N° d'ordre année 2002

THESE

Présentée à

L'U.F.R DES SCIENCES EXACTES ET APPLIQUEES DE L'UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Théorie du Contrôle

CONTRÔLE DE PROBLEMES DE DYNAMIQUE DES POPULATIONS.

Par
Monsieur **Oumar TRAORE**

Directeur de thèse Pr Albert OUEDRAOGO

Soutenue le 28 Mars 2002.
Après avis de :

Rapporteurs :	Ousseynou NACOULIMA	Professeur Université de Pointe à Pitre
	Jean-Pierre PUEL	Professeur Ecole Polytechnique (Paris)
	Blaise SOME	Maître de Conférences Université de Ouagadougou
	Jean VELIN	Maître de Conférences Université Pointe à Pitre
	Enrique ZUAZUA	Professeur Université de Madrid .

Devant le Jury :

Président :	Ousseynou NACOULIMA	Professeur Université de Pointe à Pitre
Examinateurs		
	Gérard KIENTEGA	Maître Assistant Université de Ouagadougou.
	Albert OUEDRAOGO	Professeur Université de Ouagadougou
	Jean-Pierre PUEL	Professeur Ecole Polytechnique (Paris)
	Blaise SOME	Maître de Conférences Université de Ouagadougou
	Enrique ZUAZUA	Professeur Université de Madrid

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

Président : Monsieur le Professeur Alfred S TRAORE

Vices-Présidents : Messieurs S. GUINKO . J .PARE . F.R FALL

UFR DES SCIENCES EXACTES ET APPLIQUEES

DIRECTEUR : Monsieur Jean Boukary LEGMA

DIRECTEUR ADJOINT : Monsieur Gérard SEGDA

PROFESSEUR HONORAIRE

Monsieur Yembila TOGUIENI.

PROFESSEURS

KOULIBALY	Akry	Mathématiques
KABRE	Tibo Siméon	Chimie
LEGMA	J. Boukary	Chimie
NACRO	Mouhoussine	Chimie
OUATTARA	Moussa	Mathématiques
OUEDRAOGO	Albert	Mathématiques
OUEDRAOGO	Guy Venace	Chimie
SIB	Sie Faustin	Chimie
TRAORE	Harouna	Chimie

MAITRES DE CONFERENCES

BARRY	Aboudramane	Chimie
KOUDA/BONAFOS	Marie	Chimie
KOHLIDIATI	Jean	Physique
OUEDRAOGO	Raguilnaaba	Chimie
SABA	Adama	Chimie
SEGDA	Gérard	Physique
SIE	Oumarou	Informatique
SOME	Blaise	Mathématiques
TAPSOBA	I.M. Théodore	Mathématiques
TOURE	Hamidou	Mathématiques
ZOUGMORE	François	Physique ZOUGMORE

MAITRES ASSISTANTS

BATIOBO	Joseph	Physique
BAYO	Kalifa	Chimie
BONKIAN	S. Marcel	Mathématiques
BONOU	Lucien	Chimie
BONZI/COULIBALY	Yvonne	Chimie
BONZI	K. Bernard	Mathématiques
GADIAGA	Dembo	Mathématiques
GUEL	Boubié	Chimie
KIENTEGA	Gérard	Mathématiques
KIENOU	Florent	Physique
KOALGA	Zacharie	Physique
CISSE	Ousmane	Physique
OUEDRAOGO	Gomtibo	Physique
OUEDRAOGO	Alioune	Physique
PILABRE	Boukary	Mathématiques
SEYNOU	Aboubacary	Mathématiques
SOME	Longin	Mathématiques
SOUGOTI	Moussa	Physique
TRAORE	Kalifa	Mathématiques
TRAORE	Karfa	Chimie
TOURE	Alfred	Mathématiques
YOBI	A. Boubacar	Mathématiques
ZONGO	O. Michel	Physique
OUEDRAGO	Abdoulaye	Physique

ASSISTANTS

BERE	C. Antoine	Mathématiques
KAFANDO	Pétronille	Physique
OUEDRAOGO	M. Françoise	Mathématiques
TAPSOBA	Edouard	Chimie

Secrétaire Principal (UFR/SEA) : DA D. Auguste , **Responsable scolarité(UFR/SEA) :** KOURAOGO B. Sidiki

Chef Service Administratif et Financier (UFR/SEA) : OUEDRAOGO Marc

REMERCIEMENTS

Qu'il me soit permis de dire d'abord deux mots sur le Professeur Albert OUEDRAOGO, qui m'a proposé ce travail et qui l'a ensuite dirigé .
Depuis les petites classes, sa simplicité et sa rigueur aussi bien dans ses cours que dans leur présentation m'ont subjugué .Et depuis lors ,nos relations ont dépassé le cadre de Maître et élève .
Je lui exprime ici , ma reconnaissance et ma gratitude .

Le Professeur Ousseynou NACOULIMA , à chacun de ses passages à Ouagadougou a toujours eu des idées et des suggestions pour moi. Il m' a fait l'honneur aussi bien de faire son rapport sur ce travail que de présider ce jury .Je le remercie de tout cœur.

Après les enrichissantes discussions que j'ai eu avec le Professeur Jean-Pierre PUEL , mes idées sur la contrôlabilité se sont vraiment éclaircies , et ce travail s'est amélioré .Il a de plus accepté d'être membre du jury ; je lui en serai toujours reconnaissant .
Le Professeur Enrique ZUAZUA a aussi contribué par ses idées à parfaire ce travail. Il m'a fait l'honneur d'une part de faire un rapport sur ce travail et d'autre part de siéger dans ce jury .Je le remercie vivement .

Je remercie également le Professeur Jean VELIN pour ses suggestions et le rapport qu'il a bien voulu faire .

Le Professeur Blaise SOME , après son avis sur ce travail à accepter d'être membre du jury Je l'en remercie . Je le remercie également pour tout ce qu'il fait pour les jeunes mathématiciens .

Le Docteur Gérard KIENTEGA nous fait l'honneur d'examiner ce travail ,je le remercie pour tout ce qu'il a fait.

Je remercie le Professeur Hamidou TOURE également pour tout ce qu il a fait en mon endroit .

Je remercie également le Professeur Michel LANGLAIS et son laboratoire pour leurs réponses et leur soutien bibliographique .

Je remercie aussi tous les enseignants et tout le personnel de l 'UFR /SEA ,tous ceux que je n'ai pas pu citer ici .

Je remercie Madame Marie ZOUNGRANA pour l'excellent travail dactylographique .

Je remercie mes amis des laboratoires AMSYC, LANIBIO, AGATA et d'EDP .

Enfin ces derniers mots sont pour mes amis et parents qui m'ont soutenu .
Que chacun trouve en ce travail leur effort personnel .

DEDICACE

Je dédie ce travail au Peuple du BURKINA FASO, qui a financé mes études du début jusqu'à aujourd'hui.

Ce travail est également dédié à mon Père , ma Mère et ma Sœur , qui auraient bien voulu voir ce jour.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE..1

CHAPITRE I . RESOLUTION DU PROBLEME..8

I) NOTATIONS-RAPPELS..8
1)Espaces fonctionnels..8
2) Rappels..10
II) RESULTATS PRELIMINAIRES..13
1) Propriétés de l'espace W(U ;V)..14
2) Résolutions de problèmes auxiliaires..25
III) RESOLUTION DU PROBLEME..43

CHAPITRE II : PROBLEME DE CONTROLE..49

I) INTRODUCTION..49
II) EXISTENCE DU CONTROLE OPTIMAL POUR LE CAS LINEAIRE..49
1) continuité de la solution par rapport au contrôle..49
2) existence de la solution pour le cas linéaire..51
3) contrôle optimal..51
III) EXISTENCE D'UN CONTROLE OPTIMAL POUR LE CAS NON LINEAIRE..56
1) Existence du contrôle optimal..56
2) Conditions nécessaires d'optimalité dans un cas particulier..62
2.1) Propriété de l'état y(v)..63
2.2) conditions nécessaires d'optimalité..78
a) Problème adjoint..78
b) Conditions nécessaires d'optimalité..81

CHAPITRE III : CONTROLABILITE APPROCHEE..88

I)INTRODUCTION..88
II) RESULTATS CONNUS..88
1) contrôlabilité approchée dans un cas particulier..88
2) contrôlabilité dans le cas général..89
III)CONTROLABILITE APPROCHEE DU PROBLEME..91
1) position du problème..91
2) système adjoint..92
3) Résultats auxiliaires..93
4) Contrôlabilité approchée..98
5) Algorithme donnant le contrôle..100
a) Définition d'une fonctionnelle..100
b) Algorithme..105

BIBILIOGRAPHIE..109

INTRODUCTION GENERALE

L'étude de l'évolution des populations a débuté au 18^e siècle. Dès lors ce domaine a particulièrement intéressé les mathématiciens, les généticiens, les biologistes et les démographes.

En 1798, Malthus proposa un modèle simple : $P_{n+1} = rP_n$, i.e que la variation de la population est proportionnelle à la population totale. Ici aucune mention n'est faite sur l'âge et la position spatiale.

L'étude des modèles de population dépendant de l'âge aurait été introduite par Lotka et Sharpe ,dans leur modèle la fonction natalité est introduite comme la solution d'une équation intégrale linéaire du type Volterra : « renewal equation ».

Par la suite plusieurs mathématiciens se sont intéressés au domaine, chacun introduisant d'autres types de conditions. On peut citer entre autres Von-Foerster; Mc Kendrick; F. Hoppenstead; Garroni et Lamberti; etc…cf bibliographie

En 1959 : Von Foerster présenta un modèle dans lequel la densité dépend de l'âge et du temps.
Dans les modèles formulés par M.E. Gurtin et Mac Camy , le taux de natalité dépend de la population totale. Leur modèle est alors non linéaire.

Bon nombre de mathématiciens ont travaillé sur des modèles non linéaires puisque modélisant mieux la réalité.
Dans bon nombre de ces travaux ,la non linéarité se situe dans le modèle de diffusion
M. Langlais , s'est intéressé à différents types de diffusions non linéaires et a obtenu des types de solution généralisées pour des formes générales de fonction natalité et mortalité .

Dans ce travail, on étudie l'évolution d'une population au cours du temps.
On note $y\,(t,a,x)$ le nombre d'individus d'âge a se trouvant au point x à l'instant t.

Ainsi le nombre $\int_0^{\omega} y(t,a,x)da$ où ω est l'espérance de vie maximale, est le nombre total d'individus se trouvant en x à l'instant t.

La population considérée, comme toute population est caractérisée par des lois de comportements propres. Ces lois tiennent compte de façon essentielle :

* du comportement spatial.
Il s'agit des déplacements des individus dans le biotope Ω.
On notera $\vec{q}$ le vecteur flux migratoire.

On peut définir plusieurs types de flux, et chacun de ces types caractérise un modèle donné de diffusion :
- si la diffusion est due à la pression de la population totale ,on peut prendre $\vec{q}$ sous la forme $\vec{q}=-y\overrightarrow{\nabla p}$. C'est le cas par exemple dans [26] et [15] .

-Dans [19] $\vec{q}=-k\overrightarrow{\nabla y}$,il s'agit de l' équation de Fick schématisant le fait que la diffusion se fait des zones de forte concentration vers les zones de faible concentration.

-Dans [8] la diffusion est due à la pression de la population totale et le flux dans chaque classe d'âge est proportionnelle à la taille de la classe d'âge dans la population totale ,on a alors $\vec{q}=k\frac{y}{P}\vec{\nabla}P$.

D'autres types de flux sont également possibles :

$$\vec{q}=\begin{cases}\vec{\nabla}\int_0^{\omega}k(a,\alpha)y(t,\alpha,x)d\alpha \\ \vec{\nabla}k(a)\int_0^{\omega}y(t,\alpha,x)d\alpha \\ \int_0^{\omega}y(t,a,x)da.\vec{\nabla}y\end{cases}$$

Dans ce travail le flux $\vec{q}=-\overrightarrow{\nabla y}$.

** **Loi de Natalité**

Cette loi assure la survie de l'espèce.

Il est évident que chaque espèce à sa propre loi de natalité ; puisque toutes n'ont pas les même processus de reproduction.

Notons $\beta(t,a,x)$ le taux de natalité, β est fonction du temps t , de la position géographique x et surtout de l'âge a.

En général $\beta(t,a,x)$ est assez petit où nul pour a voisin de 0 et pour a voisin de ω espérance de vie maximale.

Dans plusieurs travaux on désigne par $\int_0^{\omega}\beta(t,a,x)y(t,a,x)da$ le nombre d'individu d'âge 0 se trouvant à la position x à l'instant t.

Si nous considérons une espèce ovipare : c'est à dire une espèce dont le processus de naissance passe par la ponte d'œufs, on voit que $\int_0^{\omega}\beta(t,a,x)y(t,a,x)da$ représente le nombre d'œufs pondus à la position x et au temps t. Etant donné que tous les œufs n'arrivent pas à maturité, on introduit une fonction donnant la proportion d'œufs qui y arriveront . Notons ϕ cette fonction.

On aura alors $y(t,0,x)=\int_0^{\omega}(t,a,x)y(t,a,x)da\ \phi\left(\int_0^{\omega}\beta y da\right)$

C'est ce type de processus que nous adopterons.

Pour d'autres choix possibles de ϕ cf [11] et [17]

*** **Loi de mortalité**

On note $\mu(t,a,x)$ le taux de mortalité, taux dépendant de l'âge a, et éventuellement du temps t et de la position géographique x.

Ainsi si V est un volume contenu dans Ω , la quantité $\int_V \mu(t,a,x)y(t,a,x)dx$ représente le nombre de décès d'individus d'âge a dans V à l'instant t.

Si on note $\pi(t,a,x)=exp\left(-\int_0^a \mu(t,s,x)ds\right)$ la probabilité de survie d'individus d'âge a se trouvant en x au temps t, l'écriture $\lim_{a\to\omega}\pi(t,a,x)=0$ signifie qu'aucun individu ne survit au delà de l'âge ω.

Dans ce travail on supposera que μ est borné mais ayant une très grande valeur au voisinage de ω,c'est à dire que la probabilité de survie est très faible pour un âge proche de l'espérance de vie .

Lorsque la population est soumise à la migration et à la mort, la densité y est solution d'une équation aux dérivées partielles du type :

$$(I.0)\quad \frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}=div\vec{q}-\mu y$$

A l'instant initial on a une densité y_0, par conséquent

(I.1) $y(0,a,x) = y_0$.

Tenant enfin compte du processus de naissance, on aura

(I.2) $y(t,0,x) = \int_0^{\omega} \beta y da \, \phi\left(\int_0^{\omega} \beta y da\right)$

Il nous reste à examiner les conditions aux bords.

Lorsque la frontière du domaine est inhospitalière on écrira $y(t,a,x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega$

Dans le cas où on n'a pas d'échange avec le milieu extérieur on écrira $\frac{\partial y}{\partial n}=0$ où n représente le vecteur unitaire normal extérieur à Ω.

Puisque dans ce travail on cherche à contrôler le flux d'individus traversant la frontière, on posera (I.3) $\frac{\partial y}{\partial n}=v$

Dans ce travail on étudiera le système (I-4) $\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+\mu y=0 \, dans \, Q \\ \frac{\partial y}{\partial n}=v \qquad sur \, \Sigma \\ y(o,a,x)=y_0(a,x) \, dans \, Q_\omega \\ y(t,o,x)=\int_0^{\omega} \beta y da \, \phi\left(\int_0^{\omega} \beta y da\right) dans \, Q_\omega \end{cases}$

avec ϕ constante ou non.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à des variantes du problème (I-4). O. Nakoulima et coauteurs [22] ont étudié le système avec $v = 0$ et μ et β dépendant de a. Ils ont montré l'existence et la positivité d'une solution au sens des distributions sur Q, en utilisant une régularisation parabolique, et prenant la fonction ϕ assez régulière .

S. Ndiaye [23] a prouvé également l'existence d'une solution de (I-4) pour $v = 0$ en utilisant la méthode des semi-groupes. Ici aussi il a fallu prendre des hypothèse de régularité sur les fonctions ϕ et β •

Dans [14] et [19] les auteurs ont étudié le cas $v = 0$ avec des taux de natalité et mortalité dépendant de la population totale.

Beaucoup d'auteurs se sont intéressés aux problèmes de contrôle de dynamique des populations .Mais à notre connaissance aucun n' a envisagé l'étude d'un modèle où il y a échange d'individus avec le milieu extérieur à travers la frontière du domaine

C'est cela qui nous a motivé dans ce travail .

Dans notre travail , on étudie un problème où le contrôle est frontière .

Par conséquent au chapitre I, on étudiera l'existence et l'unicité de la solutions de (I-4) dans un certain sens dans le cas où v est non identiquement nul : ce sens nous a été suggéré par l'écrit de M. Langlais [19].

L'objectif étant de ramener la densité y du système aussi proche que possible d'une densité désirée y_d, à travers l'utilisation d'un contrôle frontière v et cela à moindre coût. La fonction coût utilisée est alors $J(v) = \|y(v) - y_d\|^2 + N\|v\|^2$. Ces questions seront étudiées dans le deuxième chapitre.

Dans le dit chapitre on étudiera d'abord le cas linéaire à travers les théories classiques du contrôle optimal, ensuite on montre l'existence d'un contrôle optimal dans le cas non linéaire.

On verra aussi que sous certaines hypothèses on obtient des conditions nécessaires d'optimalité.

Ainsi on trouve que le contrôle optimal est du type «bang-bang ».

L'intérêt d'un tel travail ,bien « qu'inhabituel » est évident .

Donnons un exemple illustratif de l'intérêt d'une telle étude :

Considérons comme domaine ,un organe infecté par une population de bactéries pouvant infecter par la suite les organes avoisinant. La fragilité de l'organe ne permettant pas de récolter à l'intérieur de celui-ci, on pourrait envisager la récolte sur l'organe de manière à ramener la densité aussi proche que possible d'une densité désirée donnée.

Au chapitre III, on examinera la contrôlabilité approchée à un instant T dans le cas linéaire.

Le problème se présente comme suit :

Pour une densité désirée y_d à l'instant T donnée, on cherche un contrôle v qui va ramener la densité du système au temps T aussi proche que l'on veut de y_d.

Dans un récent travail B. Ainseba et M. Langlais [1], ont montré que lorsque le contrôle s'exerce sur un petit ouvert ϖ, contenu dans le domaine ,la population est approximativement contrôlable . Ils ont montré alors le résultat de continuation unique suivant : tout fonction ψ vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial a}-\Delta\psi+\mu\psi=\beta(a)\psi(t,0,x) & sur\, U\times\Omega \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu}=0 \quad sur \quad U\times\Sigma \\ \psi=0 \quad dans \quad U\times\varpi \end{cases}$$

est identiquement nulle sur $U\times\Omega$.

Dans notre travail nous montrons d'abord en utilisant le théorème de Holmgren le résultat de continuation suivante : toute fonction Ψ vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial a}-\Delta\psi+\mu\psi=\beta(a)\psi(t,0,x) & sur\, U\times\Omega \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu}=0 \quad sur \quad U\times\Gamma \\ \psi=0 \quad sur \quad U\times\Gamma \end{cases}$$

est identiquement nulle sur Q, moyennant des hypothèses minimales sur β.

Par suite on montre que dans le cas d'un contrôle frontière la population est approximativement contrôlable .

CHAPITRE I : RESOLUTION DU SYSTEME

Résumé :Dans *ce chapitre on montre que le système non linéaire, (I-4) admet une solution unique dépendant continûment du contrôle frontière v .*
On commence d'abord par introduire un espace W(U, V) dont on étudiera les propriétés.

I – Notations et rappels

1-espaces fonctionnels :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, N = 1,2 ou 3, de frontière Γ variété de classe C^∞ , Ω étant localement d'un seul côté de Γ .

Soient T et ω deux réels strictement positifs

On pose $U =]0,T[\times]0,\omega[$

$$Q_\omega =]0,\omega[\times\Omega$$

$$Q_T =]0,T[\times\Omega$$

$$Q = U\times\Omega$$

$$\Sigma = U\times\Gamma .$$

Espace L^2 (U ; E) , E étant un Banach

On note L^2 (U ; E) l'espace des fonctions mesurables de U dans E de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue *dU = dtda où (t, a)* est l'élément générique de U. On rappelle que pour $\varphi\in L^2$ (U ; E) , $\|\varphi\|^2_{L^2(U,E)}=\int_U\|\varphi(t,a)\|^2dU$. Si E est un Hilbert, L^2(U ; E) l'est également.

Espace $H^m(\Omega)$

On note $H^m(\Omega)$, l'espace des fonctions de $H = L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées au sens des distributions d'ordre inférieur ou égal à m sont éléments de H.

Pour $u \in H^m(\Omega)$; $\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|j| \le m} \|D^j u\|^2_H$ où $D^j = \dfrac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} .. \partial x_N^{j_N}}$ $\quad |j| = j_1 + \ldots j_N$

Espace C(J ; X)

Soit J une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^l$ où $l \in N$

C(J : X) est l'espace des fonctions continues de J à valeurs dans un Banach X

C(J ; X) muni de la norme $\|u\|_{C(J,X)} = \underset{t \in J}{Sup} \|u(t)\|_X$ est un Banach .

Espace W(U ;X)

- Distributions vectorielles cf [27] et [20] .

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^l$, $l \in N$; et X un espace de Banach.

On note $\mathcal{D}$ (O) l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact contenu dans O.

Notons $\mathcal{D}'$(O ;X)l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{D}$(O) dans X.

Soit $T \in \mathcal{D}'(O,X)$ et $\alpha \in N^l$, on note $D^\alpha T$ l'application linéaire continue $\varphi \rightarrow D^\alpha T(\varphi) \overset{def}{=} (-1)^\alpha T(D^\alpha \varphi)$.

Si $f \in L^2(O,X)$ on définit la distribution $\hat{f}$ définie sur $\mathcal{D}$ (O) par $\hat{f}(\varphi) = \int_O f(\varphi) d\iota$, $d\iota$ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^l$.

On identifie f et $\hat{f}$, et l'on écrit alors que $L^2(O, X) \subset \mathcal{D}'(O,X)$.

Dans ce qui suit $O = U$ et $V = H^1(\Omega)$, $X = V'$ dual de V.

On posera $\Lambda_0=\partial_t+\partial_a$ où ∂_t et ∂_a représentent les dérivées respectivement par rapport à t et a au sens de $\mathcal{D}'(U,V')$.

Soit W(U ;V') l'ensemble des fonctions $z\in L^2(U;V)$ telles que $\Lambda_0 z\in L^2(U;V')$

Nous allons donner des propriétés de l'espace W(U ;V) au paragraphe suivant :

2. Rappels

Nous rappelons ici quelques notions et résultats que nous allons utiliser par la suite.

- Notions de semi-groupe continu cf [9]

Définitions 1.1.

Soit X un Banach

Une famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{L}(X)$ ensemble des applications linéaires continues de X dans lui-même, forme un semi-groupe de classe C^0 dans X si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) $G(s+t) = G(s)\,G(t)$ pour tout s, $t \geq 0$

(ii) $G(0) = I$ (identité de $\mathcal{L}(X)$)

(iii) $\lim_{t\to 0^+}\|G(t)x-x\|_X=0$ pour tout $x \in X$.

- Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.2 cf [12]

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0. L'opérateur non borné A défini par :

$$Ax=\lim_{h\to 0^+}\frac{G(h)x-x}{h} \text{ pour } x\in D(A) \text{ où } D(A)=\left\{x\in X; \lim_{h\to 0^+}\frac{G(h)x-x}{h} \text{ existe}\right\},$$

est appelé générateur infinitésimal du semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$.

- Propriété du générateur infinitésimal

Théorème 1.0 [25]

Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0 et A son générateur infinitésimal. Alors

(i) $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)x\,ds = G(t)x$ pour $x\in X$

(ii) pour $x \in D(A)$ *on a* $G(t)x \in D(A)$ *pour* $0 \leq t$.

- Rappel d'un théorème d'isomorphisme

On considère deux Hilbert $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$, et $\mathcal{V}$ dense dans $\mathcal{H}$.

Si on identifie $\mathcal{H}$ à son dual , alors on a : $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$.

Soit M un opérateur linéaire continue de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.

On considère un semi-groupe de classe C^0, $(G(s))_{s\geq 0}$ dans $\mathcal{V}$ de générateur infinitésimal - Λ.

On suppose aussi que : (H_1) : $(G(s))_{s\geq 0}$ est un semi-groupe de classe C^0 dans $\mathcal{V}'$.

On peut alors montrer que $(G(s))_{s\geq 1}$ est également un semi-groupe de classe C^0 de $\mathcal{H}$.

On suppose alors, que (H_2): $\|G(s)\|_{L(\mathcal{H})} \leq 1 ; s \geq 0$.

(H_3) : M $\in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ et *que* $Re\,(Mv,v) \geq \alpha\|v\|_{\mathcal{V}}^2$, $\alpha>0$, $\forall v \in \mathcal{V}$.

On a donc le théorème suivant :

Théorème 1.1. [20]

Notons $D(\Lambda ;X)$, le domaine de l'opérateur non borné Λ dans le Banach X.

Sous les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3)

Λ+ M est un isomorphisme de $\mathcal{V} \cap D(\Lambda ; \mathcal{V}')$ dans $\mathcal{V}'$, $D(\Lambda ; \mathcal{V}')$ étant muni de la norme suivante . $\|\varphi\|_{D(\Lambda;\mathcal{V}')}^2 = \|\varphi\|_{\mathcal{V}'}^2 + \|\Lambda\varphi\|_{\mathcal{V}'}^2$.

- Autres résultats

Propositions 1.0 [25]

Soit φ une fonction continûment dérivable à droite sur [a,b[$a,b \in R$, $a < b$

Si $t \mapsto \lim\limits_{h \to o^+} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$ est continue sur [a,b[alors φ est continûment dérivable sur [a,b[.

Pour la preuve voir [25]

Nous avons aussi :

Propositions 1.1.

Le générateur infinitésimal A d'un semi-groupe $(G(s))_{s \geq 0}$ de classe C^0 vérifie pour tout $x \in D(A)$.

$(Ax, x) \leq 0$ où $(.\,,.)_X$ désigne le produit scalaire dans X.

Voir [25] pour la preuve

Enfin nous avons la proposition

Proposition 1.2 [12]

Soit X un Banach réflexif et I un ensemble infini et ordonné d'indices.

Soit $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ une suite d'éléments de X telles que

(1) (x_λ) est bornée dans X

(2) l'ensemble des points d'accumulation de $\{x_\lambda\}$ pour la topologie faible est réduit à $\{x\}$.

Alors la suite $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ converge vers x dans X faible.

Preuve

Si $x_\lambda \not\rightharpoonup x$, alors il existe $\varepsilon > o$, $x' \in X'$ et $(\tilde{x}_\lambda)$ une sous suite extraite de (x_λ) telle que

(*) $\left|\langle x',\tilde{x}_\lambda - x\rangle\right| \geq \varepsilon > 0$ pour tout λ. X étant réflexif et (x_λ) bornée on peut extraire de $(\tilde{x}_\lambda)$ une sous suite notée (x_μ) telle que $x_\mu \to \xi$ dans X faible

D'après (2) $\xi = x'$

Alors $\lim\limits_{\mu \to \in +\infty} \left|\langle x', x_\mu - x\rangle\right| = 0$

Ce qui contredit (*) .

- <u>Cône normal et cône tangent</u> cf [6]

Soit X un Banach, et X' son dual .

Soit C un convexe non vide de X .

<u>Définition</u> :

On appelle cône normal à C en x ∈ C, l'ensemble noté

$$N_C(x) = \left\{ \bar{w} \in X'; \left\langle \bar{w}, x-y \right\rangle_{X'X} \geq 0, \forall y \in C \right\}$$

<u>Définition</u>

On appelle cône tangent à C en x∈ C, l'ensemble noté T_C (x) définie par

$$T_C(x) = \left\{ \frac{y-x}{\lambda}; y \in C; \lambda > o \right\} \quad .$$

On a la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 1.3

soit C un convexe non vide d'un Banach X. Alors

$$N_C(x) = \left\{ z \in X'; \langle z;y \rangle_{X'X} \leq 0 \forall, y \in T_C(x) \right\}.$$

Pour la preuve voir par exemple [6]

II – <u>RESULTATS PRELIMINAIRES</u>

1. Propriétés de l'espace W(U,V)

Proposition 1.4

L'espace W(U ; V) muni de la norme :

$$\|z\|_{W(U;V)} = \left[\|z\|^2_{L^2(U,V)} + \|\Lambda_0 z\|^2_{L^2(U,V')}\right]^{1/2} \quad \textit{est un Hilbert.}$$

Preuve :

Soit $(z_n) \subset W(U;V)$ une suite de Cauchy de W(U,V) alors (z_n) est de Cauchy dans $L^2(U;V)$ et $(\Lambda_0 z_n)$ est de Cauchy dans $L^2(U;V')$, et par suite

$z_n \to z$ dans $L^2(U;V)$ et $\Lambda_0 z_n \to z$ dans $L^2(U;V')$.

Il nous faut montrer que $z = \Lambda_0 z$.

Comme les injections de $L^2(U;V)$ dans $L^2(U;V')$ et de $L^2(U;V')$ dans $\mathcal{D}'(U,V')$ sont continues, alors $z_n \to z$ dans $L^2(U;V)$ entraîne que $z_n \to z$ dans $\mathcal{D}'(U,V')$ et donc $\Lambda_0 z_n \to \Lambda_0 z$ dans $\mathcal{D}'(U;V')$.

Par conséquent de l'unicité de la limite on a que $\Lambda_0 z = z$.

Ainsi W(U ; V) est complet.

Proposition 1.5.

L'espace W(U ; V) s'injecte continûment dans $C^0([0,T] ; L^2(Q\omega))$ (resp dans $C^0([0,\omega] ; L^2(Q_T))$, ce dernier espace étant muni de la norme de la convergence uniforme.

Alors pour tout $y \in W(U;V)$ on peut définir la trace en $t = t_0$ (resp en $a = a_0$) dans $L^2(Q\omega)$ (resp $L^2(Q_T)$).

De plus les applications traces sont continues pour les topologies fortes et faibles.

En outre on a pour tous $z, \hat{z} \in W(U;V)$

$$\int \langle \Lambda_0 z, \hat{z}\rangle dtda + \int \langle \Lambda_0 z, \hat{z}\rangle dtda = \Big[\int_{Q\omega} \{(z\hat{z})(T,0,x) - (z\hat{z})(0,a,x)\} dadx +$$
$$+ \int_{Q_T} \{(z\hat{z})(t,\omega,x) - (z\hat{z})(t,0,x)\} dtdx\Big] \quad .$$

Remarque 1.1

Notons que dans le cas où U et un intervalle de $\mathbb{R}$, on a un résultat analogue .

Dans la démonstration de la proposition 1.5 on aura besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 1.1.

L'espace $\mathcal{D}(\bar{U}\ ;V)$ est dense dans $W(U\ ;V)$

où $\mathcal{D}(R^2\ ;V)$est l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact, définies sur R^2 à valeurs dans V et $\mathcal{D}(\bar{U}\ ;V)$ désigne l'ensemble des restrictions à $\bar{U}$ des fonctions de $\mathcal{D}(R^2\ ;V)$.

Lemme 1.2

Il existe un opérateur de prolongement P de $W(U\ ;V)$ dans $W(R^2,V)$ tel que $Py = y$ pp dans U.

Preuve du lemme 1.1

Elle sera faite en trois étapes :

1ère étape : on montre que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2,V)$ est dense dans $W(\mathbb{R}^2,V)$

Soit $u\in W(\mathbb{R}^2,V)$ et (ρ_n) une suite régularisante telle que

supp $\rho_n\subset B\left(O_{\mathbb{R}^2};\frac{1}{n}\right)$ $\int_{\mathbb{R}^2}\rho_n(t,a)dtda=1$

Posons $v_n = u*\rho_n$;$v_n(t,a)=\int_{\mathbb{R}^2}\rho_n(t-\tau,a-s)u(\tau,s)d\tau ds$

On a le résultat classique : $u*\rho_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R}^2\ ;V)$.

De plus $\Lambda_0 v_n=(\Lambda_0 u)*\rho_n \to \Lambda_0 u$ dans $L^2(\mathbb{R}^2\ ;V')$.

Ainsi on peut dire que $v_n\to u$ dans $W(\mathbb{R}^2\ ;V)$.

Il suffit alors d'approcher les fonctions de la forme $v=u*\varphi$ où $\varphi\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2;V)$.

$\Lambda_0(v)=u*(\Lambda_0\varphi)$. Comme $\varphi\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, alors $\Lambda_0 v\in L^2(\mathbb{R}^2,V)$ puisque $u\in W(\mathbb{R}^2;V)$.

Remarquons aussi que $v\in C^\infty(\mathbb{R}^2;V)$ puisque pour tout

$$\alpha\in N^2, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^{\alpha_1}\partial a^{\alpha_2}}(u*\varphi)=u*\left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha_1}\partial a^{\alpha_2}}\varphi\right) \text{avec } |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2 \text{ et } \alpha=(\alpha_1,\alpha_2).$$

Puisque $v\in C^\infty(\mathbb{R}^2;V)$ il suffit de le tronquer maintenant .

