de (PE).*

En effet par un changement de fonction de la même manière que dans la remarque 38, on obtient les résultats du théorème 3.3 de $[BT3]$.

3.3.3 Un résultat d'unicité de solution entropique

Dans cette section , nous montrons avec une hypothèse complémentaire sur les données que lorsqu'elles existent , deux solutions entropiques du problème d'évolution (PE) vérifient le principe de comparaison duquel découle l'unicité de la solution.

Ces résultats sont obtenus grâce aux travaux de Carrillo, Maliki, Touré $([CMT], [Ca], [MT2]$).

Nous faisons l'hypothèse complémentaire suivante : il existe $M \in C\left(I\!R\right)$ tel que :

$$(H5) \qquad \forall\, x, z, \bar{z} \in I\!R \qquad \left|a\left(x,z\right) - a\left(x,\bar{z}\right)\right| \le M\left(x\right)\left|z - \bar{z}\right|.$$

Nous commençons par montrer que deux solutions entropiques satisfont aux inégalités dites de Kato (cf $[AB]$) ; plus précisément on a :

Théorème 41 *: (Inégalité de Kato)*

Pour tout $i = 1, 2$ *; soit* $f_i \in L^2(0,T; H^{-1}(I\!R)) \cap BV(0,T; L^1(I\!R)) \cap L^1(Q)$ *et soit* $v_{0_i} = b(u_{0_i}) \in \hat{D}(A_b) \cap L^\infty(I\!R)$. *Pour toutes solutions entropiques* u_1, u_2 *associées à* (f_1, v_{0_1}) *et* (f_2, v_{0_2}), *on a :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_Q H_0(u_1 - u_2)(h_1 - h_2)\xi_x dxdt - \int_Q (b(u_1) - b(u_2))^+ \xi_t dxdt - \\ \qquad\qquad \displaystyle - \int_{I\!R} (v_{0_1} - v_{0_2})^+ \xi(0) dx \leq \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \displaystyle \leq \int_Q H_0(u_1 - u_2)(f_1 - f_2) dxdt \end{array} \right.$$

où $H_0(r) = sign_0^+(r)$.

Pour la preuve de ce théorème , on établit tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 42 *: Si* u *est solution faible de* (PE) *, alors on a :*

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_Q H_0(u-k)\{(h - H(k))\xi_x - f\xi\} dxdt - \int_Q (b(u) - b(k))^+ \xi_t dxdt - \\ \displaystyle - \int_{I\!R} (v_0 - b(k))^+ \xi(0) dx = - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_Q (h - H(k)) H_\varepsilon(\varphi(u) - \varphi(k))_x \xi dxdt \end{array} \right.$$

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_Q H_0(k-u)\{(h - H(k))\xi_x - f\xi\} dxdt - \int_Q (b(k) - b(u))^+ \xi_t dxdt - \\ \displaystyle - \int_{I\!R} (b(k) - v_0)^+ \xi(0) dx = - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_Q (h - H(k)) H_\varepsilon(\varphi(k) - \varphi(u))_x \xi dxdt \end{array} \right.$$

$\forall\ \xi \in D^+([0,T) \times I\!R)$, $\forall\ k \in I\!R$ *tel que* $\varphi(k) \notin E$.

Où on a noté $E = \{r \in \mathrm{Im}(\varphi); (\varphi^{-1})_0$ *est discontinue en* $r\}$.

Preuve du lemme :

On observe que pour k tel que $\varphi(k) \notin E$, on a :

$$sign_0{}^+ (u-k) = sign_0{}^+ (\varphi(u) - \varphi(k)) \quad \text{sur } Q \quad .$$

$H_\varepsilon (\varphi(u) - \varphi(k)) \xi \in L^2((0,T); H^1(\mathbb{R}))$ car $\varphi(u) \in L^2(Q)$ et $\varphi(u(t)) \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Posons
$$\psi_\varepsilon(z) = H_\varepsilon(z - b(s)) \ ;$$
$$B_{\psi_\varepsilon}(z) = \int_0^z H_\varepsilon(\varphi \circ ((b^{-1})_0(r)) - \varphi(k))\, dr$$

Puisque ψ_ε est borné , on a $B_{\psi_\varepsilon}(v_0) \in L^1(\mathbb{R})$ et d'après le lemme 44, on a :

$B_{\psi_\varepsilon}(b(u)) \in L^\infty(0,T; L^1(\mathbb{R}))$ et :

$$\int_Q B_{\psi_\varepsilon}(b(u))\, \xi_t dxdt + \int_{\mathbb{R}} B_{\psi_\varepsilon}(v_0)\, \xi(0)\, dx = -\int_0^T \langle b(u)_t , H_\varepsilon(\varphi(u) - \varphi(k))\, \xi\rangle\, dt.$$

De plus , puisque u est solution entropique et comme $H_\varepsilon(\varphi(u) - \varphi(k))\, \xi \in L^2((0,T); H^1(\mathbb{R}))$, on a :

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^T \langle b(u)_t , H_\varepsilon(\varphi(u) - \varphi(k))\, \xi\rangle\, dt = \\ = \displaystyle\int_Q \{(h - H(k))\, [H_\varepsilon(\varphi(u) - \varphi(k))\, \xi]_x - f H_\varepsilon(\varphi(u) - \varphi(k))\, \xi\}\, dxdt \end{cases}$$

Cette égalité est équivalente à :

$$(3-24) \begin{cases} \displaystyle\int_Q B_{\psi_\varepsilon}(b(u))\, \xi_t dxdt + \int_{\mathbb{R}} B_{\psi_\varepsilon}(v_0)\, \xi(0)\, dx = \\ = \displaystyle\int_Q \{(h - H(k))\, [H_\varepsilon(\varphi(u) - \varphi(k))\, \xi]_x - f H_\varepsilon(\varphi(u) - \varphi(k))\, \xi\}\, dxdt \end{cases}$$

Or $\quad B_{\psi_\varepsilon}(b(u)) = \int_0^{b(u)} H_\varepsilon(\varphi\circ((b^{-1})_0(r)) - \varphi(k))\,dr$

$$= \int_{b(k)}^{b(u)} H_\varepsilon(\varphi\circ((b^{-1})_0(r)) - \varphi(k))\,dr \longrightarrow (b(u) - b(k))^+$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ car b est continue , et puisque $\varphi(k) \notin E$, on a

$\varphi\circ((b^{-1})_0(r)) - \varphi(k) > 0 \;\; \forall \;\; r > b(k)$ et donc

$H_\varepsilon(\;\varphi\circ((b^{-1})_0(r)) - \varphi(k)) \longrightarrow 1$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0 \;\; \forall\, r > b(k)$.

Ainsi , on obtient de façon analogue :

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} B_{\psi_\varepsilon}(v_0) = (v_0 - b(k))^+ \quad .$$

On sait aussi que $\left|\; B_{\psi_\varepsilon}(b(u))\right| \leq |b(u)|$ et $\left|B_{\psi_\varepsilon}(v_0)\right| \leq |v_0|$,

ce qui implique d'après le théorème de Lebesgue :

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_Q B_{\psi_\varepsilon}(b(u))\,\xi_t dxdt + \int_{\mathbb{R}} B_{\psi_\varepsilon}(v_0)\,\xi(0)\,dx = \\ &= \int_Q (b(u) - b(k))^+\,\xi_t dxdt + \int_{\mathbb{R}} (v_0 - b(k))^+\,\xi(0)\,dx. \end{aligned}\right.$$

Ainsi donc , passant à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $(3-24)$, on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} &\int_Q (b(u) - b(k))^+\,\xi_t dxdt + \int_{\mathbb{R}} (v_0 - b(k))^+\,\xi(0)\,dx = \\ &= \int_Q H_0(u-k)\left[(h - H(k))\xi_x - f\xi\right] dxdt + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_Q (h - H(k))\,H_\varepsilon(\varphi(u) - \varphi(k))_x\,\xi dxdt. \end{aligned}\right.$$

D'où (i) .

De façon analogue , on montre (ii) .

D'où le résultat du lemme .

Avant d'établir la preuve du théorème 41, donnons quelques hypothèses complémentaires.

La fonction $a : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ satisfait deux conditions :

$|a(x,z) - a(y,z)| \leq w(x-y,z)$ où w est le module de continuité de $a(.,z)$.

$$|a(x,z) - a(x,\bar{z})| \leq M(x)\,|z-\bar{z}| \qquad (H5).$$

$w \in C(I\!R^2)$ est une fonction positive telle que $w(.,z)$ est croissante et $w(0,z) = 0$; M est une fonction continue positive.

Preuve du Théorème 41 :

Soient deux paires différentes de variables (s,y) et (t,x) dans Q .

Nous notons $u_1 = u_1(s,y)$, $f_1 = f_1(s,y)$, $v_{0_1} = v_{0_1}(y)$ et, $u_2 = u_2(t,x)$, $f_2 = f_2(t,x)$, $v_{0_2} = v_{0_2}(x)$.

Soit ξ une fonction test positive de $D(Q \times Q)$, alors

$$(3-25) \qquad (s,y) \longmapsto \xi(t,x,s,y) \in D([0,T) \times I\!R) \quad \forall\ (t,x) \in Q$$

et

$$(3-26) \qquad (t,x) \longmapsto \xi(t,x,s,y) \in D([0,T) \times I\!R) \quad \forall\ (s,y) \in Q\ .$$

Soient :

$$Q_1 = \{\ (s,y) \in Q\ /\varphi(u_1(s,y)) \in E\}$$

et

$$Q_2 = \{\ (t,x) \in Q\ /\ \varphi(u_2(t,x)) \in E\}\ .$$

On déduit que

$$(3-27) \qquad \varphi(u_1)_y = 0 \quad \text{sur} \quad Q_1$$

et

$$(3-28) \qquad \varphi(u_2)_x = 0 \quad \text{sur} \quad Q_2 \quad .$$

On montre que :

$$(3-29) \begin{cases} H_0\left(u_1 - u_2\right) = \quad H_0\left(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\right) \\ dans \quad \left[(Q \backslash Q_1) \times Q\right] \cup \left[Q \times (Q \backslash Q_2)\right]. \end{cases}$$

On remplace dans (i) , u par u_1 et k par u_2 et on intègre sur $Q \backslash Q_2$; dans (a) u par u_1 et k par u_2 et on intègre sur Q_2. Ensuite, on additionne les deux inégalités et on obtient :

$$(3-30) \begin{cases} \int_{Q \times Q} H_0\left(u_1 - u_2\right)\left\{\left(h_1 - a\left(u_2, 0\right)\right)\xi_y - \left(b\left(u_1\right) - b\left(u_2\right)\right)\xi_s - \right. \\ \qquad \left. - f_1 \xi\right\} dydsdxdt - \\ \qquad - \int_{(\{0\} \times I\!R) \times Q} \left(v_{0_1} - b\left(u_2\right)\right)^+ \xi dydxdt \leq \\ \leq - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{Q \times Q} \left(h_1 - a\left(u_2, 0\right)\right) H_\varepsilon\left(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\right)_y \xi dydsdxdt \quad . \end{cases}$$

De même , on remplace dans (ii) , k par u_1 et u par u_2 et on intègre sur $Q \backslash Q_1$; dans (b) , k par u_1 et u par u_2 et on intègre sur Q_1.
Ensuite, on additionne les deux inégalités et on obtient :

$$(3-31) \begin{cases} \int_{Q \times Q} H_0\left(u_1 - u_2\right)\left\{\left(h_2 - a\left(u_1, 0\right)\right)\xi_x - \left(b\left(u_2\right) - b\left(u_1\right)\right)\xi_t - f_2 \xi\right\} dydsdxdt + \\ \qquad + \int_{Q \times (\{0\} \times I\!R)} \left(b\left(u_1\right) - v_{0_2}\right)^+ \xi dydsdx \geq \\ \qquad \geq - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{Q \times Q} \left(h_2 - a\left(u_1, 0\right)\right) H_\varepsilon\left(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\right)_x \xi dydsdxdt \quad . \end{cases}$$

Maintenant, d'après $(3-26)$, on a :

$$(3-32) \qquad \int_Q h_1 \nabla_x \left(H_\varepsilon(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))\,\xi\right) dxdt = 0$$

(car h_1 ne dépend pas de x).

