MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET DE L'INNOVATION

SECRÉTARIAT GÉNÉRAL

UNIVERSITÉ Nazi BONI DE BOBO-DIOULASSO (U.N.B)

BURKINA - FASO

Unité - Progrès - Justice

Année universitaire : 2016 – 2017

Vu et validé

Dr. Joseph BAYARA

UNITÉ DE FORMATION ET DE RECHERCHE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

01 BP 1091 Bobo-Dioulasso 01

Tél. : (226) 20 98 – 51 – 87 Fax : (226) 20 98 – 25 – 77

Laboratoire d'Algèbre, de Mathématiques Discrètes et Informatique (L.A.M.D.I)

MÉMOIRE DU DIPLÔME D'ÉTUDES APPROFONDIES (D.E.A) DE MATHÉMATIQUES

Option : **Algèbre** **Spécialité** : **Algèbres non associatives**

Thème : Homogamétisation d'algèbres pondérées

Présenté par Siaka COULIBALY

Soutenu publiquement le Mardi 13/06/2017 devant le jury composé de :

Président : M. Théodore M. Y. TAPSOBA, Professeur Titulaire - Université Nazi BONI de Bobo-Dioulasso (U.N.B)

Membre : M. Joseph BAYARA, Maître de Conférences - Université Nazi BONI de Bobo-Dioulasso (U.N.B)

Membre : M. Idrissa KABORE, Maître de Conférences - Université Nazi BONI de Bobo-Dioulasso (U.N.B)

Directeur de mémoire : M. Joseph BAYARA, Maître de Conférences - Université Nazi BONI de Bobo-Dioulasso (U.N.B)

HOMOGAMÉTISATION D'ALGÈBRES PONDÉRÉES

Siaka COULIBALY

13 Juin 2017

Table des matières

Remerciements

Avant tout propos, j'exprime mes parfaites reconnaissances à l'Éternel, le Tout Puissant qui veille sur nous dans tout ce qui nous réalisons.

Je tiens à rendre mes mots de reconnaissance sincères à mon directeur de mémoire, le Professeur Joseph BAYARA. En effet, nous avons bénéficié d'une grande disponibilité du Professeur en dépits de ces diverses responsabilités qu'il assume au sein de l'université. Ses nombreux conseils, et enseignements diversifiés ont été pour moi une grande issue pour la bonne réalisation de ce travail. Nous lui disons grand merci pour son énorme soutien.

Mes remerciements particuliers sont principalement adressés au président du jury et tous les membres du jury. Le temps que le jury consacre pour examiner ce travail nous est très précieux car les différentes critiques du jury à l'égard du document nous permettront de le parfaire. Grand merci au président du jury et les membres du jury pour leur bonne volonté.

Je suis très satisfait en ayant pris part à la sotie d'étude sur Banfora dans la semaine du 24-28 du moi de Mai. Je tiens donc à adresser mes remerciements particuliers au Professeur Théodore M. Y. TAPSOBA, directeur du laboratoire L.A.M.D.I, et ses collègues que j'en cite, Professeur KABORE, Professeur BAYARA, Docteur SORE, pour avoir initié cette noble activité à notre intention. Cette séance d'étude fut un grand apport pour la réussite de ce travail. Grand merci au Professeur TAPSOBA et ces collègues.

Les profonds remerciements vont ensuite au Professeur Sado TRAORE qui est le directeur de l'UFR-ST, il a toujours contribué à notre formation à travers ses enseignements de qualité.

Nous ne saurions terminé sans traduire notre sincère satisfaction à l'endroit de nos enseignants. Ces enseignants, tous qualifiés, ont chacun donné le mieux de soi, et c'est ainsi que nous sommes parvenus à ce niveau. Nous profitons de cette occasion, donner nos mots de reconnaissance à nos aînés ainsi qu'aux camarades de promotion avec qui nous avons toujours vécu en famille.

Et enfin à la famille toute l'estime et affection. Aux parents si humbles, qui ont troqué leur bonheur contre notre réussite, nous leur devons nos remerciements les plus particuliers. Que

l'Éternel Dieu veille sur nous tous pour toujours.