Soit $\psi\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tel que $0\le\psi\le 1$; $\psi=1$ sur $B(O_{\mathbb{R}^2};1)$ et $\psi=0$ si $(t,a)\notin B(O_{\mathbb{R}^2};2)$

Posons $\psi_n(t,a)=\psi\left(\frac{t}{n},\frac{a}{n}\right)$ .Alors $v.\psi_n\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2;V)$ et l'on a

$\psi_n v \to v$ dans $L^2(\mathbb{R}^2;V)$.

En effet :

$$\iint_{R^2}\|\psi_n(t,a)v(t,a)-v(t,a)\|_V^2\,dtda = \iint_{R^2}\|(\psi(t,a)-1)v(t,a)\|_V^2\,dtda$$

$$\iint_{R^2}|\psi(t,a)-1|^2\|v(t,a)\|_V^2\,dtda.$$

Notons $\gamma_n:(t,a)\mapsto|\psi_n(t,a)-1|^2\|v(t,a)\|_V^2$ .On a $\gamma_n(t,a)\to 0$ quand n tends vers $+\infty$. Ainsi

$\psi_n v \to v$ quand $n\to+\infty$.

On a aussi : $\Lambda_0(v\,\psi_n)=(\Lambda_0 v)\,\psi_n+v\Lambda_0\,\psi_n$.

$(\Lambda_0\,\psi_n\,(t,a)=\frac{1}{n}\Lambda_0\psi\left(\frac{t}{n},\frac{a}{n}\right)$, puisque $\partial_\tau\psi_n(t,a)=\frac{1}{n}\partial_\tau\psi\left(\frac{t}{n},\frac{a}{n}\right)$ pour $\tau=t$ ou $\tau=a$.

Par suite $v\Lambda_0\,\psi_n\to 0$ quand $n\to+\infty$.Notons que $\Lambda_0(v)\,\psi_n\to\Lambda_0 v$.

Alors $\Lambda_0(v\psi_n)\to\Lambda_0 v$ dans $L^2(U;V)$ quand $n\to+\infty$.

L'injection de $L^2(U;V)$ dans $L^2(U;V')$ étant continue, on tire que $\Lambda_0(v\psi_n)\to\Lambda_0 v$ dans $L^2(U;V')$.

Donc $v\psi_n\to v$ dans $W(\mathbb{R}^2;V)$.

<u>2^{eme} étape</u>

Nous allons montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+ ; V) \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ ; V)$ est dense dans $W(\mathbb{R}^2_+ ; V)$

posons pour tout $h>0, u^h(t,a) = u(t+h, a+h)$ pour presque tout $(t,a) \in \mathbb{R}^2_+$

Pour presque tout $(t,a) \in \mathbb{R}^2_+$, $\Lambda_0 u^h(t,a) = (\Lambda_0 u^h)(t,a)$

Il est bon de remarquer que $u^h \to u$ dans $W(\mathbb{R}^2_+ ; V)$ lorsque h tend vers zéro

En effet :

$$\int_{R^2_+} \|u^h - u\|^2_V dtda = \int_{R^2_+} \|u^h\|^2_V dtda - \int_{R^2_+} (u^h, u)_V dtda + \int_{R^2} \|u\|^2_V dtda$$

$$\int_{R^2} \|u^h\|^2_V dtda = \int_h^{+\infty} \int_h^{+\infty} \|u\|^2_V dtda \to \int_{R^2_+} \|u\|^2 dtda = \|u\|^2_{L^2(R^2_+ ; V)}$$

Remarquons que

$(t, a) \mapsto (u^h, u)$ est intégrable et que l'on a : $(u^h, u) \to (u,u)$ pp dans $\mathbb{R}^2_+$,

de plus $\int_{R^2_+} (u^h, u) dtda \leq \int_{R^2_+} \|u\|_V \|u\|_V dtda \leq \|u\|^2_{L^2(R^2_+ ; V)}$.

Par conséquent $\int_{R^2_+} (u^h, u) dtda \to \int_{R^2_+} \|u\|^2_V dtda$

Ainsi au total $\int_{R^2_+} \|u^h - u\|^2_V dtda \to 0$ quand $h \to 0$

$\Lambda_0 u^h = (\Lambda_0 u)^h$ pp dans $\mathbb{R}^2_+$, alors $\Lambda_0 u^h \to \Lambda_0 u$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_+ ; V')$.

Il vient alors de tout cela que $u^h \to u$ dans $W(\mathbb{R}^2_+ ; V)$.

Il suffit alors d'approcher u^h par des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+ ; V)$.

Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tel que $\phi(t,a) = 1$ si $t \geq -h/2$ et $a \geq -h/2$ et $\phi(t,a) = 0$ si $t \leq -h$ ou $a \leq -h$

Une telle fonction existe. En effet :

Considérons la fonction numérique φ_0 définie par :

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & si \ t>0 \\ \varphi_0(0) = 0 & lorsque \ t \leq 0 \end{cases}$$

On a $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$

Considérons la fonction φ_1 définie par $\varphi_1(t) = \dfrac{\varphi_0(h+t)}{\varphi_0(h+t)+\varphi_0(-\frac{h}{2}-t)}$

Alors la fonction ϕ définie par $\phi(t,a) = \varphi_1(t)\varphi_2(a)$ répond à notre préoccupation.

Cela étant posons pour presque tout $(t, a) \in \mathbb{R}^2$

$$v(t,a) = \begin{cases} \phi(t,a)u^h(t,a) & \text{si } (t,a) \in [-h+\infty[\times [-h+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien $v = u^h$ pp dans $\mathbb{R}_+^2$. En plus $v \in W(\mathbb{R}^2; V)$

Alors d'après la <u>1ère étape</u> on peut trouver $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2; V)$ telle que

$\varphi_n \to v$ dans $W(\mathbb{R}^2; V)$.

Si on prend $\left(\varphi_{n|R_+^2}\right)$, on a alors $\varphi_{n|\mathbb{R}_+^2} \to u^h$ dans $W(\mathbb{R}_+^2; V)$.

<u>3ème étape</u>

$\bar{U} = [0, T] \times [0, \omega]$

Pour h assez petit considérons la fonction u^h définie presque partout dans U par

$$u^h(t,a) = \begin{cases} u(t+h, a+h) & \text{si } (t,a) \in [0, T-h] \times [0, \omega-h] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous allons montrer que :

(1) $u^h \in L^2(U; V)$

(2) $u^h \to u$ dans $L^2(U; V)$ et $\Lambda_0 u^h \to \Lambda_0 u$ dans $L^2(U; V')$.

En effet d'une part :

$$\int_U \|(u^h-u)(t,a)\|_V^2 \, dtda = \int_U \|u^h(t,a)\|_V^2 \, dtda - 2\int_U (u^h(t,a), u(t,a)) \, dtda + \int_U \|u(t,a)\|_V^2 \, dtda$$

On a donc $\lim_{h\to 0} \int_U \|(u^h-u)(t,a)\|_V^2 \, dtda = 0$ quand $h \to 0+$.

D'autre part pour presque tout $(t,a) \in U$

$$\Lambda_0 u^h(t,a) = \begin{cases} \Lambda_0 u(t+h,a+h) & \text{si } (t,a) \in]0,T-h[\times]0,\omega-h[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]T-h,T[\times]\omega-h,\ \omega[)$, prolongeons φ par 0 dans $U\backslash]T-h,T[\text{x}]\ \omega\text{-}h,\ \omega[$, on obtient une fonction notée $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathrm{U})$

$$\Lambda_0 u^h(\varphi) = -\int_U u^h \Lambda_0 \widetilde{\varphi} dtda = \int_{]T-h,T[X]\omega-h,\omega[} u^h \Lambda_0 \varphi dtda = 0$$

Par conséquent $\Lambda_0 u^h = 0$ pp dans $[T\text{-}h,T] \times [\omega\text{-}h,\ \omega]$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T\text{-}h[\times]0,\ \omega\text{-}h[)$ on peut aussi prolonger φ par 0 dans $U\backslash(]0,T\text{-}h[\times]0,\ \omega\text{-}h[)$

Si $\widetilde{\varphi}$ est le prolongement obtenu :

$$\Lambda_0 u^h(\varphi) = -\int_U u^h(t,a)\Lambda_0 \widetilde{\varphi} dtda = -\int_{[0,T-h]\times[0,\omega-h]} u(t+h,a+h)\ \Lambda_0 \widetilde{\varphi}(t,a) dtda$$

$$= -\int_{[h,T]X[h,\omega]} u(t,a)\ \Lambda_0 \widetilde{\varphi}(t-h,a-h) dtda$$

supp $\varphi(t\text{-}h,a\text{-}h) \subset [h,T] \times [h,\ \omega] \subset \overline{U}$

alors

$$\Lambda_0 u^h(\varphi) = -\int_U u(t,a)\ \Lambda_0 \widetilde{\varphi}(t-h,a-h) dtda$$

$$= \int_U (\Lambda_0 u) \widetilde{\varphi}(t-h,a-h) dtda$$

$$= \int_{[h,T]\times[h,\omega]} \Lambda_0 u(t,a)\ \widetilde{\varphi}(t-h,a-h) dtda = \int_{[0,T-h]\times[0,\omega-h]} (\Lambda_0 u^h) \widetilde{\varphi}(t,a) dtda.$$

Ainsi

$$\left(\Lambda_0 u^h\right)(t,a) = \begin{cases} \Lambda_0 u(t+h,a+h) & \text{si } (t,a) \in [0,T-h]\times[0,\omega-h] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela étant on montre que $\Lambda_0 u^h \to \Lambda_0 u$ de la même manière que $u^h \to u$.

Par conséquent $u^h \to u$ dans W(U ; V) quand $h \to 0+$.

Il nous suffit alors d'approcher u^h au sens de W(U ; V).

Posons pour presque tout $(t,a) \in \mathbb{R}_+^2$

$$v(t,a) = \begin{cases} \phi_1(t,a)u^h(t,a) & \text{pour presque tout } (t,a) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$\phi_1(t,a) = \frac{\varphi_0(T-t)}{\varphi_0(T-t)+\varphi_0(t-T+h)} \times \frac{\varphi_0(\omega-a)}{\varphi_0(\omega-a)+\varphi_0(a-\omega+h)}$$

On a $v = u^h$ pp dans U,et l'on a $v \in$ W($\mathbb{R}^2_+$;V) .

Alors d'après la deuxième étape, il existe $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+ ;V)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans W($\mathbb{R}^2_+$;V) alors $\varphi_{n/U} \to u^h$ dans W(U ;V) .

Conclusion générale : $\mathcal{D}(\overline{U}$;V) est dense dans W (U ; V).

Prouvons maintenant le <u>lemme 1.2</u>

<u>Preuve du lemme</u> 1.2

Considérons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+ ;V)$. Notons

$$(P\varphi)(t,a) = \begin{cases} \varphi(t,a) & \text{si } (t,a) \in R_+ \times R_+ \\ \varphi(-t,-a) & \text{si } (t,a) \in R_- \times R_- \\ 0 & \text{si } (t,a) \in R_+^* \times R_-^* \cup R_-^* \text{ x } R_+^* \end{cases}$$

On remarque que $P\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2 ;V)$

De plus on a pour presque tout $(t, a) \in \mathbb{R}^2_+$, $\Lambda_0(P\varphi)(t,a) = \Lambda_0\varphi(t,a) \in V \subset V'$

Pour presque tout $(t,a) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$ on a :

$\Lambda_0(P\varphi)(t,a) = -\Lambda_0\varphi(-t,-a) \in V \subset V'$.

Pour presque tout $(t,a) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+)$.

$\Lambda_0(P\varphi)(t,a) = 0$,

En effet si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-)$, $\Lambda_0(P\varphi)(u) = -\int_{R^2} P\varphi(t,a)\Lambda_0 u(t,a)dtda$

$$= -\int_{R^+ \times R^-} P\varphi(t,a)\Lambda_0 u(t,a)dtda$$

$$= 0$$

Alors $\Lambda_0 (P\varphi) = 0$ pp dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

On montre de même que $\Lambda_0 (P\varphi) = 0$ pp dans $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$

Il est clair que $\varphi \mapsto P\varphi$ est linéaire ,

$$\|P\varphi\|^2_{L^2(R^2,V)} = \int_{R^+ \times R^+} \|\varphi(t,a)\|^2_V dtda + \int_{R^- \times R^-} \|P\varphi(t,a)\|^2_V dtda$$

$$= \int_{R^+ \times R^+} \|\varphi(t,a)\|^2_V dtda + \int_{R^- \times R^-} \|\varphi(-t,-a)\|^2_V dtda$$

$$= 2\|\varphi\|^2_{L^2(R^2_+,V)}.$$

$$\|\Lambda_0 P\varphi\|^2_{L^2(IR^2,V)} = \int_{R^+ \times R^+} \|\Lambda_0\varphi\|^2_V dtda + \int_{R^- \times R^+} \|\Lambda_0\varphi\|^2_V dtda$$

$$= 2\|\Lambda_0\varphi\|_{W(R^2_+,V)} \quad .$$

Par suite on a :

$$\|P\varphi\|^2_{W\left(R^2;V\right)} \leq 2\|\varphi\|^2_{W\left(R^2_+;V\right)}$$

Alors l'application linéaire P peut être prolongée en une application linéaire, notée toujours P sur $W(\mathbb{R}^2_+ ;V)$ à valeur dans $W(\mathbb{R}^2 ;V)$.

Soit $u \in W(U;V)$.

Rappelons que $u^h \to u$ dans W(U;V) et que $\|u^h\|_{W(U;V)} \leq \|u\|_{W(U;V)}$ voir 3[eme] étape de la preuve du lemme 1.1.

Utilisons la technique de la preuve de la troisième étape du lemme 1.1

Alors il existe $v_h \in W(\mathbb{R}^2_+ ;V)$ tel que $v_h = u^h$ pp dans U.

$Pv_h \in W(\mathbb{R}^2 ;V)$ et l'on a $Pv_h = v_h$ pp dans $\mathbb{R}^2_+$ alors $Pv_h = u^h$ pp dans U.

Montrons que $v_h \to \tilde{u}$ dans $W(\mathbb{R}^2_+ ;V)$ avec $\tilde{u} = u$ pp dans U et $\tilde{u} = 0$ pp dans

$\mathbb{R}^2_+ \backslash U$

En effet :

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} \|v_h - \widetilde{u}\|_V^2 dtda = \int_U \|v_h - \widetilde{u}\|_V^2 dtda$$

$$\leq 2\int_U \left(\left\| v_h - u^h \right\|_V^2 + \left\| u^h - \widetilde{u} \right\|_V^2 \right) dtda$$

On a $\int_U \left\| u^h - \widetilde{u} \right\|_V^2 dtda \to 0$ car $u^h \to u$ dans $L^2(U;V)$ et $\int_U \|v_h - u^h\|_V^2 dtda = \int_U \|u^h - u^h\|_V^2 dtda = 0$.

Montrons maintenant que $\Lambda_0 v_h \to \Lambda_0 \widetilde{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_+;V')$.

Mais on sait que $\Lambda_0 v^h \to \Lambda_0 u$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_+;V')$.

Un raisonnement analogue nous donne $\phi_l\, \Lambda_0 u^h \to \phi_l\, \Lambda_0 u$

Il nous reste à regarder de près $\Lambda_0\, \phi_l\, u^h$.

Mais $\phi_l = 1$ sur $[0,T-h] \times [0, \omega-h]$, alors $\Lambda_0 \phi_l = 0$ sur $[0,T-h] \times [0, \omega-h]$

Or pour presque tout $(t,a) \in [T-h,T] \times [\omega-h, \omega]$, on a $u^h(t,a) = 0$

Par conséquent $(\Lambda_0 \phi_l)\, u^h = 0$ pp dans U.

De là on tire que : $\Lambda_0 v^h = \begin{cases} \phi_l \Lambda_0 u^h & pp \text{ dans } U \\ 0 & pp \text{ dans } R^2_+ U \end{cases}$

Un raisonnement analogue à celui de la preuve de $v_h \to \widetilde{u}$ nous donne

$\Lambda_0 v_h \to \Lambda_0 \widetilde{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_+;V)$.

L'application P étant continue de $W(\mathbb{R}^2_+;V)$ dans $W(\mathbb{R}^2;V)$, on tire que $P\, v_h \to P\widetilde{u}$ dans $W(\mathbb{R}^2;V)$ et l'on a pour presque tout $(t,a) \in \mathbb{R}^2_+$, $P\widetilde{u}(t,a) = \widetilde{u}(t,a)$ et pour presque tout $(t,a) \in U$, $\widetilde{u}(t,a) = u(t,a)$.

Par conséquent pour presque tout $(t,a) \in U$, $P\widetilde{u}(t,a) = \widetilde{u}(t,a)$ et cela achève la preuve du lemme 1.2 .

Démonstration de la proposition 1.5

Soit $z \in W(U;V)$ d'après le lemme 1.2 il existe $Pz \in W(\mathbb{R}^2;V)$ tel que $Pz = z$

pp dans U .

$Pz \in W(R^2 ;V)$, alors il existe $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(R^2 ;V)$ telle que $\varphi_n \to Pz$ dans $W(R^2 ;V)$ lorsque $n \to +\infty$ cf lemme1.1

Soit $(t_0, a_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_n(t_0,a_0)\right\|_H^2 &= \int_{-\infty}^{t_0} \frac{d}{d\tau}\left\|\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0)\right\|_H^2 d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t_0} \frac{d}{d\tau}\left(\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0),\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0)\right)_H d\tau \\
&=2 \int_{-\infty}^{t_0}\left(\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0),\frac{d\varphi_n}{d\tau}(\tau,a+\tau-t_0)\right)_H d\tau \\
&=2 \int_{-\infty}^{t_0}\left(\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0),\Lambda_0\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0)\right)_H d\tau \\
&=2 \int_{-\infty}^{t_0}\left\langle \Lambda_0\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0),\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0)\right\rangle_{V',V} d\tau \\
&\leq \int_{-\infty}^{t_0}\left\|\Lambda_0\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0)\right\|_{V'}^2 d\tau+\int_{-\infty}^{t_0}\left\|\varphi_n(\tau,a+\tau-t_0)\right\|_V^2 d\tau
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_R\left\|\varphi_n(t_0,a)\right\|_H^2 da\leq\left\|\varphi_n\right\|_{L^2(R^2;V)}^2+\left\|\Lambda_0\varphi_n\right\|_{L^2(R^2;V')}^2$$

i.e $$\left\|\varphi_n(t_0,\cdot)\right\|_{L^2(R;H)}^2\leq\left\|\varphi_n\right\|_{W(R^2,V)}^2$$

Par conséquent

$$\underset{t_0\in[0,T]}{Sup}\left\|\varphi_n(t_0,\cdot)\right\|_{L^2(]0,\omega[,H)}^2\leq\left\|\varphi_n\right\|_{W(\mathrm{R}^2;V)}^2 \qquad (1)$$

Posons $\psi_{n,m} = \varphi_n - \varphi_m$, un raisonnement analogue nous donne

$$\underset{t_0\in[0,T]}{Sup}\left\|\psi_{n,m}(t_0,\cdot)\right\|_{L^2(]0,\omega[,H)}^2\leq\left\|\psi_{n,m}\right\|_{W(R^2;V)}^2 \qquad (2)$$

Or $\psi_{n,m} \to 0$ quand $n, m \to +\infty$.

Par conséquent $(\varphi_n(t_0, .))$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T] ; L^2(]0,\omega[; H))$

et donc $\varphi_{nU} \to \varphi$ dans $C([0,T] ; L^2(]0,\omega[; H))$.

Or $\varphi_n \to Pz$ dans W(R^2 ; V), alors $Pz = \varphi$ pp dans U, mais comme $Pz = z$ pp dans U on a $\varphi = z$ pp dans U.

De plus en passant à la limite dans (1)

On obtient $\|z\|_{C\left([0,T]\,L^2(]0,\omega[;H)\right)} \leq \|Pz\|_{W\left(R^2;V\right)} \leq C\|z\|_{W(U;V)}$ i.e que W(U ;V) s'injecte continûment dans C([0,T] ; L^2(]0,ω [; H)).

Remarquons aussi que la suite $(\varphi_n(t_0\,;\,))$ est une suite de Cauchy dans L^2(]0,ω[;H). Par conséquent $\varphi_n(t_0, .) \to \xi$ dans L^2(]0, ω [;H).

Or $\varphi_n \to \varphi$ uniformément dans C([0,T] ; L^2(]0, ω [;H)) alors $\varphi(t_0, .) = \xi$.

Comme $\varphi = z$ pp dans U on peut alors poser $z(t_0, .) = \xi \in L^2(]0,\omega[\,;H)$.

On aura alors $\|z(t_0,\cdot)\|_{L^2(]0,w[;H)} \leq C\|z\|_{W(U;V)}$ en passant à la limite dans (1) .Ainsi

On a montré que l'application trace en t_0 est continue pour la topologie forte et donc aussi pour la topologie faible .

Faisant le même raisonnement en prenant a à la place de t on trouvera des résultats correspondants pour a.

Montrons maintenant la formule d'intégration par parties :

Soit φ et $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\overline{U};V)$ on a :

$$\int_U \langle \Lambda_0\varphi,\hat{\varphi}\rangle dtda = \int_\Omega \int_U (\Lambda_0\varphi)\hat{\varphi}(t,a,x)dtdadx$$

$$= \int_\Omega \int_0^T [\varphi\hat{\varphi}]_0^\omega dtdx + \int_\Omega \int_0^\omega [\varphi\hat{\varphi}]_0^T dtdx - \int_\Omega \int_U \varphi\Lambda_0\hat{\varphi}dtdadx$$

$$= \int_{QT}[(\varphi\hat{\varphi})(t,\omega,x)-(\varphi\hat{\varphi})(t,0,x)]dtdx + \int_{QW}[(\varphi\hat{\varphi})(0,a,x)]dadx - \int_U \langle \Lambda_0\hat{\varphi},\varphi\rangle dtda +$$

$$+ \int_{Q_\omega}[\varphi\hat{\varphi}(T,a,x)-\varphi\hat{\varphi}(0,a,x)]dadx$$

La relation est donc vérifiée pour tout $\varphi, \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\overline{U};V)$. $\mathcal{D}(\overline{U};V)$ étant dense dans W(U;V), les applications traces étant continues de W(U,V) dans $L^2(Q_\omega)$ et $L^2(Q_T)$ on tire que la formule est exacte pour tout $\varphi,\hat{\varphi}$ de W(U ;V) .

Soit $y \in W(U;V)$ et $v \in V$, on a $(t,a) \mapsto (y(t,a),v) \in L^2(U)$ alors posons aussi $\Lambda_0(y(t,a),v) = (\partial_t + \partial_a)(y(t,a),v)$ au sens de $\mathcal{D}'(U)$ on a alors :

Proposition 1.6

Pour tout $y \in W(U;V)$ et $v \in V$ on a :

$\Lambda_0 (y,v) = \langle \Lambda_0 y, v \rangle$ *au sens de $\mathcal{D}'(U)$*

Preuve de la proposition 1.6

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et $v \in V$, alors $\varphi \otimes v \in W(U;V)$

On a alors d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_U \langle \Lambda_0 y, \varphi \otimes v \rangle dtda = -\int_U \langle \Lambda_0 (\varphi \otimes v), y \rangle dtda$$

$$= -\int_U \langle \Lambda_0 \varphi v, y \rangle dtda$$

$$= -\int_U \Lambda_0 \varphi (v, y(t,a))_H dtda = \Lambda_0 (y,v)(\varphi)$$

On a alors $\Lambda_0(y,v) = \langle \Lambda_0 y; v \rangle$ au sens de $\mathcal{D}'(U)$.

1. Résolution d'un problème auxiliaire

On considère le problème suivant :

Trouver $y \in L^2(U;V)$ tel que

$$(P_0) \begin{cases} \Lambda_0 y - \Delta y + \bar{\mu} y = f & dans\, Q & (i) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = v(t,a) & sur \quad \Sigma =]0,T[\, x \, [0,\omega] & (ii) \\ y(0,a,x) = 0 & dans \quad Q_\omega & (iii) \\ y(t,0,x) = 0 & dans \quad Q_T & (iv) \end{cases}$$

Donnons d'abord notre notion de solution faible de (P_0).

Multiplions (i) par $z \in V$ et intégrons formellement sur Ω

on trouve

(3) $\langle \Lambda_0 y, z\rangle_{V',V} + \int_\Omega (\nabla y \nabla z + \bar{\mu} y z) dx = \int_\Omega f(t,a) z dx + \int_\Gamma v(t,a) z_{|\Gamma} d\sigma$

où $d\sigma$ est la mesure superficielle sur Γ induite par celle de Ω .

Définition 1.3

On appellera solution de (P_0) toute fonction $y \in L^2(U;V)$ telle que y vérifie (3), (iii) et (iv).

Notons X l'un des espaces $L^2(U;V)$, $L^2(U;H)$ ou $L^2(U;V')$

Considérons la famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs définis sur X suivante :

$$(G(h)\varphi)(t,a) = \begin{cases} \varphi(t-h,a-h) & \text{pour presque tout } (t,a) \in [h,T] \times [h,\omega] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons également l'opérateur non borné Λ défini par :

$$D(\Lambda,X) = \{\varphi \in X ; \Lambda_0\varphi \in X, \varphi(0,.) = 0 \; pp \; dans \;]0,\omega[; \varphi(.,0) = 0 \; pp \; dans \;]0,T[\}$$

$$\Lambda\varphi = -\Lambda_0\varphi \quad .$$

Remarque1.2

Pour $\varphi \in D(\Lambda, X)$ on a $\Lambda_0\varphi \in X$ et donc $\varphi(0,.)$ et $\varphi(.,0)$ ont un sens dans $L^2(Q_\omega)$ et $L^2(Q_T)$ respectivement et cela grâce à la proposition 1.5

Proposition 1.7

$(G(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de classe C^0 et dont le générateur infinitésimal est Λ .

Pour la démonstration de la proposition 1.7 on aura besoin de :

Lemme 1.3

$\mathcal{D}(U,V)$ *est dense dans* $L^2(U;V)$.

Preuve :

Soit $z_0 \in \mathcal{D}(U;V)^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{D}(U;V)$ dans $L^2(U;V)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et $\phi \in V$; on a $\varphi \otimes \phi \in \mathcal{D}(U;V)$ alors

$\int_U (z_0;\varphi\otimes\phi)_V\, dtda=0$.

Remarquons que pour presque tout $(t,a) \in U$

$(z_0(t,a), (\varphi \otimes \phi)(t,a))_V = (z_0(t,a) ; \varphi(t,a)\, \phi) = (z_0(t,a), \phi)\, \varphi(t,a)$

Par conséquent $\int (z_0,\varphi\otimes\phi)_V\, dtda = \int_U \varphi(t,a)(z_0(t,a),\phi)_V\, dtda$.

Posons $j = (z_0, \phi)_V$; $j \in L^2(U)$.

On a donc pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ $\int_U \varphi(t,a) j(t,a) dtda=0$.

Donc $j(t,a) = 0$ pour presque tout $(t,a) \in U$

i.e $(z_0(t,a), \phi)_V = 0$ pour presque tout $(t,a) \in U$ et cela pour tout $\phi \in V$

alors $z_0(t,a) = 0$ pour presque tout $(t,a) \in V$

cela nous donne $z_0 = 0$.

Démonstration de la proposition 1.7

Il est immédiat que $G(0) = I$; $G(s+t) = G(s)G(t)$

Montrons pour tout $u \in X$, $\|G(h)u\|_X \le \|u\|_X$

$\|G(h)u\|_X^2 = \int_U \|G(h)u(t,a)\|_Y^2 dtda$ si $X = L^2(U;Y)$ avec $Y=H$, $Y=V$ ou $Y=V'$

$\|G(h)u\|_X^2 = \int_{]h,T[\times]h,\omega[} \|u(t-h,a-h)\|_Y^2 dtda = \int_{]0,T-h[\times]0,\omega-h[} \|u(t,a)\|_Y^2 dtda \le \|u\|_X^2$

1^er^ cas : $X = L^2(U;V)$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U,V)$

$$\|G(h)\varphi-\varphi\|_X^2 = \int_U \|G(h)\varphi-\varphi\|_V^2\, dtda$$

$$= \int_U \|\varphi(t-h,a-h)-\varphi(t,a)\|_V^2\, dtda$$

$$\leq \text{Mes U. } \underset{(t,a)\in R^2}{Sup} \|\varphi(t-h,a-h)-\varphi(t,a)\|_V^2$$

D'où $\|G(h)\varphi-\varphi\|_X \leq \sqrt{MesU}\, \underset{(t,a)\in R^2}{Sup} \|\varphi(t-h,a-h)-\varphi(t,a)\|_V$

L'application $(t,a) \mapsto \varphi(t,a)$ étant continue et bornée de $\mathbb{R}^2$ dans V

On tire que pour tout $\varepsilon>0$, il existe h_0/ $h<h_0 \Rightarrow \underset{(t,a)\in(\mathbb{R}^2)}{Sup} \|\varphi(t-h,a-h)-\varphi(t,a)\|_V < \frac{\varepsilon}{3}$

Soit $u\in X$,comme $\mathcal{D}(U;V)$ est dense dans X, alors il existe $\varphi\in\mathcal{D}(U;V)$ telle que

$\|\varphi-u\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$

Alors $\|G(h)u-u\|_X \leq \|G(h)u-G(h)\varphi\|_X + \|G(h)\varphi-\varphi\|_X + \|\varphi-u\|_X$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \quad \text{dès que } h < h_0$$

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0^+} \|G(h)u-u\|_X = 0$

<u>2ème cas</u> X = $L^2(U;H)$

On sait que $L^2(U,V)$ s'injecte continûment et est dense dans X .

Alors pour $u \in X$, et pour tout $\varepsilon >0$, il existe $\phi\in L^2(U;V)$ tel que $\|\phi-u\|_X < \varepsilon/3$

On a

$$\|G(h)u-u\|_X \leq \|G(h)u-G(h)\phi\|_X + \|G(h)\phi-\phi\|_X + \|\phi-u\|_X$$

$$\leq 2\|u-\phi\|_X + \|G(h)\phi-\phi\|_X$$

Pour $h < h_0$ on a

$$\|G(h)\phi-\phi\|_{L^2(U,V)} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{or} \quad \|G(h)\phi-\phi\|_X \leq \|G(h)v-u\|_{L^2(U,V)}$$

alors $\|G(h)u-u\|_V \leq \varepsilon$ i.e $\lim\limits_{h\to 0+} \|G(h)u-u\|_X = o$

<u>3^e cas</u> : $X = L^2(U,V')$.

On reprend la même méthode avec cette fois $L^2(U,H)$ à la place de $L^2(U\,;V)$.

On voit que dans tous les cas $(G(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de classe C^0

Notons A le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t\geq 0}$

Alors $D(A) = \{\varphi\in X; \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{G(h)\varphi-\varphi}{h} \in X\}$ et

$$A\varphi = \lim_{h\to 0} \frac{G(h)\varphi-\varphi}{h}$$

Nous allons montrer que $D(A) = D(\Lambda,X)$ et que $A\varphi = \Lambda\varphi \quad \forall\varphi \in D(A)$

Montrons que $D(A)\subset D(\Lambda,X)$ et que pour tout $\varphi\in D(A)$, $A\varphi = \Lambda\varphi$

Soit $u \in D(A)$ alors $\dfrac{G(s)u-u}{s} \to Au$ dans X quand $s \to 0_+$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$

$$\frac{G(s)u-u}{s}(\varphi) = \int_U \frac{G(s)u-u}{s}(t,a)\varphi(t,a)dtda \text{ pour } s>0$$

Comme $\dfrac{G(s)u-u}{s}\varphi \to Au\,\varphi$ dans X alors

$$\lim_{s\to 0+} \frac{G(s)u-u}{s}(\varphi) = \lim_{s\to 0+} \int_U \frac{G(s)u-u}{s}(t,a)\varphi(t,a)dtda$$

$$= \int_U Au\varphi dtda$$

D'autre part :

$$\int \frac{G(s)u-u}{s}(t,a)\varphi(t,a)dtda = \int \frac{G(s)u}{s}(t,a)\varphi(t,a)dtda - \int_U \frac{u}{s}(t,a)\varphi(t,a)dtda$$

$$= \frac{1}{s}\int_{[s,T]\times[s,\omega]} u(t-s,a-s)dtda - \int_U \frac{u(t,a)\varphi(t,a)}{s}\, dtda$$

$$= \frac{1}{s}\int_{[0,T]\times[0,\omega]} u(t,a)\frac{\varphi(t+s,a+s)}{s}\, dtda - \int_U u(t,a)\frac{\varphi(t,a)}{s}\, dtda$$

$$= \int_U u(t,a)\frac{\varphi(t+s,a+s)-\varphi(t,a)}{s}\, dtda$$

alors $\lim\limits_{s\to 0+}\dfrac{G(s)u-u}{h}(\varphi) = \int_U u(t,a)\Lambda_0\varphi(t,a)dtda$

$$= -\Lambda_0 u(\varphi)$$

On a donc $Au(\varphi) = -\Lambda_0 u(\varphi)\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(U)$ cela équivaut

Alors à $-\Lambda_0 u = Au$ et donc $\Lambda_0 u \in X$

Montrons que $u\in D(\Lambda,X)$.