$(3-32)$ donne :

$$\int_{Q\times Q} h_1 H_\varepsilon\left(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\right)\xi_x dxdt = -\int_{Q\times Q} h_1 H_{\varepsilon_x}\left(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\right)\xi dxdt.$$

Ce qui donne en utilisant $(3-28)$ et $(3-29)$:

$$(3-33) \quad \int_{Q\times Q} H_0(u_1 - u_2)\, h_1 \xi_x dxdt = -\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \int_{Q\times Q} h_1 H_{\varepsilon_x}\left(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\right)\xi dxdt.$$

On a également :

$$(3-34) \qquad \int_Q h_2 \nabla_y \left(H_\varepsilon(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))\,\xi\right) dxdt = 0$$

(car h_2 ne dépend pas de y) ;

ce qui donne à l'aide de $(3-27)$ et $(3-29)$:

$$(3-35) \quad \int_{Q\times Q} H_0(u_1 - u_2)\, h_2 \xi_y dxdt = -\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \int_{Q\times Q} h_2 H_{\varepsilon_y}\left(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\right)\xi dxdt.$$

Injectant $(3-33)$ dans $(3-30)$, on obtient :

$$
(3-36)\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\left\{h_1(\xi_x+\xi_y)-(b(u_1)-b(u_2))\,\xi_s-f_1\xi\right\}dydsdxdt \\
\displaystyle\qquad -\int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q}(v_{0_1}-b(u_2))^+\,\xi dydxdt \leq \\
\displaystyle\qquad \leq \int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\,a(u_2,0)\,\xi_y dydsdxdt- \\
\displaystyle\qquad -\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q} h_1 H_{\varepsilon_x}(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,\xi dydsdxdt- \\
\displaystyle\qquad -\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q}(h_1-a(u_2,0))H_{\varepsilon_y}(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,\xi dydsdxdt \quad .
\end{array}\right.
$$

Injectant $(3-35)$ dans $(3-31)$. on obtient :

$$
(3-37)\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\left\{h_2(\xi_x+\xi_y)-(b(u_2)-b(u_1))\,\xi_t-f_2\xi\right\}dydsdxdt \\
\displaystyle\qquad +\int_{Q\times(\{0\}\times I\!R)}(b(u_1)-v_{0_2})^+\,\xi dydsdx \geq \\
\displaystyle\qquad \geq \int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\,a(u_1,0)\,\xi_x dydsdxdt- \\
\displaystyle\qquad -\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q} h_2 H_{\varepsilon_y}(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,\xi dydsdxdt- \\
\displaystyle\qquad -\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q}(h_2-a(u_1,0))H_{\varepsilon_x}(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,\xi dydsdxdt \quad .
\end{array}\right.
$$

$(3-36)-(3-37)$ nous donne :

$$
(3-38)\left\{
\begin{aligned}
&\int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\{(h_1-h_2)(\xi_x+\xi_y)+(b(u_2)-b(u_1))(\xi_s+\xi_t)+ \\
&\qquad +(f_2-f_1)\xi\}dydsdxdt- \\
&-\int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q}(v_{0_1}-b(u_2))^+\xi dydxdt-\int_{Q\times(\{0\}\times I\!R)}(b(u_1)-v_{0_2})^+\xi dydsdx \\
&\leq -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q\times Q} h_1 H_{\varepsilon_x}(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\xi dydsdxdt+ \\
&+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q\times Q} h_2 H_{\varepsilon_y}(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\xi dydsdxdt+ \\
&+\int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\,a(u_2,0)\,\xi_y dydsdxdt- \\
&-\int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\,a(u_1,0)\,\xi_x dydsdxdt+ \\
&+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q\times Q}(h_2-a(u_1.0))H_{\varepsilon_x}(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\xi dydsdxdt \\
&-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q\times Q}(h_1-a(u_2,0))H_{\varepsilon_y}(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\xi dydsdxdt\quad.
\end{aligned}\right.
$$

On a :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q\times Q} a(u_1,0)\,H_{\varepsilon_x}(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,\xi dydsdxdt= \\
&\qquad =-\int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\,a(u_1,0)\,\xi_x dydsdxdt
\end{aligned}\right.
$$

car u_1 ne dépend pas de x .

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \displaystyle\int_{Q\times Q} a\left(u_2, 0\right) H_{\varepsilon_y}\left(\varphi\left(u_1\right) - \varphi\left(u_2\right)\right) \xi dydsdxdt = \\ \qquad\qquad = - \displaystyle\int_{Q\times Q} H_0\left(u_1 - u_2\right) a\left(u_2, 0\right) \xi_y dydsdxdt \end{cases}$$

car u_2 ne dépend pas de y .

Ainsi $(3-38)$ devient :

$$(3-39) \begin{cases} \displaystyle\int_{Q\times Q} H_0\left(u_1 - u_2\right) \left\{ \left(h_1 - h_2\right) \left(\xi_x + \xi_y\right) + \left(b\left(u_2\right) - b\left(u_1\right)\right) \left(\xi_s + \xi_t\right) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(f_2 - f_1\right) \xi \right\} dydsdxdt - \\ - \displaystyle\int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q} \left(v_{0_1} - b\left(u_2\right)\right)^+ \xi dydxdt - \displaystyle\int_{Q\times(\{0\}\times I\!R)} \left(b\left(u_1\right) - v_{0_2}\right)^+ \xi dydsdx \\ \qquad\qquad \leq \\ \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \displaystyle\int_{Q\times Q} [h_2 - h_1] \nabla H_\varepsilon\left(\varphi\left(u_1\right) - \varphi\left(u_2\right)\right) \xi dydsdxdt \end{cases} .$$

Posons $I = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \displaystyle\int_{Q\times Q} [h_2 - h_1] \nabla H_\varepsilon\left(\varphi\left(u_1\right) - \varphi\left(u_2\right)\right) \xi dydsdxdt.$

$$I = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \displaystyle\int_{Q\times Q} \left[a\left(u_2, \varphi\left(u_2\right)_x\right) - a\left(u_2, \varphi\left(u_1\right)_y\right)\right] \nabla H_\varepsilon\left(\varphi\left(u_1\right) - \varphi\left(u_2\right)\right) \xi dydsdxdt + \\ \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \displaystyle\int_{Q\times Q} \left[a\left(u_2, \varphi\left(u_1\right)_y\right) - a\left(u_1, \varphi\left(u_1\right)_y\right)\right] \nabla H_\varepsilon\left(\varphi\left(u_1\right) - \varphi\left(u_2\right)\right) \xi dydsdxdt. \end{cases}$$

Compte tenu de la monotonie de a par rapport à la deuxième variable, on a :

$$I \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{Q\times Q} \left[a\left(u_2, \varphi\left(u_1\right)_y\right) - a\left(u_1, \varphi\left(u_1\right)_y\right)\right] \nabla H_\varepsilon\left(\varphi\left(u_1\right) - \varphi\left(u_2\right)\right) \xi dydsdxdt.$$

$(3-39)$ devient :

$$
(3-40)\left\{
\begin{array}{c}
\displaystyle\int_{Q\times Q} H_0\left(u_1-u_2\right)\left\{\left(h_1-h_2\right)\left(\xi_x+\xi_y\right)+\right. \\
\left. +\left(b\left(u_2\right)-b\left(u_1\right)\right)\left(\xi_s+\xi_t\right)+\left(f_2-f_1\right)\xi\right\} dydsdxdt- \\
\displaystyle-\int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q}\left(v_{0_1}-b\left(u_2\right)\right)^+\xi dydxdt- \\
\displaystyle-\int_{Q\times(\{0\}\times I\!R)}\left(b\left(u_1\right)-v_{0_2}\right)^+\xi dydsdx \\
\leq \\
\displaystyle\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q}\left[a\left(u_2,\varphi\left(u_1\right)_y\right)-a\left(u_1,\varphi\left(u_1\right)_y\right)\right]\nabla H_\varepsilon\left(\varphi\left(u_1\right)-\varphi\left(u_2\right)\right)\xi dydsdxdt
\end{array}
\right.
$$

$(3-40)$ devient :

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\displaystyle\int_{Q\times Q} H_0\left(u_1-u_2\right)\left\{\left(h_1-h_2\right)\left(\xi_x+\xi_y\right)+\left(b\left(u_2\right)-b\left(u_1\right)\right)\left(\xi_s+\xi_t\right)+\right. \\
\left. +\left(f_2-f_1\right)\xi\right\} dydsdxdt- \\
\displaystyle-\int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q}\left(v_{0_1}-b\left(u_2\right)\right)^+\xi dydxdt-\int_{Q\times(\{0\}\times I\!R)}\left(b\left(u_1\right)-v_{0_2}\right)^+\xi dydsdx\leq \\
\leq \\
\displaystyle\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q} w\left(u_2-u_1,\varphi\left(u_1\right)_y\right)\left|\varphi\left(u_1\right)_y\right| H_\varepsilon'\left(\varphi\left(u_1\right)-\varphi\left(u_2\right)\right)\xi dydsdxdt+ \\
\displaystyle+\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q} w\left(u_2-u_1,\varphi\left(u_1\right)_y\right)\left|\varphi\left(u_2\right)_x\right| H_\varepsilon'\left(\varphi\left(u_1\right)-\varphi\left(u_2\right)\right)\xi dydsdxdt.
\end{array}
\right.
$$

Il suffit maintenant de montrer que :

$$
\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q} w\left(u_2-u_1,\varphi\left(u_1\right)_y\right)\left|\varphi\left(u_1\right)_y\right| H_\varepsilon'\left(\varphi\left(u_1\right)-\varphi\left(u_2\right)\right)\xi=0
$$

et

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q} w\left(u_2-u_1,\varphi(u_1)_y\right)|\varphi(u_2)_x|\,H'_\varepsilon(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,\xi=0 \quad .$$

Nous allons d'abord montrer que :

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\times Q} w\left(u_2-u_1,\varphi(u_1)_y\right)\left|\varphi(u_1)_y\right|H'_\varepsilon(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,\xi=0\,;$$

la deuxième se fait par un raisonnement analogue .

Posons $F_\varepsilon(z)=\int_0^z w\left((\varphi^{-1})_0(\varphi(u_2))-(\varphi^{-1})_0(r),r'\right)H'_\varepsilon(r-\varphi(u_2))\,dr.$

On a :

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{Q\backslash Q_1\times Q} w\left(u_2-u_1,\varphi(u_1)_y\right)\left|\varphi(u_1)_y\right|H'_\varepsilon(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,\xi dydsdxdt=\\&\qquad=\int_{Q\backslash Q_1} div_y F_\varepsilon(\varphi(u_1))\,\xi dyds=\\&\qquad=-\int_{Q\backslash Q_1} F_\varepsilon(\varphi(u_1))\,\xi_y dyds \quad .\end{aligned}\right.$$

$$F_\varepsilon(z)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\min(z,\varphi(u_2))}^{\min(z,\varphi(u_2)+\varepsilon)} w\left((\varphi^{-1})_0(\varphi(u_2))-(\varphi^{-1})_0(r),r'\right)dr \quad .$$

$w\in C(I\!R^2)$; elle atteint donc son maximum et son minimum sur tout intervalle fermé borné de $I\!R$. En particulier sur $[\varphi(u_2),\varphi(u_2)+\varepsilon]$ qui est borné car $\|u\|_\infty$ est finie.

Il existe alors m_ε et $M_\varepsilon\in I\!R$ tels que :

$$m_\varepsilon\leq\frac{1}{\varepsilon}\int_{\min(z,\varphi(u_2))}^{\min(z,\varphi(u_2)+\varepsilon)} w\left((\varphi^{-1})_0(\varphi(u_2))-(\varphi^{-1})_0(r),r'\right)dr\leq M_\varepsilon.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe $r_1(\varepsilon)$ et $r_2(\varepsilon)$ dans $[\varphi(u_2),\varphi(u_2)+\varepsilon]$, α_ε et β_ε tels que :

$$m_\varepsilon=w\left((\varphi^{-1})_0(\varphi(u_2))-(\varphi^{-1})_0(r_1(\varepsilon)),\alpha_\varepsilon\right)$$

$M_\varepsilon = w\left(\left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2)) - \left(\varphi^{-1}\right)_0(r_2(\varepsilon)), \beta_\varepsilon\right)$.