Résumé

Dans ce travail, il s'agira d'abord de faire un rappel sur quelques notions d'action de groupe et un rappel d'algèbre non associative. Nous généralisons ensuite le procédé de gamétisation introduit dans [7] en utilisant une combinaison linéaire quelconque d'une algèbre pondérée et de son algèbre gamétique associée : une telle combinaison est appelée homogamétisation. Outre la donnée d'une condition de la pondérabilité de l'homogamétisation, on introduit le groupe des opérateurs d'homogamétisation sur lequel sont définies deux actions agissant sur les classes d'algèbres pondérées et la K-algèbre libre $K\langle X\rangle$ des polynômes à variables dans $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Quant aux algèbres définies par une identité, on établit que cette propriété se préserve sous l'action du groupe des opérateurs d'homogamétisation sur l'algèbre et son identité. Enfin, on aborde la notion d'invariance et d'invariance universelle par homogamétisation, puis nous terminons par la mise en place d'une méthode de construction explicite des éléments de $K\langle X\rangle$ invariants ou invariants universels pour cette action du groupe.

Introduction

Dans ce travail, K désigne un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et les K-algèbres considérées ne sont pas nécessairement associatives, ni commutatives. On dit qu'une algèbre A est pondérable par ω, si ω est un morphisme de K-algèbres non identiquement nul de A dans K. Le couple (A, ω) est alors appelé algèbre pondérée.

La notion de gamétisation d'une K-algèbre commutative pondérée a été définie dans [8] en utilisant la structure sous-jacente de l'algèbre gamétique associée. Ce procédé s'étend sans modification aux algèbres pondérées non commutatives. Étant données $\gamma \in K^*$ et ω une pondération sur A, la gamétisée au taux de $1-\gamma$ de (A, ω) est l'algèbre A_γ, obtenue de A en substituant son produit originel par le produit

$$(xy)_\gamma = \gamma xy + \frac{1-\gamma}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x),$$

pour tous $x, y \in A$.

L'étude des algèbres pondérées définies par les identités non homogènes se rapporte à celle des identités plus simples à travers la gamétisation. On définit dans [8] la notion d'identités invariantes et invariantes universelles par gamétisation. Toutes ces identités sont rendues explicites dans [7] pour le cas des algèbres non associatives ou non commutatives.

Dans ce travail, nous utilisons les travaux de C.Mallol et de R.Varro proposés dans [6] pour généraliser ce procédé de gamétisation. Cette généralisation appelée homogamétisation, est introduite suite à la gamétisation et permet à cet effet, de bénéficier des résultats analogues avec moins d'hypothèses. Ainsi, partant d'une algèbre pondérée (A, ω) qui n'est ni commutative ni associative, on effectue une combinaison linéaire non nécessairement convexe de A avec son algèbre gamétique associée. Une telle combinaison est appelée homogamétisation. Une fois une homogamétisation obtenue, nous établissons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une pondération sur cette dernière.

Le groupe H des opérateurs d'homogamétisation est ensuite introduit, puis on définit des opérations de ce groupe sur les classes d'algèbres pondérées et sur la K-algèbre $K\langle X\rangle$ des polynômes à variables dans $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Ces opérations ne sont autres que des actions du groupe H.

Enfin, on restreint la notion de stabilisateur sous H en introduisant la notion d'invariance et d'invariance universelle par homogamétisation. On termine en montrant que les polynômes invariants universels par homogamétisation sont exactement les invariants universels par gamétisation. Ces derniers sont utilisés pour retrouver la forme explicite des orbites et les polynômes invariants par homogamétisation.

Chapitre 1

Définitions et résultats de base

Dans ce chapitre, il s'agit du rappel de quelques définitions et résultats.

1.1 Action de groupe

Définition 1.1.1. Soient G un groupe et X un ensemble. On dit que G agit (à gauche) sur X, si il existe une application de $G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) \longmapsto gx$ telle que,

(i) $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall x \in X$, $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$,

(ii) $\forall x \in X$, $ex = x$ où e représente le neutre de G.

Si G agit sur X, on dit que X est un G-ensemble.

Soient X un G-ensemble et x un élément de X.

Définition 1.1.2. On appelle orbite de x, l'ensemble $G \cdot x$ défini par :

$$G \cdot x = \{gx, g \in G\}.$$

On définit sur X une relation d'équivalence $\sim$ par :

$$\forall x, y \in X,\ x \sim y \iff y \in G \cdot x.$$

Pour la relation $\sim$ ainsi définie, la classe d'un élément x de X est donnée par $\dot{x} = G \cdot x$.