Il nous faut alors montrer que $u(0,.) = 0$ et que $u(.,0) = 0$.

Utilisons la formule d'intégration par parties

$$(Au,u) = \int_U \langle -\Lambda_0 u,u\rangle dtda = \frac{1}{2}\left[\|u(0,\cdot)\|^2_{L^2(Q\omega)} - \|u(T,\cdot)\|^2_{L^2(Q\omega)} + \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(QT)} - \|u(\cdot,\omega)\|^2_{L^2(QT)}\right]$$

Compte tenu de la <u>proposition 1.1</u> on doit avoir $(Au,u) \le 0$

Soit $u\in D(A)$, considérons la fonction φ définie presque partout par

$\varphi(t,a) = \phi_l(t,a)\, u\,(t,a)$ où ϕ_l est la fonction définie dans le <u>lemme</u> 1.1

alors $\varphi(0,a) = u(0,a)\,\phi_l(0,a)$; $\varphi(T,a) = 0$; $\varphi(t,0) = u(t,0)\phi_l(t,0)$

et $\varphi(t,\omega) = 0$.

Comme $\phi_l\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ alors $\phi_l\in D(A)$.

Ainsi

$$(A\varphi,\varphi) = \int_U -\Lambda_0\varphi\cdot\varphi dtda$$

$$= +\frac{1}{2}\|u(0,\cdot)\phi_l(0,.)\|^2_{L^2(Q\omega)} + \frac{1}{2}\|u(\cdot,0)\phi_l(0,.)\|^2_{L^2(QT)} \le 0$$

Ainsi on $u(0,a)\ \phi_1(0,a)=0$ et $u(t,0)\phi_1(t,0)=0$, or $\phi_1(t,0)>0$ *et* $\phi_1(0,a)>0$

alors $u(o,.)=0$ et $u(.,0)=0$. Et par suite $u \in D(\Lambda,X)$

Montrons maintenant pour terminer que $D(\Lambda\ ;\ X) \subset D(A)$.

Soit $u \in D(\Lambda\ ;\ X)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(U)$

Considérons la fonction

$\eta(s) = (G(s)u)(\varphi)$

$$\eta\frac{(s+h)-\eta(s)}{h} = \frac{G(s+h)u-G(s)u}{h}(\varphi)$$

$$= \int_U \frac{G(s+h)u-G(s)u}{h}\varphi\, dtda$$

$$= \int_U \frac{G(s+h)u}{h}\varphi\,(t,a)dtda - \int_U \frac{G(s)u}{h}\varphi dtda$$

$$\int_U \frac{G(s+h)u}{h}\varphi\,(t,a)dta = \frac{1}{h}\int_{[s+h,T]\times[s+h,\omega]} u(t-s-h,a-s-h)\varphi(t,a)dtda$$

$$= \frac{1}{h}\int_{[s,T]\times[s,\omega]} u(t-s,a-s)\varphi(t+h,a+h)dtda \quad .$$

Par conséquent

$$\frac{\eta(s+h)-\eta(s)}{h} = \int_{[s,T]\times[s,\omega]} u(t-s,a-s)\frac{\varphi(t+h,a+h)-\varphi(t,a)}{h}dtda \quad .$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{\eta(s+h)-\eta(s)}{h} = \int_{[s,T]\times[s,\omega]} u(t-s,a-s)\Lambda_0\varphi(t,a)dtda$

$$= \int_U u(t,a)\Lambda_0\varphi(t+s,a+s)dtda$$

$$= -\int_{[s,T]\times[s,\omega]} \Lambda_0 u(t-s,a-s)\varphi(t,a)dtda \text{ car } \Lambda_0 u \in X$$

alors $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{\eta(s+h)-\eta(s)}{h} = -\int_U (G(s)\Lambda_0 u)(t,a)\varphi(t,a)dtda$

Ainsi $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{\eta(s+h)-\eta(s)}{h} = -(G(s)\Lambda_0 u)(\varphi)$

L'application s $\mapsto$ - $(G(s)\ \Lambda_0 u)(\varphi)$ étant continue de $\mathbb{R}^+$ dans X, on tire d'après la proposition 1.0 que η est continûment dérivable sur [0, +∞[et

$\eta'(s) = -\ (G(s)\ \Lambda_0 u)(\varphi)$. Alors $\eta(s)-\eta(0) = -\int_0^s G(\tau)\Lambda_0 u(\varphi)d\tau$.

i.e $(G(s)u-u)(\varphi) = \left(-\int_0^s G(\tau)\Lambda_0 u d\tau\right)(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U)$.

Puisque $\int_0^s (G(\tau)\Lambda_0 u)(\varphi)d\tau = \int_0^s \int_U (G(\tau)\Lambda_0 u)(t,a)dtdad\tau$

$$= \int_U \int_0^s G(\tau)\Lambda_0 u(t,a)\varphi(t,a)d\tau\ dtda$$

$$= \left(\int_0^s G(\tau)\Lambda_0 u d\tau\right)(\varphi)\ .$$

On a alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$:

$(G(s)u-u)\ (\varphi) = \left(\int_0^s G(\tau)\Lambda_0 u d\tau\right)(\varphi)$

$G(s)u-u = -\int_0^s G(\tau)\Lambda_0 u d\tau$ au sens de $\mathcal{D}'(U)$

Comme $G(s)u-u \in X$, alors $-\int_0^s G(\tau)\Lambda_0 u d\tau = G(s)u-u \in X$

On a alors :

$$\frac{G(s)u-u}{s} = \frac{1}{s}\int_0^s G(\tau)(-\Lambda_0 u)d\tau$$

D'où $\lim\limits_{s\to 0+} \frac{G(s)u-u}{s} = \lim\limits_{s\to 0+} \frac{1}{S}\int_0^s G(\tau)(-\Lambda_0 u)d\tau = -\Lambda_0 u$

$$= \Lambda_0 u \text{ dans X .}$$

Ainsi $u \in D(A)$ et $Au = \Lambda u$; et cela achève la preuve de la proposition 1.7. ♦

Pour la suite de ce paragraphe on fera les hypothèses suivantes :

(S1) : $\bar{\mu} = \mu + \lambda$ avec $\mu \in L^\infty(Q)$ et $\lambda > 0$

(S2) : $f \in L^2\ (U;H)$

(S3) : $v \in L^2\ (\Sigma)$

Introduisons la forme bilinéaire définie pour presque tout $(t,a) \in$ U par

$B(t,a,\varphi,\phi) = \int_\Omega [\nabla\varphi\nabla\phi+(\mu+\lambda)\varphi\phi]dx$ où ∇ désigne le gradient par rapport à x .

Il est clair que pour presque tout $(t,a) \in$ U

- $|B(t,a,\varphi,\phi)| \leq (1+\mu_\infty+\lambda)\|\varphi\|_V\|\phi\|_V$
- $B(t,a\varphi,\varphi) \geq Inf(1,\lambda)\|\varphi\|_V^2$

il existe alors $A(t,a) \in$V' pour presque tout $(t,a) \in$U

tel que $B(t,a,\varphi,\phi)=\langle A(t,a)\varphi,\phi\rangle_{V',V}$.

On veut résoudre $A(t,a)\ u - \Lambda u = f$.

Avec $f = f_0 + \eta_v$ où $f_0 \in \mathcal{D}$(Q) et $\eta_v : \begin{array}{l} L^2(U;V)\mapsto R \\ \varphi\mapsto \int v(t,a,\sigma)\varphi_\Gamma(t,a,\sigma)dtdad\sigma \end{array}$

Il est clair que $f \in$L^2(U ; V')

Montrons que pour l'opérateur M défini par :

$\varphi\in$L^2(U ;V) et $M\varphi$ est la fonction « $(t,a) \mapsto A(t,a)\ \varphi\ (t,a)$ pp dans U »

on a :

<u>*Lemme 1.4*</u> :

Pour tout $\varphi\in L^2(U\,;V)$, $M\varphi\in L^2(U;V')$ et l'on a $\langle M\varphi,\varphi\rangle_{L^2(U,V'),L^2(U,V)}\geq(Inf(1,\lambda))\|\varphi\|^2_{L^2(U,V)}$.

<u>Preuve du lemme 1.4</u>

En effet :

Considérons la forme bilinéaire continue sur L^2(U ;V) $\times$L^2(U,V)

$\int_U B(t,a,\varphi(t,a),\phi(t,a))dtda$.

On a : $\left|\int_U B(t,a,\varphi(t,a),\phi(t,a))dtda\right| \leq Mes\,U \times c\|\varphi\|_{L^2(U,V)}\|\phi\|_{L^2(U,V)}$.

Alors $\phi\mapsto\int_U B(t,a,\varphi(t,a),\phi(t,a))dtda$ est continue sur L^2 (U ;V).

Il existe alors $\tilde{M} \in \mathcal{L}\,(L^2(U;V),L^2(U;V'))$ telle que

$$\int_U B(t,a,\varphi(t,a),\phi(t,a))dtda = \langle \hat{M}\varphi,\phi\rangle \quad \hat{M}\varphi \in L^2(U;V')$$

$$= \int_U \langle \hat{M}\varphi(t,a),\phi(t,a)\rangle_{V'V} dtda$$

donc $\hat{M}\varphi(t,a) = M\varphi(t,a)$ pp dans U.

Ainsi $M \in \mathcal{L}(L^2(U;V);L^2(U;V'))$

Et l'on a

$$\langle M\varphi,\varphi\rangle_{L^2(U,V'),L^2(U,V)} = \int_U B(t,a,\varphi(t,a),\varphi(t,a))dtda$$

$$\geq (\mathrm{Inf}(1,\lambda))\|\varphi\|^2_{L^2(U,V)} \quad .$$

Théorème 1.2

Le problème (P_0) admet une solution unique

Preuve du théorème 1.2

L'opérateur $\Lambda = -\Lambda_0$ est générateur infinitesimal d'un semi-groupe *$(G(s))s \geq 0$* de classe C^0, avec $\|G(s)\|_{\mathcal{L}(L^2(U;H))} \leq 1$.

L'opérateur $M \in \mathcal{L}(L^2(U,V);L^2(U,V'))$ est telle que $\langle M\varphi,\varphi\rangle \geq c\|\varphi\|^2_{L^2(U;V)}$

Alors du théorème 1.0 on tire que $M - \Lambda$ est un isomorphisme de $L^2(U;V) \cap D(\Lambda;L^2(U;V'))$ dans $L^2(U;V')$ i.e pour $f \in L^2(U;V')$ il existe $y \in L^2(U;V') \cap D(\Lambda;L^2(U;V'))$ tel que $My - \Lambda y = f$, y est également unique.

On a donc : comme $y \in D(\Lambda;L^2(U;V'))$, $y(0,.) = 0$ et $y(.,0) = 0$

Et pour presque tout $(t,a) \in U$, $A(t,a)y(t,a) + \Lambda_0 y(t,a) = f(t,a)$

Alors pour tout $z \in V$;

$$\langle A(t,a))y,z\rangle_{V'V} + \langle \Lambda_0 y,z\rangle_{V'V} = \int_\Omega f_0 z\,dx + \int_\Gamma v(t,a)z_{|\Gamma}(t,a)d\sigma$$

i.e $\langle \Lambda_0 y,z\rangle_{V'V} + \int_\Omega [\nabla y\nabla z + (\mu+\lambda)yz]dx = \int_\Omega zf_0dx + \int v(t,a)z_{|\Gamma}(t,a)d\sigma$

y est donc solution de (P_0)

Remarques 1.3:

La relation formelle $\frac{\partial y}{\partial n}=v$ sur $\sum$ est contenue dans l'expression (3)

En prenant z dans $\mathcal{D}(U) \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ et en intégrant (3) on prouve que

$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+(u+\lambda)y=f_0$ au sens des distributions sur Q lorsque

$f_0 \in L^2(Q)$.

Nous allons déduire de l'existence de solution du problème (P_0) l'existence de solution pour un autre problème auxiliaire.

On considère maintenant le système

$$
(P_1)\begin{cases}
\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+(\mu+\lambda)y=0 & dans Q\\
\frac{\partial y}{\partial n}=v & sur \Sigma\\
y(0,a,x)=y_0 & dans \quad Q_\omega\\
y(t,0,x)=y_1 & dans \quad Q_T
\end{cases}
$$

avec $y_0 \in L^2(Q_\omega)$ et $y_1 \in L^2(Q_T)$.

On a le résultat d'ordre général suivant :

- ***Proposition 1.8***

  Pour tout $y_0 \in L^2(Q\omega)$ et $y_1 \in L^2(Q_T)$, il existe

  $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\overline{Q})$ telle que $\varphi_n(0,.) \to y_0$ dans $L^2(Q\omega)$

  $\varphi_n(.\,,0) \to y_1$ dans $L^2(Q_T)$ et $\frac{\partial \varphi_n}{\partial n}=0$ sur Σ

Preuve de la proposition 1.8

Comme $\mathcal{D}(Q_\omega)$ est dense $L^2(Q_\omega)$, alors il existe $(u_n) \subset \mathcal{D}(Q_\omega)$ telle que $u_n \to y_0$ dans $L^2(Q_\omega)$

De même il existe $(\omega_n) \subset \mathcal{D}(Q_T)$ telle que $\omega_n \to y_1$ dans $L^2(Q_T)$.

Il existe $\alpha_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\alpha_1 = 1$ sur $[0, T]$

De même il existe $\alpha_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\alpha_2 = 1$ sur $[0, \omega]$

Posons $\tilde{\varphi}_n(t,a,x) = \alpha_1(t)u_n(a,x) + \alpha_2(a)\omega_n(t,x)$

On remarque que : si $x \notin \Omega$, $\tilde{\varphi}_n(t,a,x) = 0$.

Posons $\varphi_n = \tilde{\varphi}_{n|\overline{Q}}$, alors $\varphi_n(0,.\,.) = u_n$, $\varphi_n(.,0,.) = \omega_n$

De plus $\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0$ puisque $(u_n) \subset \mathcal{D}(Q\omega)$ et $(\omega_n) \subset \mathcal{D}(Q_T)$.

<u>Théorème 1.3</u>

Le problème (P_1) admet une solution unique y. De plus si $v \geq 0$ pp surΣ ; $y_0 \geq 0$ pp dans $Q\omega$ et $y_1 \geq 0$ pp dans Q_T, alors $y \geq 0$ pp dans Q .

<u>Démonstration du théorème</u> 1.3

Posons $f_0 = -\Lambda_0 \varphi_n + \Delta\varphi_n - (\mu + \lambda)\varphi_n$,

Alors d'après le <u>théorème 1.2</u> il existe $z_n \in L^2(U ; V)$ solution de (P_0) .

On peut écrire formellement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_n}{\partial t} + \dfrac{\partial z_n}{\partial a} - \Delta z_n + (\mu + \lambda)z_n = f_0 & dans Q \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial n} = v & dans \Sigma \\ z_n(0,a,x) = 0 & dans Q_\omega \\ z_n(t,0,x) = 0 & dans Q_T \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(z_n+\varphi_n)+\frac{\partial}{\partial a}(z_n+\varphi_n)-\Delta(z_n+\varphi_n)+(\mu+\lambda)(z_n+\varphi_n)=0 dans Q \\ \frac{\partial}{\partial n}(z_n+\varphi_n)=v & sur \Sigma \\ (z_n+\varphi_n)(0,a,x)=\varphi_n(0,a,x) & dans Q_\omega \\ (z_n+\varphi_n)(t,0,x)=\varphi_n(t,0,x) & dans Q_l \end{cases}$$

Posons $y_n = z_n + \varphi_n$, alors

$$\begin{cases} \Lambda_0 y_n-\Delta y_n+(\mu+\lambda)y_n=0 dans Q \\ \frac{\partial}{\partial n}y_n=v & sur \Sigma \\ y_n(0,a,x)=\varphi_n(0,a,x) & dans Q_\omega \\ y_n(t,0,x)=\varphi_n(t,0,x) & dans Q_T \end{cases}$$

i.e $\langle \Lambda_0 y_n, z\rangle_{l',l} + \int_\Omega[\nabla y_n \nabla z+(\mu+\lambda)y_n z]dQ=\int v(t,a)z_{|\Gamma} d\sigma$

$y_n\,(0,a,x) = \varphi_n(0,a,x)$

$y_n\,(t, 0,x) = \varphi_n(t,0,x)$.

Alors pour z $\in L^2(U;V)$ on a :

(R$_1$) $\int_I\langle \Lambda_0 y_n, z(t,a)\rangle dtda+\int_Q[\nabla y_n \nabla z+(\mu+\lambda)y_n z]dtdadx=\int_\Sigma v(t,a)z_{|\Gamma} dtdad\sigma$

Utilisons l'inégalité de Young

Alors pour tout $\alpha > 0$

$\int_\Sigma v(t,a)z_{|\Gamma} d\Sigma \leq \alpha\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}+\frac{1}{2\alpha}\|z_{|\Gamma}\|^2_{L^2(\Sigma)}$

L'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ étant continue, il existe alors c tel que

$\|z_{|\Gamma}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leq c\|z\|^2_{L^2(U;V)}$. On peut donc choisir $\alpha > 0$ tel que $\frac{c}{2\alpha}=\frac{\lambda_0}{2}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Inf}\,(1,\lambda)$.

Il existe donc $k_0 > 0$ tel que (R$_2$) $\int_\Sigma v(t,a)z_{|\Gamma} d\Sigma \leq k_0\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}+\frac{\lambda_0}{2}\|z\|^2_{L^2(U;V)}$

En prenant $z = y_n$ dans (R$_1$) et en utilisant la formule d'intégration par parties on arrive à

(R$_3$) $\frac{1}{2}\int_{Q\omega}[y_n^2(T,a,x)-y_n(0,a,x)]dadx+\frac{1}{2}\int_{QT}[y_n^2(t,\omega,x)-y_n^2(t,0,x)]dtdx+$

$$+\int_Q\left[(\nabla y_n)^2+(\mu+\lambda)y_n^2\right]dQ=\int_\Sigma v y_{n\Sigma} d\Sigma$$

Ce qui nous donne en utilisant (R_2)

$$\int_Q\left[(\nabla y_n)^2+(\mu+\lambda)y_n^2\right]dQ\leq k_0\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}+\frac{\lambda_0}{2}\|y_n\|^2_{L^2(U;V)}+\frac{1}{2}\left[\|\varphi_n(0,\cdot)\|^2_{L^2(Q\omega)}+\|\varphi_n(\cdot,0)\|^2_{L^2(QT)}\right]$$

On tire alors que (y_n) est bornée dans $L^2(U;V)$.

On peut alors extraire une sous suite notée encore (y_n) tel que $y_n \rightharpoonup \bar{y}$ dans $L^2(U;V)$

Montrons que $(\Lambda_0 y_n)$ est bornée dans $L^2(U;V')$

Soit $\phi\in V$, pour presque tout $(t,a)\in U$

$$\langle \Lambda_0 y_n(t,a),\phi\rangle=-\int_\Omega(\nabla y_n\nabla\phi+(\mu+\lambda)y_n\phi)dQ+\int v\phi_\Sigma\, d\Sigma$$

d'où $\|\Lambda_0 y_n(t,a)\|_{V'}\leq\left[(\mu_\infty+\lambda+1)\|y_n(t,a)\|_V+c\|v(t,a)\|\right]\|\phi\|_V$

Alors il existe M_0 tel que $\|\Lambda_0 y_n\|^2_{L^2(U,V')}=\int_U\|\Lambda_0 y_n(t,a)\|^2_{V'}dtda\leq M_0$ car (y_n) bornée dans $L^2(U;V)$.

On peut aussi en extraire une sous-suite notée toujours $(\Lambda_0 y_n)$ telle que $\Lambda_0 y_n \rightharpoonup j$ dans $L^2(U;V')$.

Soit $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ et $\psi\in H^1(\Omega)$

$$\int_U\langle\Lambda_0 y_n,\varphi\otimes\psi\rangle dU\to\int_U\langle j,\varphi\otimes\psi\rangle dU$$

$$=\int_U\langle j,\psi\rangle\varphi dU$$

d'autre part

$\int_U\langle\Lambda_0 y_n,\varphi\otimes\psi\rangle dU=\int_U\langle\Lambda_0 y_n,\psi\rangle\varphi dU=-\int_U(y_n,\psi)\Lambda_0\varphi dU$ cf proposition 1.6

alors $\int_U(y_n,\psi)\Lambda_0\varphi dU \quad =\int_U(y_n,\psi\Lambda_0\varphi)dU$,

donc $\int_U(y_n,\psi)\Lambda_0\varphi dU \quad\to\quad \int_U(\bar{y},\psi)\Lambda_0\varphi dU=\int_Q(\bar{y},\psi\Lambda_0\varphi)dU$.

Ainsi $\int_U\langle\Lambda_0 y_n,\varphi\otimes\psi\rangle dU \quad\to\quad \int_U\langle\Lambda_0\bar{y},\varphi\otimes\psi\rangle dU$, et alors $j=\Lambda_0\bar{y}$

Par suite en passant à la limite dans (R_1) on trouve

$$\int_U\langle\Lambda_0\bar{y},z\rangle dtda+\int_Q\left[\nabla\bar{y}\nabla z+(\mu+\lambda)\bar{y}z\right]dtdadx=\int_\Sigma vz_\Sigma d\Sigma\ .$$

Alors :

$$\langle \Lambda_0 \bar{y}, z\rangle + \int_\Omega (\nabla \bar{y} \nabla z + (\mu+\lambda) z)dx = \int_\Gamma v z_{|\Gamma} d\Gamma \quad \text{pour tout } z \in H^1(\Omega)$$

Enfin grâce à la continuité des applications traces pour les topologie faibles (cf. Proposition 1.5)

on a $y_n(0,.,.) \rightharpoonup y_0$ dans $L^2(Q_\omega)$ et $y_n(0,.,.) \to \bar{y}(0,.,.)$ dans $L^2(Q_\omega)$.

Par conséquent $\bar{y}(0,.,.) = y_0$ pp dans Q_ω

De manière analogue on montre $\bar{y}(.,0,.) = y_1$ pp dans Q_T .

Montrons maintenant l'unicité de $\bar{y}$

Soit $\bar{y}$ et $\hat{y}$ deux telles solutions alors $\tilde{y} = \bar{y} - \hat{y}$ est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial a} - \Delta \tilde{y} + (\mu+\lambda)\tilde{y} = 0 & dans\, Q \\ \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial n} = 0 & sur\, \Sigma \\ \tilde{y}(0,a,x) = 0 & dans\, Q_\omega \\ \tilde{y}(t,0,x) = 0 & dans\, Q_l \end{cases}$$

Prenons $\tilde{y} = y_n$ dans (R_2) on aura

$$\frac{1}{2}\int_{Q_\omega} \tilde{y}^2(T,a,x)dadx + \frac{1}{2}\int_{Q_T} \tilde{y}^2(t,\omega,x)dtdx + \int_Q \left[(\nabla \tilde{y})^2 + (\mu+\lambda)\tilde{y}^2\right]dQ = 0$$

d'où $\lambda \|\tilde{y}\|^2_{L^2(Q)} = 0$ et alors $\tilde{y} = 0$ pp dans Q.

On a donc $\bar{y} = \hat{y}$ d'où l'unicité

La question qui nous reste à examiner est la positivité de $\bar{y}$.

On aura alors besoin du lemme suivant :

Lemme 1.5

On suppose que Ω est un ouvert de R^N de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ variété différentiable de classe C^∞ et que Ω est localement d'un seul côté de Γ

Soit $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ l'application trace

$$u \mapsto u_{/\Gamma}$$

Si $\varphi \in H^1(\Omega)$ avec $\varphi(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in \Omega$

Alors $\gamma_0(\varphi)(\sigma) \geq 0$ pour presque tout $\sigma \in \Gamma$

Preuve du lemme 1.5

* Remarquons d'abord que si $v_n \to v$ dans $L^2(\Gamma)$ et si $v_n \geq 0$ pp sur Γ, alors $v \geq 0$ pp sur Γ

En effet $v_n - v = (v_n - v^+) + v^-$ alors

$(v_n - v)^2 = (v_n - v^+)^2 + v^{-2} + 2\, v_n v^- \geq (v_n - v^+)^2$ pp sur Γ

alors $\|v_n - v^+\| \leq \|v_n - v\|$ d'où $v_n \to v^+$ dans $L^2(\Gamma)$ et donc $v = v^+$ pp Γ

**Remarquons aussi que pour $\varphi \in H^1(\Omega)$, par régularisation et troncature on peut construire une suite $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\phi_{n|\bar{\Omega}} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$; $\phi_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $\phi_{n|\Omega} \to \varphi$ dans $H^1(\Omega)$ cf [6]ainsi par définition de γ_0

on a : $\gamma_0(\varphi) = \lim\limits_{n \to +\infty} \gamma_0\left(\phi_{n|\bar{\Omega}}\right)$ or $\gamma_0(\phi_{n|\bar{\Omega}})(\sigma) \geq 0$ pp sur Γ alors d'après

* $\gamma_0(\varphi) \geq 0$ pp sur Γ.

On a besoin également du lemme.

lemme 1.6 [19]

Soit $u \in L^2(U\,;V)$ telle que $\Lambda_0 u \in L^2(U\,;V')$

Alors

$$\int_U \left\langle \Lambda_0 u, u^- \right\rangle dU = -\frac{1}{2}\int_{Q_\omega} \left((u^-)^2(T,a,x) - (u^-)^2(0,a,x)\right) da\,dx +$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{Q_T} \left[(u^-)^2(t,\omega,x) - (u^-)^2(t,0,x)\right] dt\,dx$$

Preuve du lemme 1.6

$\mathcal{D}(\bar{U}\,;V) \subset H^1(Q) \subset W(U\,;V)$, comme $\mathcal{D}(\bar{U}\,;V)$ est dense dans $W(U\,;V)$, alors $H^1(Q)$ est dense dans $L^2(U\,;V)$.

Soit $u \in H^1(Q)$ alors $u^+ = \max(u, 0)$ et $u^- = \max(-u, 0)$ appartiennent

à $H^1(Q)$ et on a : $\frac{\partial u^+}{\partial xi} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial xi} & \text{pp dans } Q_+ \\ 0 & \text{pp dans } Q_- \end{cases}$

où $\quad Q_+ = \{x \in Q; u(x) \geq 0\}$, $\quad Q_- = \{x \in Q, u(x) \leq 0\}$

alors $\frac{\partial u^+}{\partial xi}$ et $\frac{\partial u-}{\partial xi}$ appartiennent à $L^2(Q)$ et donc $\Lambda_0 u = \Lambda_0 u^+ - \Lambda_0 u^-$,

avec $\Lambda_0 u^+ \in L^2(Q)$ et $\Lambda_0 u^- \in L^2(Q)$ •

On peut alors définir les traces en $t = t_0$ ou en $a = a_0$ des fonctions u^+ et u^-

$$\langle \Lambda_0 u, u^- \rangle = \langle \Lambda_0 u^+, u^- \rangle - \langle \Lambda_0 u^-, u^- \rangle \; ; \quad \langle \Lambda_0 u^+(t,a)\, u^-(t,a) \rangle = 0$$

En appliquant alors la formule d'intégration par parties on aura :

$$\int_U \langle \Lambda_0 u, u^- \rangle dU = -\int_U \langle \Lambda_0 u^-, u^- \rangle dU$$

$$= -\frac{1}{2}\int_Q \left[(u^-)^2(t,\omega,x) - (u^-)^2(t,0,x)\right] dt dx - \frac{1}{2}\int_{Q\omega}\left[(u^-)^2(T,a,x) - (u^-)^2(0,a,x)\right] da dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left\|u^-(\cdot,\omega,\cdot)\right\|^2_{L^2(Q_T)} - \left\|u^-(\cdot,0,\cdot)\right\|^2_{L^2(Q_T)}\right] - \frac{1}{2}\left[\left\|u^-(T,\cdot,\cdot)\right\|^2_{L^2(Q\omega)} - \left\|u^-(0,\cdot,\cdot)\right\|^2_{L^2(Q_\omega)}\right] \quad \bullet$$

Soit $u \in W(U;V)$ alors il existe $(\varphi_n) \subset H^1(Q)$ telle que $\varphi_n \to u$ dans $W(U;V)$. Alors $\Lambda_0 \varphi_n \to \Lambda_0 u$.

$$\int_U \langle \Lambda_0 \varphi_n, \varphi_n^- \rangle dU = -\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi_n^-(\cdot,\omega,\cdot)\right\|^2 - \left\|\varphi_-^2(\cdot,0,\cdot)\right\|^2\right] - \frac{1}{2}\left[\left\|\varphi_n^-(T,\cdot,\cdot)\right\|^2 - \left\|\varphi_n^-(0,.,.)\right\|^2\right]$$

Comme $\quad \varphi_n(\cdot,\omega,\cdot) \to u(\cdot,\omega,\cdot)$ dans $L^2(Q_\omega)$ alors $\varphi_n^-(\cdot,\omega,\cdot) \to u^-(\cdot,\omega,\cdot)$ dans $L^2(Q_\omega)$

De même $\quad \varphi_n^-(\cdot,0,\cdot) \to u^-(\cdot,0,\cdot)$ $\varphi_n^-(T,\cdot,\cdot) \to u^-(T,\cdot,\cdot)$ et $\varphi_n^-(0,\cdot,\cdot) \to u^-(0,\cdot,\cdot)$

$$\text{alors } \lim_{n\to\infty}\int_U \langle \Lambda_0 \varphi_n, \varphi_n^- \rangle dU = -\frac{1}{2}\left[\left\|u^-(\cdot,\omega)\right\|^2 - \left\|u^-(\cdot,0,\cdot)\right\|^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left\|u^-(T,\cdot,\cdot)\right\|^2 - \left\|u^-(0,\cdot\cdot)\right\|\right]$$

De plus $\quad \langle \Lambda_0 \varphi_n, \varphi_n^- \rangle - \langle \Lambda_0 u, u^- \rangle = \langle \Lambda_0(\varphi_n - u), \varphi_n^- \rangle + \langle \Lambda_0 u, \varphi_n^- - u^- \rangle$

$$\left|\int_U \langle \Lambda_0(\varphi_n-u),\varphi_n^- \rangle dU\right| \leq \|\Lambda_0(\varphi_n-u)\|_{L^2(U,V')}\|\varphi_n^-\|_{L^2(U;V)}$$

$$\leq c\|\Lambda_0(\varphi_n-u)\|_{L^2(U,V')} \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty \quad \text{car}$$

(φ_n) est bornée .

de même on montre que $\int_U \langle \Lambda_0 u, \varphi_n^- - u^- \rangle dU \to 0 \quad quand\ n \to +\infty$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_U \langle \Lambda_0 \varphi_n, \varphi_n^- \rangle dU = \int_U \langle \Lambda_0 u, u^- \rangle dU$.

Cela achève la preuve du lemme 1.4 .

Suite de la démonstration du théorème 1.3

$y_0 \geq 0$ pp dans Q_ω alors $y_0^- = 0$, de même $y_1^- = 0$ pp dans Q_T

Par conséquent $\bar{y}^-(0,a,x) = y_0^-(a,x) = 0$ pour presque tout $(a,x) \in Q_\omega$ et $\bar{y}^-(t,0,x) = y_1^-(t,x) = 0$ pour presque tout (t, x) dans Q_T .

Alors d'après (R_1)

$$\int_U \langle \Lambda_0 \bar{y}, \bar{y}^- \rangle dU + \int_Q [(\nabla \bar{y})(\nabla \bar{y}) + (\mu+\lambda)\bar{y}y^-] dQ = \int_\Sigma v y_{|\Sigma}^- \, d\Sigma \quad .$$

Comme $y^- \geq 0$ pp dans Q alors $y_{|\Sigma}^- \geq 0$ pp sur Σ et donc $\int_\Sigma v y_{|\Sigma}^- \, d\Sigma \geq 0$

Ainsi grâce à la proposition 1.5 et au fait que $\nabla \bar{y} = \nabla \bar{y}^+ - \nabla \bar{y}^-$ et $(\nabla \bar{y}, \nabla y^-)_{L^2(\Omega)} = -(\nabla \bar{y}^-, \nabla \bar{y}^-)_{L^2(\Omega)}$ on a :

$$-\frac{1}{2}\left[\|y^-(T,\cdot\cdot)\|^2 - \|\bar{y}^-(0,\cdot\cdot)\|^2\right] - \frac{1}{2}\left[\|\bar{y}^-(\cdot,\omega,\cdot)\|^2 - \|\bar{y}^-(\cdot,0,\cdot)\|^2\right] +$$

$$-\|\nabla \bar{y}^-\|_{L^2(Q)}^2 - \int_Q (\mu+\lambda)(\bar{y}^-)^2 dQ \geq 0$$

Mais $y^-(\cdot,0,\cdot) = 0$ et $\bar{y}^-(0,\cdot\cdot) = 0$ pp dans Q_ω alors on tire que

$$-\int_Q (\mu+\lambda)(\bar{y}^-)^2 dQ \geq \frac{1}{2}\|\bar{y}^-(T,\cdot\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\bar{y}^-(\cdot,\omega)\|^2 \quad .$$

soit $\int_Q(\mu+\lambda)(\bar{y}_-)^2dQ\leq\frac{-1}{2}\|\bar{y}_-(T,\cdot)\|^2-\frac{1}{2}\|\bar{y}_-(\cdot\omega,\cdot)\|^2$ d'où

$$\lambda\|\bar{y}-\|^2_{L^2(Q)}\leq-\frac{1}{2}\|\bar{y}^-(T,\cdot)\|^2-\frac{1}{2}\|\bar{y}^-(\cdot,\omega,\cdot)\|^2\leq 0$$

alors $\|\bar{y}^-\|^2_{L^2(Q)}=0$ et donc $\bar{y}^-=0$ pp dans Q

Par suite $\bar{y}=\bar{y}^+$ pp dans Q et on a aussi $y^-(T,\cdot)=0$.