Comme $r_1(\varepsilon)$ et $r_2(\varepsilon) \in [\varphi(u_2), \varphi(u_2)+\varepsilon]$, on a :

$\left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2)) \leq \left(\varphi^{-1}\right)_0(r_1(\varepsilon)) \leq \left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2)+\varepsilon)$;

$\left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2)) \leq \left(\varphi^{-1}\right)_0(r_2(\varepsilon)) \leq \left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2)+\varepsilon)$.

Il existe θ_1 et $\theta_2 \in]0,1[$ tels que :

$\left(\varphi^{-1}\right)_0(r_1(\varepsilon)) = \theta_1\left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2)) + (1-\theta_1)\left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2)+\varepsilon)$

$\left(\varphi^{-1}\right)_0(r_2(\varepsilon)) = \theta_2\left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2)) + (1-\theta_2)\left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2)+\varepsilon)$.

Par conséquent :

$\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(\varphi^{-1}\right)_0(r_1(\varepsilon)) = \left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2))$ et $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(\varphi^{-1}\right)_0(r_2(\varepsilon)) = \left(\varphi^{-1}\right)_0(\varphi(u_2))$.

On obtient donc :

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} m_\varepsilon = w(0,\alpha) = 0 \text{ et } \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} M_\varepsilon = w(0,\beta) = 0 .$$

Finalement , on a $F_\varepsilon \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Utilisant le théorème de Lebesgue puisque $\varphi(u_1)$ est borné , on a :

$\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\backslash Q_1} F_\varepsilon(\varphi(u_1))\,\xi_y dyds = 0$ et donc .

$\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{Q\backslash Q_1\times Q} w\left(u_2-u_1, \varphi(u_1)_y\right)\left|\varphi(u_1)_y\right| H_\varepsilon'(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\,\xi = 0$;

d'où le résultat .

De ce résultat et de $(3-40)$, on déduit l'inégalité suivante :

$$(3-41)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\{(h_1-h_2)(\xi_x+\xi_y)+(b(u_2)-b(u_1))(\xi_s+\xi_t)+ \\ \qquad\qquad +(f_2-f_1)\,\xi\}dydsdxdt- \\ \displaystyle -\int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q}(v_{0_1}-b(u_2))^+\,\xi dydxdt - \int_{Q\times(\{0\}\times I\!R)}(b(u_1)-v_{0_2})^+\,\xi dydsdx \\ \qquad\qquad \leq 0 \quad . \end{array}\right.$$

Nous utilisons la technique du dédoublement des variables de Kruskhov (*cf.* [*Ca*]).

Soit $\xi \in D([0,T) \times \mathbb{R})$ telle que $\xi \geq 0$; soit ρ_n et ρ_l deux suites régularisantes classiques dans $\mathbb{R}$.

On définit $\xi^{(n,l)}(t,x,s,y) = \xi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho_n\left(\frac{x-y}{2}\right) \rho_l\left(\frac{t-s}{2}\right)$;

alors $\xi^{(n,l)}$ est une fonction positive satisfaisant $(3-25)$ et $(3-26)$ pour n et l assez grands.

D'après $(3-41)$, pour n et l assez grands, on obtient :

$$(3-42)\begin{cases} \int_{Q\times Q} H_0(u_1-u_2)\{(h_1-h_2)(\xi_x+\xi_y)+(b(u_2)-b(u_1))(\xi_s+\xi_t)+ \\ \qquad +(f_2-f_1)\xi\}\rho_n\rho_l\, dydsdxdt- \\ \qquad -\int_{(\{0\}\times\mathbb{R})\times Q} (v_{0_1}-b(u_2))^+\xi\rho_n\rho_l\, dydxdt- \\ \qquad -\int_{Q\times(\{0\}\times\mathbb{R})} (b(u_1)-v_{0_2})^+\xi\rho_n\rho_l\, dydsdx \leq 0. \end{cases}$$

Définissons $\varphi^l(t,x,y) = \int_t^T \xi\left(\frac{r}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\rho_l\left(\frac{r}{2}\right) dr$

$$= \int_{\min\left(t,\frac{1}{l}\right)}^{\frac{1}{l}} \xi\left(\frac{r}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\rho_l\left(\frac{r}{2}\right) dr$$

car $\operatorname{supp}(\rho_l) \subset \left[-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right]$.

Puisque u_2 est une solution entropique , on a :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-\int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q} \left(v_{0_1}-b\left(u_2\right)\right)^+ \xi\rho_n\rho_l \; dydxdt = \\
&= \int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q} \left(v_{0_1}-b\left(u_2\right)\right)^+ \varphi_l^{(l)}\rho_n \; dydxdt \geq \\
&\geq -\int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q} H_0\left(u_1-u_2\right)\{\left(h-H\left(k\right)\right)\left(\rho_n\varphi^{(l)}\right)_x - f_2\rho_n\varphi^{(l)}\}dydxdt- \\
&-\int_{(\{0\}\times I\!R)\times(\{0\}\times I\!R)} \left(v_{0_1}-v_{0_2}\right)^+ \rho_n\varphi^{(l)}dydx
\end{aligned}
\right.
$$

et comme $\varphi^{(l)}$ s'annule quand $t \geq \dfrac{1}{l}$. on obtient :

$$
(3-43)\left\{
\begin{aligned}
&-\int_{(\{0\}\times I\!R)\times Q} \left(v_{0_1}-b\left(u_2\right)\right)^+ \xi\rho_n\rho_l \; dydxdt \geq \\
&\geq -\int_{(\{0\}\times I\!R)\times\left(\left(0,\frac{1}{l}\right)\times I\!R\right)} H_0\left(u_1-u_2\right)\{\left(h-H\left(k\right)\right)\left(\rho_n\varphi^{(l)}\right)_x - \\
&f_2\rho_n\varphi^{(l)}\}dydxdt - \int_{(\{0\}\times I\!R)\times(\{0\}\times I\!R)} \left(v_{0_1}-v_{0_2}\right)^+ \rho_n\varphi^{(l)}dydx.
\end{aligned}
\right.
$$

La première intégrale du second membre de cette inégalité converge vers 0 quand $l \longrightarrow +\infty$.

De plus on peut supposer que $\rho_l\left(s\right)=\rho_l\left(-s\right) \quad \forall \; s\in I\!R$; alors :

$$
\lim_{l\longrightarrow+\infty} \varphi^{(l)}\left(0,x,y\right) = \xi\left(0,\frac{x+y}{2}\right)\lim_{l\longrightarrow+\infty}\int_0^T \rho_l\left(r\right)dr = \frac{\xi\left(0,\dfrac{x+y}{2}\right)}{2}
$$

$$
\forall \quad (x,y)\in I\!R\times I\!R;
$$

comme $\varphi^{(l)}\left(0,x,y\right)$ est uniformément borné dans $L^\infty\left(I\!R\right)\times L^\infty\left(I\!R\right)$, nous déduisons que la deuxième intégrale du second membre de $(3-43)$ converge vers :

$$\frac{1}{2}\int_{(\{0\}\times \mathbb{R})\times(\{0\}\times \mathbb{R})} (v_{0_1} - v_{0_2})^+ \rho_n \xi dydx \quad .$$

On conclut alors que :

$$(3-44)\begin{cases} -\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup \lim_{l\longrightarrow+\infty} \sup \int_{(\{0\}\times \mathbb{R})\times Q} (v_{0_1} - b(u_2))^+ \xi\rho_n\rho_l \, dydxdt \geq \\ \geq -\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2}\int_{(\{0\}\times \mathbb{R})\times(\{0\}\times \mathbb{R})} (v_{0_1} - v_{0_2})^+ \rho_n \xi dydx = \\ = \frac{1}{2}\int_{(\{0\}\times \mathbb{R})} (v_{0_1} - v_{0_2})^+ \xi dx \end{cases}$$

De façon similaire , en considérant la fonction :

$$\tilde{\varphi}^l(s,x,y) = \int_s^T \xi\left(\frac{r}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\rho_l\left(-\frac{r}{2}\right) dr$$

$$= \int_{\min\left(s,\frac{1}{l}\right)}^{\frac{1}{l}} \xi\left(\frac{r}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\rho_l\left(-\frac{r}{2}\right) dr$$

et le fait que u_1 est solution entropique , on déduit :

$$(3-45)\begin{cases} -\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup \lim_{l\longrightarrow+\infty} \sup \int_{Q\times(\{0\}\times \mathbb{R})} (b(u_1) - v_{0_2})^+ \xi\rho_n\rho_l \, dydxds \geq \\ -\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2}\int_{(\{0\}\times \mathbb{R})\times(\{0\}\times \mathbb{R})} (v_{0_1} - v_{0_2})^+ \rho_n \xi dydx = \\ = \frac{1}{2}\int_{(\{0\}\times \mathbb{R})} (v_{0_1} - v_{0_2})^+ \xi dx \quad . \end{cases}$$

Finalement , passant à la limite dans $(3-42)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, $l \longrightarrow +\infty$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_Q H_0(u_1-u_2)(h_1-h_2)\,\xi_x-\int_Q (b(u_1)-b(u_2))^+\,\xi_t dxdt-\\ \displaystyle\qquad -\int_{I\!R}(v_{0_1}-v_{0_2})^+\,\xi(0)\,dx\leq\int_Q H_0(u_1-u_2)(f_1-f_2)\,dxdt\end{array}\right.$$

d'où le résultat .

Nous donnons maintenant un résultat dû à Maliki et Touré (voir $[MT2]$) qui assure le principe de comparaison pour deux solutions entropiques de (PE) qui vérifient l'inégalité de Kato.

Proposition 43 *: Soient u_1 et $u_2\in L^\infty(Q)$ tels que $\varphi(u_1)_x$ et $\varphi(u_2)_x\in L^\infty(Q)$. Si $b(u_1),b(u_2)$ satisfont l'inégalité de Kato et $b(u_1(t))\longrightarrow v_{0_1}$ dans $L^1_{loc}(I\!R)$, $b(u_2(t))\longrightarrow v_{0_2}$ dans $L^1_{loc}(I\!R)$ quand $t\longrightarrow 0$ essentiellement; alors u_1,u_2 satisfont le principe de comparaison:*

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\left\|(b(u_1)-b(u_2))^+\right\|_{L^1(I\!R)}\leq\left\|(v_{0_1}-v_{0_2})^+\right\|_{L^1(I\!R)}+\int_0^t\left\|(f_1-f_2)^+\right\|_{L^1(I\!R)}ds\\ \text{pour tout } t\in[0,T] \quad .\end{array}\right.$$

Pour plus de clarté , nous donnons la preuve de cette proposition qui est l'adaptation de celle faite pour la preuve du lemme 11 de $[MT2]$.

Preuve de la proposition 43

Soient u_1 et $u_2\in L^\infty(Q)$ tels que :

$$(3-46)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int\int_Q H_0(u_1-u_2)(h_1-h_2)\,\xi_x dxdt-\\ \displaystyle-\int\int_Q(b(u_1)-b(u_2))^+\,\xi_t dxdt-\int_{I\!R}(v_{0_1}-v_{0_2})^+\,\xi(0)\,dx\leq\\ \displaystyle\qquad\leq\int\int_Q H_0(u_1-u_2)(f_1-f_2)\,dxdt.\end{array}\right.$$

On doit estimer :

$$A = \int_{\mathbb{R}} H_0(u_1 - u_2)(h_1 - h_2)\xi_x dx \quad .$$

On a :

$$A = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} H_0(u_1 - u_2)\left(a\left(u_1, \varphi(u_1)_x\right) - a\left(u_2, \varphi(u_1)_x\right)\right)\xi_x dx + \\ \displaystyle + \int_{\mathbb{R}} H_0(u_1 - u_2)\left(a\left(u_2, \varphi(u_1)_x\right) - a\left(u_2, \varphi(u_2)_x\right)\right)\xi_x dx. \end{cases}$$

Utilisant les conditions sur a , on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} H_0(u_1 - u_2)\left(a\left(u_1, \varphi(u_1)_x\right) - a\left(u_2, \varphi(u_1)_x\right)\right)\xi_x dx \leq \\ \displaystyle\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} w\left(u_1 - u_2, \varphi(u_1)_x\right)|\xi_x|\, dx \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} H_0(u_1 - u_2)\left(a\left(u_2, \varphi(u_1)_x\right) - a\left(u_2, \varphi(u_2)_x\right)\right)\xi_x dx \leq \\ \displaystyle\qquad \leq C_0 \int_{\{u_1 > u_2\}} |(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))_x|\, |\xi_x|\, dx \end{cases}$$

avec

$$C_0 = \sup\left\{M(x) : |x| \leq \max\left\{\|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\right\}\right\} \quad .$$

Soit $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec : $\xi(x) \equiv 1$ sur $[0,1]$, $\xi(x) \equiv 0$ sur $[2, \infty[$ et $\xi' \leq 0$.