Remarque 1.1.3. Si X est de cardinal fini alors il existe une famille finie $\{x_1, ..., x_n\}$ d'éléments de X telle qu'on ait l'égalité ci-dessous :

$$X = \sum_{i=1}^{n} |G \cdot x_i| \text{ où } |X| \text{ et } |G \cdot x_i| \text{ représentent respectivement le cardinal de } X \text{ et de } G \cdot x_i.$$

Cette égalité est appelée formule des classes de l'action de G.

Définition 1.1.4. Soit x un élément de X. On appelle stabilisateur de x, le sous-ensemble de G noté Stab(x) et défini par :

$$Stab(x) = \{g \in G/\ gx = x\}.$$

Remarque 1.1.5. Le stabilisateur d'un élément est un sous-groupe de G.

1.2 Algèbres non associatives

Définition 1.2.1. On appelle anneau tout ensemble non vide A muni de deux lois de composition interne : une addition :

$$A \times A \longrightarrow A, \quad (x, y) \longmapsto x + y,$$

et une multiplication :

$$A \times A \longrightarrow A, \quad (x, y) \longmapsto xy,$$

telles que $(A, +)$ est un groupe abélien et la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

L'anneau est dit commutatif (respectivement associatif) si la multiplication est commutative(respectivement associative).

L'anneau est dit unitaire si la multiplication admet un élément neutre.

Définition 1.2.2. Soit K un corps commutatif. Un ensemble non vide A est appelé K-algèbre si A est muni d'une structure de K-espace vectoriel et d'une application bilinéaire : $A \times A \longrightarrow A,\ (x, y) \longmapsto xy$. La K-algèbre A est alors munie d'une structure d'anneau sous-jacente. Les propriétés de commutativité et associativité d'une K-algèbre A sont équivalentes à celles de sa structure sous-jacente. Elle est dite non commutative (respectivement non associative) si sa structure sous-jacente n'est pas nécessairement commutative (respectivement associative). Si la structure sous-jacente est unitaire alors l'algèbre est dite unitaire.

Exemple 1.2.3.

(*i*) La multiplication des polynômes fait du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\big(\mathbb{R}[X], +, \bullet\big)$ des polynômes à une indéterminée, une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, associative et de dimension infinie.

(*ii*) Si n est un entier naturel, alors la multiplication matricielle fait du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \bullet\big)$ des matrices carrées d'ordre n, une $\mathbb{R}$-algèbre associative, non commutative et de dimension finie n^2.

Définition 1.2.4. Soient A une K-algèbre, n un nombre entier naturel et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments de A. On dit que la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de A si elle est une base pour sa structure de K-espace vectoriel.

Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de la K-algèbre A alors pour tous $1 \leq i, j \leq n$, il existe une unique famille $\left(\lambda_{ij}^{(k)}\right)_{1\leq k\leq n}$ dans K telle que :

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ij}^{(k)} e_k \qquad (1.2.1)$$

Les scalaires $\lambda_{ij}^{(1)}, \lambda_{ij}^{(2)}, ..., \lambda_{ij}^{(n)}$ sont appelés constantes de structure de A et la relation (1.2.1) est appelée la table de multiplication de A.

Remarque 1.2.5. Une K-algèbre peut être définie par la donnée de sa table de multiplication. Comme exemple, considérons la K-algèbre A de dimension 3 et $\{u, v, w\}$ une base de A telle qu'on ait la table de multiplication consignée dans le tableau ci-après :

$*$	u	v	w
u	w	w	v
v	$-w$	v	u
w	$-v$	$-u$	u

À travers le tableau on a : $uv = -vu$ et $u^2u = wu = -uw = -uu^2$. Ainsi, l'algèbre A que définit cette table de multiplication est non commutative, et non associative.

Définition 1.2.6. Soient A une K-algèbre et $x, y, z \in A$. Alors on définit les opérateurs commutateur et associateur respectivement par $[x, y] = xy - yx$ et $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$.