Nous pouvons maintenant étudier l'existence de solution pour le problème .

III – RESOLUTION DU PROBLEME

On considère le problème

$$(P)\begin{cases}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+\mu y=0 & \text{dans } Q\\ \frac{\partial y}{\partial n}=v & \text{sur } \Sigma\\ y(0,a,x)=y_0(a,x) & \text{dans } Q_\omega\\ y(t,0,x)=F\left(\int_0^\omega \beta y da\right) & \text{dans } Q_T\end{cases}$$

on a le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 1.4

Sous les hypothèses :

(H_1) Ω ouvert borné de R^N de frontière Γ variété de classe C^∞, étant localement d'un seul côté de Γ

(H_2) $y_0\in L^2(Q_\omega)$ et $y_0\geq 0$ pp dans Q_ω

(H_3) $v\in L^2(\Sigma)$ et $v\geq 0$ pp sur Σ

(H_4) $\mu, \beta\in L^\infty(Q)$, $\mu\geq 0$, $\beta\geq 0.$ pp dans Q_ω

(H_5) $F(\alpha) = \alpha\phi(\alpha)$ où ϕ est une fonction numérique positive, F lipschitzienne de rapport K_F

Le problème (P) admet une solution unique.

Pour la preuve du théorème on a besoin du

Lemme 1.7

Pour tout $z \in W(U;V)$, $\Lambda_0(e^{\lambda t}z) = \lambda(e^{\lambda t}z) + e^{\lambda t}\Lambda_0 z$

Preuve du lemme 1.7

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$

$$\begin{aligned}\Lambda_0(e^{\lambda t}z)(\varphi) &= -\int_U e^{\lambda t} z \Lambda_0 \varphi dU \\ &= -\int_U z\Lambda_0\left(e^{\lambda t}\varphi\right)dU + \int_U \lambda z e^{\lambda t}\varphi dU \\ &= \left(\lambda e^{\lambda t} z + e^{\lambda t}\Lambda_0 z\right)(\varphi)\end{aligned}$$

Remarque 1.4

Lorsque $z \in W(U;V)$, $\Lambda_0 z \in L^2(U;V')$ et donc

$e^{\lambda t}\Lambda_0 z \in L^2(U;V')$ alors on a

$$\left(e^{\lambda t}\Lambda_0 z\right)(\varphi) = \int_U e^{\lambda t}\langle\Lambda_0 z,\varphi\rangle dU = \int_U\langle\Lambda_0 z, e^{\lambda t}\varphi\rangle dU = \Lambda_0 z\left(e^{\lambda t}\varphi\right) \in V'$$

Preuve du théorème 1.4

Considérons une fonction $z \in L^2(Q)$ telle que $z \geq 0$ pp dans Q

Posons $y_1(t,x) = \left(\int_0^\omega \beta z da\right)\phi\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} z da\right)$

Alors il est clair que $y_1 \geq 0$ pp dans Q_T.

Montrons que $y_1 \in L^2(Q_T)$.

En effet $\quad y_1^2(t,x)=e^{-2\lambda t}\left[\left(\int_0^{\omega} e^{\lambda t} z\right)\phi\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t} zda\right)\right]^2$

F est lipschitzienne de rapport K_F et $F(0) = 0$ alors

$$\begin{aligned}
y_1^2(t,x) &\leq e^{-2\lambda t} K_F^2\left[\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t} zda\right]^2 \\
&\leq K_F^2\left[\int_0^{\omega}\beta zda\right]^2 \\
&\leq K_F^2\int_0^{\omega}\beta^2 da\int_0^{\omega} z^2 da \leq K_F\beta_\infty^2\omega\int_0^{\omega} z^2 da \text{ où } \beta_\infty=\|\beta\|_{L^\infty(Q)}
\end{aligned}$$

d'où $\int_{Q_T} y_1^2(t,x)dtdx \leq K_F^2\beta_\infty^2\omega\int_Q z^2 dadtdx$

$$\leq K_F^2\beta_\infty^2\omega\|z\|^2_{L^2(Q)}<+\infty$$

Par conséquent il existe $\bar{y}(z)$ solution du problème :

$$(P_2)\begin{cases}
\frac{\partial\bar{y}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{y}}{\partial a}-\Delta\bar{y}+(\mu+\lambda)\bar{y}=0 & dans\, Q\\
\frac{\partial\bar{y}}{\partial n}=\bar{v}=ve^{-\lambda t} & sur\,\Sigma\\
\bar{y}(0,a,x)=y_0(a,x) & dans\, Q_\omega\\
\bar{y}(t,0,x)=\left(\int_0^{\omega}\beta zda\right)\phi\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t} zda\right) & dans\, Q_T
\end{cases}$$

Alors pour tout $z\in L^2(Q)^+=\{\varphi\in L^2(Q)/\varphi\geq 0 \quad \text{pp dans } Q\}$, on peut associer $\bar{y}(z)$ solution de (P_2) et $\bar{y}(z)$ est unique .

Notons $G : L^2(Q)^+\to L^2(Q)^+$

$$z\mapsto\bar{y}(z)$$

Montrons que G est une application contractante pour certaines valeurs de λ

Soit $z_1,z_2\in L^2(Q)^+$, notons $\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$ les images de z_1 et z_2 par l'application G

Posons $\bar{y}=\bar{y}_1-\bar{y}_2$ alors $\bar{y}$ vérifie

$$\begin{cases}
\frac{\partial\bar{y}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{y}}{\partial a}-\Delta\bar{y}+(\mu+\lambda)\bar{y}=0 & dans\, Q\\
\frac{\partial\bar{y}}{\partial n}=0 & sur\,\Sigma\\
\bar{y}(0,a,x) & dans\, Q_T\\
\bar{y}(t,0,x)=\left(\int_0^{\omega}\beta z_1 da\right)\phi\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t} z_1 da\right)-\left(\int_0^{\omega}\beta z_2\right)\phi\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t} z_2 da\right) & dans\, Q_\omega
\end{cases}$$

Ainsi

$\bar{y}(t,0,x)=e^{-\lambda t}\left[F\left(\int_0^{\omega}\beta z_1\, e^{\lambda t}da\right)-F\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t}z_2\, da\right)\right]$ pp sur Q_T

On a $\int_U\langle\Lambda_0\bar{y},\bar{y}\rangle dU+\int_Q\left[(\nabla\bar{y})^2+(\mu+\lambda)(\bar{y})^2\right]dQ=0$ alors grâce à la formule d'intégration par parties :

$$\frac{1}{2}\int_{Q_T}\left[\bar{y}^2(t,\omega,x)-\bar{y}^2(t,0,x)\right]dtdx+\frac{1}{2}\int_{Q_T}\left[\bar{y}^2(T,a,x)-\bar{y}^2(0,a,x)\right]dadx+$$

$$+\int_Q\left[(\nabla\bar{y})^2+(\mu+\lambda)(y^2)\right]dQ=0$$

Or $\bar{y}(0,a,x)=0$ pp dans Q_ω.

Alors $\int_Q\left[(\nabla\bar{y})^2+(\mu+\lambda)(\bar{y})^2\right]dQ\leq\frac{1}{2}\|\bar{y}(\cdot,0,\cdot)\|^2_{L^2(Q_T)}$ on tire alors que

$$\begin{aligned}
\lambda\int_Q(\bar{y})^2dQ &\leq \frac{1}{2}\|\bar{y}(\cdot,0,\cdot)\|^2_{L^2(Q_T)}\\
\bar{y}^2(t,0,x) &= e^{-2\lambda t}\left[F\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t}z_1\,da\right)-F\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t}z_2 da\right)\right]^2\\
&\leq e^{-2\lambda t}K_F^2\left[\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t}(z_1-z_2)da\right]^2\\
&\leq K_F^2\left[\int_0^{2}\beta(z_1-z_2)da\right]^2\leq K_F^2\beta_\infty^2\omega\int_0^{\omega}(z_1-z_2)^2da
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{Q_T}\bar{y}^2(t,0,x)dtdx \leq K_F^2\beta_\infty^2\omega\int_Q(z_1-z_2)^2dtdadx.$$

Soit $\int_{Q_T}\bar{y}^2(t,0,x)dtdx\leq K_F^2\beta_\infty^2\omega\|z_1-z_2\|^2_{L^2(Q)}$.

Ainsi $\lambda\|\bar{y}\|^2_{L^2(Q)}\leq\frac{K_F^2}{2}\omega\beta_\infty^2\|z_1-z_2\|^2_{L^2(Q)}$

En prenant λ de telle sorte que $\lambda>\frac{K_F^2\beta_\infty^2\omega}{2}$ (R_4) G admettra un point fixe z qui vérifie alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial a}-\Delta z+(\mu+\lambda)z=0 & dans Q \\ \frac{\partial z}{\partial n}=v & sur \Sigma \\ z(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ z(t,0,x)=\left(\int_0^\omega \beta z da\right)\phi\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} z da\right) & dans Q_T \end{cases}$$

Posons $y=e^{\lambda t}z$ alors $y \geq 0$ pp dans Q et d'après le lemme 1.7 et la Remarque1.3

$\Lambda_0 y=\lambda y+e^{\lambda t}\Lambda_0 z$.

Alors pour tout $\varphi \in V$

$$\langle \Lambda_0 y,\varphi\rangle+\int_\Omega[\nabla y\nabla\varphi+\mu y\varphi]dx=\langle \lambda y+e^{\lambda t}\Lambda_0 z,\varphi\rangle+\int_\Omega\left[\nabla\left(e^{\lambda t}z\right)\nabla\varphi+\mu\left(e^{\lambda t}z\right)\varphi\right]dx$$

$$=\left\langle e^{\lambda t}\Lambda_0 z,\varphi\right\rangle+\int_\Omega\left[\nabla z\nabla\left(e^{\lambda t}\varphi\right)+(\mu+\lambda)z\left(e^{\lambda t}\varphi\right)\right]dx$$

$$=\left\langle \Lambda_0 z,e^{\lambda t}\varphi\right\rangle+\int_\Omega\left[\nabla z\nabla\left(e^{\lambda t}\varphi\right)+(\mu+\lambda)z\left(e^{\lambda t}\varphi\right)\right]dx$$

$$=\int \bar{v}\left(e^{\lambda t}\varphi\right)_\Gamma d\sigma=\int v e^{-\lambda t}e^{\lambda t}\varphi_\Gamma d\sigma$$

$$=\int_\Gamma v\varphi_{|\Gamma}d\sigma$$

Alors on a $\int_\Omega(\nabla y\nabla\varphi+\mu y\varphi)dx+\langle\Lambda_0 y,\varphi\rangle=\int_\Gamma v\varphi_{|\Gamma}d\sigma$

De plus $y(0,a,x)=e^0 z(0,a,x)=y_0(a,x)$ pp dans Q_ω

$$y(t,0,x)=e^{\lambda t}z(t,0,x)=e^{\lambda t}\int_0^\omega \beta z da\,\phi\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t}z da\right) \quad \text{pp dans } Q_T$$

$$=\left(\int_0^\omega \beta z e^{\lambda t}da\right)\phi\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t}z da\right) \quad \text{pp dans } Q_T$$

$$=\left(\int_0^\omega \beta y da\right)\phi\left(\int_0^\omega \beta y da\right) \quad \text{pp dans } Q_T$$

$$=F\left(\int_0^\omega \beta y da\right) \quad \text{pp dans } Q_T$$

Alors y est la solution de

$$
(P)\begin{cases}
\dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+\mu y=0 \, dans Q \\
\dfrac{\partial y}{\partial n}=v \qquad sur \Sigma \\
y(0,a,x)=y_0(a,x) \quad dans Q_\omega \\
y(t,0,x)=F\left(\int_0^\omega \beta y da\right) dans Q_T
\end{cases}
$$

Remarque1.5

Nous avons prouvé que toute fonction de W(U ;V) à un représentant dans C([0,T] ; $L^2(0,\omega ;H)) \cap$ C([0, ω] ; $L^2(0,T ;H)$) par conséquent on peut considérer y comme une fonction de C([0,T] ; $L^2(0,\omega ;H)) \cap$ C([0, ω] ; $L^2(0,T ;H)$) .

CHAPITRE II : PROBLEME DE CONTROLE

I – INTRODUCITON

Dans cette partie on recherche à contrôler la population, plus précisément on cherche à ramener la densité y aussi près que possible d'une densité désirée zd.

Rappelons que le contrôle v vérifie $v \geq 0$ pp dans $\sum$.

Cela peut s'expliquer par le fait que globalement on laisse sortir les individus de la population à travers la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω.

Dans une première partie, on va étudier le cas où le système est linéaire. On étudiera l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal v à l'aide des résultats classiques du contrôle optimal.

Dans la deuxième partie le problème sera supposé non-linéaire et on étudiera la question d'existence de contrôles optimaux et des conditions d'optimalité.

Comme on veut rapprocher la densité y d'une densité dérive z_d, notre fonction coût sera donnée par

$$J(v) = \|y(v) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(\Sigma)} \quad \text{avec} \quad N > 0 \quad \text{où}$$

$$v \in L^2(\sum)_+ = \{\varphi \in L^2(\sum), \varphi \geq 0 \quad \text{pp sur} \sum\}$$

II – EXISTENCE ET UNICITE DU CONTROLE OPTIMAL POUR LE CAS LINEAIRE

1. Continuité de la solution de (P) par rapport au contrôle.

Le résultat suivant , est valable aussi bien pour le cas linéaire que pour le cas non linéaire

Proposition 2.1 :

L'application $v \mapsto y(v)$ *est lipschitzienne de* $L^2(\Sigma)$ *dans* $L^2(U;V)$.

Preuve de la proposition 2.1

Soit $v_1, v_2 \in L^2(\Sigma)$, $v_1 \geq 0$ et $v_2 \geq 0$ pp sur Σ

Notons z_i pour i = 1 où 2, la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_i}{\partial t}+\dfrac{\partial z_i}{\partial a}-\Delta z_i+(\mu+\lambda)z_i=0 & dans Q \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial n}=\bar{v} & sur \Sigma \\ z_i(t,0,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ z_i(t,0,x)=\left(\int_0^\omega \beta\, z_i\, da\right)\phi\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} z_i\, da\right) & dans Q_T \end{cases}$$

Posons $z=z_1-z_2$ alors z vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial a}-\Delta z+(\mu+\lambda)z=0 & dans Q \\ \dfrac{\partial z}{\partial n}=\bar{v}_1-\bar{v}_2 & sur \Sigma \\ z(0,a,x)=0 & dans Q_\omega \\ z(t,0,x)=e^{-\lambda t}\left[F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} z_1\, da\right)-F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} z_2\, da\right)\right] & dans Q_T \end{cases}$$

En utilisant une méthode analogue à celle utilisée pour prouver l'unicité de $\bar{y}$ on obtient

$$\frac{1}{2}\|z(T)\|^2_{L^2(Q_\omega)}+\frac{1}{2}\|z(\omega)\|^2_{L^2(Q_T)}+\|\nabla z\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\sqrt{\mu+\lambda}\, z\right\|^2_{L^2(Q_T)}+$$

$$-\frac{1}{2}\left\|e^{-\lambda t}\left[F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} z_1\, da\right)-F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} z_2\, da\right)\right]\right\|^2 \leq K_F^2\beta_\infty^2\omega\|z_1-z_2\|^2_{L^2(Q)} .$$

On a déjà vu que

$$\left\|e^{-\lambda t}\left[F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} z_1 da\right)-F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} z_2 da\right)\right]\right\|^2 \leq K_F^2\beta_\infty^2\omega\|z_1-z_2\|^2_{L^2(Q)}$$

alors

$$\|\nabla z\|^2_{L^2(Q)}+\lambda\|z\|^2_{L^2(Q)}-\frac{K_F^2\beta_\infty^2\omega}{2}\|z\|^2_{L^2(Q)} \leq \int_\Sigma(\bar{v}_1-\bar{v}_2)z_{|\Sigma}\,d\Sigma$$

il existe $k_1 > 0$ tel que $\int_\Sigma(\bar{v}_1-\bar{v}_2)z_{|\Sigma}\,d\Sigma \leq k_1\|\bar{v}_1-\bar{v}_2\|^2+\frac{1}{2}\|z\|^2_{L^2(U;V)}$

choisissons $\lambda=\dfrac{K_F^2\beta_\infty^2\omega}{2}+1$, alors λ vérifie d'une part (R_4) et on obtient

$$\|\nabla z\|^2+\|z\|^2_{L^2(Q)}\leq k_1\|\bar{v}_1-\bar{v}_2\|^2_{L^2(\Sigma)}+\frac{1}{2}\|z\|^2_{L^2(U,V)}$$

alors $\frac{1}{2}\|z\|^2_{L^2(U,V)}\leq k_1\|\bar{v}_1-\bar{v}_2\|^2_{L^2(\Sigma)}$ •

Ce qui nous donne $\|z\|^2_{L^2(U;V)}\leq c\|\bar{v}_1-\bar{v}_2\|_{L^2(\Sigma)}$

Grâce à (R_4) les fonctions $y_1=e^{\lambda t}z_1$ et $e^{\lambda t}z_2=y_2$ sont les solutions de (P) pour $v=v_1$ et $v=v_2$ respectivement alors $y=y_1-y_2$ vérifie

$$\|y\|^2_{L^2(U;V)}=\left\|e^{\lambda t}(z_1-z_2)\right\|^2_{L^2(U;V)}\leq e^{2\lambda T}\|z_1-z_2\|^2_{L^2(U,V)}$$

$$\leq e^{2\lambda T}C\|\bar{v}_1-\bar{v}_2\|^2_{L^2(\Sigma)}\leq K\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Sigma)}$$

alors $\|y\|^2_{L^2(U,V)}\leq K\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Sigma)}$ ce qui achève la preuve de la proposition 2.1 .

2 Existence de la solution pour le cas linéaire

Le système linéaire donné par :

$$(P_3)\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+\mu y=0 \text{ dans } Q\\ \dfrac{\partial y}{\partial n}=v \quad \text{ sur } \Sigma\\ y(0,a,x)=y_0(a,x) \quad \text{ dans } Q\\ y(t,0,x)=K\displaystyle\int_0^{\omega}\beta y\,da \quad \text{ dans } Q\end{cases}$$

admet une solution unique pour tout $v\in L^2(\Sigma)_+$ cf chapitre 1 .

3. Contrôle optimal

Remarquons également que l'application $v\mapsto y(v)$ est affine. En effet il suffit de voir que $v\mapsto y(v)-y(0)$ est linéaire. Mais $y(v)-y(0)$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial a}-\Delta z+\mu z=0 & dans Q \\ \frac{\partial z}{\partial n}=v & sur\ \Sigma \\ z(0,a,x)=0 & dans Q_\omega \\ z(t,0,x)=K\int_0^\omega \beta z da & dans Q_T \end{cases}$$

Il est clair que le système ci-dessus est linéaire par rapport à v.

De plus comme $v\mapsto y(v)$ est affine, on peut écrire que

$y(v)=y(0)+Bv$ où $B\in\mathcal{L}(L^2(\Sigma),L^2(Q))$

Pour la suite on pose $U_{ad}=L^2(\Sigma)_+$, $U_0=L^2(\Sigma)$ et on cherche

$u\in U_{ad}$ tel que $J(u)=\underset{v\in Uad}{Inf}J(v)$.

On note (G_0) le problème trouver $u\in U_{ad}$ tel que $J(u)=\underset{v\in Uad}{Inf}J(v)$.

On a $J(v)=(y(v)-z_d,y(v)-z_d)_H+N(v,v)$

Alors $J(v) = (y(v)-y(0)+y(0)-z_d,y(v)-y(0)+y(0)-z_d)+N(v,v)$

$= (Bv,Bv)+2(Bv,y(0)-z_d)+\|y(0)-z_d\|^2+N(v,v)$

Posons $\pi(u,v)=(Bu,Bv)+N(u,v)$ et $L(v) = -(Bv,y(0)-z_d)_{L^2(Q)}$

alors $J(v) =\pi(v,v)-2L(v)+\|y(0)-z_d\|^2_{L^2(Q)}$.

Théorème 2.1 :

On suppose que $N(v,v)\geq\alpha\|v\|^2$, *avec* $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. *Alors le problème* (G_0) *admet une unique solution u caractérisée par* $\pi(u,v-u)\geq L(v-u)$, $\forall v\in U_{ad}$

Preuve du théorème 2.1

- Existence

Il est clair, que d'une part π est une forme bilinéaire continue, symétrique sur

$U_0 \times U_0$ d'autre part L est une forme linéaire continue sur U_0.

De plus π est coercive car $\pi(v,v)=(Bv,v)+N(v,v)\geq\alpha\|v\|^2$.

Par conséquent d'après les résultats classiques de la théorie du contrôle optimal, il existe un unique $u\in U_{ad}$ fermé tel que $J_0(u)=\pi(u,u)-2L(u)=\underset{v\in U_{ad}}{Inf}J_0(v)$.

Alors u vérifie $J(u)=\underset{v\in U_{ad}}{Inf}J(v)$.

De plus comme u minimise $J_0(v)=\pi(v,v)-2L(v)$.

On a aussi la caractérisation cf [21], $\pi(u,v-u)\geq L(v,u)\forall v\in U_{ad}$.

Donnons maintenant une méthode de détermination du contrôle optimal .

On a le théorème suivant :

Théorème 2.2.

On suppose que les hypothèses H_1, H_2 H_4, H_5 du Théorème 1.4.sont réalisées

On suppose également qu'il existe $\alpha>0$ tel que $N(v,v)\geq\alpha\|v\|^2\forall v\in U_0$.

Alors le contrôle optimal u est caractérisé par les deux systèmes d'équations et le système d'inéquations suivants.

$$I\begin{cases}\dfrac{\partial y(u)}{\partial t}+\dfrac{\partial y(u)}{\partial a}-\Delta y(u)+\mu y(u)=0\, dans\, Q\\ \dfrac{\partial y(u)}{\partial n}=u & sur\ \Sigma\\ y(u)(0,a,x)=y_0(a,x) & dans\, Q_\omega\\ y(u)(t,0,x)=K\int_0^\omega \beta y(u)da & dans\, Q_T\end{cases}$$

$$II\begin{cases}-\dfrac{\partial p(u)}{\partial t}-\dfrac{\partial p(u)}{\partial a}-\Delta p(u)+\mu p(u)=y(u)-z_d\, dans\, Q\\ \dfrac{\partial p(u)}{\partial n}=0 & sur\Sigma\\ p(u)(T,a,x)=0 & dans\, Q_\omega\\ p(u)(t,\omega,x)=0 & dans\, Q_T\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(K\Lambda_{U_0}^{-1}B\cdot(\beta p(u))(\cdot,0,\cdot)\right)+p((u)_\Sigma+Nu;v-u)_u\geq 0\ \forall v\in U_{ad}\\ u\in U_{ad} \qquad \text{où } \Lambda_{U_0}\text{est l'isomorphisme canonique de } U_0 \text{ dans } U_0'\end{cases}$$

<u>Démonstration du théorème 2.2</u>

Introduisons l'état adjoint *p(u)* défini par

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial p(u)}{\partial t}-\dfrac{\partial p(u)}{\partial a}-\Delta p(u)+\mu p(u)=y(u)-z_d\, dans\, Q\\ \dfrac{\partial p(u)}{\partial n}=0 & sur\Sigma\\ p(u)(T,a,x)=0 & dans\, Q_\omega\\ p(u)(t,\omega,x)=0 & dans\, Q_T\end{cases}$$

En posant $\tau=T-t$ et $s=\omega-a$, ce système peut s'écrire

$$\begin{cases}p_\tau(u)+p_s(u)-\Delta p(u)+\mu p(u)=y(u)-z_d\, dans Q\\ \dfrac{\partial p(u)}{\partial \nu}=0 & sur\Sigma\\ p(u)(0,\cdot)=0 & dans Q_\omega\\ p(u)(t,0,x)=0 & dans Q_\omega\end{cases}$$

et il admet une solution unique voir <u>Théorème 1.2</u> .

Par conséquent on a :

(R$_5$) $\int_U \langle -\Lambda_0 p(u), y(v)-y(u)\rangle dU + \int_Q [\nabla p(u)\nabla(y(v)-y(u)) + \mu p(u)[y(v)-y(u)]]dQ$

$$= \int_Q (y(v)-y(u))(y(u)-zd)dQ$$

Grâce à la formule d'intégration par parties

$\int_U \langle -\Lambda_0 p(u), y(v)-y(u)\rangle dU = \int_U \langle \Lambda_0(y(v)-y(u)), p(u)\rangle dU +$

$+\int_{QT} p(u)(t,0,x)y(u)(t,0,x)dtdx$ car

$p(u)(T,a,x)=0$ pp dans Q_ω , $p(u)(t,\omega,x)=0$ pp dans Q_1 et $(y(v)-y(u))(0,a,x)=0$ pp dans Q_ω alors on a

$\int_U \langle \Lambda_0 p(u), y(v)-y(u)\rangle dU + \int_Q [\nabla p(u)\nabla(y(v)-y(u))] + \mu p(u)[y(v)-y(u)]dQ$

$+ \int_{QT} (p(u)(y(v)-y(u)))(t,0,x)dtdx = \int_\Sigma (v-u)p(u)_{|\Sigma} d\Sigma + \int_{QT} p(u)(y(v)-y(u))(t,0,x)dtdx$

de (R$_5$)on tire alors

(R$_6$) : $\int_\Sigma (v-u)p(u)_{|\Sigma}\, d\Sigma + \int_{QT} (p(u)(y(u)-y(u)))(t,0,x)dtdx = \int_Q (y(u)-zd)(y(u)-y(u))dQ$

Mais on a $\pi(u,v-u) \geq L(v-u)$, $\forall v \in U_{ad}$

$\Leftrightarrow (Bu, B(v-u)) + N(u,v-u) \geq -(B(v-u), y(0)-z_d)$ $\forall v \in U_{ad}$

$\Leftrightarrow (B(u)+y(0)-zd, B(v-u)) + N(u,v-u) \geq 0$.

Soit $\int_Q (y(u)-z_d)(y(v)-y(u))dQ + N\int_\Sigma u(v-u)d\Sigma \geq 0$ (R$_7$)

Alors grâce à (R$_6$)

(R$_7$) $\Leftrightarrow \int_\Sigma (\text{v-u})p(u)\, d\Sigma + \int_{QT} (p(u)(y(v)-y(u)))(t,0,x)dtdx + N\int_\Sigma u(v-u)d\Sigma \geq 0$

$$\Leftrightarrow \int_\Sigma (\text{v-}u)[p(u)_{|\Sigma} + Nu]d\Sigma + K\int_{QT}\left[p(u)(t,0,x)\int_0^\omega \beta(y(v)-y(u))da\right]dtdx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p(u)_{|\Sigma} + Nu, v-u)_{U0} + K(\beta p(u)(\cdot,0,\cdot), y(v)-y(u))_{L^2(Q)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p(u)_{|\Sigma} + Nu, v-u)_{U_0} + K(\beta p(u)(\cdot,0,\cdot), B(v-u))_{L^2(Q)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p(u)_\Sigma + Nu, v-u)_{U_0} + K(\Lambda_{U_0}^{-1} B^*(\beta p(u)(\cdot,0,\cdot)), v-u))_{U_0', U_0} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (K\Lambda_{U0}^{-1} B^*(\beta p(u)(\cdot,0,\cdot)) + p(u)_{|\Sigma} + Nu, v-u)_{U0} \geq 0\ ,\ \forall v \in U_{ad}$$

Remarque2.1

Il est clair que $\left[K\Lambda_{U_0}^{-1} B^{*}(\beta(a)p(.,0..)) + p_{/\Sigma}\right] + Nu = 0 \; pp \, sur \, \Sigma$.

En effet sinon posons : $v = \begin{cases} \frac{1}{2}u \, sur I = \left\{\left[K\Lambda_{U_0}^{-1} B^{*}(\beta(a)p(.,0..)) + p_{/\Sigma}\right] + Nu > 0 \, pp \, sur \, \Sigma\right\} \\ 2u \, sur J = \left\{\left[K\Lambda_{U_0}^{-1} B^{*}(\beta(a)p(.,0..)) + p_{/\Sigma}\right] + Nu < 0 \, pp \, sur \, \Sigma\right\} \end{cases}$:

Alors $\left(K\Lambda_{U0}^{-1}B^{*}(\beta p(u)(\cdot,0,\cdot)) + p(u)_{/\Sigma} + Nu, v-u\right)_{U0} < 0$ lorsque I ou J est de mesure non nulle .

Cela contredirait l'inéquation variationnelle

$\left(K\Lambda_{U_0}^{-1}B^{*}(\beta p(u)(\cdot,0,\cdot)) + p(u)_{\Sigma} + Nu, v-u\right)_{U_0} \geq 0 \, , \forall v \in U_{ad}$.

Par suite en éliminant u entre les deux systèmes I et II on trouve

$$(II)\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial a} - \Delta p + \mu p = y(u) - z_d \; dans Q \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & sur \Sigma \\ p(T,a,x) = 0 & dans Q_\omega \\ p(t,\omega,x) = 0 & dans Q_T \end{cases} \quad et$$

$$(I)\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} - \Delta y + \mu y = 0 & dans Q \\ \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{1}{N}\left[K\Lambda_{U_0}^{-1} B^{*}(\beta p(.,0.)) + p_{/\Sigma}\right] & sur \Sigma \\ y(0,a,x) = y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ y(t,0,x) = K\int_0^{\omega} \beta y da & dans Q_T \end{cases}$$

$avec \; u = -\frac{1}{N}\left[K\Lambda_{U_0}^{-1} B^{*}(\beta p(.,0.)) + p_{/\Sigma}\right]$,

III – EXISTENCE D'UN CONTROLE OPTIMAL POUR LE CAS NON LINEAIRE

Dans ce paragraphe nous allons chercher d'abord l'existence d'un contrôle optimal et ensuite nous chercherons des conditions nécessaires d'optimalité.

(G_1) Trouver $v_0 \in L^2(\Sigma)^+$ tel que $J(v_0) = \underset{v \in U_{ad}}{Inf} J(v)$, $U_{ad} = L^2(\Sigma)^+$.

où $J(v) = \|y(v) - z_d\|^2 + \langle Nv, v\rangle$.

Avec $y(v)$ la solution au sens ci-dessus défini du système

$$\begin{cases} \Lambda_0 y(v) - \Delta y(v) + \mu y(v) = 0 & dans Q \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = v & sur \Sigma \\ y(0,a,x) = y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ y(t,0,x) = F\left(\int_0^\omega \beta y da\right) = \int_0^\omega \beta y da \, \phi\left(\int_0^\omega \beta y da\right) & dans Q_T \end{cases}$$

qui est non linéaire puisque ϕ n'est plus une fonction constante

1. existence d'un contrôle optimal

Théorème 2.2

Sous les hypothèses du théorème 1.4, avec de plus $\beta \in C^3(\overline{Q})$ le problème (G_1) admet au moins une solution.

Preuve :

Soit (v_n) une suite minimisante .

On a $\lim_{n \to +\infty} J(v_n) = \underset{v \in L^2(\Sigma)^+}{Inf} J(v)$

Comme $J(v_n) = \|y(v_n) - z_d\|^2 + N\|v_n\|^2$, alors la suite (v_n) est bornée dans $L^2(\Sigma)$

$U_{ad} = L^2(\Sigma)^+$ étant convexe fermé est faiblement fermé et donc $v_{nk} \rightharpoonup v$ dans $L^2(\Sigma)$ et $v \in L^2(\Sigma)^+$ où (v_{nk}) est une sous suite de (v_n).

De même $(y(v_{nk}))$ est bornée dans $L^2(U;V)$ puisque

$\|y(v_{nk}) - y(0)\|^2_{L^2(U,V)} \leq k\|(v_n - 0)\|^2 = k\|(v_{nk})\|^2$ d'après la proposition 2.1 .

Alors il existe M >0 tel que $\|y(v_{nk})\|_{L2(U,V)} \leq M, \forall_{nk}$.

On peut donc extraire une sous-suite de $(y(v_{nk}))$ notée toujours $(y(v_{nk}))$ telle que

$(y(v_{nk})) \rightharpoonup y$ dans $L^2(U,V)$ et $(y(v_{nk})) \to y$ dans $L^2(Q)$ faible.