Soit $\xi_n(x) = \xi\left(\dfrac{|x|}{n}\right)$ alors $\xi_n \in D(\mathbb{R})$ et $0 \leq \xi_n \leq 1$, $\xi_n' \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}\ , n \leq |x| \leq 2n\}$.

Nous avons tout d'abord , avec ce choix de ξ :

$$\int_{\{u_1 > u_2\}} |(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))_x|\, |\xi_{nx}|\, dx \leq \int_{\{u_1 > u_2\}} |(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))|\, |\xi_{nxx}|\, dx.$$

Posons $\mathrm{w}(t,x) = (b(u_1) - b(u_2))^+(t,x)$, $\mathrm{w}_0(x) = (v_{0_1} - v_{0_2})^+(x)$ et $c(t,x) = (f_1 - f_2)^+(t,x)$.

$(3-46)$ devient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{I\!R} \mathrm{w}(t,x)\,\xi_n dx \leq \int_{I\!R} \mathrm{w}(s,x)\,\xi_n dx + \\ \displaystyle + \int\int_Q \{C_1 |\xi_{nxx}| + w(\mathrm{w},\psi)\,|\xi_{nx}| + c(t,x)\,\xi_n\}\,dxdt. \end{cases}$$

C_1 et C_2 sont des constantes dépendant seulement de (C_0, φ).

Quand s tend vers 0^+ , nous obtenons :

$$(3-47)\begin{cases} \displaystyle\int_{\{|x|\leq n\}} \mathrm{w}(t,x)\,dx \leq \int_{\{|x|\leq 2n\}} \mathrm{w}_0(x)\,dx + \\ \displaystyle + \frac{1}{n^2}\int_0^T\int_{\{n\leq|x|\leq 2n\}} C_2 dxdt + \frac{1}{n}\int_0^T\int_{\{n\leq|x|\leq 2n\}} w(\mathrm{w},\psi)\,dxdt + \\ \displaystyle + \int_0^T\int_{\{|x|\leq 2n\}} c(t,x)\,dxdt \quad . \end{cases}$$

Alors d'après $(3-47)$, on a $\mathrm{w}(t,.) \in L^1(I\!R)$.

Pour un $\delta > 0$, on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T\int_{\{n\leq|x|\leq 2n\}} w(\mathrm{w},\psi)\,dxdt \leq \int_0^T\int_{\{n\leq|x|\leq 2n,\mathrm{w}\leq\delta\}} w(\delta,\psi)\,dxdt + \\ \displaystyle + \int_0^T\int_{\{n\leq|x|\leq 2n,\mathrm{w}>\delta\}} w(\mathrm{w},\psi)\,dxdt \end{cases}$$

puisque $w(\mathrm{w},\psi) \leq C_w$, où C_w est une constante positive , car $\mathrm{w} \in L^\infty(Q)$ et $\psi \in L^\infty(Q)$.

Finalement , on a :

$$(3-48)\ \frac{1}{n}\int_{0}^{T}\int_{\{n\leq|x|\leq 2n\}} w\left(\mathrm{w},\psi\right)dxdt \leq 2w\left(\delta\right)T+\frac{T}{n}C_{w}\frac{1}{\delta}\int_{\{n\leq|x|\leq 2n\}}\mathrm{w}(t,x)\,dx.$$

On sait que $\mathrm{w}(t,.)\in L^{1}(I\!R)$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\int_{\{n\leq|x|\leq 2n\}}\mathrm{w}(t,x)\,dxdt=0.$

Faisant tendre n vers $+\infty$, et δ vers 0^{+} dans $(3-48)$, le quatrième terme dans $(3-47)$ converge vers 0.

Par conséquent quand n tend vers $+\infty$ et δ tend vers 0^{+} dans $(3-47)$, on obtient le résultat de la proposition.

3.4 Solutions Faibles

3.4.1 Introduction

Nous considérons toujours dans cette partie le problème (PE).

Nous avons montré dans la section précédente que sous certaines hypothèses et si la donnée initiale est dans le domaine généralisé de A_{b}, alors la bonne solution est l'unique solution entropique de (PE) (unicité de $b\left(u\right)$). Mais , la difficulté dans cette section, est que nous ne savons pas caractériser les éléments du domaine généralisé.

Dans cette partie , nous montrons que sous certaines conditions, la bonne solution est solution faible d'énergie finie de (PE).

Notre démarche s'inspire de celle faite par Bénilan et Wittbold $[BW1]$ pour l'étude du problème d'évolution :

$b\left(u\right)_{t}=div_{x}\ a\left(u,Du\right)+f$.

Nous ne savons pas pour le moment montrer l'existence ni l'unicité de solution entropique pour le problème (PE) dans le cas général que nous avons considéré.

Bénilan et Touré l'ont fait dans le cas où $b=id$. Ce sont ces difficultés qui nous ont amené à introduire la notion de domaine généralisé dans la partie précédente et par la suite, dans cette section la notion de solution faible d'énergie finie.

Nous obtenons les résultats de cette section en considérant la condition de structure de Alt et Luckhauss $[AL]$.

Il faut noter que dans certains cas , cette condition n'est pas éssentielle comme elle parait l'être ici; c'est le cas par exemple de l'équation en une dimension d'espace : $(v-1)_t^+ = F(v)_x + v_{xx}$ pour laquelle Bénilan et Wittbold ont montré (voir [$BW2$]) que sans la condition de structure, la "bonne solution" est "l'unique" solution faible.

Par contre , dans le cas général que nous considérons ici, nous ne savons pas s'il y a existence de solution faible, ni même unicité sans la condition de structure de Alt et Luckhauss.

3.4.2 Position du problème

Nous reprenons l'étude du problème d'évolution (PE) .

Nous montrons que la "bonne solution" de ce problème est solution faible d'energie finie.

Pour cela , nous introduisons quelques définitions et notions nécessaires à la suite du travail .

Nous introduisons la fonction $B(z) = \int_0^z s db(s)$.

Pour toute fonction monotone croissante $p : I\!R \longrightarrow I\!R$ avec $p(0) = 0$, $w \in I\!R$,

$$B_{p,w}(z) = \int_w^z p(s-w)\, db(s).$$

Notons que :

$$(3-49) \quad B_{p,w}(\bar{z}) - B_{p,w}(z) \geq p(z-w)\,(b(\bar{z}) - b(z))$$

car
$$B_{p,w}(\bar{z}) - B_{p,w}(z) = \int_z^{\bar{z}} p(s-w)\, db(s)$$
$$\geq p(z-w)\,(b(\bar{z}) - b(z))$$

(puisque $s-w \geq z-w$ alors $p(s-w) \geq p(z-w)$).

$$\psi_{p,w}(b(z)) = \int_{b(w)}^{b(z)} p(\cdot - w) \circ (b^{-1})_0(s)\, ds$$

$$= \int_{z}^{w} p(s-w)\,db(s) \qquad (\text{ par changement de variable })$$

$$= B_{p,w}(z) \qquad \forall \quad z \in I\!R.$$

$$B_k(z) = \int_0^z T_k(s)\,db(s) \quad \text{où} \quad T_k(z) = \inf\{|z|, k\}\, sign_0(z)$$

Pour simplifier les écritures , nous notons $B_p\ (resp.\psi_p)$ si $w = 0$.

On note par $B = B_{id}$, $B_k = B_{T_k}$ et ψ , ψ_k sont définis de la même façon.

La notion de solution faible est identique à celle donnée dans la section précédente.

3.4.3 Existence

Nous montrons dans cette partie , l'existence de solution faible pour le problème (PE). Il est connu d'après les travaux de Alt et Luckhauss (*voir* $[AL]$) que pour obtenir l'existence de solution faible, la condition initiale devrait satisfaire une certaine estimation d'énergie.

Pour le problème (PE), l'estimation d'énergie est de la forme :

$\psi(b(u_0)) = B(u_0) \in L^1(I\!R)$; et dans ce cas, si u est solution faible, u est d'énergie finie.

Nous donnons d'abord un lemme qui est l'estimation d'énergie finie.

Lemme 44 : *Soit* $\psi \in C^{0,1}(I\!R)$, ψ *monotone ; soit* $v_0 \in L^1(I\!R)$ *et* $v_0 \in R(b)$ *telle que* $B_\psi(v_0) \in L^1_{loc}(I\!R)$. *Soit* u *une fonction mesurable telle que* $b(u) \in L^1_{loc}(Q)$, $b(u)_t \in L^2(]0,T[; H^{-1}_{loc}(I\!R))$ *et* $b(u(0,x)) = v_0(x)$ $\forall x \in I\!R$ *; et telle que* $\varphi(u) \in L^2(]0,T[; H^1_{loc}(I\!R))$. *Alors on a :* $B_\psi(b(u)) \in L^\infty([0,T]; L^1_{loc}(I\!R))$ *et pour tout* $t \in [0,T]$, *on a :*

$$(3-50) \begin{cases} \displaystyle\int_{I\!R} B_\psi(b(u(t)))\,\xi(t)\,dx - \int_{I\!R} B_\psi(v_0)\,\xi(0)\,dx = \\ \displaystyle = \int_0^t \langle b(u)_t , \psi(\varphi(u))\,\xi\rangle\,dt + \int_0^t\int_{I\!R} B_\psi(b(u))\,\xi_t\,dxdt \end{cases}$$

$\forall \ \xi \in D^{+}(Q) \ \ avec \ \ \xi(T) = 0 \ .$

Où on a posé :

$$B_{\psi}(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^s \psi\left(\varphi \circ \left(b^{-1}\right)_0(r)\right) dr & pour \quad s \in \overline{(\psi \circ \varphi) \circ b^{-1}} \\ \\ +\infty & ailleurs \end{cases}$$

$\forall \quad \psi$ *fonction croissante telle que* $\psi(0) = 0$.
Si de plus $B_{\psi}(v_0) \in L^1(I\!R)$ *alors* $B_{\psi}(b(u)) \in L^{\infty}([0,T]; L^1(I\!R))$.

Preuve :

Puisque ψ est croissante alors B_{ψ} est une fonction convexe .

Nous construisons ensuite une approximation de ψ :

$$\psi_n(s) = \begin{cases} \psi(n) & \text{pour} \quad s > n \\ \\ \psi(s) & \text{pour} \quad -n \leq s \leq n \\ \\ \psi(-n) & \text{pour} \quad s < -n \end{cases} .$$

On sait que B_{ψ_n} est une fonction lipschitzienne continue et $B_{\psi_n}(v_0) \in L^1_{loc}(I\!R)$ puisque $\left(0 \leq B_{\psi_n}(v_0) \leq B_{\psi}(v_0) \right)$.

$\forall \ \ t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned} \left|B_{\psi_n}(b(u(t,x)))\right| &\leq \left|B_{\psi_n}(v_0(x))\right| + \left|B_{\psi_n}(b(u(t,x))) - B_{\psi_n}(v_0(x))\right| \\ &\leq \left|B_{\psi_n}(v_0(x))\right| + C(n)\left|b(u(t,x)) - v_0(x)\right| \quad . \end{aligned}$$

Ainsi donc $B_{\psi_n}(b(u)) \in L^1_{loc}(Q)$ (car $v_0 \in L^1_{loc}(I\!R)$, $b(u) \in L^1_{loc}(Q)$).