Remarque 1.2.7. Le commutateur est bilinéaire et l'associateur est trilinéaire. Une K-algèbre A est commutative si tous les commutateurs sont nuls. De même on a l'associativité si tous les associateurs sont nuls.

Définition 1.2.8. Une K-algèbre A est dite de Jordan si pour tous x, y appartenant à A, on a :
$$\begin{cases} [x, y] = 0 \\ (x, y, x^2) = 0 \end{cases}$$

Soit a un élément d'une K-algèbre A.

Définition 1.2.9. On pose $R_a : A \longrightarrow A,\ x \longmapsto xa$ et $L_a : A \longrightarrow A,\ x \longmapsto ax$. Les applications R_a et L_a sont respectivement appelées multiplication à droite par a et multiplication à gauche par a.

Remarque 1.2.10. (i) Si A est commutative alors $R_a = L_a$ pour tout $a \in A$.

(ii) Si A est associative alors pour tous entier $i \in \mathbb{N}$ et $a \in A$ on a $R_a^i = R_{a^i}$ et $L_a^i = L_{a^i}$.

Pour des raisons de non commutativité et de non associativité on n'a pas nécessairement $x^2x = xx^2$ pour tout $x \in A$. On posera donc $x^3 = x^2x$ ou $x^3 = xx^2$ selon le cas. Ainsi, on introduit (cf [11]) la notion de puissances principales à droite et puissances principales à gauche.

Définition 1.2.11. Soient A une K-algèbre et x un élément de A. On définit les puissances principales à droite de x par $x^1 = x$ et $x^{k+1} = x^kx$ puis les puissances principales à gauche par ${}^1x = x$ et ${}^{k+1}x = xx^k$. Ces deux notions coïncident sous l'hypothèse de la commutativité ou de l'associativité.

Définition 1.2.12. Une algèbre A est dite à puissances associatives si pour tout $x \in A$ et pour tous i, j appartenant à $\mathbb{N}^*$, $x^ix^j = x^{i+j}$.

La notion d'algèbres pondérées a été introduite grâce aux travaux de I.M.H Etherington (cf [3]). Son développement fait partie de l'étude des algèbres non associatives, notamment les algèbres génétiques, les algèbres train et les algèbres de Bernstein (cf [5],[12]).

Définition 1.2.13. Soit A une K-algèbre. On appelle pondération ou fonction poids sur A toute forme linéaire non nulle $\omega : A \longrightarrow K$ telle que pour tous $x, y \in A$, $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$. La paire (A, ω) est alors appelée algèbre pondérée.

Pour tout élément x de A, le scalaire $\omega(x)$ est appelé le poids de x.

Remarque 1.2.14. En général il n'y a pas unicité de la fonction poids. En effet, soit la K-algèbre de dimension 2, de base $\{u, v\}$ et définie par la table de multiplication suivante :

$$u^2 = u, \ v^2 = v, \ uv = vu = 0.$$

On considère les applications linéaires ω et ω' définies respectivement par

$$\omega(u) = 1 \ et \ \omega(v) = 0,$$

$$\omega'(u) = 0 \ et \ \omega'(v) = 1.$$

Les applications ω et ω' sont deux pondérations distinctes sur A.

En effet, ω et ω' sont distinctes par définition. Soient $a, b, \alpha, \beta \in K$. Posons $x = au + bv$ et $y = \alpha u + \beta v$. Alors on a :

$$\omega(xy) = \omega[(au + bv)(\alpha u + \beta v)] = \omega(a\alpha u^2 + b\beta v^2) = a\alpha = \omega(x)\omega(y).$$

De même on a

$$\omega'(xy) = \omega'[(au+bv)(\alpha u+\beta v)] = \omega'(a\alpha u^2 + b\beta v^2) = b\beta = \omega'(x)\omega'(y).$$

Les applications ω et ω' sont donc des pondérations de A.

Remarque 1.2.15. Pour toute fonction poids sur A, il existe dans A un élément de poids 1.

En effet, si ω est une pondération alors il existe $x_0 \in A$ tel que $\omega(x_0) \neq 0$. Par suite l'élément $c = \omega(x_0)^{-1}x_0$ est de poids 1.

Proposition 1.2.16. *Soient (A, ω) une algèbre pondérée et c un élément de poids 1. Alors A se décompose comme suit :*

$$A = Kc \oplus \ker \omega.$$

Cette décomposition de A est connue sous le nom de "décomposition de Lévi".