Montrons que $y(v)=y$

Soit $\varphi \in L^2(U,V)$

$$\int \langle \Lambda_0 y(v_{nk}), \varphi \rangle dU + \int_Q (\nabla y(v_{nk}) \nabla \varphi + \mu y \varphi) dQ = \int v_{nk} \varphi_\Sigma \, d\Sigma$$

Puisque $v_{nk} \rightharpoonup v$ dans $L^2(\Sigma)$ on a donc : $\int v_{nk} \varphi_\Sigma \, d\Sigma \to \int v \varphi_\Sigma \, dt da d\sigma$

De même de $y(v_{nk}) \rightharpoonup y$ dans $L^2(U;V)$ on tire que

$$\int_Q [\nabla y(v_{nk}) \nabla \varphi + \mu y(v_{nk}) \varphi] dt da dx \to \int_Q (\nabla y \nabla \varphi + \mu y \varphi) dQ \text{ quand } n_k \to \infty .$$

Soit $\phi \in V$, on a pour presque tout $(t,a) \in U$

$$\langle \Lambda_0 y(v_{nk})(t,a), \phi \rangle = \int_\Omega -[\mu y(v_{nk})(t,a,x) \phi(x) + \nabla y(v_{nk}) \nabla \phi] dx + \int_\Gamma v_{nk}(t,a,\sigma) \phi_\Gamma d\sigma$$

de la continuité de l'application linéaire $\phi \to \int_\Gamma v \phi_\Gamma d\sigma$ définie sur V on a :

$$|\langle \Lambda_0 y(v_{nk})(t,a), \phi \rangle| \leq \mu_\infty \|y(v_{nk})(t,a)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla y(v_{nk})(t,a)\| \|\nabla \phi\| + c \|v_{nk}(t,a)\| \|\phi\|_V .$$

Alors pour presque tout $(t,a) \in U$

$$|\langle \Lambda_0 y(v_{nk})(t,a), \phi \rangle| \leq [(\mu_\infty + 1) \|y(v_{nk})(t,a)\|_V + c \|v_{nk}(t,a)\|] \|\phi\|_V$$

On tire alors que $\|\Lambda_0 y(v_{nk})\|_{L^2(U;V')} \leq (\mu_\infty + 1) \|y(v_{nk})\|_{L^2(U;V)} + c \|v_{nk}\|_{L^2(\Sigma)}$

Et donc $(\Lambda_0 y(v_{nk}))$ est bornée dans $L^2(U;V')$ on peut donc extraire une sous suite toujours notée $(\Lambda_0 y(v_{nk}))$ telle que $\Lambda_0 y(v_{nk}) \rightharpoonup \xi$ dans $L^2(U;V')$.

Mais comme l'opérateur Λ_0 est continue de $\mathcal{D}'(U,V')$ dans lui-même on a $\Lambda_0 y(v_{nk}) \to \Lambda_0 y$ dans $\mathcal{D}'(U,V')$. L'injection de $L^2(U;V')$dans $\mathcal{D}'(U,V')$ étant continue et $\Lambda_0 y(v_{nk}) \rightharpoonup \xi$ dans $L^2(U;V')$ alors $\Lambda_0 y(v_{nk}) \rightharpoonup \xi$ dans $\mathcal{D}'(U,V')$.

De l'unicité de la limite on tire que $\Lambda_0 y=\xi$ et donc $\Lambda_0 y\in L^2(U;V')$

On a donc pour tout $\phi\in L^2(U;V)$

$\int\langle\Lambda_0 y(v_{nk}),\phi\rangle dU+\int_Q[\nabla y(v_{nk})(\nabla\phi+\mu y\phi)]dtdadx$

$\to \int_U\langle\Lambda_0 y,\phi\rangle dU+\int_Q(\nabla y\nabla\phi+\mu y\phi)dtdadx$ d'une part et d'autre part

$\int\langle\Lambda_0 y(v_{nk})\rangle dU+\int_Q(\nabla y(v_{nk})\nabla\phi+\mu y(v_{nk})\phi)dtdax=\int_\Sigma v_{nk}\phi_\Sigma\, d\Sigma$

$\to \int_\Sigma v\phi_\Sigma\, d\Sigma$ quand $n\to+\infty$.

Alors

$\int\langle\Lambda_0 y,\phi\rangle du+\int_Q(\nabla y\nabla\phi+\mu y\phi)dQ=\int_\Sigma v\phi_\Sigma\, d\Sigma$

Remarquant que $y(v_{nk})\rightharpoonup y$ dans W(U ;V) car $\Lambda_0 y(v_{nk})\to\Lambda_0 y$

dans $L^2(U;V')$ faible et $y(v_{nk})\to y$ dans L^2(U ;V) faible , on tire que

$y(v_{nk})(0,\cdot,\cdot)$ converge faiblement vers $y(0,\cdot,\cdot)$ dans $L^2(Q_\omega)$ et $y(v_{nk})(.,0,.)$ converge faiblement vers $y(\cdot,0,\cdot)$ dans $L^2(Q_T)$ car les applications traces sont continues pour les topologies faibles .

Mais $y(v_{nk})(t,0,x)=F\left(\int_0^\omega\beta y(v_{nk})da\right)$ or

$F\left(\int_0^\omega\beta y(v_{nk})da\right)\to F\left(\int_0^\omega\beta yda\right)$ dans $L^2(Q_T)$ quand $n_k\to+\infty$,puisque $\int_0^\omega\beta y_{nk}da\to\int_0^\omega\beta yda$

quand $n_k\to+\infty$.

En effet multiplions l'équation de y_{nk} par β on trouve :

$$\beta\frac{\partial y_{nk}}{\partial t}+\beta\frac{\partial y_{nk}}{\partial a}-\beta\Delta y_{nk}+\mu\beta y_{nk}=0 \text{ or } \beta\frac{\partial y_{nk}}{\partial t}=\frac{\partial(\beta y_{nk})}{\partial t}-y_{nk}\frac{\partial\beta}{\partial t}.$$

$$\beta\frac{\partial y_{nk}}{\partial a}=\frac{\partial(\beta y_{nk})}{\partial a}-y_{nk}\frac{\partial\beta}{\partial a} \quad \text{et } \beta\Delta y_{nk}=\Delta(\beta y_{nk})-y_{nk}\Delta\beta-2\nabla\beta\nabla y_{nk}$$

alors $\beta\frac{\partial y_{nk}}{\partial t}+\beta\frac{\partial y_{nk}}{\partial a}-\beta\Delta y_{nk}+\mu\beta y_{nk}=0$ équivaut à

$$\frac{\partial(\beta y_{nk})}{\partial t}+\frac{\partial(\beta y_{nk})}{\partial a}-\Delta(\beta y_{nk})-y_{nk}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)-y_{nk}\frac{\partial\beta}{\partial a}+y_{nk}(\Delta\beta+\mu\beta)+2\nabla\beta\nabla y_{nk}=0$$

Posons $z_{nk}=\int_0^{\omega}\beta y_{nk}da$ et intégrons l'équation précédente par rapport $\grave{a}$ a on obtient :

(m)

$$(m)\begin{cases}\frac{\partial z_{nk}}{\partial t}-(\beta y_{nk})(t,0,x)+(\beta y_{nk})(t,\omega,x)-\Delta z_{nk}-\int_0^{\omega}y_{nk}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\beta}{\partial a}-\Delta\beta-\mu\beta\right)da+2\int_0^{\omega}\nabla\beta\nabla y_{nk}da=0\\ z_{nk}(0,x)=z_0\\ \frac{\partial z_{nk}}{\partial n}=w_{nk}\end{cases}$$

où $z_0=\int_0^{\omega}\beta y_0 da$ et $w_{nk}=\int_0^{\omega}(\beta v_{nk}+y_{nk}\frac{\partial\beta}{\partial n})da$.

Posons

$$f_{nk}=-(\beta y_{nk})(t,\omega,x)+(\beta y_{nk})(t,0,x)+\int_0^{\omega}y_{nk}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\beta}{\partial a}-\Delta\beta-\mu\beta\right)da-2\int_0^{\omega}\nabla\beta\nabla y_{nk}da$$

Alors le problème (m) s'écrit :

$$\begin{cases}\frac{\partial z_{nk}}{\partial t}-\Delta z_{nk}+\lambda z_{nk}=f_{nk}\, dans\,]0,T[\times\Omega\\ z_{nk}(0,x)=z_0(x)\, dans\, \Omega\\ \frac{\partial z_{nk}}{\partial n}=w_{nk}\, sur\,]0,T[\times\partial\Omega\end{cases}$$

Où on a effectué comme de coutume le changement $z_{nk}^0=e^{-\lambda t}z_{nk}$ $et\ poser\ z_{nk}=z_{nk}^0$

$y_{nk}\in L^2(Q)$ et F est lipschitzienne alors $F\left(\int_0^{\omega}\beta y_{nk}da\right)\in L^2(Q_t)$.

De même $y_{nk}(.,\omega,.)\in L^2(Q_t)$ et $\mu y_{nk}\in L^2(Q))$ puisque $\beta,\mu\in L^{\infty}(Q)$.

$f_{nk}\in L^2(Q_t)$

Ainsi de [20] on tire que (m) admet une solution au sens faible suivant :

$$\begin{aligned}&z_{nk}\in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap C([0,T];L^2(Q)),\frac{\partial z_{nk}}{\partial t}\in L^2(0,T,(H^1(\Omega))')\\ &<\frac{\partial z_{nk}}{\partial t},g>+\int_{\Omega}(\nabla z_{nk}\nabla g+\lambda z_{nk}g)dx=\int_{\Gamma}w_{nk}g_{/\Gamma}d\sigma+\int_{\Omega}f_{nk}gdx\quad\forall g\in H^1(\Omega)\end{aligned}\qquad (R_8)$$

Notons que f_{nk} est bornée dans $L^2(Q_T)$.

En effet comme $\beta\in C^3(\overline{Q})$ on a $\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\beta}{\partial a}-\Delta\beta-\mu\beta\in L^\infty(Q)$ et donc

$$\int_{Q_T}\left[\int_0^\omega y_{nk}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\beta}{\partial a}-\Delta\beta-\mu\beta\right)da\right]^2 dtdx\leq\int_{QT}\int_0^\omega y_{nk}^2da\int_0^\omega\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\beta}{\partial a}-\Delta\beta-\mu\beta\right)^2 dadtdx$$

$$\leq C\|y_{nk}\|^2_{L^2(Q)}\ .$$

Prenons g= z_{nk} dans la relation (R_8) et intégrons par parties on trouve en utilisant les mêmes méthodes que dans la preuve de la proposition2.1 que (z_{nk}) est bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

On peut donc extraire une sous suite toujours notée (z_{nk}) telle que $z_{nk}\to z$ dans $L^2(0,T,H^1(\Omega))$ faible.

Utilisant (R_1) et le fait que (z_{nk}) est bornée dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ on tire que $\left(\frac{\partial z_{nk}}{\partial t}\right)$ est bornée dans $L^2\left(0,T;H^1((\Omega))'\right)$ et donc dans $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$.Par conséquent (z_{nk}) est compacte dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. On peut donc extraire une sous suite toujours notée (z_{nk}) telle que $z_{nk}\to z$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Mais on sait que $y_{nk}\to y$ dans $L^2(Q)$ faible et que $g\to\int_0^\omega gda$ est continue de $L^2(Q)$ dans $L^2(Q_T)$, par conséquent $z_{nk}=\int_0^\omega\beta y_{nk}da\to\int_0^\omega\beta yda$ d'où $z=\int_0^\omega\beta yda$.

Cela nous donne que $F\left(\int_0^\omega\beta y(v_{nk})da\right)\to F\left(\int_0^\omega\beta yda\right)$ dans $L^2(Q_T)$ quand $n_k\to+\infty$ car

$$\left|F\left(\int_0^\omega\beta y(v_{nk})da\right)-F\left(\int_0^\omega\beta yda\right)\right|^2\leq\qquad K_F^2\left|\int_0^\omega\beta(y(v_{nk})-y)da\right|^2$$

Ainsi

$$\left\|F\left[\left(\int_0^\omega\beta y(v_{nk})da\right)-F\left(\int_0^\omega\beta yda\right)\right]\right\|^2_{L2(QT)}\leq K_F^2\left\|\int_0^\omega\beta y_{nk}da-\int_0^\omega\beta yda\right\|^2$$

D'où le résultat .

Par conséquent y est la solution de

$$\begin{cases} \Lambda_0 y-\Delta y+\mu y=0 & dans Q \\ \frac{\partial y}{\partial n}=v & sur \Sigma \\ y(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ y(t,0,x)=F\left(\int_0^\omega \beta y da\right) & dans Q_T \end{cases}$$

On a donc

$$J(v)=\underset{u\in U_{ad}}{Inf} J(u) = \|y(v)-z_d\|^2+N\|v\|^2 \quad .$$

Remarque 2.2

On peut montrer que $y_{nk}\to y$ dans $L^2(Q)$ quand on a l'information $v_{nk}\to v$ dans $L^2(\Sigma)$.

En effet puisque $\|y_{nk}-y\|_{L^2(U;V)}\leq C\|v_{nk}-v\|$, on tire que $y_{nk}\to y$ dans $L^2(U;V)$,et donc $y_{nk}\to y$ dans $L^2(Q)$.

2. conditions nécessaires d'optimalité dans un cas particulier

Nous allons chercher des conditions nécessaires d'optimalité sous des hypothèses supplémentaires.

Ici nous prendrons :

$(H_6)\beta\in C^1([0,\omega])$ et $\beta\geq 0$ pp dans $]0,\omega[$.

$(H_7)\mu\in L^\infty(0,\omega)$, $\mu\geq 0$ pp dans $]0,\omega[$.

$(H_8)F(\alpha)=\frac{c\alpha^2}{b+\alpha^2}, \alpha\in\mathbb{R}_+$, avec b et c des nombres réels strictement positifs.

On remarque que F est lipschitzienne puisque

$$0\leq F'(\alpha)=\frac{2cb\alpha}{(b+\alpha^2)^2}\leq\frac{2c}{\sqrt{b}}$$

On suppose aussi que :

$(H_9)K_F\beta_\infty\omega=1$, où ω désigne l'espérance de vie maximale de l'espèce.

(H_{10}) On suppose que $y_0 \in L^\infty(Q_\omega)$; $y_0 \geq 0$ pp dans Q_ω.

On cherche alors à résoudre le problème.

Trouvez $v^* \in U_{ad}$ tel que :

(G_1) $J(v^*) = \underset{v \in U_{ad}}{Inf}\ J(v)$ où

$U_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma)\ ;\ 0 \leq v \leq v_0$ pp sur $\Sigma\}$ où $v_0 \in L^\infty(\Sigma)$ est une fonction donnée.

Remarques 2.3

- La fonction F, choisie ici est celle du modèle « dépensatoire » cf [15].
- L'hypothèse (H_9) peut se comprendre dans le sens où l'on agit sur la natalité de telle sorte que l'on ait $K_F \beta_\infty \omega = 1$.

On peut agir sur le taux de natalité dans ce cas on agira sur β, où encore on peut agir sur F par l'intermédiaire de c et b, dans ce cas on agit sur la fonction qui gouverne le passage de la classe des nouveaux nés à celle de la couche la plus jeune de la population.

2.2.1. Propriétés de l'état y(v)

Nous allons d'abord montrer que $y(v) \in L^\infty(Q)$ .Plus précisément on a le théorème suivant :

Théorème 2.3

Sous les hypothèses (H_6)-(H_9) et (H_1): Ω ouvert borné de R^N, N = 1, 2 ou 3 de frontière Γ variété de classe c^∞ ; Ω étant localement d'un seul côté de Γ.

Le système

$$(P_3)\begin{cases} \Lambda_0 y - \Delta y + \mu y = 0 & dans Q \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = v & sur \Sigma \\ y(0,a,x) = y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ y(t,0,x) = F\left(\int_0^\omega \beta y da\right) & dans Q_T \end{cases}$$

où $v \in U_{ad}$ admet une solution unique $y(v)$.

De plus $y(v) \in L^{\infty}(Q)$.

Pour la preuve du théorème on utilisera les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1 : *Soit $v_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ telle que $v_0 > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$*

Soit $f \in L^2(\Omega)$ telle que $f > \|y_0\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})}$ pp dans Ω.

Alors le système

$$(S_1)\begin{cases} -\Delta\psi+\lambda\psi=f \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n}=v_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $\psi \in H^2(\Omega)$. De plus $\psi \geq \|y_0\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})}$ pp dans Ω.

Lemme 2.2 : *Sous les hypothèses (H_1); (H_6)-(H_9)*

$$\text{le problème}(P_5) \quad \begin{cases} \Lambda_0\varphi-\Delta\varphi+\lambda\varphi=f \ \ dans Q \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=v_0 \quad sur \Sigma \\ \varphi(0,a,x)=\psi(x) \quad dans Q_{\omega} \\ \varphi(t,0,x)=K_{\ell}\displaystyle\int_0^{\omega}\beta\varphi da \quad dans Q_T \end{cases}$$

admet au moins une solution $\varphi \in L^{\infty}(Q)$.

Preuve du lemme 2.1

Remarquons que sous les hypothèses du Lemme 2.1 le système

$$(S_2)\begin{cases} -\Delta\theta+\lambda\theta=f \ \ dans\Omega \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n}=0 \quad sur \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution $\theta \in H^2(\Omega)$. De plus on a $\theta \geq \underset{\Omega}{Inf}(f) \geq \|y_0\|_{L^{\infty}(Q_{\omega})}$ pp dans Ω. Cf [6].

Considérons également le système

$$(S_3)\begin{cases}-\Delta\psi+\lambda\psi=0\, dans\,\Omega\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n}=v_0\ sur\,\Sigma\end{cases}$$

Comme $v_0\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et Ω vérifie l'hypothèse (H_1), alors le système (S_3) admet une unique solution $\widetilde{\psi}\in H^2(\Omega)$.

On remarque aussi que $\widetilde{\psi}\geq 0$ pp dans Ω.

En effet :

comme $\widetilde{\psi}\in H^2(\Omega)$ alors $\widetilde{\psi}=\widetilde{\psi}^+-\widetilde{\psi}^-$ avec $\widetilde{\psi}^+$ et $\widetilde{\psi}^-$ dans $H^1(\Omega)$.

Par suite

$$\int_\Omega\left(-\Delta\widetilde{\psi}+\lambda\widetilde{\psi}\right)\widetilde{\psi}^-dx=0$$

$$\Leftrightarrow\int_\Gamma v_0\widetilde{\psi}^-_{|\Gamma}d\Sigma-\int_\Omega\left[\left(\nabla\widetilde{\psi}^-\right)^2+\lambda\left(\widetilde{\psi}^-\right)^2\right]dx=0$$

alors $-\int_\Omega\left[\left(\nabla\widetilde{\psi}^-\right)^2+\lambda\left(\widetilde{\psi}^-\right)^2\right]dx=\int_\Gamma v_0\widetilde{\psi}^-_{|\Gamma}d\sigma$

Or $v_0\geq 0$ pp sur Γ et $\widetilde{\psi}^-_{|\Gamma}\geq 0$ pp sur Γ grâce à la positivité de $\widetilde{\psi}^-$ et au

<u>lemme 1.5</u>. Par conséquent $\int_\Gamma v_0\widetilde{\psi}^-_{|\Gamma}d\sigma\geq 0$, par suite on tire que

$$\int_\Omega\lambda\left(\widetilde{\psi}^-\right)^2dx\leq-\int_\Gamma v_0\widetilde{\psi}^-_{|\Gamma}d\sigma\leq 0$$

Par conséquent $\widetilde{\psi}^-=0$ pp dans Ω et donc $\widetilde{\psi}\geq 0$ pp dans Ω.

Posons $\psi=\widetilde{\psi}+\theta$ alors $\psi\in H^2(\Omega)$ et ψ est solution de (S_1).

De plus $\psi=\widetilde{\psi}+\theta\geq\theta$ pp dans Ω car $\widetilde{\psi}\geq 0$ pp dans Ω.

Or $\theta\geq\|y_0\|_{L^\infty(Q_\omega)}$ pp dans Ω, par conséquent $\psi\geq\|y_0\|_{L^\infty(Q_\omega)}$ pp dans Ω.

<u>Preuve du lemme 2.2</u>

Prenons $\varphi_m(t,a,x)=\psi(x)$ alors $\Lambda_0\varphi_m=0$,

$\Lambda_0\varphi_m-\Delta\varphi_m+\lambda\varphi_m=-\Delta\psi+\lambda\psi=f$; $\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial n}=v_0$; $\varphi_m(0,a,x)=\psi(x)$ pp dans Q et

$\varphi_m(t,0x)=\psi(x)$, d'autre part $K_F\int_0^{\omega}\beta_\infty\varphi_m da=K_F\int_0^{\omega}\beta_\infty\psi da$

$$=K_F\beta_\infty\omega\psi(x)=\psi(x) \text{ car } K_F\beta_\infty\omega=1$$

Par suite φ_m ainsi définie est solution de (P_5).

Notons que $2\geq\frac{N}{2}$ car N=1,2 ou 3 , comme $\psi\in H^2(\Omega)$, on a $\psi\in C(\overline{\Omega})$, et

donc $\psi\in L^\infty(\Omega)$. Par suite $\varphi_m\in L^\infty(Q)$.

Preuve du théorème 2.3

Elle sera faite en quatre étapes

Première étape

Dans cette étape on montre que sous les hypothèses (H_1) ; (H_6 – H_9) le système suivant :

$$(P_6)\begin{cases}\Lambda_0\varphi-\Delta\varphi+\mu\varphi=f & dans Q\\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}=v & sur \Sigma\\ \varphi(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega\\ \varphi(t,0,x)=K_F\int_0^{\omega}\beta_\omega\varphi\, da & dans Q_T\end{cases}$$

où $f\in L^2(Q)$ admet une solution unique.

De plus si $v\geq 0$ pp sur Σ ; $y_0\geq 0$ pp dans Q_ω alors $\varphi\geq 0$ pp dans Q.

On adapte seulement la méthode de la preuve du théorème 1.3. Nous ne donnerons que les grandes lignes.

Considérons le système

$$(P_7)\begin{cases}\Lambda_0\overline{\varphi}+(\mu+\lambda)\overline{\varphi}-\Delta\overline{\varphi}=f\; dans Q\\ \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}=\overline{v} & sur \Sigma\\ \overline{\varphi}(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega\\ \overline{\varphi}(t,0,x)=\overline{y}_1(t,x)\in L^2(Q_T)\end{cases}$$

Pour montrer l'existence d'une solution du système (P_7) on posera à partir du problème (P_0).

$f=f-\Lambda_0\varphi_n+\Delta\varphi_n-(\mu+\lambda)\varphi_n$ où (φ_n) est une suite de $C^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi_n(0,.,.)\to y_0$ dans $L^2(Q_\omega)$ et $\varphi_n(.,0,.)\to y_l$ dans $L^2(Q_T)$ voir preuve du <u>théorème 1.3</u> et on procède exactement comme au théorème ci-dessus cité.

Montrons maintenant l'unicité et la positivité de la solution de (P_7) lorsque $y_l\geq 0$ pp dans Q_T, $y_0\geq 0$ pp dans Q_ω, $f\geq 0$ pp dans Q ; et $v\geq 0$ pp sur Σ.

Soit u_1 et u_2 deux solutions de (P_7) alors $\overline{u}=u_1-u_2$ est solution de :

$$\begin{cases}\Lambda_0\overline{u}+(\mu+\lambda)\overline{u}-\Delta\overline{u}=0 & dans Q\\ \dfrac{\partial\overline{u}}{\partial n}=0 & sur \Sigma\\ \overline{u}(0,a,x)=0 & dans Q_\omega\\ \overline{u}(t,0,x)=0 & dans Q_t\end{cases}$$

Donc $\overline{u}=0$ pp dans Q, cf preuve du <u>théorème 1.4</u>.

Examinons la positivité.

On peut aussi écrire que $\overline{\varphi}=\overline{\varphi}^+-\overline{\varphi}^-$, avec $\overline{\varphi}^+$ et $\overline{\varphi}^-$ appartenant tous à $L^2(U\,;H^1(\Omega))$.

Alors $\int_U\left(\Lambda_0\overline{\varphi},\overline{\varphi}^-\right)dU+\int_Q\left[\nabla\overline{\varphi}\nabla\overline{\varphi}^-+(\mu+\lambda)\overline{\varphi}\,\overline{\varphi}^-\right]dx=\int_\Sigma v\overline{\varphi}^-_\Sigma d\Sigma+\int_Q f\overline{\varphi}^-dQ$

On tire alors de la <u>proposition 1.5</u> que

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_\omega}\left[(\overline{\varphi}^-)^2(T,a,x)-(\overline{\varphi}^-)^2(0,a,x)\right]dadx-\frac{1}{2}\int_{Q_T}\left[(\overline{\varphi}^-)^2(t,\omega,x)-(\overline{\varphi}^-)^2(t,0,x)\right]dtdx-$$

$$\int_Q\left((\nabla\overline{\varphi}^-)^2+(\mu+\lambda)(\overline{\varphi}^-)^2\right)dQ=\int_\Sigma v\overline{\varphi}^-_\Sigma d\Sigma+\int_Q f\overline{\varphi}^-dQ\geq 0$$ car $f\geq 0$ pp dans Q, $v\geq 0$ pp sur Σ

et $\varphi^-_{|\Sigma}\geq 0$ grâce au lemme (1.5).

Mais $\overline{\varphi}^-(.,0,.)=y_l^-=0$ pp dans Q_T et $\overline{\varphi}^-(0,.,.)=y_0^-=0$ pp dans Q_ω

Ainsi $-\frac{1}{2}\int_{\Omega_\omega}(\overline{\varphi}^-)^2(T,a,x)dadx-\frac{1}{2}\int_{Q_T}(\overline{\varphi}^-)^2(t,\omega,x)dtdx-\int_Q\left[(\nabla\overline{\varphi}^-)^2+(\mu+\lambda)(\overline{\varphi}^-)^2\right]dQ\geq 0$

$\Rightarrow$ $\|\bar{\varphi}^-\|_{L^2(Q)}\leq 0$ d'où $\bar{\varphi}^-=0$ pp dans Q et donc $\bar{\varphi}\geq 0$ pp dans Q.

Soit $z\in L^2(Q)_+=\{y\in L^2(Q)$; $y\geq 0$ pp dans Q$\}$ si on pose $y_1=K_F\int_0^{\omega}\beta_{\infty}z\,da$, on associe ainsi à z une unique fonction $\bar{\varphi}(z)$ solution de (P_7).

Notons $\psi : L^2(Q)_+\rightarrow L^2(Q)_+$

$z\mapsto\bar{\varphi}(z)$

En procédant comme dans la preuve du théorème 1.4. On montre que ψ est une contraction stricte lorsque $\lambda>\frac{K_F^2\beta_{\infty}^2\omega}{2}$.

Ainsi pour $\lambda>\frac{K_F^2\beta_{\infty}^2\omega}{2}$, il existe $z\in L^2(Q_+)$ telle que $\varphi(z) = z$ i.e que φ est solution de (P_6).

Deuxième étape

Nous allons maintenant comparer les solutions des systèmes

$$\begin{cases}\Lambda_0\varphi-\Delta\varphi+\mu\varphi=f & dans Q\\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}=v_1 & sur\Sigma\\ \varphi(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega\\ \varphi(t,0,x)=K_F\int_0^{\omega}\beta_{\infty}\varphi da & dans Q_T\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\Lambda_0 y-\Delta y+\mu y=f & dans Q\\ \frac{\partial y}{\partial v}=v_2 & sur\Sigma\\ y(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega\\ y(t,0,x)=K_F\int_0^{\omega}\beta_{\infty}y da & dans Q_T\end{cases}$$

avec $v_1\geq v_2$ pp sur Σ .

Notons $z = \varphi - y$, alors z est solution de
$$(P_8)\begin{cases}\Lambda_0 z-\Delta z+\mu z=f & dans Q\\ \frac{\partial z}{\partial n}=v & sur\Sigma\\ z(0,a,x)=0 & dans Q_\omega\\ z(t,0,x)=K_F\int_0^{\omega}\beta_{\infty}z_{da} & dans Q_T\end{cases}$$

avec $v=v_1-v_2$.

Comme $v\geq 0$ pp sur Σ et $f\geq 0$ pp dans Q, d'après la première étape (P_8) admet une solution unique z et $z\geq 0$ pp dans Q.

Par conséquent $\varphi\geq y$ pp dans Q.

Troisième étape

Comparons maintenant les solutions de

$$\begin{cases} \Lambda_0 y - \Delta y + \mu^1 y = 0 & dans Q \\ \frac{\partial y}{\partial n} = v & sur \Sigma \\ y(0,a,x) = y_0^1(a,x) & dans Q_\omega \\ y(t,0,x) = K_F \int_0^\omega \beta_\infty y da & dans Q_T \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Lambda_0 z - \Delta z + \mu^2 z = 0 & dans Q \\ \frac{\partial z}{\partial n} = v & sur \Sigma \\ z(0,a,x) = y_0^2(a,x) & dans Q_\omega \\ z(t,0,x) = K_F \int_0^\omega \beta_\infty z da & dans Q_T \end{cases}$$

où $\mu^1 \le \mu^2$ pp dans $]0, \omega[$ et $y_0^1 \ge y_0^2$ pp dans Q_ω.

Posons $y_0 = y_0^1 - y_0^2$, on a $y_0 \ge 0$ pp dans Q_ω.

Posons $f = (\mu^2 - \mu^1)z$ et on a $\mu^1 \ge 0$ pp dans $]0, \omega[$ et $f \ge 0$ pp dans Q.

Notons $\varphi = y - z$, alors φ est solution de

$$(P_\varphi) \begin{cases} \Lambda_0 \varphi - \Delta \varphi + \mu_1 \varphi = f & dans Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & sur \Sigma \\ \varphi(0,a,x) = y_0 & dans Q_\omega \\ \varphi(t,0,x) = K_F \int_0^\omega \beta_\infty \varphi da & dans Q_T \end{cases}$$

d'où on déduit aussi que $\varphi \ge 0$ pp dans Q et donc $y \ge z$ pp dans Q.

Quatrième étape :

Comparons enfin les solutions de

$$(C_1) \begin{cases} \Lambda_0 y - \Delta y + \mu y = 0 & dans Q \\ \frac{\partial y}{\partial n} = v & sur \Sigma \\ y(0,a,x) = y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ y(t,0,x) = F\left(\int_0^\omega \beta\, y da\right) & dans Q_T \end{cases} \quad \text{et} \quad (C_2) \begin{cases} \Lambda_0 z - \Delta z + \mu z = 0 & dans Q \\ \frac{\partial z}{\partial n} = v & sur \Sigma \\ z(0,a,x) = y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ z(t,0,x) = K_F \int_0^\omega \beta_\infty z da & dans Q_T \end{cases}$$

Introduisons les systèmes :

$$(C_1') \begin{cases} \Lambda_0 \bar{y} - \Delta \bar{y} + (\mu + \lambda)\bar{y} = 0 & dans Q \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial n} = \bar{v} & sur \Sigma \\ \bar{y}(0,a,x) = y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ \bar{y}(t,0,x) = e^{-\lambda t} F\left(\int_0^\omega e^{\lambda t} \beta\, y da\right) & dans Q_T \end{cases} \quad \text{et} \quad (C_2') \begin{cases} \Lambda_0 \bar{z} - \Delta \bar{z} + (\mu + \lambda)\bar{z} & dans Q \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial n} = \bar{v} & sur \Sigma \\ \bar{z}(0,a,x) = y_0(a,x) & dans Q_\omega \\ \bar{z}(t,0,x) = K_F \int_0^\omega \beta_\infty z da & dans Q_T \end{cases}$$

Notons $\eta^1 : g \mapsto \bar{y}(g)$ et $\eta^2 : g \mapsto \bar{z}(g)$ où $\bar{y}(g)$ et $\bar{z}(g)$ sont les solutions de (C_1') et (C_2').

Considérons les deux suites récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} \bar{y}^0 = g, \\ \bar{y}^{n+1} = \eta^1(y^n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{z}^0 = g, \\ \bar{z}^{n+1} = \eta^2(z^n) \end{cases}$$

Nous allons montrer par récurrence que $\bar{y}^n \leq \bar{z}^n$ pp dans Q.

En effet, remarquons que :

$$e^{-\lambda t} F\left(\int_0^\omega \beta g e^{\lambda t} da \right) \leq K_F e^{-\lambda t} \int_0^\omega \beta e^{\lambda t} g da \leq K_F \beta_\infty \int_0^\omega g da$$

Par suite $K_F \beta_\infty \int_0^\omega g da - e^{-\lambda t} F\left(\int_0^\omega \beta g e^{\lambda t} da \right) \geq 0$ pp dans Q_T

Par conséquent la fonction $\varphi = -\bar{y}^1 + \bar{z}^1$ solution de

$$\begin{cases} \Lambda_0 \varphi - \Delta \varphi + \mu \varphi = 0 & dans Q \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & sur \Sigma \\ \varphi(0, a, x) = 0 & dans Q_\omega \\ \varphi(t, 0, x) = K_F \beta_\omega \int_0^\omega g da - e^{\lambda t} F\left(\int_0^\omega \beta g e^{\lambda t} da \right) & dans Q_t \end{cases}$$

est telle que $\varphi \geq 0$ pp dans Q.