$\forall \ \ t > 0 \ , \ \tau > 0$, on a :

$(3-51)$ $B_{\psi_n}(b(u(t))) - B_{\psi_n}(b(u(t-\tau))) \leq (b(u(t)) - b(u(t-\tau)))\,\psi_n(\varphi(u(t)))$.

D'après $(3-49)$, on a $\forall \ \ t > \tau$,

$$(3-52)\quad B_{\psi_n}(b(u(t)))-B_{\psi_n}(b(u(t-\tau))) \geq (b(u(t))-b(u(t-\tau)))\,\psi_n(\varphi(u(t-\tau)))\,.$$

Soit $\xi \in D^{+}(Q)$ avec $\xi(T)=0$.

On multiplie $(3-51)$ par $\xi(t)$ et $(3-52)$ par $\xi(t-\tau)$, on a :

$$(3-53)\begin{cases} (B_{\psi_n}(b(u(t)))-B_{\psi_n}(b(u(t-\tau))))\xi(t) \leq \\ \leq (b(u(t))-b(u(t-\tau)))\,\psi_n(\varphi(u(t)))\,\xi(t)\,. \end{cases}$$

$(3-53) \Leftrightarrow$

$$(3-54)\begin{cases} B_{\psi_n}(b(u(t)))\,\xi(t)-B_{\psi_n}(b(u(t-\tau)))\,\xi(t-\tau)+ \\ +\,B_{\psi_n}(b(u(t-\tau)))\,(\xi(t-\tau)-\xi(t)) \leq \\ \leq (b(u(t))-b(u(t-\tau)))\,\psi_n(\varphi(u(t)))\,\xi(t)\,. \end{cases}$$

$(3-52)$ donne :

$$(3-55)\begin{cases} (B_{\psi_n}(b(u(t)))-B_{\psi_n}(b(u(t-\tau))))\xi(t-\tau) \geq \\ \geq (b(u(t))-b(u(t-\tau)))\,\psi_n(\varphi(u(t-\tau)))\,\xi(t-\tau)\,. \end{cases}$$

$(3-55)$ donne

$$(3-56)\begin{cases} B_{\psi_n}(b(u(t)))\,\xi(t)-B_{\psi_n}(b(u(t-\tau)))\,\xi(t-\tau)+ \\ +B_{\psi_n}b(u(t)))(\xi(t-\tau)-\xi(t)) \geq \\ \geq (b(u(t))-b(u(t-\tau)))\,\psi_n(\varphi(u(t-\tau)))\,\xi(t-\tau)\,. \end{cases}$$

On divise $(3-54)$ par τ et on intègre sur $(0,t_0)\times I\!R$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\tau}\int_0^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt-\frac{1}{\tau}\int_0^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\xi\left(t-\tau\right)dxdt+\\ \qquad +\frac{1}{\tau}\int_0^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\left(\xi\left(t-\tau\right)-\xi\left(t\right)\right)dxdt\leq\\ \qquad \leq\frac{1}{\tau}\int_0^{t_0}\int_{I\!R}\left[b\left(u\left(t\right)\right)-b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right]\psi_n\left(\varphi\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt.\end{array}\right.$$

L'inégalité précédente donne :

$$(3-57)\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{\tau}\int_0^{t_0-\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt-\\ -\frac{1}{\tau}\int_\tau^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\xi\left(t-\tau\right)dxdt+\\ +\frac{1}{\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt-\\ -\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\xi\left(t-\tau\right)dxdt+\\ +\frac{1}{\tau}\int_0^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\left(\xi\left(t-\tau\right)-\xi\left(t\right)\right)dxdt\leq\\ \leq\frac{1}{\tau}\int_0^{t_0}\int_{I\!R}\left[b\left(u\left(t\right)\right)-b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right]\psi_n\left(\varphi\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt.\end{array}\right.$$

Par un changement de variable , on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\qquad\frac{1}{\tau}\int_0^{t_0-\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt-\\ -\frac{1}{\tau}\int_\tau^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\xi\left(t-\tau\right)dxdt=0,\end{array}\right.$$

par conséquent $(3-57)$ devient :

$$
(3-58)\begin{cases}
\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t_0-\tau}^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt- \\
\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{0}^{\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\xi\left(t-\tau\right)dxdt+ \\
+\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{0}^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\left(\xi\left(t-\tau\right)-\xi\left(t\right)\right)dxdt\leq \\
\leq\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{0}^{t_0}\int_{I\!R}\left[b\left(u\left(t\right)\right)-b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right]\psi_n\left(\varphi\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt.
\end{cases}
$$

De même , on divise $(3-56)$ par τ et on intègre sur $(\tau,t_0)\times I\!R$:

$$
(3-59)\begin{cases}
\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t_0-\tau}^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt-\dfrac{1}{\tau}\int_{0}^{\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt+ \\
+\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{\tau}^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\left(\xi\left(t-\tau\right)-\xi\left(t\right)\right)dxdt\geq \\
\geq\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{\tau}^{t_0}\int_{I\!R}\left[b\left(u\left(t\right)\right)-b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right]\psi_n\left(\varphi\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\xi\left(t-\tau\right)dxdt.
\end{cases}
$$

Passant à la limite quand $\tau\longrightarrow 0$ dans $(3-58)$, on obtient :

$$
(3-60)\begin{cases}
\displaystyle\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t_0\right)\right)\right)\xi\left(t_0\right)dx-\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u_0\right)\right)\xi\left(0\right)dx- \\
-\displaystyle\int_{0}^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\right)\right)\xi_t dxdt\leq \\
\leq\displaystyle\int_{0}^{t_0}\left\langle b\left(u\right)_t,\psi_n\left(\varphi\left(u\right)\right)\xi\right\rangle dt
\end{cases}
$$

car $\displaystyle\int_{0}^{\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t-\tau\right)\right)\right)\xi\left(t-\tau\right)dxdt=\int_{0}^{\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}\left(b\left(u_0\right)\right)\xi\left(t-\tau\right)dxdt$

(on a $u(t) = u_0 \quad \forall \quad -\tau < t < 0$) .

Passant à la limite quand $\tau \longrightarrow 0$ dans $(3-59)$, on obtient :

$$(3-61)\begin{cases} \displaystyle\int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u(t_0)))\,\xi(t_0)\,dx - \limsup_{\tau \longrightarrow 0} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u(t)))\,\xi(t)\,dxdt- \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -\displaystyle\int_0^{t_0}\int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u(t)))\,\xi_t dxdt \geq \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \geq \displaystyle\int_0^{t_0} \langle b(u)_t\,, \psi_n(\varphi(u))\,\xi\rangle\, dt. \end{cases}$$

Faisant $(3-61)-(3-60)$, on obtient :

$$(3-62) \quad \limsup_{\tau \longrightarrow 0} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u(t)))\,\xi(t)\,dxdt \leq \int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u_0))\,\xi(0)\,dx.$$

Il suffit maintenant de montrer que :

$$\liminf_{\tau \longrightarrow 0} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u(t)))\,\xi(t)\,dxdt \geq \int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u_0))\,\xi(0)\,dx.$$

Comme $v_0 \in L^1_{loc}(I\!R)$ et $v_0 \in R(b)$, puisque $D(A_b)$ est dense dans L^1, il existe $v_\varepsilon \in D(A_b)$ tel que :

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_{L^1(I\!R)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \quad .$$

Il existe donc une suite de fonctions mesurables u_ε tel que $v_\varepsilon = b(u_\varepsilon)$ et $\varphi(u_\varepsilon) \in W^{1,\infty}(I\!R)$.

Par conséquent :

$$(3-63)\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi\left(t\right)dxdt-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}} B_{\psi_n}\left(v_0\right)\xi\left(0\right)dxdt= \\ \qquad =\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}}[B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)-B_{\psi_n}\left(b\left(u_\varepsilon\right)\right)]\xi\left(0\right)dxdt+ \\ \qquad +\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\left(\xi\left(t\right)-\xi\left(0\right)\right)dxdt+ \\ \qquad +\int_{\mathbb{R}}[B_{\psi_n}\left(b\left(u_\varepsilon\right)\right)-B_{\psi_n}\left(v_0\right)]\xi\left(0\right)dx \quad . \end{array}\right.$$

Nous allons maintenant étudier les termes de cette égalité .

Réécrivons tout d'abord cette égalité comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad \frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)[\xi\left(t\right)-\xi\left(0\right)]dxdt= \\ =\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\frac{\left(\xi\left(t\right)-\xi\left(0\right)\right)}{\tau}dxdt=\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi'\left(\theta t\right)\times\frac{t}{\tau}dxdt. \end{array}\right.$$

($0<\theta<1$).

Or $\int_{\mathbb{R}}\left|B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)\xi'\left(\theta t\right)\frac{t}{\tau}\right|\leq M$ puisque $0<t<\tau\Rightarrow 0<\frac{t}{\tau}<1$.

Par conséquent :

$$(3-64)\ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}} B_{\psi_n}\left(b\left(u\left(t\right)\right)\right)[\xi\left(t\right)-\xi\left(0\right)]dxdt\longrightarrow 0 \text{ quand } \tau\longrightarrow 0\ .$$

Aussi , on a :

$$(3-65)\quad \int_{\mathbb{R}}[B_{\psi_n}\left(b\left(u_\varepsilon\right)\right)-B_{\psi_n}\left(v_0\right)]\xi\left(0\right)dx\longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon\longrightarrow 0\quad .$$

De plus :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{\mathbb{R}}[B_{\psi_n}(b(u(t)))-B_{\psi_n}(b(u_\varepsilon))]\xi(0)\,dxdt \geq \\
&\geq \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{\mathbb{R}}[b(u(t))-b(u_\varepsilon)]\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\,dxdt = \\
&= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{\mathbb{R}}[b(u(t))-b(u_0)]\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\,dxdt + \\
&+\int_{\mathbb{R}}[b(u_0)-b(u_\varepsilon)]\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\,dx.
\end{aligned}
\right.
$$

Le terme :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{\mathbb{R}}[b(u(t))-b(u_0)]\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\,dxdt = \\
&= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t}\frac{\partial b(u)}{\partial \alpha}\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\,d\alpha dxdt \\
&= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_0^{t}\left\langle\frac{\partial b(u)}{\partial \alpha},\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\right\rangle d\alpha dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme on a $0 \leq t \leq \tau$ et $0 \leq \alpha \leq t \Longrightarrow \alpha \leq t \leq \tau$;

dans ce cas , on a :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_0^{t}\left\langle\frac{\partial b(u)}{\partial \alpha},\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\right\rangle d\alpha dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{\alpha}^{\tau}\left\langle\frac{\partial b(u)}{\partial \alpha},\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\right\rangle d\alpha d \\
&= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left\langle\frac{\partial b(u)}{\partial \alpha},\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\right\rangle(\tau-\alpha)\,d\alpha \\
&= -\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left\langle\frac{\partial b(u)}{\partial \alpha},\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\right\rangle(\alpha-\tau)\,d\alpha.
\end{aligned}
\right.
$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{I\!R}[B_{\psi_n}(b(u(t))) - B_{\psi_n}(b(u_\varepsilon))]\xi(0)\,dxdt \geq \\ \geq -\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial \alpha}, \psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\right\rangle (t-\tau)\,dt + \\ + \int_{I\!R}[b(u_0) - b(u_\varepsilon)]\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\,dx. \end{cases}$$

En utilisant le théorème de la moyenne , on montre que :

$(3-66)$ $-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left\langle \frac{\partial b(u)}{\partial \alpha}, \psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\right\rangle (t-\tau)\,dt \longrightarrow 0$ quand $\tau \longrightarrow 0.$

On a aussi :

$$(3-67)\qquad \int_{I\!R}[b(u_0) - b(u_\varepsilon)]\psi_n(\varphi(u_\varepsilon))\xi(0)\,dx \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Utilisant $(3-63)$, $(3-64)$, $(3-65)$, $(3-66)$, $(3-67)$, on obtient :

$$(3-68)\ \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u(t)))\xi(t)\,dxdt \geq \int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u_0))\xi(0)\,dx.$$

Des inégalités $(3-62)$ et $(3-68)$, il en resulte :

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u(t)))\xi(t)\,dxdt = \int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u_0))\xi(0)\,dx.$$

Retournant aux inégalités $(3-60)$ et $(3-61)$, on obtient :

$$(3-69)\begin{cases} \int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u(t)))\xi(t)\,dx - \int_{I\!R} B_{\psi_n}(v_0)\xi(0)\,dx = \\ = \int_0^t \langle b(u)_t, \psi_n(\varphi(u))\xi\rangle\,dt + \int_0^t\int_{I\!R} B_{\psi_n}(b(u(t)))\xi_t dxdt \end{cases}$$

$\forall \quad \xi \in D^+(Q)$ avec $\xi(T) = 0$.

Passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ dans $(3-69)$, on a le résultat du lemme .

Nous introduisons maintenant les hypothèses complémentaires suivantes :

$(H6)$ $(a(z,\xi) - a(z,0)).\xi \geq \lambda(b(z))|\xi|^2 \quad \forall \quad z,\xi \in I\!R$ tels que $|\xi| \geq R(b(z))$.

Où , $\lambda : I\!R \longrightarrow I\!R^{*+}$ et $R : I\!R \longrightarrow I\!R^+$ sont deux fonctions continues.

Enonçons maintenant le résultat principal de cette section :

Théorème 45 : *Sous les hypothèses* $(H4)$ *et* $(H6)$, *et pour* $f \in L^1(Q) \cap L^2(]0,T[;H^1_{loc}(I\!R))$ *avec* $\int_0^T \|f(t,.)\|_\infty dt < +\infty$, $u_0 \in L^\infty(I\!R)$ *et* $B(u_0) \in L^1(I\!R)$, *la "bonne solution " u de (PE) est solution faible d'énergie finie du problème* (PE).

Preuve :

D'après la proposition 34, on a :

$$\|b(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(Q)} \leq \|v_0\|_{L^\infty(I\!R)} + \int_0^T \|f(t,.)\|_\infty dt = C < +\infty;$$

ce qui implique que $b(u) \in L^\infty(Q)$ (car $b(u_\varepsilon) \longrightarrow b(u)$ dans $C([0,T];L^1(I\!R))$; où $u_\varepsilon(t) = u_i$ pour $t \in]t_{i-1};t_i]$).

Multiplions (PDE) par $\varphi(u_i)$, on a :

$$(3-70)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{I\!R} \frac{b(u_i) - b(u_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \varphi(u_i)\,dx + \int_{I\!R} a(u_i, \varphi(u_i)_x)\,\varphi(u_i)_x\,dx = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \displaystyle\int_{I\!R} f_i \varphi(u_i)\,dx. \end{array}\right.$$

Comme $B_\psi(\bar{z}) - B_\psi(z) \geq (b(\bar{z}) - b(z))\,\psi(\varphi(z))$; donc pour $\psi = id$, on a :

$(b(z) - b(\bar{z})).\varphi(z) \geq B(z) - B(\bar{z})$.

Utilisant cette relation dans $(3-70)$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{B(u_i) - B(u_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} dx + \int_{\mathbb{R}} a(u_i, \varphi(u_i)_x) \varphi(u_i)_x dx \leq \int_{\mathbb{R}} f_i \varphi(u_i) dx.$$

L'inégalité précédente donne :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{B(u_i) - B(u_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} dx + \int_{\mathbb{R}} [a(u_i, \varphi(u_i)_x) - a(u_i, 0)] \varphi(u_i)_x dx + \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} a(u_i, 0) \varphi(u_i)_x dx \leq \int_{\mathbb{R}} f_i \varphi(u_i) dx. \end{cases}$$

On déduit :

$$(3-71) \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{B(u_i) - B(u_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} dx + \int_{\mathbb{R}} [a(u_i, \varphi(u_i)_x) - a(u_i, 0)] \varphi(u_i)_x dx \leq \\ \qquad\qquad\qquad \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_i \varphi(u_i) dx \end{cases}$$

car $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} a(u_i, 0) \varphi(u_i)_x dx = 0$.

Utilisant l'hypothèse $(H6)$ donnée , on a :

$$(3-72) \int_{\mathbb{R}} \frac{B(u_i) - B(u_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} dx + \int_{\mathbb{R}} \lambda(b(u_i)) |\varphi(u_i)_x|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} f_i \varphi(u_i) dx;$$

ce qui implique :

$$(3-73) \int_{\mathbb{R}} \frac{B(u_i) - B(u_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} dx + \int_{\mathbb{R}} \lambda(b(u_i)) |\varphi(u_i)_x|^2 dx \leq \|f_i\|_1 \|\varphi(u_i)\|_\infty .$$

Intégrons $(3-73)$ sur $]0, T[$, on obtient :

$$(3-74)\begin{cases} \int_{I\!R} B(u_\varepsilon(T))\,dx - \int_{I\!R} B(u_0)\,dx + \int_0^T \int_{I\!R} \lambda(b(u_\varepsilon)) \left|\varphi(u_\varepsilon)_x\right|^2 dxdt \leq \\ \qquad \leq \int_0^T \|f_\varepsilon\|_1 \|\varphi(u_\varepsilon)\|_\infty \, dt. \end{cases}$$

On sait que $b(u_\varepsilon) \in L^\infty(Q)$ et étant donné que b est surjective alors $u_\varepsilon \in L^\infty(Q)$ et donc $\varphi(u_\varepsilon)$ aussi .

Comme $\| b(u_\varepsilon)\|_\infty \leq C$, on a $-C \leq b(u_\varepsilon) \leq C$; et puisque λ est continue et $[-C, C]$ est fermé borné, il existe a , $b \in [-C, C]$ tel que $m = \lambda(a)$, $M = \lambda(b)$ avec $\lambda([-C, C]) = [m, M]$.

Par conséquent , $\lambda(a) \leq \lambda(b(u_\varepsilon)) \leq \lambda(b)$.

$(3-74)$ donne :

$$(3-75)\begin{cases} \int_{I\!R} B(u_\varepsilon(T))\,dx - \int_{I\!R} B(u_0)\,dx + \lambda(a) \int_0^T \int_{I\!R} \left|\varphi(u_\varepsilon)_x\right|^2 dxdt \leq \\ \qquad \leq K \int_0^T \|f_\varepsilon(t)\|_1 \, dt. \end{cases}$$

Or $f_\varepsilon \in L^1(Q)$ et u est d'énergie finie; par conséquent d'après $(3-75)$, $\varphi(u_\varepsilon)_x$ est uniformément borné dans $L^2(Q)$.

Maintenant , nous avons : $\varphi(u_\varepsilon)_x \in L^2(Q)$ et $\varphi(u_\varepsilon) \in L^\infty(Q)$.

Ceci donne $\varphi(u_\varepsilon) \rightharpoonup w$ dans $L^2_{loc}(Q), b(u_\varepsilon) \longrightarrow b(u)$ dans $C([0,T]; L^1(I\!R))$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ et comme $\varphi \circ b^{-1}$ est un graphe maximal monotone alors $w \in \varphi \circ b^{-1}(v)$ (on a $\varphi(u_\varepsilon) \in \varphi \circ b^{-1}(v_\varepsilon)$ avec $b(u_\varepsilon) = v_\varepsilon$) où $v = b(u)$.

Ainsi donc , il existe $\tilde{u} \in b^{-1}(v)$ tel que $w = \varphi(\tilde{u})$.

Posons $\hat{u} = \left((\varphi + b)^{-1}\right)_0 (v + w) = \left((\varphi + b)^{-1}\right)_0 (\varphi(\tilde{u}) + b(\tilde{u}))$.

On sait que $\tilde{u} \in b^{-1}(v) \Leftrightarrow v = b(\tilde{u})$.

$(b^{-1})_0$ est monotone continue $p.p$ alors $\hat{u}$ est mesurable et on a $w = \varphi(\hat{u})$ et $v = b(\hat{u})$.

Par conséquent , $\varphi(u_\varepsilon) \rightharpoonup \varphi(\hat{u})$ dans $L^2_{loc}(Q)$.

Maintenant , soit $\xi \in D(Q)$, on a :

$$\int_Q \xi \varphi(u_\varepsilon)_x \, dxdt = -\int \xi_x \varphi(u_\varepsilon) \, dxdt \longrightarrow -\int \xi_x \varphi(\hat{u}) \, dxdt = \int_Q \xi \hat{w} dxdt$$

où $\hat{w}$ est la limite faible dans $L^2(Q)$ de $\varphi(u_\varepsilon)_x$.

On a donc $-\langle \varphi(\hat{u}), \xi_x \rangle = \langle \hat{w}, \xi \rangle \Leftrightarrow \langle \varphi(\hat{u})_x, \xi \rangle = \langle \hat{w}, \xi \rangle \quad \forall \ \xi \in D(Q)$.

Par conséquent , $\varphi(\hat{u})_x = \hat{w}$.

Soit maintenant $\xi \in D(\bar{Q})$ avec $\xi = 0$ sur $\{T\} \times I\!R$; d'après (PDE), on a , en choisissant une discrétisation uniforme :

$\tau = \lambda_i = t_i - t_{i-1} = \dfrac{T}{n}$, $u_\varepsilon(t) = u_i$ sur $]t_{i-1}, t_i]$; $v_\varepsilon(t) = v_i$ sur $]t_{i-1}, t_i]$,

$$(3-76) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_Q f_\varepsilon(t)\xi(t)\, dxdt = \int_Q \{\frac{b(u_\varepsilon(t)) - b(u_\varepsilon(t-\tau))}{\tau}\xi(t) + \\ \qquad + a(u_\varepsilon(t), \varphi(u_\varepsilon(t))_x)\nabla\xi(t)\} dxdt. \end{cases}$$

$(3-76)$ donne :

$$(3-77) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_Q f_\varepsilon(t)\xi(t)\, dxdt = \int_Q \{\frac{b(u_\varepsilon(t)) - b(u_\varepsilon(t-\tau))}{\tau}\xi(t) + \\ \qquad + \tilde{a}(b(u_\varepsilon(t)), \varphi(u_\varepsilon(t))_x)\nabla\xi(t)\} dxdt. \end{cases}$$

$(3-77)$ donne :

$$(3-78) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_Q f_\varepsilon(t)\xi(t)\, dxdt = \int_Q \{b(u_\varepsilon(t))\frac{\xi(t) - \xi(t+\tau)}{\tau} + \\ \displaystyle + \tilde{a}(b(u_\varepsilon(t)), \varphi(u_\varepsilon(t))_x)\frac{\partial}{\partial x}\xi(t)\} dxdt - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_{I\!R} b(u_0)\xi(t)\, dxdt. \end{cases}$$

Utilisant la proposition 7 (voir proposition $(2-5)$ de $[Bh2]$); faisant tendre $\tau \longrightarrow 0$, $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $(3-78)$, on obtient compte tenu des résultats précédents de compacité :

$$\int_Q f\xi dxdt = -\int_Q \{b(\hat{u})\xi_t + \tilde{a}(b(\hat{u}), \varphi(\hat{u})_x)\frac{\partial}{\partial x}\xi\}dxdt - \int_{I\!R} b(u_0)\xi(0)\,dx.$$

L'inégalité précédente donne :

$$(3-79)\quad \int_Q \{b(\hat{u})_t\xi + a(\hat{u}, \varphi(\hat{u})_x)\frac{\partial}{\partial x}\xi\}dxdt = \int_Q f\xi dxdt$$

$\forall\ \xi \in D(\bar{Q})$ avec $\xi = 0$ sur $\{T\} \times I\!R$ car :

$$\int_Q \{b(\hat{u})_t \xi dxdt = \int_0^T \langle b(\hat{u})_t, \xi\rangle\, dt = -\int_Q b(\hat{u})\xi_t dxdt - \int_{I\!R} b(u_0)\xi(0)\,dx.$$

D'après $(3-79)$, $\hat{u}$ est solution faible de (PE) .

Ce qui termine la preuve du théorème .

Nous montrons maintenant dans cette partie que toute sous-solution faible (resp. toute sur-solution faible) est d'énergie finie si la condition initiale vérifie une certaine estimation .

Nous introduisons d'abord quelques notions .