Démonstration. En effet, pour tout $x \in A$, on a $(x - \omega(x)c) \in \ker \omega$. De même $\omega(x)c$ appartient à Kc et $x = \omega(x)c + (x - \omega(x)c)$. Ce qui conduit à l'égalité $A = Kc + \ker \omega$.

Soit $x \in Kc + \ker \omega$ tel que $x = 0$. Soient λc et u les traces respectives de x sur Kc et $\ker \omega$. Alors on a $\lambda = \omega(x) = 0$. Par suite on a $u = x = 0$. Ce qui achève la preuve de cette proposition. □

Théorème 1.2.17. *Soit A une K-algèbre munie d'une pondération notée ω. Alors, ω est l'unique pondération sur A dès que son noyau est nil, c'est à dire pour tout $x \in \ker \omega$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.*

Démonstration. Soient ω et ω' deux pondérations et x appartenant au noyau de ω. Supposons que le noyau de ω est nil. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$. On obtient $\omega'(x) = 0$ car $\omega'(x^n) = \omega'(x)^n$. Ainsi $\ker \omega \subset \ker \omega'$. De même si $x \in \ker \omega'$, alors de la décomposition de Lévi on a $x = \omega(x)c + x_0$, avec $x_0 \in \ker \omega$. Le fait que $x \in \ker \omega'$ et $\ker \omega \subset \ker \omega'$, alors on a $\omega(x)\omega'(c) = 0$. par suite $\omega(x) = 0$ car si l'on suppose $\omega'(c) = 0$, ω' sera identiquement nulle sur A. Ainsi, on a l'égalité $\ker \omega = \ker \omega'$. Soit à présent $x \in A \setminus \ker \omega$. Comme $x^2 - \omega(x)x \in \ker \omega = \ker \omega'$, alors on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \omega'(x^2 - \omega(x)x) \\ &= \omega'(x)(\omega'(x) - \omega(x)) \\ &= \omega'(x) - \omega(x) \text{ puisque } \omega'(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Ce qui traduit l'égalité $\omega = \omega'$. □

On définit la notion de K-algèbres train sur la classe des K-algèbres pondérées.

Définition 1.2.18. Éant donnée une K-algèbre pondérée (A, ω), A est dite K-algèbre train de rang n si, il existe des scalaires $\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_{n-1}$ appartenant à K tels que pour tout x appartenant à A,

$$x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0.$$

Le polynôme $P = x^n + \gamma_1 x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} x$ est appelé polynôme train associé à l'identité. Ses racines dans une extension convenable de K sont appelées racines train principales.

La proposition suivant se déduit du théorème précédent.

Proposition 1.2.19. *Toute K-algèbre train possède une unique pondération.*

1.3 Décomposition de Peirce

La décomposition de Peirce concerne la classe des K-algèbres pondérées admettant un élément idempotent.

Définition 1.3.1. Soit e un élément non nul de A. Alors e est dit idempotent s'il vérifie $e^2 = e$.

Proposition 1.3.2. *Soit $\big(A, \omega\big)$ une K-algèbre pondérée. Alors tout élément idempotent de A est de poids 0 ou 1.*

Démonstration. Soit e un élément idempotent de A, alors on a, $e^2 = e$. En appliquant ω à cette égalité, on obtient $\omega(e)^2 - \omega(e) = \omega(e)(1 - \omega(e)) = 0$. Par suite $\omega(e) = 1$ ou $\omega(e) = 0$. $\square$

Soit A une K-algèbre associative admettant un élément idempotent noté e. Si X est un sous-ensemble de A alors on pose :

$Xe = \{xe / x \in X\}$,

$eX = \{ex / x \in X\}$,

$X(1 - e) = \{x - xe / x \in X\}$,

$(1 - e)X = \{x - ex / x \in X\}$,

$A_{ij} = \{x \in A / ex = ix,\ xe = jx\}$, pour tout $(i, j) \in \{0, 1\}^2$. On note x_{ij} un élément de A_{ij}.

Remarque 1.3.3. On a les égalités ci-dessous :

$A_{11} = eAe$, $A_{10} = eA(1 - e)$, $A_{01} = (1 - e)Ae$, et $A_{00} = (1 - e)A(1 - e)$.