Alors $\bar{z}^1 \geq \bar{y}^1$ pp dans Q.

Supposons que $\bar{y}^n \leq \bar{z}^n$ pp dans Q.

Remarquons que :

$$e^{-\lambda t} F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} \bar{y}^n da \right) \leq K_F \int_0^\omega \beta_\infty \bar{y}^n da \leq K_F \int_0^\omega \beta_\infty \bar{z}^n da$$

Alors on montre de manière analogue que $\bar{y}^{n+1} = \eta^1(\bar{y}^n) \leq \eta^2(\bar{y}^n) \leq \eta^2(\bar{z}^n) = \bar{z}^{n+1}$ pp dans Q.

En choisissant $\lambda > \dfrac{K_F^2 \beta_\omega^2 \omega}{2}$ on a η^1 et η^2 contractantes strictement et donc les suites $(\bar{y}^n)$ et $(\bar{z}^n)$ convergent respectivement vers les solutions ξ_1 et ξ_2 de (C_1) et de (C_2) dans $L^2(Q)$.

Notons $\psi_n = \bar{z}^n - \bar{y}_n$, alors $\psi_n \geq 0$ pp dans Q.

En adaptant la méthode de la preuve du lemme 1.5on montre que $\lim_{n\to+\infty}\psi_n=\xi_2-\xi_1\geq 0$

pp dans Q.

Conclusion :

Considérons les différents systèmes

$$\begin{cases}\Lambda_0 y^1-\Delta y^1+(\mu+\lambda)y^1=f & dans Q\\ \dfrac{\partial y^1}{\partial n}=v_0 & sur\Sigma\\ y^1(0,a,x)=\psi(x) & dans Q_\omega\\ y^1(t,0,x)=K_F\int_0^\omega \beta_\infty y^1 da & dans Q_l\end{cases} ; \begin{cases}\Lambda_0 y^2-\Delta y^2+(\mu+\lambda)y^2=0 & dans Q\\ \dfrac{\partial y^2}{\partial n}=v & sur\Sigma\\ y^2(0,a,x)=\psi(x) & dans Q_\omega\\ y^2(t,0,x)=K_F\int_0^\omega(\beta y^2 da) & dans Q_l\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Lambda_0 y^3-\Delta y^3+(\mu+\lambda)y^3=0 dans Q\\ \dfrac{\partial y^3}{\partial n}=v & sur\Sigma\\ y^3(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega\\ y^3(t,0,x)=K_F\int_0^\omega \beta y^3 da & dans Q_l\end{cases} ; \begin{cases}\Lambda_0 y^4-\Delta y^4+(\mu+\lambda)y^4=0 & dans Q\\ \dfrac{\partial y^4}{\partial n}=v & sur\Sigma\\ y^4(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega\\ y^4(t,0,x)=e^{-\lambda t}F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} y^4 da\right) & dans Q_l\end{cases}$$

D'après la 4^e étape on a : $y^4 \leq y^3$ pp dans Q

D'après la 3^e étape on a : $y^3 \leq y^2$ pp dans Q

Et d'après la 2^e étape on a : $y^2 \leq y^1$ pp dans Q.

On a donc $0\leq y^4 \leq y^1$ pp dans Q

Or $y^1 = \varphi_m \in L^\infty(Q)$ cf lemme 2.2

Par suite $y^4 \in L^\infty(Q)$ et donc $y = e^{\lambda t}y^4\in L^\infty(Q)$,mais $e^{\lambda t}y^4$ est la solution de

$$\begin{cases}\Lambda_0 y-\Delta y+\mu y=0 & dans Q\\ \dfrac{\partial y}{\partial n}=v & sur\Sigma\\ y(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega\\ y(t,0,x)=F\left(\int_0^\omega \beta y da\right) & dans Q_l\end{cases}$$

.

Nous allons prouver la G.dérivabilité de l'application $v\mapsto y(v)$ de $L^2(\Sigma)$ dans $L^2(Q)$.

Proposition 2.2

Soit $v \in U_{ad}$, $u \in U_{ad}$ et $s > 0$ tel que $v + su \in U_{ad}$.

Notons $z_s = \frac{y(v+su)-y(v)}{s}$

Alors (z_s) converge vers un élément ξ dans $L^2(Q)$, où ξ est la solution de :

$$
(P_{10})\begin{cases}
\Lambda_0\xi-\Delta\xi+\mu\xi=0 & dans Q \\
\dfrac{\partial\xi}{\partial n}=u & sur \Sigma \\
\xi(0,a,x)=0 & dans Q_\omega \\
\xi(t,0,x)=F'\left(\int_0^{\omega}\beta y(v)da\right)\int_0^{\omega}\beta\xi da & dans Q_T
\end{cases}
$$

Preuve de la proposition 2.2

On revient au problème auxiliaire

$$
\begin{cases}
\Lambda_0\bar{y}-\Delta\bar{y}+(\mu+\lambda)\bar{y}=0 & dans Q \\
\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial n}=\bar{v} & sur \Sigma \\
\bar{y}(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega \\
\bar{y}(t,0,x)=\int_0^{\omega}\beta\bar{y}da\ \phi\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t}\bar{y}da\right) & dans Q_T
\end{cases}
$$

On sait que la solution de (P_3) est $y=e^{\lambda t}\bar{y}$.

Par conséquent on va montrer que $v \mapsto \bar{y}(v)$ est G-dérivable.

Notons $\bar{z}_s = \frac{\bar{y}(v+su)-\bar{y}(v)}{s}$

Alors $\bar{z}_s$ vérifie.

$$
\begin{cases}
\Lambda_0\bar{z}_s-\Delta\bar{z}_s+(\mu+\lambda)\bar{z}_s=0 & dans Q \\
\dfrac{\partial\bar{z}_s}{\partial n}=u & sur \Sigma \\
\bar{z}_s(0,a,x)=0 & dans Q_\omega \\
\bar{z}_s(t,0,x)=\dfrac{e^{-\lambda t}F\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t}\bar{y}(su+v)da\right)-e^{-\lambda t}F\left(\int_0^{\omega}\beta e^{\lambda t}\bar{y}(v)da\right)}{s} & dans Q_T
\end{cases}
$$

multiplions la 1ère équation par $\bar{z}_s$ et utilisons la formule d'intégration par parties. On obtient :

$$\frac{1}{2}\left\|\bar{z}_s(T)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\bar{z}_s(\omega)\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|\bar{z}_s(0)\right\|^2+\left\|\nabla\bar{z}_s\right\|^2+\left\|\sqrt{\mu+\lambda}\,\bar{z}_s\right\|^2=\int_\Sigma \bar{z}_{s_{|\Sigma}}u d\Sigma$$

où $\quad \bar{z}_s(T,\cdot\cdot)=\bar{z}_s(T)$ et $\bar{z}_s(0,\cdot\cdot)=\bar{z}_s(0)$ pp dans Q_ω

$$\bar{z}_s(\cdot,\omega,\cdot)=\bar{z}_s(\omega) \quad \text{et} \quad \bar{z}_s(\cdot,0,\cdot)=\bar{z}_s(0) \ \text{pp dans } Q_T$$

D'où on tire que :

$$\|\nabla \bar{z}_s\|^2+\left\|\sqrt{u+\lambda}\,\bar{z}_s\right\|^2\leq\frac{1}{2}\|\bar{z}_s(0)\|^2+\int_\Sigma u\bar{z}_{s|_\Sigma}\,d\Sigma$$

$$\bar{z}_s(0)=\frac{e^{-\lambda t}F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t}\bar{y}(su+v)da\right)-e^{-\lambda t}F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t}\bar{y}(v)da\right)}{s}$$

F étant Lipschitzienne de rapport K_F on tire que

$$|\bar{z}_s(0)|\leq K_F\frac{\left|\int_0^\omega \beta(\bar{y}(su+v)-\bar{y}(v))da\right|}{s}=K_F\left|\int_0^\omega \beta\bar{z}_s da\right|$$

Par suite en utilisant quelques calculs, on obtient : $\|\bar{z}_s(0)\|^2\leq K_F^2\beta_\omega^2\omega\|\bar{z}_s\|_H^2$

Alors procédant comme la preuve du <u>théorème 1.4</u>, on prouve que $(\bar{z}_s)$ est bornée dans $L^2(U;H^1(\Omega))$ et que $(\Lambda_0\bar{z}_s)$ est bornée dans $L^2(U ; V')$.

Par suite on peut extraire une sous suite toujours notée $(\bar{z}_s)$ telle que

$\bar{z}_s \rightharpoonup \bar{\xi}$ dans $L^2(U ; V')$; et $\Lambda_0\bar{z}_s \rightharpoonup \Lambda_0\bar{\xi}$ dans $L^2(U ; V')$.

En procédant exactement comme la preuve du <u>théorème 1.4</u> on montre que $\bar{\xi}\in W(U;V)$ et que $\bar{\xi}$ vérifie au sens convenu.

$$\begin{cases} \Lambda_0\bar{\xi}-\Delta\bar{\xi}+(\lambda+\mu)\xi=0 & dans\,Q \\ \dfrac{\partial\bar{\xi}}{\partial n}=\bar{\omega} & sur\,\Sigma \\ \bar{\xi}(0,a,x)=0 & dans\,Q_\omega \end{cases}$$

L'égalité $\bar{\xi}(t,0,x)=F'\left(\int_0^\omega \beta\bar{y}e^{\lambda t}da\right)\int_0^\omega \beta\bar{\xi}da$ semble être plus délicate à prouver.

Remarquons cependant que $\bar{z}_s\to\bar{\xi}$ dans W(U ; V) faible, Car

$\Lambda_0\bar{z}_s \rightharpoonup \bar{\xi}$ et $\bar{z}_s \rightharpoonup \bar{\xi}$ dans $L^2(U, V)$ et $L^2(U ; V)$ respectivement.

Alors en adaptant la preuve du <u>théorème</u>2.2 ,on montre que $\int_0^\omega \beta\bar{z}_s da\to\int_0^\omega \beta\bar{\xi}da$.

En effet ,notons que $\bar{z}_s$ est solution de

$$\begin{cases} \Lambda_0 \bar{z}_s - \Delta \bar{z}_s + (\mu+\lambda)\bar{z}_s = 0 & dans Q \\ \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial n} = u & sur \Sigma \\ \bar{z}_s(0,a,x) = 0 & dans Q_\omega \\ \bar{z}_s(t,0,x) = \dfrac{e^{-\lambda t} F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} \bar{y}(su+v)da\right) - e^{-\lambda t} F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} \bar{y}(v)da\right)}{s} & dans Q_t \end{cases}$$

Posons $b = \int_0^\omega \beta \bar{z}_s da$; b est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} - \Delta b + \lambda b = \bar{z}_s(t,0,x) - \bar{z}_s(t,\omega,x) - \int_0^\omega \mu \bar{z}_s da \; dans \;]0,T[\times \Omega \\ \frac{\partial b}{\partial n} = \hat{u} \quad sur \ \Sigma \\ b(0,x) = 0 \quad dans \ \Omega \end{cases}$$

avec $\hat{u} = \int_0^\omega \beta u da$.

Par suite on procède comme au <u>théorème</u>2.2 .

On notera que les suites $(\bar{z}_0(.,0,.))$ *et* $(\bar{z}_s(.,\omega,.))$ sont bornées.

De la continuité de l'application trace cf <u>proposition</u>1-5 et de la convergence faible de $(\bar{z}_s)$ dans W(U ;V) ,on tire que. $\bar{z}_s(0,.,.) \rightharpoonup \bar{\xi}(0,.,.)$ et $\bar{z}_s(.,0,.) \rightharpoonup \bar{\xi}(.,0,.)$

D'autre part $\bar{z}_s(t,0,x) = \dfrac{e^{-\lambda t}\left[F\left(\int_0^\omega e^{-\lambda t} \beta \bar{y}(v+su)da\right) - F\left(\int_0^\omega \beta e^{-\lambda t} \beta \bar{y}(v)da\right)\right]}{s}$ pour presque tout $(t\,,\,x) \in Q_T$.

Nous allons prouver que grâce à (H_8) on a :

$\bar{z}(.,0,.) = F'\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} \bar{y}(v)da\right) \int_0^\omega \beta e^{\lambda t} \bar{\xi} da$.

Il suffit de prouver que :

$$\left\| \frac{F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} \bar{y}(v+su)da\right) - F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t} \bar{y}(v)da\right)}{s} e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} F\left(\int_0^\omega \beta e \bar{y}(v)da\right) \int_0^\omega \beta \bar{\xi} da \right\|_{L^2(Q_T)}$$

$\to 0$ quand s $\to 0$.

On peut considérer seulement

$$\left\| \frac{F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t}\bar{y}(v+s\omega)da\right)-F\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t}\ \bar{y}(v)da\right)}{s} - F'\left(\int_0^\omega \beta e^{\lambda t}\bar{y}(v)da\right)\int_0^\omega \beta\bar{\xi}da \right\|_{L^2(Q_T)}$$

, en mettant $e^{-\lambda t}$ en facteur .

Rappelons que $F(\alpha)=\dfrac{c\alpha^2}{b+\alpha^2}$, alors $F'(\alpha)=\dfrac{2bc\alpha}{(b+\alpha^2)^2}$

Il est clair que lorsque $(\varphi_n)\subset L^2(Q)$ et $\varphi_n \to \varphi$ dans $L^2(Q)$. On a $\int_0^\omega \varphi_n da \to \int_0^\omega \varphi da$ dans $L^2(Q_1)$.

Par conséquent par soucis de simplification de l'écriture, on notera :

$$i(s)=\int_0^\omega e^{\lambda t}\beta\bar{y}(su+v)da,\ j=\int_0^\omega \beta\bar{\xi}da \text{ et } p_s=\int_0^\omega \beta\bar{z}_s da$$

Alors on doit montrer que :

$$\left\| \frac{F(i(s)-F(i(0))}{s} - F'(i(0))j \right\|_{L^2(Q_T)} \to 0 \text{ quand } s \to 0^+.$$

Posons $M=\dfrac{F(i(s))-F(i(0))}{s} - F'(i(0))j$.

$$=\frac{1}{s}\left[\frac{ci^2(s)}{b+i^2(s)} - \frac{ci^2(0)}{b+i^2(0)}\right] - \frac{2cbi(0)}{(b+i^2(0))^2}j$$

$$=\frac{ci^2(s)(b+i^2(0))^2 - ci^2(0)(b+i^2(0))(b+i^2(s)) - 2ci^2(0)(b+i^2(s))}{s(b+i^2(0))^2(b+i^2(s))}$$

$$ci^2(s)(b+i^2(0))^2 = ci^2(s)(b^2+2bi^2(0)+i^4(0))$$

$$= ci^2(0)b^2+2bci^2(0)i^2(s)+ci^2(s)i^4(0)$$

$$ci^2(0)(b+i^2(s))(b+i^2(0)) = ci^2(0)(b^2+bi^2(0)+bi^2(s)+i^2(0)i^2(s))$$

$$= cb^2i^2(0)+cbi^4(0)+bci^2(0)i^2(s)+ci^4(0)i^2(s)$$

$$2ci(0)bjs(b+i^2(s)) = 2sb^2cji(0)+2cbsji(0)i^2(s)$$

D'où $M=\dfrac{cb^2[i^2(s)-i^2(0)-2jsi(0)]+bc[i^2(s)i^2(0)-i^4(0)-2jsi(0)i^2(s)]}{s(b+i^2(s))(b+i^2(0))^2}$

$$=\frac{cb^2\left[\frac{i(s)-i(0)}{s}(i(s)+i(0))-2ji(0)\right]+bc\left[i^2(0)\frac{i(s)-i(0)}{s}(i(s)+i(0))-2ji(0)i^2(s)\right]}{(b+i^2(s))(b+i^2(0))^2}$$

$$=\frac{cb^2[p_s(i(s)+i(o))-2ji(0)]+cb[i^2(0)p_s(i(s)+i(0))-2ji(0)i^2(s)]}{(b+i^2(s))(b+i^2(s))^2}.$$

Alors comme $(b+i^2(s))(b+i^2(0))^2\geq b^3$ alors

$$\|M\|_{L^2(Q_T)}\leq\frac{c}{b}\|p_s(i(0)+i(s))-2ji(0)\|_{L^2(Q_T)}+\frac{c}{b^2}\|i^2(0)p_s(i(0)+i(s))-2ji(0)i^2(s)\|_{L^2(Q_T)}.$$

Posons $A=p_s(i(s)+i(0))-2ji(0)$ et $B=i^2(0)p_s(i(s)+i(0))-2ji(0)i^2(s)$

On peut alors écrire :

$A=(p_s-j)(i(s)+i(0))+j[i(s)+i(0)-2i(0)]$ et

$B=i^2(0)(p_s-j)(i(0)+i(s))+j[i^2(0)(i(s)+i(0))-2i(0)i^2(s)]$.

Par conséquent

$$\|p_s(i(0)+i(s))-2ji(0)\|_{L^2(Q_T)}\leq\|(p_s-j)(i(s)+i(0))\|_{L^2(Q_T)}+\|j(i(s)+i(0)-2i(0))\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq\|(p_s-j)(i(s)+i(0))\|_{L^2(Q_T)}+\|j(i(s)-i(0))\|_{L^2(Q_T)}$$

Notons que pour s assez petit $i(s)\in L^\infty(Q_T)$ cf <u>théorème</u> 2.3, par suite

$$\|p_s(i(s)+i(0))-2ji(0)\|_{L^2(Q_T)}\leq C\|p_s-j\|_{L^2(Q_T)}+\|j\|_{L^2(Q_T)}\|i(s)-i(0)\|_{L^2(Q_T)}.$$

On aura aussi

$$\|i^2(0)p_s(i(s)+i(0))-2ji(0)i^2(s)\|_{L^2(Q_T)}\leq\|i^2(0)(p_s-j)(i(s)+i(0))\|+\|j[i^2(0)(i(s)+i(0))-2i(0)i^2(s)]$$

$$\leq C\|p_s-j\|_{L^2(Q_T)}+\|j[i^2(0)(i(s)+i(0))-2i(0)i^2(s)]\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq C\|p_s-j\|_{L^2(Q_T)}+\|j[i(0)i(s)(i(s)-i(0))+i(0)(i^2(0)-i^2(s))]\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq C\|p_s-j\|_{L^2(Q_T)}+\|j[i(0)i(s)(i(s)-i(0))+i(0)(i(0)-i(s))(i(s)+i(0))]\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq C\|p_s-j\|_{L^2(Q_T)}+\|ji(0)i(s)(i(s)-i(0))\|_{L^2(Q_T)}+\|ji(0)(i(0)-i(s))(i(s)+i(0))\|_{L^2(Q_T)}$$

Il existe donc C tel que

$$\left\|i^2(0)p_s(i(0)+i(s))-2ji(0)i^2(s)\right\|_{L^2(Q_T)}\leq C\left[\left\|p_s-j\right\|_{L^2(Q_T)}+2\left\|j\right\|_{L^2(Q_T)}\left\|i(0)-i(s)\right\|_{L^2(Q)}\right].$$

En conclusion on peut écrire : $\left\|M\right\|_{L^2(Q_T)}\leq C\left[\left\|p_s-j\right\|_{L^2(Q_T)}+\left\|i(0)-i(s)\right\|_{L^2(Q_T)}\right]$

Or $p_s=\int_0^{\omega}\beta\bar{z}_s da\to\int_0^{\omega}\beta\bar{\xi}da=j$ et $i(s)=\int_0^{\omega}\beta\bar{y}(su+v)da\to\int\beta\bar{y}(v)da=i(0)$.

Par conséquent $\dfrac{F(i(s))-F(i(0))}{s}\to F'(i(0))j$ quand $s\to 0^+$.

Cela entraîne alors que

$$\frac{e^{-\lambda t}}{s}\left[F\left(\int_0^{\omega}e^{\lambda t}\beta\bar{y}(s)da\right)-F\left(\int_0^{\omega}e^{\lambda t}\beta\bar{y}(0)da\right)\right]\to e^{-\lambda t}F'\left(\int_0^{\omega}e^{\lambda t}\beta\bar{y}(0)da\right)\int_0^{\omega}\beta\bar{\xi}da$$

quand $s\to 0^+$.

Donc $\bar{\xi}(t,0,x)=F\left(e^{-\lambda t}\int_0^{\omega}\beta\bar{y}(0)da\right)\int_0^{\omega}\beta\bar{\xi}da$ pour presque tout $(t,x)\in Q_T$.

Soit $(\tilde{z}_s)$ une autre sous suite convergente extraite de (z_s).

Notons $\hat{\xi}=\lim\limits_{s\to+\infty}\tilde{z}_s$.

Alors on reprend toute la méthode avec $(\tilde{z}_s)$, on verra que l'on peut extraire une sous-suite de $(\tilde{z}_s)$ notée $\left(\mathring{\tilde{z}}_s\right)$ telle que :

$\mathring{\tilde{z}}_s$ converge faiblement vers un élément $\mathring{\hat{z}}$ dans $L^2(U\,;V)$ et $\Lambda_0\mathring{\tilde{z}}_s$ converge faiblement vers un élément $\Lambda_0\mathring{\hat{\xi}}$.

On tire que $\mathring{\tilde{z}}_s\to\mathring{\hat{\xi}}$ dans $L^2(Q)$.

Alors $\mathring{\hat{\xi}}=\hat{\xi}$ d'une part et d'autre part $\hat{\xi}$ vérifie

$$(P_9)\begin{cases}\Lambda_0\hat{\xi}-\Delta\hat{\xi}+(\lambda+\mu)\hat{\xi}=0 & dans\ Q\\ \dfrac{\partial\hat{\xi}}{\partial n}=u & sur\ \Sigma\\ \hat{\xi}(0,a,x)=0 & dans Q_\omega\\ \hat{\xi}(t,0,x)=F'\left(\int_0^\omega e^{\lambda t}\bar{y}(v)da\right)\int_0^\omega\beta\hat{\xi}da & dans\ Q_T\end{cases}$$

Pour avoir $\hat{\xi}=\bar{\xi}$ il suffirait de prouver que la solution de (P_{10}) est unique.

Ce qui se démontre facilement en procédant comme dans la preuve du théorème 1.4.

Ici le problème est linéaire puisque la fonction $F'\left(\int_0^\omega\beta\bar{y}(v)e^{\lambda t}da\right)\in L^2(Q)$. est indépendante de l'état cherché ξ.

Comme (P_{10}) admet une solution unique on tire que $\bar{\xi}=\hat{\xi}$. Par suite $\left(\bar{z}_s\right)$ admet un seul point d'accumulation. Par conséquent de la proposition 1.2 : on tire que $\bar{z}_s\to\bar{\xi}$ dans $L^2(Q)$.

Posons maintenant $y=e^{\lambda t}\bar{y}$ et $\xi=e^{\lambda t}\bar{\xi}$ on a $y(s)=e^{-\lambda t}\bar{y}(s)\to e^{-\lambda t}\bar{y}(0)=y$.

quand s → 0 et que $z_s=\dfrac{y(s)-y(0)}{s}=e^{\lambda t}\dfrac{\bar{y}(s)-\bar{y}(0)}{s}\to e^{\lambda t}\bar{\xi}=\xi$ dans $L^2(Q)$.

Il est facile de voir que ξ est l'unique solution de :

$$(P_{10})\begin{cases}\Lambda_0\xi-\Delta\xi+\mu\xi=0 & dans Q\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial n}=u & sur \Sigma\\ \xi(0,a,x)=0 & dans Q_\omega\\ \xi(t,0,x)=F'\left(\int_0^\omega\beta y(v)da\right)\int_0^\omega\beta\xi da & dans Q_T\end{cases}$$

2.2. <u>Conditions nécessaires d'optimalité</u>

Avant de donner ces conditions introduisons le problème adjoint (D_1) de (P_3).

2.2. a) <u>Problème adjoint</u> :

On introduit maintenant la fonction θ, état adjoint défini par le système.

$$
(\mathrm{D}_1)\begin{cases}
-\Lambda_0\theta-\Delta\theta+\mu\theta=y(v)-z_d+\beta(a)F'\left(\int_0^\omega \beta y(v)da\right)\theta(t,0,x) & dans Q\\
\dfrac{\partial\theta}{\partial n}=0 & sur \Sigma\\
\theta(T,a,x)=0 & dans Q_\omega\\
\theta(t,\omega,x)=0 & dans Q_l
\end{cases}
$$

On a le résultat suivant :

<u>Proposition 2.3</u>

Sous les hypothèses du <u>théorème 2.3</u>

Le problème (D_1) admet une solution unique.

<u>Preuve</u>

Posons $\tau = T-t$ et $s=\omega-a$. (D_1) peut s'écrire alors

$$
(\mathrm{D}_2)\begin{cases}
\Lambda_0\theta-\Delta\theta+\mu\theta=y(v)-z_d+\beta(s)F'\left(\int_0^\omega \beta y(v)da\right)\theta(\tau,\omega,x) & dans Q\\
\dfrac{\partial\theta}{\partial n}=0 & sur \Sigma\\
\theta(0,s,x)=0 & dans Q_\omega\\
\theta(\tau,0,x)=0 & dans Q_l
\end{cases}
$$

Introduisons le problème auxiliaire suivant :

$$
(D_3)\begin{cases}
\Lambda_0\varphi-\Delta\varphi+(\mu+\lambda)\varphi=\bar{y}(v)-\bar{z}_d+\beta(a)F'\left(\int_0^\omega \beta y(v)da\right)\varphi(t,\omega,x) & dans Q\\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 & sur \Sigma\\
\varphi(0,a,x)=0 & dans Q_\omega\\
\varphi(t,\omega,x)=0 & dans Q_l
\end{cases}
$$

où $\bar{y}(v)=e^{-\lambda t}y(v)$ *et* $\bar{z}_d=e^{\lambda t}z_d$.

Montrons que (D_3) admet une solution.

Considérons

$$
(\mathrm{D}_4)\begin{cases}
\Lambda_0\varphi-\Delta\varphi+(\mu+\lambda)\varphi=\bar{y}(v)-\bar{z}_d+\beta(a)F'\left(\int_0^\omega \beta y(v)da\right)z(t,x) & dans Q\\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 & sur \Sigma\\
\varphi(0,a,x)=0 & dans Q_\omega\\
\varphi(t,0,x)=0 & dans Q_l
\end{cases}
$$

où $z \in L^2(Q)$.

Il est clair que $\bar{y}(v)-\bar{z}_d+\beta(a)F'\left(\int_0^\omega \beta y(v)da\right)z(t,x)$ appartient à $L^2(Q)$.

Alors d'après <u>le théorème 1.2</u> , (D_4) admet une solution unique φ.

Notons $\eta : L^2(Q_T) \mapsto L^2(Q_T) \quad z \mapsto \varphi(z).(\omega)$; $\varphi(z)$ étant la solution de (D_4)

Nous allons montrer que pour certaines valeurs de λ, η est strictement contractante.

Soit z_1 et z_2 deux éléments de $L^2(Q_T)$.

Posons $z=z_1-z_2$ et $\varphi = \eta(z_1) - \eta(z_2)$ alors φ vérifie

$$\begin{cases} \Lambda_0\varphi - \Delta\varphi + (\mu+\lambda)\varphi = \beta(a)\bar{F}'\left(\int_0^\omega \beta y(v)da\right)z(t,x) & dans\, Q \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & sur\, \Sigma \\ \varphi(0,a,x) = 0 & dans\, Q_\omega \\ \varphi(t,0,x) = 0 & dans\, Q_l \end{cases}$$

Multiplions la première équation par φ et utilisons la formule d'intégration par parties.

On trouve

$$\frac{1}{2}\|\varphi(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi(\omega)\|^2 + \|\nabla\varphi\|^2 + \left\|\sqrt{\mu+\lambda}\,\varphi\right\|^2 = \int_Q \beta(a)F'\left(\int_0^\omega \beta y(v)da\right)z(t,x)\varphi(t,a,x)dQ$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\|\varphi(\omega)\|^2 + \lambda\|\varphi\|^2 \leq \lambda\int_Q \varphi^2 dQ + \frac{k}{\lambda}\int_Q \left[\beta(a)F\left(\int_0^\omega \beta y(v)\right)z(t,x)\right]^2 dQ$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\|\varphi(\omega)\|^2 + \lambda\|\varphi\|^2 \leq \lambda\|\varphi\|^2 + \frac{k\beta_\infty^2 K_F^2}{\lambda}\int_Q z^2(t,x)da$$

soit $\|\varphi(\omega)\|^2 \leq 2k\frac{\beta_\infty^2 K_F^2}{\lambda}\|z\|^2$.

En choisissant $\lambda > 2k\beta_\infty^2 K_F^2$ on aura :

$$\|\eta(z_1) - \eta(z_2)\|^2_{L^2(Q_T)} \leq L\|z_1 - z_2\| \text{ avec } L = \frac{2k\beta_\infty^2 K_F^2}{\lambda} < 1$$

Par conséquent il existe $z \in L^2(Q_T)$ telle que :

$\eta(z) = \varphi(z)\,(.,\omega,.) = z$ i.e que $\varphi(z)$ est la solution de :

$$\begin{cases} \Lambda_0\varphi-\Delta\varphi+(\mu+\lambda)\varphi=\beta(a)F'\left(\int_0^{\omega}\beta y(u)da\right)\varphi(t,\omega,x)+\bar{y}(v)-\bar{z}_d & dans Q \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 & sur \Sigma \\ \varphi(0,a,x)=0 & dans Q_\omega \\ \varphi(t,0,x)=0 & dans Q_t \end{cases}$$

Posons $\theta=e^{\lambda t}\varphi$ alors on a compte tenu du lemme 1.5 pour tout z $\in L^2(U\,;V)$ on a :

$$\int_U\langle\Lambda_0 e^{\lambda t}\varphi,z\rangle dtda+\int_Q\left[\nabla(e^{\lambda t}\varphi)\nabla z+\mu e^{\lambda t}\varphi z\right]dQ=$$

$$=\int_U\langle\Lambda_0\varphi,e^{\lambda t}z\rangle dtda+\lambda\int_Q e^{\lambda t}z\varphi dQ+\int_Q\left[\nabla\varphi\nabla e^{\lambda t}z+\mu\varphi e^{\lambda t}z\right]dQ$$

$$=\int_U\langle\Lambda_0\varphi,e^{\lambda t}z\rangle dtda+\int_Q\left[\nabla\varphi\nabla e^{\lambda t}z+(\mu+\lambda)\varphi e^{\lambda t}z\right]dQ$$

$$=\int_Q\left[\bar{y}(v)-\bar{z}_d+\beta(a)F'\left(\int_0^{\omega}\beta y(v)\right)\varphi(t,\omega,x)\right]e^{\lambda t}zdQ$$

d'où $\displaystyle\int_U\langle\Lambda_0(e^{\lambda t}\varphi),z\rangle dU+\int_Q\left[\nabla(e^{\lambda t}\varphi)\nabla z+\mu(e^{\lambda t}\varphi)z\right]dQ$

$$=\int_Q\left[y(v)-z_d+\beta(a)F'\left(\int_0^{\omega}\beta(a)y(v)da\right)e^{\lambda t}\varphi(t,\omega,x)\right]zdQ$$

i.e

$$\int_U\langle\Lambda_0\theta,z\rangle dU+\int_Q\left[\nabla\theta\nabla z+\mu\theta z\right]dQ=\int_Q\left[y(v)-z_d+\beta(a)F'\left(\int_0^{\omega}\beta(a)y(v)da\right)\theta(t,\omega,x)\right]zdQ$$

$$\begin{cases} \Lambda_0\theta-\Delta\theta+\mu\theta=y(v)-z_d+\beta(a)F'\left(\int_0^{\omega}\beta y(v)da\right)\theta(t,\omega,x)\ dans Q \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n}=0 & sur\ \ \Sigma \\ \theta(0,a,x)=0 & dans\ \ Q_\omega \\ \theta(t,0,x)=0 & dans\ \ Q_T \end{cases}$$

i.e (D_2)

Donc (D_1) admet une solution unique puisque la solution de (D_2) est unique.

2.2. b Conditions nécessaires d'optimalité

Nous pouvons maintenant donner des conditions nécessaires d'optimalité :

Théorème 2.4

On suppose les hypothèses du théorème 2.3 vérifiées.

Alors le problème (P) admet au moins une solution.

De plus si v* est un contrôle optimal alors :

$$v^* = \begin{cases} 0 \; pp \, sur \{\theta_{/\Sigma} \geq 0\} \\ v_0 \; pp \, sur \{\theta_{/\Sigma} \leq -N v_0\} \\ -\frac{1}{N}\theta_{/\Sigma} \; pp \, sur \{-N v_0 < \theta_{/\Sigma} < 0\} \end{cases}$$

Où θ , l'état adjoint est la solution du problème.

$$\begin{cases} -\Lambda_0\theta - \Delta\theta + \mu\theta = y(v^*) - z_d + \beta(a) F'\left(\int_0 \beta y(v^*) da\right) & dans Q \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 & sur \Sigma \\ \theta(T,a,x) = 0 & dans Q_\omega \\ \theta(t,\omega,x) = 0 & dans Q_t \end{cases}$$

<u>Démonstration du théorème 2.4</u>

Sous les hypothèses du théorème 2.4, les hypothèses du <u>théorème 2.3</u> sont vérifiées, et donc on a l'existence d'au moins un contrôle optimal .