Définition 46 *: Soit* $f \in L^2(0,T; H^{-1}_{loc}(I\!R))$. *Une fonction mesurable* u : $Q \longrightarrow I\!R$ *satisfaisant :*

$u \in L^2(0,T; H^1_{loc}(I\!R))$, $b(u) \in L^1_{loc}(Q)$, $a(u, \varphi(u)_x) \in L^2_{loc}(Q)$, $\varphi(u) \in L^2(0,T; H^1_{loc}(I\!R))$ *est dite sous-solution faible si :*

$$(*) \int\int_Q (b(u_0) - b(u))\xi_t dxdt + \int\int_Q a(u, \varphi(u)_x)\xi_x dxdt \leq \int\int_Q f\xi dxdt$$

$\forall \quad \xi \in D^{+}(Q) \quad , \quad \xi(T)=0 \quad .$

respectivement sur-solution faible de (PE) *si :*

$$(**) \int\int_{Q} (b(u_0)-b(u))\,\xi_t\,dxdt + \int\int_{Q} a(u,\varphi(u)_x)\,\xi_x\,dxdt \geq \int\int_{Q} f\xi\,dxdt$$

$\forall \quad \xi \in D^{+}(Q) \quad , \quad \xi(T)=0 \quad .$

Remarque 47 *: Une fonction* u *est solution faible de* (PE) *si elle est sous-solution et sur-solution faible de* (PE).

Introduisons maintenant la notion de sur-solution intégrale et de sous-solution intégrale du problème (PE).

Définition 48 : (i) *Une sous-solution intégrale de* (PE) *est une fonction mesurable* $u : Q \longrightarrow I\!R$ *vérifiant* $b(u) \in L^1_{loc}(Q)$,

$$ess - \lim_{t \longrightarrow 0^+} \left\| (b(u(t)) - b(u_0))^+ \right\|_1 = 0 \text{ , et tels que ,} \quad \forall\ w \in H^1_{loc}(I\!R) \cap L^\infty(I\!R),$$

avec $\quad a(w,\varphi(w)_x)_x \in L^\infty(I\!R) \quad ,$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{I\!R} (b(u(t)) - b(w))^+\,dx \leq \int_{\{b(u(t))>b(w)\}} (f + a(w,\varphi(w)_x)_x)\,dx + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\{b(u(t))=b(w)\}} (f + a(w,\varphi(w)_x)_x)^+\,dx \\ \qquad\qquad\qquad \text{dans} \quad D'(0,T) \end{cases}$$

(ii) *Une sur-solution intégrale de* (PE) *est une fonction* $u : Q \longrightarrow I\!R$ *satisfaisant* $b(u) \in L^1_{loc}(I\!R)$,

$$ess - \lim_{t \longrightarrow 0^+} \left\| \left(b\left(u_0\right) - b\left(u\left(t\right)\right)\right)^+ \right\|_1 \;=\; 0 \;\;, et \;\; tels \;\; que \;,$$
$$\forall \;\; w \;\; \in \;\; H^1_{loc}\left(I\!R\right) \cap L^\infty\left(I\!R\right),$$

avec $\quad a\left(w, \varphi\left(w\right)_x\right)_x \in L^\infty\left(I\!R\right)$,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_{I\!R} \left(b\left(w\right) - b\left(u\left(t\right)\right)\right)^+ dx \leq \int_{\{b(w) > b(u(t))\}} \left(-f - a\left(w, \varphi\left(w\right)_x\right)_x\right) dx + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\{b(u(t)) = b(w)\}} \left(-f - a\left(w, \varphi\left(w\right)_x\right)_x\right)^+ dx \\ \qquad\qquad dans \quad D'\left(0, T\right). \end{cases}$$

(iii) Une fonction mesurable $u : Q \longrightarrow I\!R$ *est dite solution intégrale de* (PE) *si* u *est sous-solution et sur-solution intégrale de* (PE).

D'après la théorie générale des équations d'évolution dans les espaces de Banach (*cf.* $[BCP], [BB]$), on obtient la proposition suivante qui est une conséquence directe de l'étude du problème stationnaire.

Proposition 49 : (i) *Supposons que* u *soit une sous-solution intégrale de* (PE) *pour* (u_0, f) , *et* $\hat{u}$ *une sur-solution intégrale de* (PE) *pour* $\left(\hat{u}_0, \hat{f}\right)$; *alors* $b(u)$ *et* $b(\hat{u})$ *satisfont le principe de comparaison c'est à dire :*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_{I\!R} \left(b\left(u\left(t\right)\right) - b\left(\hat{u}\left(t\right)\right)\right)^+ dx \leq \int_{\{b(u(t)) > b(\hat{u}(t))\}} \left(f\left(t\right) - \hat{f}\left(t\right)\right) dx + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\{b(u(t)) = b(\hat{u}(t))\}} \left(f\left(t\right) - \hat{f}\left(t\right)\right)^+ dx \\ \qquad\qquad dans \quad D'\left(0, T\right). \end{cases}$$

(ii) Si u est une solution intégrale de (PE), alors u est une "bonne solution" de (PE).

(iii) supposons la condition suivante vérifiée :

$$(CS)\begin{cases} \forall \;\; f \in L^{\infty}(I\!R) \cap L^{1}(I\!R) \;\; , \text{ il existe une unique solution du problème :} \\ \\ v \in H^{1}_{loc}(I\!R) \cap L^{\infty}(I\!R) \quad , v = a\left(v, \varphi(v)_{x}\right)_{x} + f \;\; \text{ dans } \;\; D'(I\!R) \end{cases}$$

alors si u est une "bonne solution" de (PE) , u est une solution intégrale de (PE) .

Enonçons maintenant le résultat principal de cette partie .

Théorème 50 : *Si u_0 vérifie $\psi_p(b(u_0)) \in L^1(I\!R)$, alors toute (sous/sur) solution faible de (PE) est d'énergie finie.*

Preuve :

Soit $w \in H^1_{loc}(I\!R) \cap L^{\infty}(I\!R)$ avec $a(w, \varphi(w)_x) \in L^{\infty}(I\!R)$, $\xi \in D^{+}(-\infty, T)$, $p \in P_0$.

Nous prolongeons u sur $I\!R \times I\!R$ par :

$$\begin{cases} u(t) = 0 \;\text{ si }\; t > T \\ \\ u(t) = u_0 \;\text{ si }\; t \leq 0. \end{cases}$$

On pose :

$$\phi = p\left(b(u) - b(w)\right)\xi$$

$$\phi^h = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \phi(s)\, ds \qquad \forall \quad h > 0$$

$$\psi_{p,w}(b(z)) = \int_w^z p(b(s) - b(w))\, db(s).$$

On a $\quad (b(z) - b(\tilde{z}))(p(b(z) - b(w))) \geq \psi_{p,w}(b(z)) - \psi_{p,w}(b(\tilde{z}))$.

Prenons ϕ^h comme fonction test dans la définition de sous-solution faible, on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_Q (b(u_0) - b(u(t)))\, \phi_t^h dxdt = \\ \displaystyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \{b(u_0) - b(u(t))\} \frac{1}{h} (\phi(t+h) - \phi(t))\, dxdt \\ \displaystyle= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h}(b(u(t)) - b(u(t-h))\, p(b(u(t)) - b(w))\, \xi(t)\, dxdt \\ \displaystyle\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h}\{\psi_{p,w}(b(u(t))) - \psi_{p,w}(b(u(t-h)))\}\xi(t)\, dxdt. \end{cases}$$

Ce qui implique que :

$$(3\text{−}80) \begin{cases} \displaystyle\iint_Q (b(u_0) - b(u(t)))\, \phi_t^h dxdt \geq \\ \displaystyle\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \{\psi_{p,w}(b(u_0)) - \psi_{p,w}(b(u(t)))\}\frac{1}{h}(\xi(t+h) - \xi(t))dxdt. \end{cases}$$

Faisant tendre $h \longrightarrow 0^+$ dans $(3-80)$, on obtient :

$$(3-81) \begin{cases} \displaystyle\lim_{h \longrightarrow 0^+} \iint_Q (b(u_0) - b(u(t)))\, \phi_t^h dxdt \geq \\ \displaystyle\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \{\psi_{p,w}(b(u_0)) - \psi_{p,w}(b(u(t)))\}\xi_t dxdt \\ \displaystyle= \int_0^T \xi_t \int_{\mathbb{R}} (\int_{u(t)}^{u_0} p(b(s) - b(w))\, db(s))dxdt. \end{cases}$$

Comme $\phi^h \longrightarrow p\,(b\,(u) - b\,(w))\,\xi$ dans $L^2\left(0, T; H^{-1}_{loc}\,(I\!R)\right)$, on a d'après $(3-81)$ et $(*)$:

$$(3-82)\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \xi_t \int_{I\!R} \{\psi_{p,w}(b\,(u_0)) - \psi_{p,w}(b\,(u\,(t)))\}dxdt + \\ \displaystyle + \int\int_Q \xi a\,(u, \varphi\,(u)_x)\,p\,(b\,(u) - b\,(w))_x\,dxdt \leq \\ \displaystyle \leq \int\int_Q f\xi p\,(b\,(u) - b\,(w))\,dxdt. \end{cases}$$

car ξ ne dépend pas de x .

Prenons $w = 0$ dans $(3-82)$, on obtient :

$$(3-83)\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \xi_t \int_{I\!R} \{\psi_p(b\,(u_0)) - \psi_p(b\,(u\,(t)))\}dxdt + \\ \displaystyle + \int\int_Q \xi a\,(u, \varphi\,(u)_x)\,p\,(b\,(u))_x\,dxdt \leq \int\int_Q f\xi p\,(b\,(u))\,dxdt. \end{cases}$$

$(3-83)$ donne :

$$(3-84)\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \xi_t \int_{I\!R} \{\psi_p(b\,(u_0)) - \psi_p(b\,(u\,(t)))\}dxdt + \\ \displaystyle + \int\int_Q \xi[a\,(u, \varphi\,(u)_x) - a\,(u, 0)]p\,(b\,(u))_x\,dxdt + \\ \displaystyle + \int\int_Q \xi a\,(u, 0)\,b\,(u)_x\,p'\,(b\,(u))\,dxdt \leq \int\int_Q f\xi p\,(b\,(u))\,dxdt. \end{cases}$$

On a :

$$(3-85) \quad \int\int_Q \xi[a\,(u, \varphi\,(u)_x) - a\,(u, 0)]p\,(b\,(u))_x\,dxdt \geq 0$$

$$(3-86) \quad \int\int_Q \xi a(u,0)\, b(u)_x\, p'(b(u))\, dxdt = \iint_Q [\xi G(u)]_x\, dxdt = 0$$

où on a posé $G(s) = \displaystyle\int_0^s a(s,0)\, b'(s)\, p'(b(s))\, ds$.

Par conséquent $(3-84)$ devient d'après $(3-85)$ et $(3-86)$:

$$(3-87) \quad \int_0^T \xi_t \int_{I\!R} \{\psi_p(b(u_0)) - \psi_p(b(u(t)))\} dxdt \leq \int\int_Q f\xi p(b(u))\, dxdt$$

$$(3-87) \Longrightarrow \int_{I\!R} \psi_p(b(u(t)))_t\, dx \leq \int_{I\!R} fp(b(u))\, dx \quad \text{dans } D'(0,T)$$

$$\Longrightarrow \int_{I\!R} \psi_p(b(u(t)))_t\, dx \leq \int_{I\!R} fp(b(u))\, dx \quad \forall\ 0 < t \leq T$$

$$\Longrightarrow \int_{I\!R} \psi_p(b(u(t)))\, dx - \int_{I\!R} \psi_p(b(u_0)) dx \leq \int_0^t \int_{I\!R} fp(b(u))\, dxdt$$

$\forall\ 0 < t \leq T$;

par conséquent , on a :

$$\int_{I\!R} \psi_p(b(u(t)))\, dx \leq \int_{I\!R} \psi_p(b(u_0)) dx + \int_0^t \int_{I\!R} fp(b(u))\, dxdt$$

$\forall\ 0 < t \leq T$.

Ce qui achève la preuve du théorème .

Troisième partie

Conclusion et Références Bibliographiques

3.5 CONCLUSION

Ce travail a porté sur l'étude de plusieurs aspects mathématiques de problèmes de types paraboliques-elliptiques non linéaires en une dimension d'espace .