Soit v* un contrôle optimal et u ∈ $T_{U_{ad}}(v^*)$, cône tangent à U_{ad} en v*.

Pour s assez petit on a :

$$\frac{J(v^*+su)-J(v^*)}{s} = -2\left(\frac{y(v^*+su)-y(v^*)}{s}, z_d\right)_H + N(u, 2v^*+su)_{L^2(\Sigma)} +$$

$$+\left(\frac{y(v^*+su)-y(v^*)}{s}, y(v^*+su)+y(v^*)\right)_H$$

Rappelons que $y(v^*+su) \to y(v^*)$ dans $L^2(Q)$ cf <u>Proposition 1.7</u>; et que

$\left(\frac{y(v^*+su)-y(v^*)}{s}\right)$ converge dans $L^2(Q)$ vers un élément que nous noterons $y'(v^*,u)$

vérifiant le système.

$$(P_1)\begin{cases}\Lambda_0 y'(v^*,u)-\Delta y'(v^*,u)+\mu y'(v^*,u)=0 & dans Q\\ \dfrac{\partial y'(v^*,u)}{\partial n}=u & sur \Sigma\\ y'(v^*,u)(0,a,x)=0 & dans Q_\omega\\ y'(v^*,u)(t,0,x)=F'\left(\int_0^\omega \beta y(v^*)da\right)\int_0^\omega \beta y'(v^*,u)da & dans Q_I\end{cases}$$

Alors on obtient que

$$J'(v^*,u)=-2\int_Q y'(v^*,u)z_d dQ+2N\int_\Sigma uv^*d\Sigma+2\int_Q y'(v^*,u)y(v^*)dQ$$

i.e

$$J'(v^*,u)=\ 2\int_Q y'(v^*,u)(y(v^*)-z_d)dQ+2N\int_\Sigma uv^*d\Sigma$$

Comme v* est un contrôle optimal, on a :

$\dfrac{J(v^*+su)-J(v^*)}{s}\geq 0$ et donc

$$\int_Q y'(v^*,u)[y(v^*)-z_d]dQ+N\int_\Sigma uv^*d\Sigma\geq 0 \qquad (R_7)$$

Multiplions la première équation de (D_1) par $y'(v^*,u)$ et intégrons par parties on trouve

$$\int\langle\Lambda_0\theta,y'(v^*,u)\rangle dU+\int_Q[\nabla\theta\nabla y'(v^*,u)+\mu\theta y'(v^*,u)]dQ=$$

$$\int_Q y'(v^*,u)(y(v^*)-z_d)+\int_Q\beta(a)F'\left(\int_0^\omega\beta y(v^*)da\right)\theta(t,0,x)y'(v^*,u)dQ \quad . \qquad (R_8)$$

D'autre part :

$$\int\langle-\Lambda_0\theta,y'(v^*,u)\rangle dU+\int_Q[\nabla\theta\nabla y'(v^*,u)+\mu\theta y'(v^*,u)]dQ$$

$$=\int_{Q_I}\theta(t,0,x)y'(v^*,u)(t,0,x)dtdx+\int\langle\Lambda_0 y'(v^*,u),\theta\rangle dU+\int_Q[\nabla\theta\nabla y'(v^*,u)+\mu\theta y'(v^*,u)]dQ$$

$$=\int_{Q_I}\theta(t,0,x)F'\left(\int_0^\omega\beta y(v^*)da\right)\int_0^\omega\beta(a)y'(v^*,u)dadtdx+\int_\Sigma u\,\theta_{|\Sigma}d\Sigma \quad (R_9)$$

De (R_9) et de (R_8) on tire que :

$$\int_\Sigma u\,\theta_{|\Sigma}d\Sigma=\int_Q y'(v^*,u)(y(v^*)-z_d)dQ$$

On tire alors de (R_7) que :

$$N\int_\Sigma uv^*d\Sigma+\int_\Sigma u\,\theta_{|\Sigma}d\Sigma\geq 0$$

i.e $\int_\Sigma u[Nv^*+\theta_{|\Sigma}]d\Sigma\geq 0$ pour tout $u\in T_{U_{ad}}(v^*)$

Alors $-(Nv^*+\theta_\Sigma)\in N_{U_{ad}}(v^*)$ cône normal à U_{ad} en v^* dans $L^2(\Sigma)$.

Par conséquent pour tout $u\in U_{ad}=\{v\in L^2(\Sigma) 0\leq v\leq v_0\, pp\}$

On doit avoir $-\int(v^*-u)(Nv^*+\theta_\Sigma)d\Sigma\geq 0$ $\qquad$ (R_{10})

* Maintenant supposons que $\theta_{|\Sigma}>0$ pp dans $I\subset\Sigma$

Supposons que $v^* > 0$ sur un ensemble de mesure non nulle $J\subset I$

Prenons alors $u=\begin{cases} v^* \text{ sur } \Sigma\backslash J \\ 0 \quad \text{sur } J \end{cases}$

Alors $-\int(v^*-u)(Nv^*+\theta_\Sigma)d\Sigma=-\int_J(v^*)(Nv^*+\theta_\Sigma)d\Sigma<0$

Par conséquent $v^* = 0$ sur tout ensemble de mesure non nulle de I.

Ainsi $v^* = 0$ pp dans I.

* Supposons que $\theta_{|\Sigma} \leq 0$ on a donc plusieurs sous cas :

- Supposons que $\theta_\Sigma<-Nv_0$ pp dans $I\subset\Sigma$

  Supposons que $v^* < v_0$ sur un ensemble $J\subset I$ de mesure non nulle

  posons $u=\begin{cases} v^* \text{ sur } \Sigma J \\ v_0 \text{ sur } I \end{cases}$, alors

  $-\int(v^*-u)(Nv^*+\theta_\Sigma)d\Sigma=\int_J(v_0-v^*)(Nv^*+\theta_\Sigma)d\Sigma<0$ car

  $Nv^*+\theta_{|\Sigma}<0$ pp sur Σ.

  Ce qui contredit (R_{10}). Alors $v^* = v_0$ pp sur I.

- Supposons que $\theta_{|\Sigma}=0$ pp sur $I\subset\Sigma$

  Supposons que $v^* > 0$ sur un ensemble $J\subset I$ de mesure non nulle et prenons [illegible]

  [illegible]

  On a [illegible]

  Ce qui contredit (R_{10}) [illegible]

- Supposons que [illegible]

  - Supposons que [illegible]

Posons $u=\begin{cases} 0 & sur J \\ v^* & sur \Sigma J \end{cases}$

Alors

$$-\int_{\Sigma}(v_*-u)(Nv^*+\theta_{\Sigma})d\sum = -\int_I (v^*)(Nv^*+\theta_{\Sigma})d\sum \leq 0$$

pour avoir (R_{10}) il faut donc que $v^*=0$ sur I .Or cela donnera que $Nv^*+\theta_{/\Sigma}<0$,on aura donc pas $Nv^*+\theta_{/\Sigma}>0$.

- Supposons que $Nv^*+\ \theta_{/\Sigma}<0$ sur J de mesure nulle $J\subset I$

Posons $u=\begin{cases} v^* sur \sum J \\ v_0 \text{ sur J} \end{cases}$

$$-\int_{\Sigma}(v_*-u)(Nv^*+\theta_{\Sigma})d\sum = -\int_I (v_0-v^*)(Nv^*+\theta_{\Sigma})d\sum \leq 0.$$

Pour avoir (R_{10})il faut avoir $v^*=v_0$ sur J.Or cela nous donnera

$Nv^*+\ \theta_{/\Sigma}=N\,v_0+\ \theta_{/\Sigma}<0$ et cela contredit $-Nv_0<\theta_{\Sigma}<0$ pp sur $I\subset\Sigma$

Par conséquent on doit avoir $v^*=\frac{-1}{N}\theta_{/\Sigma}$

- Supposons enfin que $\theta_{\Sigma}=-Nv_0$ pp sur $I\subset\Sigma$

  Supposons $0<v^*<v_0$ pp sur $J\subset I$ avec J de mesure non nulle.

  Prenons $u=\begin{cases} v^* sur \Sigma J \\ v_0 \text{ sur J} \end{cases}$

On a donc $\int_{\Sigma}(v^*-u)(Nv^*+\theta_{\Sigma})d\Sigma=\int_I v^*(Nv^*-v_0)=N\int_I v^*(v^*-v_0)d\Sigma=<0$

Par conséquent $v^*=v_0$

Donc $v^*=v_0$ pp sur I.

Récapitulons. On a donc : $$v_* = \begin{cases} 0 \; pp \, sur \{\theta_{/\Sigma} \geq 0\} \\ v_0 \; pp \, sur \{\theta_{/\Sigma} \leq -Nv_0\} \\ -\frac{1}{N}\theta_{/\Sigma} \; pp \, sur \{-Nv_0 < \theta_{/\Sigma} < 0\} \end{cases}$$

Remarque2.2

*Le résultat peut être généralisé au cas où le contrôle ne s'exerce que sur une partie de la frontière .

*Le résultat du théorème 2.4 peut être généraliser au cas où F est une fonction de classe C^1 , lipschitzienne et de la forme $F(\alpha) = \alpha\,\Phi(\alpha)$.

CHAPITRE III : CONTROLABILITE APPROCHEE

I - INTRODUCTION

On considère dans ce chapitre une population dont la dynamique est régie par le système linéaire.

$$(P_{3\text{-}1})\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+\mu y=0 & dans Q\\ \dfrac{\partial y}{\partial n}=v & sur \Sigma\\ y(0,a,x)=y_0(a,x) & dans Q_\omega\\ y(t,0,x)=\int_0^\omega \beta y da & dans Q_T\end{cases}$$

La contrôlabilité approchée du système ($P_{3.1}$) en temps T consiste pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout y_d appartenant à un espace donné à trouver un contrôle v tel que si $y(v)$ est la solution de ($P_{3.1}$) alors à l'instant T on ait

$$\|y(v)(T)-y_d\|\leq\varepsilon. \quad (1)$$

Cette notion de contrôlabilité approchée a intéressé beaucoup d'auteurs.
La méthode générale consiste à un définir un problème adjoint , et une fonctionnelle G-dérivable admettant un minimum absolu.
Le contrôle défini à partir de ce minimum répondra à la question.
Cette méthode est utilisé dans [13] pour prouver la contrôlabilité approchée de l'équation semi-linéaire de la chaleur.

Dans [28] l'auteur utilise une variante de la même méthode pour montrer la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur.

B. AINSEBA et M. LANGLAIS dans [1] ont prouvé la contrôlabilité approchée du système.

$$
(P_{3\text{-}2})\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial y}{\partial a}-K\Delta y+\mu y=v\chi_O & t>0, A>a>0, x\in\Omega\\ \dfrac{\partial y}{\partial n}=0 & t>0, A>a>0, x\in\partial\Omega\\ y(0,a,x)=y_0(a,x) & A>a>0, x\in\Omega\\ y(t,0,x)=K\int_0^{\omega}\beta y\,da & t>0 \ x\in\Omega\end{cases}
$$

où χ_O est la fonction caractéristique de l'ouvert $O \subset \Omega$.

Dans le même article ils ont utilisé la méthode ci-dessus mentionnée pour donner un algorithme donnant un contrôle qui répond à la question.

Dans [4] les auteurs se sont intéressé à la contrôlabilité locale exacte. Ils ont alors prouvé que $(P_{3\text{-}2})$ est nul-contrôlable à condition de choisir la densité initial y_0 dans un voisinage de y_i solution indépendante de t de $(P_{3\text{-}2})$

Dans tous les exemples cités le contrôle est interne.

Ici, nous nous intéressons au cas où le contrôle est frontière et nous examinons la contrôlabilité approchée en un temps T arbitraire.

On n'examinera pas la question du comportement asymptotique comme cela a été fait dans [11]

On peut voir dans [3] un problème de stabilisation.

II - RESULTATS CONNUS [1]

Dans ce paragraphe nous allons donner quelques résultats connus.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^N$ vérifiant $\overline{O}\subset\Omega$.

1. Contrôlabilité approchée dans un cas particulier

Proposition 3.1.

Soit β une fonction polynomiale sur $[0, A_0]$ où $A_0 > 0$.

Alors le système

$$(P_{3\text{-}2})\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial y}{\partial a}-K\Delta y+\mu y=v\chi_O & t>0, 0<a<A,\ x\in\Omega\\ y(0,a,x)=0 & 0<a<A,\ x\in\Omega\\ K\dfrac{\partial y}{\partial n}=0 & x\in\Gamma, T>t>0,\ 0<a<A\\ y(t,0,x)=K\int_0^{\omega}\beta(a)y(t,a,x)da & x\in\Omega,\ t>0\end{cases}$$

où χ_O est la fonction caractéristique de O , est approximativement contrôlable dans $L^2(Q_\omega)$

Pour la preuve cf [1]

2. Contrôlabilité dans le cas général

On suppose que

(L_1) : $\beta:[0,\omega]\to\mathbb{R}_+$; β continue et $0<max(Supp(\beta))=A_0<\omega$

(L_2) : $\mu:[0,\omega]\to\mathbb{R}_+$ continue tel que $\int_0^{\omega}\mu(a)da=+\infty$,

On a le théorème

Théorème 3.1.

Sous les hypothèses (L_1) et (L_2) le système

$$(P_{3\text{-}2})\begin{cases}\Lambda_0 y-K\Delta y+\mu y=v\chi_O & (t,a,x)\ x\in Q\\ y(0,a,x)=0 & (a,x)\in Q_A\\ y(t,0,x)=\int_0^{A_0}\beta y da & (t,x)\in Q_T\\ K\dfrac{\partial y}{\partial n}(t,a,\sigma)=0 & (t,a,\sigma)\in\Sigma\end{cases}$$

est approximativement contrôlable dans $L^2(Q_A)$ en tout temps T donné pour $A_0<A<\omega$.

Pour la preuve cf [1]

Remarque 3.1.

- La deuxième condition de (L_2) signifie que la probabilité de survie à l'âge

a , $\pi(a)=exp\left(-\int_0^a \mu(s)ds\right)$ tend vers zéro quand a tend vers ω.

En fait l'hypothèse $\int_0^\omega \mu(a)da=+\infty$, n'intervient pas dans la preuve du *théorème 3.1.* Elle permet seulement d'affirmer que chaque individu de la population meurt avant d'atteindre l'âge ω.

La condition $y(0,a,x) = 0$ est obtenue en faisant une translation sur les données. Plus précisément on pose $y = y(v) - y(0)$ où **y(0)** est la solution de (P_{31}) pour $v = 0$.

Enfin du *théorème 3.1.* et celui de Hahn Banach on tire le théorème de continuation unique .

Théorème 3.2 :

Soit ρ la solution de :

$$\begin{cases} -\Lambda_0\rho-\Delta\rho+\mu(a)\rho=\beta(a)\rho(t,0,x) & x\in\Omega, 0<t<T,\ 0<a<A \\ \rho(0,A,x)=0 & x\in\Omega,\ 0<t<T \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial n}(t,a,\sigma)=0 & \sigma\in\Gamma, t>0,\ 0<a<A \\ \rho(t,a,x)=0 & (t,a,x)\in]0,T[\times]0,A[\times\Omega \end{cases}$$

Alors $\rho(t,a,x)\equiv 0$ sur $(0,T)\times(0,A)\times\Omega$ (2) .

Remarque 3.2

Dans la plupart des travaux sur la contrôlabilité approchée, on utilise la continuation unique.

Dans ce travail on montre d'abord la contrôlabilité approchée, en prouvant par l'absurde que l' ensemble des « états atteignables » au temps T est dense dans $L^2(Q_\omega)$.

Par suite nous en déduisons la continuation unique pour pouvoir construire un algorithme donnant le contrôle.

Le résultat que nous allons donner est dû à L . Hörmander , il s'agit d'un corollaire du théorème de Holmgren .

***Théorème** 3.3* [18]

Soient O_1 et O_2 deux ouverts convexes de R^k; tels que $O_1 \subset O_2$ et P(D) un opérateur différentiel à cœficients constants tel que tout plan caractéristique π par rapport de P(D) et vérifiant $\pi \cap O_2 \neq \phi$ satisfait aussi $\pi \cap O_1 \neq \phi$.

Alors toute solution $u \in \mathcal{D}'(O_2)$ de l'équation $P(D)u=0$ telle que $u=0$ dans O_1 vérifie $u=0$ dans O_2

.

Remarque 3.3

* $u=0$ dans O_i est prise au sens des distributions sur O_i, $i=1,2$.
* $k \in \mathbb{N}^*$

III – CONTROLABILITE APPROCHEE DU PROBLEME P

1. Position du problème

Dans ce chapitre on fera les hypothèses suivantes.

(H_1) : : Ω est un domaine borné de frontière $\partial\Omega=\Gamma$ variété différentiable de classe C^1 . Ω étant localement d' un seul côté de Γ .

(L_3) : $\mu \in L^\infty(0,\omega)$; $\mu \geq 0$ pp sur $]0,\omega[$.

(L_4) : $\beta \in C(0;\omega)$ et supp $\beta=[\omega_0;\omega] \subset]0;\omega]$

En faisant la translation $y=y(v)-y(0)$ où $y(0)$ est la solution de (P_{31}) pour $v=0$, on obtient le problème

$$(P_{3.3.})\begin{cases}\Lambda_0 y-\Delta y+\mu y=0 & dans\ Q\\ \dfrac{\partial y}{\partial n}=v & sur\Sigma\\ y(0,a,x)=0 & dans\ Q_\omega\\ y(t,0,x)=\int_0^{\omega}\beta y da & dans\ Q_l\end{cases}$$

Soit $y_d\in L^2(Q_\omega)$ et $\varepsilon > 0$,on cherche dans ces conditions un contrôle v, tel que $\|y(v)(T)-y_d\|_{L^2(Q_\omega)}<\varepsilon$.

En d'autres termes, on montre que l'ensemble $A_d(T)=\{y(v)(T,.,.)\ ;\ v\in L^2(\Sigma)\}$ est dense dans $L^2(Q_\omega)$.

Ensuite nous construirons un algorithme donnant le contrôle.

Remarque 3.4 :

Il est bon de remarquer d'après le paragraphe II du chapitre II que le problème $(P_{3\text{-}1})$ admet une solution unique.

2. Système adjoint

Nous allons dans ce sous paragraphe introduire le problème « adjoint » de $(P_{3\text{-}3})$, ensuite nous prouverons l'existence et l'unicité d'une solution pour ce problème.

On appellera système adjoint de $(P_{3\text{-}3})$ le système

$$(P_{3.4.})\begin{cases}-\Lambda_0\varphi-\Delta\varphi+\mu\varphi=\beta(a)\varphi(t,0,x) & dans\ Q\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 & sur\Sigma\\ \varphi(T,a,x)=\varphi_0 & dans\ Q_\omega\\ \varphi(t,\omega,x)=0 & dans\ Q_T\end{cases}$$

où φ^0 est une fonction quelconque de $L^2(Q_\omega)$.

On a le théorème d'existence suivant :

Théorème 3.4

Sous les hypothèses (H_1), (L_3) et (L_4) le problème $(P_{3\text{-}4})$ admet une solution unique.

Preuve :

Elle se fait exactement comme celle de la proposition 2.2.

3 Résultats auxiliaires.

Ces résultats seront utilisés dans la preuve du résultat de contrôlabilité.

lemme 3.1.

Sous les hypothèses $(H_1);(L_3)$ *et* (L_4)

si $\rho\in L^2(U;H^1(\Omega))$ *vérifie :*

$$(P_{3\text{-}5})\begin{cases}-\Lambda_0\rho-\Delta\rho=0 \ dans\ Q\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial n}=0\ sur\ \Sigma\\ \rho_{/\Sigma}=0\ sur\ \Sigma\end{cases} \qquad alors\ \ \rho\equiv0\ .$$

preuve du lemme3.1

Si ρ vérifie le système ci –dessus ,alors pour presque tout $(t,a)\in U,\rho(t,a,.)\in H_0^1(\Omega)$.

Soit $x_0\in\Gamma$, et $\eta>0$, notons $\Omega_1=\Omega\cup B(x_0;\eta)$ où $B(x_0;\eta)$ est la boule ouverte de $\mathbb{R}^N$ de centre x_0 et de rayon η

Notons ρ_1 le prolongement suivant de ρ :

Pour presque tout $(t,a,x)\in U\times\Omega_1$ $\rho_1(t,a,x)=\begin{cases}\rho(t,a,x)\ si\ (t,a,x)\in Q\\ 0\quad si\ (t,a,x)\in U\times(\Omega_1\backslash\Omega)\end{cases}$

Alors pour presque tout $(t,a)\in U;\rho_1(t,a,.)\in H^1(\Omega_1)$.

En effet soit $\widetilde{\rho}_1(t,a,x)=\begin{cases}\rho(t,a,x)\ si\ \ (t,a,x)\in U\times\Omega\\ 0\quad si\ \ (t,a,x)\in U\times(R^N\backslash\Omega)\end{cases}$

On a d'après [20] pour presque tout $(t,a)\in U;\widetilde{\rho}_1(t,a,.)\in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Alors $\rho_1(t,a,.)=\tilde{\rho}_1(t,a,.)\in H^1(\Omega_1)$ et donc $\rho_1\in L^2(U;H^1(\Omega_1))$.

Prouvons que $\begin{cases}-\tilde{\Lambda}_0\tilde{\rho}_1-\Delta\tilde{\rho}_1=0\\ \dfrac{\partial\rho_1}{\partial n}=0\end{cases}$ où $\tilde{\Lambda}_0=\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial a}$ au sens de $\mathcal{D}'\left(U;\left((H^1(\Omega_1))'\right)\right)$

Soit P , l'opérateur de prolongement cf [20]chap1 §12 sect 4, P est linéaire continue de $H^1(\Omega_1)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Considérons aussi R_Ω la restriction à Ω ; R_Ω est continue de $H^1(\mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\Omega)$ cf [20]chap1 §11 sect 5.

Soit $\theta\in\mathcal{D}(U)$ et $\xi\in H^1(\Omega_1)$ par définition de Λ_0 on a :

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\Lambda}_0\rho_1(\theta),\xi\rangle&=-\int_{U\times\Omega_1}\rho_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)\xi\,dtdadx\\ &=-\int_{U\times\Omega}\rho\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)(R_\Omega oP)(\xi)\,dtdxda\\ &=\langle\Lambda_0\rho(\theta),(R_\Omega oP)(\xi)\rangle\end{aligned}$$

car $\rho_1\equiv 0 \quad sur\, U\times(\Omega_1\backslash\Omega)$.

Mais on sait que $\Lambda_0\rho\in L^2\left(U,\left((H^1(\Omega))'\right)\right)$ alors

$\tilde{\Lambda}_0\rho_1(t,a,.)=[(\Lambda_0\rho)(t,a)]o(R_\Omega oP)$ pp dans U .

Par conséquent $\tilde{\Lambda}_0\rho_1\in L^2\left(U;(H^1(\Omega_1))'\right)$.

Maintenant pour tout :

$$\xi\in L^2(U,H^1(\Omega_1))$$
$$\begin{aligned}\int_U\langle\tilde{\Lambda}_0\rho_1;\xi\rangle dtda&=\int_U\langle\Lambda_0\rho;(R_\Omega oP)\xi\rangle dtda\\ &=\int_Q\nabla\rho\nabla((R_\Omega oP)\xi)dQ\end{aligned}$$

puisque ρ est solution de($P_{3\text{-}5}$).

Mais comme $\nabla\rho_1=0 \quad pp \quad dans \quad U\times(\Omega_1\backslash\overline{\Omega})$,on tire que :

$\int_U\langle\tilde{\Lambda}_0\rho_1;\xi\rangle dtda=\int_{Q_1}\nabla\rho_1\nabla\xi\,dtdadx$ où $Q=U\times\Omega$.

Cette dernière relation signifie que ρ_1 vérifie : $\begin{cases}-\tilde{\Lambda}_0\rho_1-\Delta\rho_1=0 \;dans\; Q_1\\ \dfrac{\partial\rho_1}{\partial n}=0\; sur\; \Sigma_1=U\times\partial\Omega_1\end{cases}$

Par conséquent on a comme $\tilde{\Lambda}_0=\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial a}$

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial\rho_1}{\partial t}-\dfrac{\partial\rho_1}{\partial a}-\Delta\rho_1=0\; dans\; Q_1\\ \dfrac{\partial\rho_1}{\partial n}=0\; sur\; \Sigma_1\end{cases}$$

Notons $P(D)=-\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial a}-\Delta$.

Soit π un plan caractéristique par rapport à l'opérateur P(D) .

Notons qu' à priori $\pi=\left\{(t,a,x)\in IR^{N+2};\alpha t+\gamma a+\sum_{i=1}^{N}c_i x_i=d\right\}$où α,γ,c_i et d sont des constantes réelles quelconques .

π un plan caractéristique par rapport P(D) $\Leftrightarrow -\sum c_i^2=0$.

Cela nous donne $c_i=0, i=1,...,N$. Alors $\pi=\{(t,a,x)\in IR^{N+2};\alpha t+\gamma a=d\}$.

Remarquons que $\Omega_1=\Omega\cup B(x_0;\eta)$ est localement connexe par arc et comme Ω *et* $B(x_0,\eta)$ sont connexes on a que : $\Omega_1=\Omega\cup B(x_0;\eta)$est connexe par arc .

Soit $x_1\in\Omega$ *et* $z_1\in\Omega_1\backslash\Omega$ alors pour tout $\lambda\in[0;1]$, $(1-\lambda)z_1+\lambda x_1\in\Omega_1$.

Pour tout $\lambda\in[0;1]$,il existe r_λ tel que $B((1-\lambda)z_1+\lambda x_1;r_\lambda))\subset\Omega_1$. On peut prendre r_0 *tel que* $B(z_1,r_0)\subset\Omega_1\backslash\Omega$.

Posons $O_1=B(z_1;r_0)$ $et O_2=\bigcup_{\lambda\in[0;1]}B((1-\lambda)z_1+\lambda x_1,r_\lambda)$.

O_1 *et* O_2 sont convexes et l' on a $O_1\subset O_2$. .

Notons que si $\pi\cap U\times O_2\neq\phi$ on a $\pi\cap U\times O_1\neq\phi$.

En effet :

si $(t_0,a_0,x)\in\pi\cap U\times O_2$ on a $\alpha t_0+\gamma a_0=d$, par conséquent pour tout $x\in O_1$ $(t_0,a_0,x)\in\pi\cap U\times O_1$ et donc $\pi\cap U\times O_1\neq\phi$.

Comme $P(D)\rho_1=0$ $dans U\times\Omega_1$ on a $P(D)\rho_1=0$ $dans U\times O_2$ de plus $\rho_1(t,a,x)=o$ pp dans $U\times O_1$.

Par conséquent du théorème(de Holmgren)3.3 on tire que $\rho_1(t,a,x)=0 pp$ dans $U\times O_2$ et donc $\rho_1(t,a,x_1)=0$ pour presque tout $(t,a,x_1)\in U\times\Omega$. Et cela donne $\rho\equiv 0$.

Remarque3.4

Il est évident que tout individu de la population n'est fertile qu' après un certain âge, et qu' à partir d'un certain âge également il perd sa fertilité .

Par conséquent les hypothèses sur la fonction natalité : $\beta\in C(0;\omega)$ et $\text{supp}\,\beta=[\omega_0;\omega]\subset]0;\omega]$ sont naturelles .

Proposition3.1

Sous les hypothèses $(H_1);(L_3)$ *et* (L_4), *le système*

$$(P_{3-6})\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial y}{\partial a}-\Delta y=0 & dans\ Q\\ \dfrac{\partial y}{\partial n}=v & sur\ \Sigma\\ y(0,a,x)=y_0 & dans\ Q_\omega\\ y(t,0,x)=\int_0^\omega \beta y da & dans\ Q_T\end{cases}$$

(P_{3-6}) est approximativement contrôlable dans $L^2(Q_\omega)$ à l'instant T.

Preuve de la proposition3-1

Suivant la remarque 3.1 on peut poser $y_0\equiv 0$.

On suppose que la proposition n'est pas vérifiée.

Il existerait alors une fonction g non identiquement nulle appartenant à l'orthogonal de $A_d=\left\{y(T,v), v\in L^2(\Sigma), y\, solution\ de(P_{3-6})\right\}$ dans $L^2(Q_\omega)$.

Soit φ solution de

$$(\hat{P}_{3-5})\begin{cases}-\Lambda_0\varphi-\Delta\varphi=\beta(a)\varphi(t,0,x)\ dans\ Q\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \quad sur\ \Sigma\\ \varphi(T,a,x)=g(a,x)\ dans\ Q_\omega\\ \varphi(t,\omega,x)=0\ dans\ Q_T\end{cases}$$

Multiplions la première équation de (P_{3-6}) par φ solution de $(\hat{P}_{3-5})$ et intégrons par parties on trouve :

$$\int_Q\varphi(t,0,x)\beta(a)y(t,a,x)dtdxda=-\int_{Q\omega}g(a,x)y(T,a,x)dadx+\int_{QT}\varphi(t,0,x)y(t,0,x)dtdx+\int_\Sigma v\varphi_{/\Sigma}d\Sigma$$

$$=\int_{Q\omega}g(a,x)y(T,a,x)dadx+\int_{QT}\varphi(t,0,x)\int_0^\omega\beta(a)y(t,a,x)dadtdx+\int_\Sigma v\varphi_{/\Sigma}d\Sigma$$

$\Rightarrow\int_\Sigma v\varphi_{/\Sigma}d\Sigma=\int_{Q\omega}gy(T,a,x)dadx=0$ grâce à la définition de g et cela pour tout v dans $L^2(\Sigma)$.

Prenons $v=\varphi_{/\Sigma}$ alors $\int_\Sigma\varphi_{/\Sigma}^2d\Sigma=0\Rightarrow\varphi_{/\Sigma}=0$ pp sur Σ.

On a donc $\begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}-\Delta\varphi=\beta\varphi(t,0,x) & sur Q_0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 & sur \Sigma_0 \\ \varphi_{/\Sigma}=0 & sur \Sigma_0 \end{cases}$

Posons : $U_0=]0;T[\times]0;\omega_0[; Q_0=U_0\times\Omega et \Sigma_0=U_0\times\Gamma$.

Alors comme $\beta(a)=0$ pour $a\in[0;\omega_0]$ on a que :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}-\Delta\varphi=0 & sur Q_0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 & sur \Sigma_0 \\ \varphi_{/\Sigma}=0 & sur \Sigma_0 \end{cases}$$

où $-\dfrac{\partial}{\partial t}$; $-\dfrac{\partial}{\partial a}$ sont prises au sens de $\mathcal{D}'\left(U,(H^1(\Omega))'\right)$,on a $\Lambda_0\varphi\in L^2\left(U,(H^1(\Omega))'\right)$

.

Posons $\Lambda_1=\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial a}$ au sens de $\mathcal{D}'\left(U_0,(H^1(\Omega))'\right)$,.

Montrons que $\Lambda_1(\varphi_{/Q_0})=\Lambda_0\varphi_{/U_0}$.

Soit $\theta\in D(U_0)$ on peut supposer que $\theta\in D(U)$.

$$\Lambda_1\varphi_{/Q_0}(\theta)=-\int_{U_0}\varphi_{/Q_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)dtda$$

$$= -\int_U\varphi\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)dtda$$

$$= \Lambda_0\varphi(\theta)=\Lambda_0\varphi_{/U_0}(\theta)$$

Alors $\Lambda_1(\varphi_{/Q_0})=\Lambda_0\varphi_{/U_0}$ et donc $\Lambda_1(\varphi_{/Q_0})\in L^2\left(U_0;(H^1(\Omega))'\right)$

Notons $z=\varphi_{/Q_0}$ on a $\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t}-\dfrac{\partial z}{\partial a}-\Delta z=0 & sur Q_0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial n}=0 & sur \Sigma_0 \\ z_{/\Sigma}=0 & sur \Sigma_0 \end{cases}$.

Du lemme3.1 on tire que z=0 pp sur Q_0 .

Par conséquent $\varphi_{/Q_0}=0$ pp dans Q_0. C'est à dire que $\varphi(t,a,x)=0$ pour presque tout $(t,a,x)\in]0;T[\times]0;\omega_0[\times\Omega$.

Par suite $\varphi(t,0,x)=0$ pour presque tout $(t,x)\in]0;T[\times\Omega$.

On en déduit alors que φ vérifie : $\begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}-\Delta\varphi=0 & sur Q \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 & sur \Sigma \\ \varphi_{/\Sigma}=0 & sur \Sigma \end{cases}$.

Il nous suffit alors d'appliquer le lemme 3.1 pour avoir $\varphi\equiv 0$ .Par conséquent $\varphi(T,a,x)=g(a,x)=0$ pour presque tout $(a,x)\in]0;\omega[\times\Omega$.

Cela contredit g non identiquement nulle .

4 contrôlabilité approchée

Théorème 3.5

Sous les hypothèses (H1), (L_3) et (L_4) le problème ($P_{3\text{-}1}$) est approximativement contrôlable dans $L^2(Q_\omega)$ à l'instant T.

Preuve du théorème3.5

Notons $\hat{y}=[\pi(a)]^{-1}y$ où $\pi(a)=\exp\left(-\int_0^a\mu(s)ds\right)$ et y est la solution de ($P_{3\text{-}1}$).

Par conséquent $\hat{y}$ est la solution de :

$$(P_{3\text{-}7})\begin{cases} \dfrac{\partial\hat{y}}{\partial t}+\dfrac{\partial\hat{y}}{\partial a}-\Delta\hat{y}=0 & dans\ Q \\ \dfrac{\partial\hat{y}}{\partial n}=\hat{v} & sur\ \Sigma \\ \hat{y}(0,a,x)=\hat{y}_0 & dans\ Q_\omega \\ \hat{y}(t,0,x)=\int_0^\omega\hat{\beta}\hat{y}da & dans\ Q_T \end{cases} \quad \text{où } \hat{y}_0=[\pi(a)]^{-1}y_0\ ;\ \hat{v}=[\pi(a)]^{-1}v \text{ et } \hat{\beta}=\pi(a)\beta$$

Comme $\mu\in L^\infty(0,\omega)$ alors $\hat{y}_0\in L^2(Q)$;$\hat{v}\in L^2(\Sigma)$ et $\hat{\beta}\in C^1([0,\omega])$

D'après la proposition 3.1 ($P_{3\text{-}7}$) est approximativement contrôlable . C'est à dire que pour tout $\varphi^0 \in L^2(Q_\omega)$ et tout ε>0, il existe $v_\varepsilon \in L^2(\Sigma)$ tel que $\left\| \hat{y}(T,v_\varepsilon) - \varphi^0[\pi(a)]^{-1} \right\|_{L^2(Q_\omega)} < \varepsilon$

Mais $y(T,v_\varepsilon) - \varphi^0 = \pi(a)\left[\hat{y}(T,v_\varepsilon) - \varphi^0[\pi(a)]^{-1}\right]$ pp dans Q_ω, alors

$|y(T,v_\varepsilon) - \varphi^0| = \left|\pi(a)\left[\hat{y}(T,v_\varepsilon) - \varphi^0[\pi(a)]^{-1}\right]\right| \leq \left|\left[\hat{y}(T,v_\varepsilon) - \varphi^0[\pi(a)]^{-1}\right]\right|$ pp dans Q_ω, car

$\pi(a) = \exp\left(-\int_0^a \mu(s)ds\right) \leq 1$.

Par conséquent : $\|y(T,v_\varepsilon) - \varphi^0\| \leq \left\|\hat{y}(T,v_\varepsilon) - \varphi^0[\pi(a)]^{-1}\right\|_{L^2(Q_\omega)} < \varepsilon$

Ce qui achève la preuve du théorème 3.5

Nous allons déduire du théorème 3.5 le résultat de continuation unique dont on a besoin pour la construction de l' algorithme donnant le contrôle.

Théorème3.6

Sous les hypothèses (H_1), (L_3) et (L_4), si ρ est solution de

$$\begin{cases} -\Lambda_0\rho - \Delta\rho + \mu\rho = \beta\rho(t,0x) & \text{dans } Q \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \rho_{/\Sigma} = 0 & \text{dans } Q_\omega \\ \rho(t,\omega,x) = 0 & \text{dans } Q_T \end{cases} \quad \text{alors } \rho \text{ est identiquement nul dans } Q.$$

Preuve du théorème3.6

Multiplions la première équation de ($P_{3\text{-}1}$) par ρ et intégrons par parties, on trouve :

$$\int \rho(T,a,x)y(T,a,x)dadx = \int_\Sigma v\rho_{/\Sigma}d\Sigma$$

$$= 0 \qquad \text{car } \rho_{/\Sigma} = 0 \text{ pp sur } \Sigma.$$

Cela pour tout v , or l' ensemble des états atteignables à l'instant T est dense dans $L^2(Q_\omega)$. Par suite $\rho(T,a,x)=0$ pp dans Q_ω.

De l'unicité de la solution de ($P_{3\text{-}4}$) on tire que $\rho\equiv 0$.

Remarque 3.6

Il est bon de remarquer que l'on pouvait montrer le résultat de continuation unique, en utilisant le lemme 3.1 et l'hypothèse sur β .

5. *Algorithme donnant le contrôle*

a. Définition d'une fonctionnelle

Introduisons la fonctionnelle J_ε pour ε > 0 fixé

$$J_\varepsilon(g)=\frac{1}{2}\int_\Sigma \rho^2 d\Sigma + \varepsilon\|g\| - \int_{Q\omega} y_d(a,x)g(a,x)dadx$$

pour $g \in L^2(Q_\omega)$ et ρ la solution de

$$(P_{3\text{-}8})\begin{cases} -\Lambda_0\rho-\Delta\rho+\mu(a)\rho=\beta(a)\rho(t,0,x) & dans\ Q \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial n}=0 & sur\ \Sigma \\ \rho(T,a,x)=g(a,x) & dans\ Q_\omega \\ \rho(t,\omega,x)=0 & dans\ Q_T \end{cases}$$

On a la proposition suivante :

***Proposition** 3.2.*

J_ε est strictement convexe, continue sur $L^2(Q_\omega)$ et J_ε G-dérivable en tout point g non identiquement nulle. De plus $\underline{\lim}_{\|g\|\to+\infty} \dfrac{J_\varepsilon(g)}{\|g\|} \geq \varepsilon$ (3)

Preuve de la proposition 3.2

Nous allons d'abord prouver

- la stricte convexité de J_ε

Notons $\rho(g)$ la solution de ($P_{3\text{-}8}$)

Comme ($P_{3\text{-}8}$) est linéaire et admet une solution unique alors

$\rho(g_1+g_2)=\rho(g_1)+\rho(g_2)\ ,\ \rho(\lambda g_1)=\lambda\rho(g_1)$

Alors pour $\alpha\in\,]0,1[$

$$J_\varepsilon(\alpha g_1+(1-\alpha)g_2)-\alpha J_\varepsilon(g_1)-(1-\alpha)J_\varepsilon(g_2) = \varepsilon\left[\|\alpha g_1+(1-\alpha)g_2\|-\alpha\|g_1\|+(1-\alpha)\|g_2\|\right]+$$

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma\left(\alpha\rho(g_1)+(1-\alpha)\rho(g_2)\right)^2_{\Sigma}\,d\Sigma-\frac{1}{2}\int_\Sigma\left[\alpha\rho(g_1)^2_{\Sigma}+(1-\alpha)\rho(g_2)^2_{\Sigma}\right]d\Sigma$$

$$<\frac{1}{2}\int_\Sigma\left\{\left(\alpha^2-\alpha\right)\rho(g_1)^2_{\Sigma}+\left[(1-\alpha)^2-(1-\alpha)\right]\rho(g_2)_{\Sigma}\right\}d\Sigma$$

$$+\int_\Sigma\alpha(1-\alpha)\rho(g_1)_{\Sigma}\,\rho(g_2)_{\Sigma}\,d\Sigma$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_\Sigma\left[(\alpha-1)\rho(g_1)^2_{\Sigma}+\alpha(\alpha-1)\rho(g_2)^2_{\Sigma}\right]d\Sigma+\alpha(\alpha-1)\int_\Sigma\rho(g_1)_{\Sigma}\,\rho(g_2)_{\Sigma}\,d\Sigma$$

$$\leq\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_\Sigma\left[\rho(g_1)_{\Sigma}+\rho(g_2)_{\Sigma}\right]^2d\Sigma$$

<0 car $\alpha\in\,]0,1[$ et $g_2\neq g_1$

- <u>Continuité de J_ε</u>

Remarquons que $g\to\varepsilon\|g\|$, et $g\to\int_{Q_\omega}y_d(a,x)g(a,x)\,da\,dx$ sont continues de $L^2(Q_\omega)$ dans $\mathbb{R}$

Nous allons montrer que l'application $g\to\int_\Sigma\rho(g)^2_{\Sigma}\,d\Sigma$ est continue

Pour cela faisons la transformation :

$\bar{\rho}=e^{\lambda t}\rho$ où λ est un réel strictement positif. Alors $\bar{\rho}$ est la solution de :

$$\begin{cases}-\Lambda_0\bar{\rho}-\Delta\bar{\rho}+(\mu+\lambda)\bar{\rho}=\beta(a)\bar{\rho}(t,0,x) & dans\ Q\\ \dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial n}=0 & sur\ \Sigma\\ \bar{\rho}(T,a,x)=e^{\lambda T}g & dans\ Q_\omega\\ \bar{\rho}(t,\omega,x)=0 & dans\ Q_T\end{cases}$$

Multiplions la première équation par $\bar{\rho}$ et utilisons la formule d'intégration par parties il vient que :

$$\frac{-1}{2}\|\bar{\rho}(T,\cdot\cdot)\|^2+\frac{1}{2}\|\bar{\rho}(0,\cdot\cdot)\|^2+\frac{1}{2}\|\bar{\rho}(\cdot,0,\cdot)\|^2+\|\nabla\bar{\rho}\|^2+\left\|\sqrt{\mu+\lambda}\,\rho\right\|^2=\int_Q\beta(a)\bar{\rho}(t,0,x)\bar{\rho}\;dtdadx$$

en utilisant l'inégalité de Young on obtient :

$$\frac{-1}{2}\|\bar{\rho}(T,\cdot\cdot)\|^2+\frac{1}{2}\|\bar{\rho}(0,\cdot\cdot)\|^2+\frac{1}{2}\|\bar{\rho}(\cdot,0,\cdot)\|^2+\|\nabla\bar{\rho}\|^2+\left\|\sqrt{\mu+\lambda}\,\bar{\rho}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\|\bar{\rho}(\cdot,0,\cdot)\|^2+$$

$$+\int_{Q_T}\int_0^{\omega}\beta(a)\bar{\rho}(t,a,x)dtdadx$$

d'où $\|\nabla\bar{\rho}\|+\lambda\|\bar{\rho}\|^2\leq\frac{\omega\beta_\infty^2}{2}\|\bar{\rho}\|^2+\frac{1}{2}\|e^{\lambda t}g\|^2$

choissions $\lambda>\frac{\beta_\infty^2\omega}{2}$, alors on trouve que $\|\rho\|^2_{L^2(U,V)}\leq C\|g\|^2_{L^2(Q_\omega)}$

et donc $\|\rho\|_{L^2(U,H^1(\Omega))}\leq c\|g\|_{L^2(Q_\omega)}$ (4) .

Remarquons que l'application trace : $H^1(\Omega)\ni\theta\mapsto\theta_\Gamma$ est continue de

$H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. Alors l'application $L^2(U;H^1(\Omega))\ni\rho\to\rho_\Sigma\in L^2(\Sigma)$ est continue i.e il

existe $C_0\in\mathbb{R}_+$ tel que $\|\rho_\Sigma\|_{L^2(\Sigma)}\leq C_0\|\rho\|_{L^2(U,H^1(\Omega))}$

Alors $\|\rho_\Sigma\|_{L^2(\Sigma)}\leq CC_0\|g\|_{L^2(Q_\omega)}$.

- G-dérivabilité

Cela se voit facilement puisque $g\mapsto\varepsilon\|g\|_{L^2(Q_\omega)}$ est G-dérivable car $L^2(Q_\omega)$ est un Hilbert.

De même $g\to\int_{Q_\omega}y_d(a,x)g(a,x)dadx$, linéaire continue est dérivable .

Il reste donc à voir la G-dérivable de $\psi:g\mapsto\frac{1}{2}\int_\Sigma\rho^2(g)_\Sigma\,d\Sigma$

$$\frac{\psi(g_0+\lambda g)-\psi(g_0)}{\lambda}=\frac{1}{2}\int_\Sigma\left[\rho(g_0+\lambda_g)^2_\Sigma-\rho(g_0)^2_\Sigma\right]d\Sigma$$

$$=\int_\Sigma\frac{\rho(g_0)_\Sigma\,\rho(\lambda g)_\Sigma}{\lambda}d\Sigma+\lambda\int_\Sigma\rho(g)^2_\Sigma d\Sigma=\int_\Sigma\rho(g_0)_\Sigma\,\rho(g)_\Sigma\,d\Sigma+\lambda\int_\Sigma\rho(g)^2_\Sigma d\Sigma$$

Ce qui nous donne en passant à la limite quand $\lambda\to0$ $\psi'(g_0,g)=\int_\Sigma\rho(g_0)\rho(g)d\Sigma$

On obtient alors

$$J'_\varepsilon(g_0,g)=\int_\Sigma \rho(g_0)_{|\Sigma}\,\rho(g)_{|\Sigma}\,d\Sigma-\int_{Q_\omega} y_d(a,x)g(a,x)\,dadx+$$

$$+\varepsilon\int_{Q_\omega}\frac{g(a,x)g_0(a,x)\,dadx}{\|g_0\|_{L^2(Q_\omega)}}$$

Il nous reste maintenant la partie la plus délicate.

- <u>Prouvons maintenant (3)</u>

Suivant [1], raisonnons par l'absurde

Supposons que (3) soit fausse. Alors il existerait une suite $(g_j)\subset L^2(Q_\omega)$ telle que

$$\lim_{j\to+\infty}\|g_j\|=+\infty \text{ et } \lim_{j\to+\infty}\frac{J\varepsilon(g_j)}{\|g_j\|}<\varepsilon \quad (5)$$

Posons $\varphi_j^0=\frac{g_j}{\|g_j\|}$ pour j assez grand et notons ρ_j la solution correspondante de ($P_{3\text{-}8}$)

pour $g=\varphi_j^0$

Nous avons (φ_j^0) bornée dans $L^2(Q_\omega)$,alors de (4) on tire que (ρ_j) est bornée dans $L^2(U;H^1(\Omega))$

Procédant comme dans le chapitre II on prouve que $(\Lambda_0\rho_j)$ est bornée dans $L^2(U;V')$.

On peut donc extraire de (φ_j^0) une sous suite toujours notée (φ_j^0) telle que

$\varphi_j^0 \rightharpoonup \varphi^0$ dans $L^2(Q_\omega)$; $\rho_j \longrightarrow \rho$ dans $L^2(U;V)$ et $\Lambda_0\rho_j \longrightarrow \Lambda_0\rho$ dans $L^2(U;V')$.

On montre alors que ρ est solution de

$$\begin{cases}-\Lambda_0\rho-\Delta\rho+\mu(a)\rho=\beta(a)\rho(t,0,x) & \textit{dans } Q\\ \frac{\partial\rho}{\partial n}=0 & \textit{sur } \Sigma\\ \rho(T,a,x)=\varphi^0(a,x) & \textit{dans } Q_\omega\\ \rho(t,\omega,x)=0 & \textit{dans } Q_l\end{cases}$$

en procédant comme au chapitre II § II

Remarquons que $\varphi^0 \not\equiv 0$.

En effet si $\varphi^0 \equiv 0$, on aura $\lim\limits_{j\to+\infty} \frac{J_\varepsilon(g_j)}{\|g_j\|} = \lim\limits_{j\to+\infty}\left[\frac{1}{2\|g_j\|}\int_\Sigma \rho^2(g_j)_\Sigma d\Sigma + \varepsilon - \int_{Q_\omega} y_d \varphi_j^0 dadx\right]$

$$\geq \varepsilon + \lim_{j\to+\infty}\left[-\int_{Q_\omega} y_d \varphi_j^0 dadx\right].$$

Comme $\varphi_j^0 \rightharpoonup \varphi^0$ dans $L^2(Q_\omega)$, alors $\lim\limits_{j\to+\infty} \int_{Q_\omega} y_d \varphi_j^0 dadx = 0$, et donc

$\lim\limits_{j\to+\infty} \frac{J_\varepsilon(g_j)}{\|g_j\|} \geq \varepsilon$ ce qui contredit (5) . Par conséquent $\varphi^0 \not\equiv 0$ (6) .

On a $\frac{J_\varepsilon(g_j)}{\|g_j\|} = \frac{1}{2\|g_j\|}\int_\Sigma \rho(g_j)^2_\Sigma \, d\Sigma + \varepsilon - \int_{Q_\omega} y_d(a,x)\varphi_j^0(a,x)dadx$

où $\rho(g_j)$ est la solution de $(P_{3\text{-}8})$ pour $g = g_j$

Par suite $\frac{J_\varepsilon(g_j)}{\|g_j\|} = \frac{\|g_j\|}{2}\int_\Sigma \frac{\rho(g_j)^2_\Sigma}{\|g_j\|^2} d\Sigma + \varepsilon - \int_{Q_\omega} y_d \varphi_j^0 dadx$

De la linéarité de $(P_{3\text{-}8})$ on a que $\rho\left(g_j / \|g_j\|\right) = \frac{1}{\|g_j\|}\rho(g_j)$

Alors $\frac{1}{\|g_j\|}\rho(g_j) = \rho(\varphi_j^0) = \rho_j$ solution de $(P_{3\text{-}8})$ avec $g = \varphi_j^0 = \frac{g_j}{\|g_j\|}$

Ainsi $\frac{J_\varepsilon(g_j)}{\|g_j\|} = \frac{\|g_j\|}{2}\int_\Sigma \rho^2_{j\Sigma} \, d\Sigma + \varepsilon - \int_{Q_\omega} y_d(a,x)\varphi_j^0(a,x)dadx$

Pour obtenir (5) il faut que $\lim\limits_{j\to+\infty} \|g_j\| \int_\Sigma \rho^2_{j\Sigma} \, d\Sigma$ soit borné or $\lim\limits_{j\to+\infty} \|g_j\| = +\infty$, il faut donc

que $\lim\limits_{j\to+\infty} \int_\Sigma \rho^2_{j\Sigma} \, d\Sigma = 0$ (7)

Rappelons que $\psi : g \mapsto \frac{1}{2}\int_{\Sigma} \rho^2(g)_{\Sigma}\, d\Sigma$ est G-dérivable et que

$$\psi'(g_0, g) = \int_{\Sigma} \rho(g_0)_{\Sigma}\, \rho(g)_{\Sigma}\, d\Sigma$$

On sait que :

(*) ψ est convexe .

(**) la G-dérivée de ψ est linéaire continue relativement à la $2^{ème}$ variable g.

Alors ψ est faiblement semi-continue inférieurement.

Ainsi comme $\varphi_j^0 \rightharpoonup \varphi^0$ dans $L^2(Q_\omega)$ alors $\lim\limits_{j\to+\infty} \psi(\varphi_j^0) \geq \psi(\varphi_0)$ i.e

$\lim\limits_{j\to+\infty} \int_{\Sigma} \rho_{j\Sigma}^2 \geq \int_{\Sigma} \rho_{\Sigma}^2\, d\Sigma$.

Par suite de (7) on tire que $\rho_{\Sigma} \equiv 0$ sur Σ

On tire alors du <u>théorème 3.6</u> que $\rho \equiv 0$ dans Q.

Par conséquent $\varphi^0 \equiv 0$ dans Q_ω : ce qui contredit (6)

Alors $\lim\limits_{g\to+\infty} \frac{J_\varepsilon(g)}{\|g\|} \geq \varepsilon$.

La <u>proposition</u> 3.2 est donc démontrée.

b. ***<u>algorithme</u>*:**

<u>Théorème 3.7</u>

On suppose les hypothèses (H_1), (L_3), (L_4) <u>du théorème 3.4</u> vérifiées

Soit $y_d \in L^2(Q_\omega)$ et $\varepsilon > 0$.

On suppose que $\|y_d\| \geq \varepsilon$

Alors J_ε admet un minimum $\hat{\varphi}^0$.

Si ρ_ε est la solution de $(P_{3\text{-}8})$ avec $g = \hat{\varphi}^0$. Alors le contrôle $v = \rho_{\varepsilon/\Sigma}$ est telle que la solution y(v) de $(P_{3\text{-}1})$ vérifie $\|y(v)(T) - y_d\|_{L^2(Q_\omega)} \leq \varepsilon$

Preuve du théorème 3.7

J_ε est continue, coercive et strictement convexe sur $L^2(Q_\omega)$. Alors il existe un unique élément $\hat{\varphi}_0 \in L^2(Q_\omega)$ tel que $J_\varepsilon(\hat{\varphi}^0) \leq J_\varepsilon(g)$ pour tout $g \in L^2(Q_\omega)$.

Remarquons que $\hat{\varphi}_0 \neq 0$ pp dans Q_ω.

En effet comme $J_\varepsilon(0) = 0$, il suffit de montrer que l'on peut trouver un élément $g_0 \in L^2(Q_\omega)$ tel que $J_\varepsilon(g_0) < 0$

Soit $g \in L^2(Q_\omega)$ tel que $g \neq 0$ ppdans Q_ω et $\varepsilon\|g\| - \int_{Q_\omega} y_d(a,x) g(a,x)\, da\, dx < 0$. Une telle fonction existe car en prenant $g = y_d$ on aura $\varepsilon\|y_d\| - \|y_d\|^2 = (\varepsilon - \|y_d\|)\|y_d\| < 0$

Admettons que $\|y_d\| > \varepsilon > 0$.

Considérons une suite (g_n) définie par $g_n = \frac{1}{n} g$, $n > 0$.

Comme ($P_{3\text{-}8}$) est linéaire et admet une unique solution alors la solution $\rho(g_n) = \frac{1}{n}\rho(g)$ où $\rho(\varphi)$ désigne la solution de ($P_{3\text{-}6}$) avec $g = \varphi$

Ainsi

$$J_\varepsilon(g_n) = \frac{1}{2n^2}\int_\Sigma \rho(g)_\Sigma^2\, d\Sigma + \frac{\varepsilon}{n}\|g\| - \frac{1}{n}\int_{Q_\omega} y_d(a,x) g(a,x)\, da\, dx$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2n}\int_\Sigma \rho(g)_\Sigma^2\, d\Sigma + \varepsilon\|g\| - \int_{Q_\omega} y_d(a,x) g(a,x)\, da\, dx\right]$$

Comme $\frac{1}{2n}\int \rho(g)_\Sigma^2\, d\Sigma \to 0$ quand $n \to +\infty$ alors il existe $n_0 >$ tel que

$$\frac{1}{2n_0}\int_\Sigma \rho(g)_\Sigma^2\, d\Sigma < \int_{Q_\omega} y_d(a,x) g(a,x)\, da\, dx - \varepsilon\|g\|$$

Donc en prenant $g_0 = g_{n0}$ on a :

$$J_\varepsilon(g_0) = J_\varepsilon(g_{n0}) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2n}\int \rho(g)_\Sigma^2\, d\Sigma + \varepsilon\|g\| - \int_{Q_\omega} y_d(a,x) g(a,x)\, da\, dx\right]$$

$$< 0$$

Etant donné que $\hat{\varphi}_0 \neq 0$ alors pour tout $\theta^0 \in L^2(Q_\omega)$ $J'_\varepsilon(\hat{\varphi}^0, \theta^0) = 0$ i.e

(8) $\int_\Sigma \hat{\varphi}_\Sigma \, \rho(\theta^0)_\Sigma d\Sigma + \frac{\varepsilon}{\|\hat{\varphi}_0\|} \int_{Q_\omega} \hat{\varphi}^0(a,x)\theta^0(a,x) da dx - \int_{Q_\omega} y_d(a,x)\theta^0(a,x) da dx = 0$

Multiplions la première équation de ($P_{3\text{-}3}$) par θ solution de ($P_{3\text{-}8}$) avec $g = \theta^0$ et

utilisons la formule d'intégration par parties.

On obtient que

$$\int_U \langle \Lambda_0 y, \theta \rangle dU + \int_Q (\nabla y \nabla \theta + \mu y \theta) dQ = \int_\Sigma v \theta_\Sigma \, d\Sigma$$

$$\Leftrightarrow \int_{Q_\omega} y(T,a,x)\theta^0(a,x) da dx - \int_{Q_T} y(t,0,x)\theta(t,\theta,x) dt dx + \int_U \langle -\Lambda_0 \theta, y \rangle dU +$$

$$\int_Q (\nabla y \nabla \theta + \mu y \nabla) dQ = \int_\Sigma v \theta_\Sigma \, d\Sigma$$

$$\Leftrightarrow \int_{Q_\omega} y(T)(a,x)\theta^0(a,x) da dx - \int_Q \beta \theta(t,0,x) y(t,a,x) dt da dx +$$

$$\int_U \langle -\Lambda_0 \theta, y \rangle dU + \int_Q (\nabla y \nabla \theta + \mu y \theta) dQ = \int_\Sigma v \theta_{|\Sigma} \, d\Sigma \qquad (9)$$

Comme θ est solution de ($P_{3\text{-}8}$) on obtient que

(10) $\int_U \langle -\Lambda_0 \theta, y \rangle dU + \int_Q (\nabla y \nabla \theta + \mu y \theta) dQ = \int_Q \beta y(t,a,x)\theta(t,0,x) dQ$

On obtient alors de (9) et (10) que

$$\int_{Q_\omega} y(T,a,x)\theta^0(a,x) da dx = \int_\Sigma v \theta_{|\Sigma} \, d\Sigma \qquad (11)$$

Choissions $v = \hat{\varphi}_{|\Sigma}$ alors on a : de (11) et (8)

$$\int_{Q_\omega} y(T,a,x)\theta_0(a,x) da dx = \int_\Sigma \hat{\varphi}_\Sigma \, \theta_\Sigma \, d\Sigma$$

$$= \frac{\varepsilon}{\|\hat{\varphi}^0\|} \int_{Q_\omega} (\hat{\varphi}^0 \theta^0)(a,x) da dx + \int_{Q_\omega} y_d \theta^0 da dx$$

Soit $\int_{Q_\omega} \left(y(T,a,x) - y_d + \varepsilon \frac{\varphi^0}{\|\hat{\varphi}^0\|} \right) \theta^0 da dx = 0$ pour tout $\theta^0 \in L^2(Q_\omega)$

En conséquence $y(T,\cdot,\cdot)-y_d=-\varepsilon\frac{\hat{\varphi}_0}{\|\varphi_0\|}$

On tire enfin que $\|y(T,\cdot,\cdot)-y_d\|=\varepsilon\left\|\frac{\hat{\varphi}_0}{\|\hat{\varphi}_0\|}\right\|=\varepsilon$

Remarque 3.7

Si $\|y_d\|\leq\varepsilon$, on prend $\varphi^0=0$ et donc d'après le théorème 3.5 la solution $\rho(\varphi^0)$

de (P $_{3\text{-}8}$) est identiquement nulle.

Posons $v=\rho(\varphi^0)_{/\Sigma}=0$ par suite y est solution de

$$\begin{cases}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+\mu(a)y=0 & dans\ Q\\ \frac{\partial y}{\partial n}=0 & sur\ \Sigma\\ y(0,a,x)=0 & dans\ Q_\omega\\ y(t,0,x)=K\int_0^\omega \beta y da & dans\ Q_T\end{cases}$$

Alors $y=0$ car la solution d'un tel système est unique .

On aura $\|y(T)-y_d\|=\|y_d\|\leq\varepsilon$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.Ainseba et M. Langlais : On a population dynamics control problem with age dependance and sptatial structure.
J. Math Anal and Appl 248 ,(2000) 455-474

[2] B.Ainseba S. Anita – M. Langlais : On the optimal control for non linear age structured populations dynamic model (to appear in com. Applied Math).

[3] B. Ainseba, S. Anita – M. Langlais : Internal stabilizability of some diffusive models (To appear J.M.A.A).

[4] B. Ainseba, S. Anita, M. Langlais : Local exact controllability of the age – dependent population dynamics with diffusion (to appear Diff. Inte. Equation)

[5] S Anita , Optimal harvesting for a non linear age-dependent population dynamics .Journal of mathematical analysis and applications
vol 226(1999) 6-22

[6] V. Barbu : Mathematical methods in optimisation of differential systems
Kluwer Academic Publisher vol 310

[7] H. Brezis : Analyse fonctionnelle. Théorie et applications
Masson (1983)

[8] S. Busenberg, M. Ianneli : A class of nonlinear diffusion problem in age dependent population dynamics.
Nonlinear Analysis, theory, methods and applications vol 7 n° 5 pp 501-530 1983

[9] W.L. Chan ,G.B.Zhu, Optimal birth control of population dynamics
.Journal of mathematical analysis and applications.vol 144(1989) 533-552

[10] W.L. Chan ,G.B.Zhu, Optimal birth control of population dynamics
II Problems with free final time, phase onstraints , and min-max costs
Journal of mathematical analysis and applications.vol 144(1990) 523-539.

[11] G. Di-Blasio : Asymptotic behavior for an age structured fish population

Computer & math with appl.
Vol 9 n° 3 pp 377 – 382 (1983)

[12] R. Dautray – J.L. Lions : Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques ,Tome 3. – Masson

[13] C. Fabre, J.P. Puel, E. Zuazua : Approximate controllability of the semi-linear heat equation.
Proc.Roy. soc. Edinburg sect A 125 N° (1995) 31-61.

[14] M.G. Garroni , M. Langlais : Age-dependent population diffusion with externals contraints :
J. math. Biol. 14 (1982) 77-94

[15] Gurtin – Mc Camy : Population dynamics with age dependent Nonlinear Anal and Mechanics
Herriot – Watt symp vol 3 pp 1-35 (1977)

[16] F. Hoppenstead : Mathematical methods of population biology
Courant-Institute of Math sciences N.Y. university (1976)

[17] F. Hoppenstead : Mathematical theories of populations :
demographics, genetics and epidemics S.I.AM. Philadelphia (1975)

[18] L. Hörmander: Linear partial differential operators
Springer Verlag (1969).Band 116.

[19] M. Langlais : A Nonlinear Problem in Age dependent population diffusion
S.I.A. J. math anal vol 16 N° 3 May 1985

[20] J.L. Lions- E. Magenes : Nonhomogenous boundary value problem and applications
Grundlehren B 181 Springer-Verlag 1972 .

[21] J.L. Lions : Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles
Dunod Gauthier villars Paris 1968.

[22] O. Nakoulima, J. Velin , A. Omrane : Nonlinear problem for the dynamic of age strcutured population.

Rapport de recherche Département de math-informatique Université Antille et Guyane 1998/N°7

[23] S. Ndiaye : Sur un Problème non linéaire en dynamique des populations
Thèse 3^{è} cycle Université Cheik Anta Diop (1988)

[24] A. Ouédraogo : Résolution d'un système gouverné par une équation parabolique fortement non linéaire
Africa Mathematika série 2 vol 1 1988.

[25] A. Pazy : Semi-group of linear operators and applications to partial differential equations , springer.44

[26] O. Seck : Sur un modèle de diffusion non linéaire en dynamique des populations
Thèse 3è cycle – Université de Nancy (1986)

[27] V. Khac – Khoan :Distribution – Analyse de Fourier – opérateurs aux dérivés partielles
Vuibert 63 - Paris

[28] E. Zuazua : Null controllabiliy of the heat equation in thins domains
E.D.P. et applications – article dédié à J.L. LIONS
Elsevier Paris

Résumé

Dans ce travail on considère une population repartie dans un domaine Ω.
On suppose que cette population est assujettie à la mort ; à la naissance de nouveaux individus et à la migration à travers la frontière.
Dans cette thèse contrairement à la plupart des problèmes de contrôle en dynamique des populations on examine la possibilité de rapprocher la densité de la population d'une densité désirée.
Ainsi dans un premier temps on montre l'existence d'une solution du problème de dynamique des populations avec diffusion à travers la frontière :

$$(I\text{-}4)\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+\mu y=0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu}=v \\ y(0,a,x)=y_0(a,x) \\ y(t,0,x)=\left(\displaystyle\int_0^{\omega}\beta(a)y\,da\right)\Phi\left(\displaystyle\int_0^{\omega}\beta(a)y\,da\right) \end{cases}$$

On montre de plus que l'application $v \mapsto y_{/\Sigma}$ est lipschitzienne de $L^2(\Sigma)$ dans $L^2(]0,T[\times]0,\omega[;H^1(\Omega))$.

Dans un second temps on montre que pour une densité désirée z_d donnée il existe un contrôle ramenant le système aussi proche que possible au sens de $L^2(Q)$ de z_d.
Dans les cas linéaire comme non linéaire on obtient l'expression des contrôles optimaux.
Enfin on montre que le système (I-4) est approximativement contrôlable à l'instant T fixé lorsque $\Phi = constante$.
Pour cela il a fallu prouver en utilisant le théorème de Holmgren le résultat de continuation unique suivante: si ψ vérifie le système

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \psi}{\partial t}-\dfrac{\partial \psi}{\partial a}-\Delta\psi=\beta(a)\psi(t,0,x) & sur\ Q \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu}=0 & sur\ \Sigma \\ \psi_{/\Sigma}=0 & sur\ \Sigma \end{cases}$$

alors ψ est identiquement nulle sur Q

Mot clés : Dynamique des populations, contrôle optimal, contrôlabilité, semi- groupe de classe C^0, cône tangent, cône normal, plans caractéristiques.