Nous avons dans un premier temps étudié et montré que le problème stationnaire associé au problème d'évolution est bien posé en terme de solution entropique ; ce qui nous permettait par la suite d'interpreter le problème d'évolution en utilisant la théorie non linéaire des semi-groupes (*voir* $[BCP]$). La difficulté dans cette partie est que compte tenu des hypothèses que nous avons sur la fonction b , il n'y a aucun espoir d'obtenir l'unicité de u .

Dans la seconde partie de ce travail , compte tenu des résultats du premier chapitre , nous interprétons le problème d'évolution à l'aide de la théorie générale des équations d'évolutions ; ce qui nous a permis d'obtenir un résultat d'existence (et d'unicité) de "bonne solution" de ce problème .

Par la suite , sous certaines hypothèses additives, nous avons montré que la "bonne solution" est l'unique solution entropique du problème , puis nous avons établi l'existence de solution faible d'énergie finie .

Bénilan et Wittbold ont obtenu un résultat d'unicité de solution faible d'énergie finie dans le cas particulier où $\varphi = id$ (voir $[BW1]$). Par contre , dans le cas général que nous considérons ici , nous ne savons pas si la solution faible d'énergie finie est unique .

Néanmoins , ce qu'il y a d'éssentiel à retenir dans cette partie est que nous généralisons les résultats obtenus par Bénilan et Touré $[BT3]$ dans l'étude du problème $u_t - a\left(u, \varphi\left(u\right)_x\right)_x = f$.

Il est aussi intéressant de noter que l'introduction récente de l'analyse numérique des solutions entropiques $[EGH]$ ouvre des pistes de recherches de méthodes numériques consistantes et stables pour la résolution numérique de ces types de problèmes. Dans ce sens, il faut dire que Andreianov a commencé à s'intéresser à cette question (voir $[BA2]$).

Touré et Maliki $[MT2]$ ont étudié la question des solutions généralisées locales de ces types de problèmes dans le cas particulier où $b = id$. On devrait pouvoir en suivant leur démarche , aborder la question des solutions généralisées locales dans le cas général que nous considérons ici .

On pourrait en somme retenir que ce travail soulève de nombreuses questions intéressantes à regarder telles que la notion de dépendance continue des solutions par rapport aux données , l'unicité des solutions faibles d'énergie finie , la notion de solution généralisée locale pour ces types de problemes , la stabilisation des solutions otenues .

3.6 BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

[AB] Arendt(W.), Bénilan (Ph.), Inégalité de Kato et semi-groupe sous markoviens, Revista Mathematica de la universidad Complutense de Madrid, Vol 5,Numeros 2,y.3,1992.

[Ad] Aronson (DG) , Regularity properties of flows through porous media : the interface . Arch.Rational Mech.Anal.37,1-10 (1970).

[AL] Alt (H.W), Luckhauss (S), Quasi-linear elliptic-parabolic differential equations , Math.Z., 183 (1983) , 311-341.

[BA1] B.P Adreiaanov, Vanishing viscosity method and explicit formulae for solutions of the Riemann problem for scalar conservations laws. Vestn.Mosc.univ.I (1999), N°1, pp 3-8.

[BA2] B.P Adreiaanov, Quelques problèmes de la théorie des systèmes paraboliques dégénérés non linéaires et des lois de conservation, Thèse unique (2000), Univ de Franche-Comté (France).

[BABK] B.P Adreiaanov, Ph Bénilan, S.N.Kruskhov, L^1-Theory of scalar conservation law with continuous flux function. J.Funct.Anal; to appear.

[Bam] A. Bamberger, Etude d'une équation doublement non linéaire;J.Funct.Anal.24 (1977), pp 148-155.

[BB] Barthélémy (L), Bénilan (Ph), Subsolutions for abstract evolutioin equations, Potential Analysis 1 (1992), 93-113.

[BCP] Bénilan (Ph) , Crandall (M.G) , Pazy (A) , Evolution equation governed by accretive operators (livre à paraitre).

[BK] Bénilan (Ph), Kruskhov (SN), Quasi linear first order equation with continuous Non-linearities; Russian Acad. Sci. Dokl.Math.Vol 50 N 3, 1995, 391-396.

[Bh1] Brezis (H) (1983) , Analyse fonctionnelle : théorie et applications (Masson, Paris).

[Bh2] Brezis (H) (1973) , Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Amsterdam : (North-Holland).

[Bou] F. Bouhsiss, Etude d'un problème parabolique par les semi-groupes non linéaires. Publ. Math.Besançon, Anal.non-linéaire 15 (1995/97) pp 133-141.

[Bp1] Bénilan (Ph) , Equation d'évolution dans un espace de Banach quelconque et application . Thèse de doctorat d'état. Orsay 1972.

[Bp2] Bénilan (Ph) , Existence de solutions fortes pour l'équation des milieux poreux .C.R.A.S. Paris. Sér A285 . 1029-1031 (1977).

[BT1] Bénilan (Ph) , Touré (H) , Sur l'équation générale $u_t = \varphi(u)_{xx} - \psi(u)_x + v$. Note C.R.Acad.Sci.Paris t.299, série I, n 18, 1984.

[BT2] Bénilan (Ph) , Touré (H) , Sur l'équation générale $u_t = a(.,u,\varphi(u,.)_x)_x + v$ dans L^1 .I Etude du problème stationnaire . Proceedings. Conference L.S.U. Janvier 1993. Marcel Deckker (1994).

[BT3] Bénilan (Ph) , Touré (H) , Sur l'équation générale $u_t = a(.,u,\varphi(u,.)_x)_x + v$ dans L^1 .II Etude du problème d'évolution Ann.inst.Henri Poincaré Vol 12 analyse non linéaire. N°6, 1995. 727-761.

[BW1] Bénilan (Ph) ,Wittbold (P) , On mild and weak solution of elliptic-parabolic problems, Adv.Diff.Equ.1 (1996), 1053-1073.

[BW2] Bénilan (Ph) ,Wittbold (P) , Sur un problème parabolique-elliptique.M2AN,Math.Model.Numer.Anal.33,No.1,121-127 (1999).

[BW3] Bénilan (Ph) ,Wittbold (P), Nonlinear evolution equations in Banach spaces : Basic results and open problems ; New-York : M. Dekker, lect.Notes Pure Appl. Math. 150 (1994), pp. 1-32.

[Ca] Carrillo (J) , Entropy solutions for non linear degenerate problems. Arch.Ratio.Mech.Anal.147 (1999) 269-361.

[CaW] Carrillo (J) , Wittbold (P), Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems. J.Diff.Eq. 156 (1999), pp.93-121.

[CMT] Carrillo (J) , Maliki (M) , Touré (H) , Uniqueness of entropy solutions for non linear degenerate parabolic problems (preprint).

[Cr] Crandall (M.G) , An introduction to evolution equation governed by accretive operators. In : Dynamical systems.Proceedings of an international symposium (Brown University, 1974). New York -San Francisco-London : Academic Press 1975.

[De] DiBenedetto (E) , Degenerate parabolic equations . 1991 (springer Verlag).

[DP] Van Dyun (C.J) , Peletier (L.A) , Non stationary filtration in partially saturated in porous Media. Amsterdam Math.Centrum (1979).

[EGH] Eymard (R), Gallouët (T) , Herbin (R) , Finite volume methods. To appear in Handbook of Numerical Analysis, P.G.Ciarlet, J.L.Lions,eds.

[H] Hornung (U) , Dielongitidunale linienmethode für die ausgeartete nichtlineare Fokker-Plankschc Differentialgleichung. Habilitationsschrift, Münster 1978.

[Kac] J. Kačur, On a solution of degenerate elliptic-parabolic problems in Orlicz-Sobolev spaces. I,II, Math.Z.203 (1990), pp 153-171 and 569-579.

[Ks] Kruskhov (S.N) , First order quasi linear equation with several independent variables. Math.Sb.81 (123), 228-255 = Math USSR Sbornik (10) (1970) , 217-243.

[L] Lions (J.L) , Quelques methodes de résolution de problèmes aux limites non lineaires. Dunod-Gauthier Villars, Paris (1969).

[M] Maliki, Mohamed, Solutions faibles pour des problèmes paraboliques non linéaires fortement dégénérés; Thèse D'état de l'univ CADI AYYAD .2001 (Marrakech-Maroc).

[MT1] Maliki (M), Touré (H), Solution généralisée locale d'une équation parabolique quasi linéaire dégénérée du second ordre . Annale.de la Fac.des.Sci.Uni.de Toulouse :Vol VII, n1,1998.

[MT2] Maliki (M), Touré (H), Local generalized solution for parabolic degenerate equations.(To appear)

[Of] Otto (F) , L^1 contraction and uniqueness for quasi linear elliptic-parabolic equation, C.R.Acad.Sci.Paris 318,série I (1995),1005-1010.

[OKY] Oleinik, O.A., A.S. Kalashnikov, & C. Yui-lin', The cauchy problem and boundary value problems for equations of the type of nonstationary filtration.Izvestija Akademii Nauk SSSR, ser. mat.22, 667-704 (1958).

[Os1] Ouaro (S) : Solution généralisée locale d'une équation parabolique quasilinéaire dégénérée du second ordre.D.E.A, Nov 1997, Université de Ouagadougou.

[OT] Ouaro (S) , Touré (H) , Sur un problème de type elliptique parabolique non linéaire. A paraitre au C.R.A.S , Paris.

[PA] P.A Andreyanov, Cauchy problem for a first order quasi-linear equation in the class of locally integrable functions : Vestn.Mosc.Univ. I (1971), N°6, pp 42-47 ; English tr.In Moscow Univ. Math.Bull 26 (1971), N°5/6, $pp78-83(1973)$.

[Se] D. Serre, Systèmes de lois de conservation 1. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc ; Paris, Diderot, 1996.

[Sf] Simondon (F), Etude de l'équation $\partial_t b(u) - diva(b(u), Du) = 0$ par la méthode des semi-groupes dans $L^1(\Omega)$, publ.Math. Bésançon,analyse non linéaire 7 (1983).

[ST] Simondon (F) , Touré (H) , A Lyapunov functional and long-time behavior for a degenerate parabolic problem : Advances in Mathematical Sciences and Applications.

[T1] Touré (H) , Etude des équations générales $u_t = \varphi(u)_{xx} - \psi(u)_x + v$ par la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^1. Thèse de 3ème cycle , 1982 , Université de Fanche-Comté.

[T2] Touré (H) , Etude de problèmes paraboliques fortement dégénérés en une dimension d'espace . Thèse unique, 1994, Université de Fanche-Comté.

[T3] Touré (H) , Etude de problèmes paraboliques hyperboliques non linéaire . Thèse d'état , Université de Ouagadougou, 1995.

[Vp] A.L. Vol'pert, the spaces BV and quasilinear equations, Math.Sb. 73(115), (1967), N°2, $pp.225-267$.

Résumé

La thèse est consacrée à l'étude théorique de divers aspects mathématiques de problèmes de type parabolique-elliptique en une dimension d'espace.

Dans le premier chapitre, nous faisons des rappels et notations de propriétés propres à la théorie et aux espaces utilisés.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le problème stationnaire associé au problème d'évolution que nous considérons. Cette étude aboutit aux résultats d'existence et d'unicité de solution entropique dans le cadre $L^1 \cap L^\infty$; ce qui nous permet par la suite de définir un opérateur associé au problème d'évolution. Nous déduisons enfin de ces résultats, des propriétés de cet opérateur.

Dans le troisième chapitre, nous étudions le problème d'évolution ; nous montrons dans un premier temps à l'aide de la théorie générale des équations d'évolutions dans les espaces de Banach, en interpretant le problème d'évolution à partir des résultats du deuxième chapitre, un résultat d'existence (et d'unicité) de "bonne solution". A l'aide du domaine généralisé, nous montrons sous des hypothèses complémentaires que la "bonne solution" est l'unique solution entropique du problème. Enfin, nous montrons que la "bonne solution" obtenue est solution faible d'énergie finie du problème.

Mots clés : Equation elliptique, Problème parabolique, Solution entropique, Solution faible, Solution intégrale, Semi-groupe non linéaire.