Proposition 1.3.4. *(i) Si X est un sous-espace vectoriel de A, alors les ensembles, Xe, $eX, X(1-e)$ et $(1-e)X$, le sont.*

(ii) Si X est un idéal de A à droite, alors eX et $(1-e)X$ sont des idéaux de A à droite.

(iii) Si X est un idéal de A à gauche, alors Xe et $X(1-e)$ sont des idéaux de A à gauche.

(iv) On a :

$$A = eAe \oplus eA(1-e) \oplus (1-e)Ae \oplus (1-e)A(1-e) \tag{1.3.2}$$

Démonstration.

(i) Ces ensembles sont non vides dès que X l'est. Soient $\alpha \in K$, x et y deux éléments de eX. Alors il existe $x', y' \in X$ tels que x et y s'écrivent respectivement $x = ex'$, $y = ey'$. Ainsi, on a $x + \alpha y = e(x' + \alpha y')$. Comme X est un sous-espace vectoriel de A alors $x' + \alpha y'$ appartient à X. Par suite $x + \alpha y$ appartient à eX. D'où eX est un sous-espace vectoriel de A. Par analogie on vérifie que $Xe, X(1-e)$ et $(1-e)X$ sont des sous-espace vectoriel de A.

(ii) Soient $a \in A$ et $x \in eX$. Alors x s'écrit $x = ex'$ avec $x' \in X$. X étant un idéal de A à droite alors $xa = (ex')a = e(x'a) \in eX$, d'où $(eX)A \subset eX$. En vertu du (i), eX est un sous-groupe de A. Par conséquent eX est un idéal de A à droite. De façon analogue, on vérifie que $(1-e)A$ est un idéal de A à droite.

(iii) On procède de la même manière qu'en (ii).

(iv) Pour tout x appartenant à A, on a : $x = exe + (ex - exe) + (xe - exe) + (x - ex - xe + exe)$. On a donc $A = eAe + eA(1-e) + (1-e)Ae + (1-e)A(1-e)$.
Posons $x_{11} = exe$, $x_{10} = (ex - exe)$, $x_{01} = (xe - exe)$, $x_{00} = (x - ex - xe + exe)$. Soit $x \in eAe + eA(1-e) + (1-e)Ae + (1-e)A(1-e)$ tel que x soit nul. x_{ij} étant la trace de x sur A_{ij} alors x s'écrit $x = x_{11} + x_{10} + x_{01} + x_{00}$. En effectuant exe, on obtient $x_{11} = 0$. De $x_{11} = 0$, le produit ex donne $x_{10} = 0$. Et ainsi de suite on obtient $x_{01} = 0$ et $x_{00} = 0$. Par conséquent $A = eAe \oplus eA(1-e) \oplus (1-e)Ae \oplus (1-e)A(1-e)$. □

En plus de la décomposition de A donnée en (1.3.2) on a,

$$A = Ae \oplus A(1-e) \tag{1.3.3}$$

$$\text{et } A = eA \oplus (1-e)A \tag{1.3.4}$$

Les décompositions en (1.3.3) et (1.3.4) sont respectivement appelées décomposition de Peirce à droite, décomposition de Peirce à gauche de A suivant l'idempotent e. Celle en (1.3.2) est appelée décomposition de Peirce suivant l'idempotent e.

Propriété 1.3.5. Le dictionnaire des produits des composantes de Peirce est donné par l'ensemble des relations du système suivant :

$$\begin{cases} A_{ij}A_{kl} \subset A_{il} \\ A_{ij}A_{1-jl} = 0 \end{cases} \text{avec } i,j,k,l \in \{0,1\}.$$

Démonstration. La K-algèbre A étant associative, alors tous les associateurs sont nuls. On a :
$\begin{cases} (e, x_{ij}, x_{kl}) = 0 \\ (x_{ij}, x_{kl}, e) = 0 \end{cases}$ avec $i,j,k,l \in \{0,1\}$ et $x_{ij} \in A_{ij}, x_{kl} \in A_{kl}$.
Du système, il vient que $e(x_{ij}x_{kl}) = ix_{ij}x_{kl}$ et $(x_{ij}x_{kl})e = lx_{ij}x_{kl}$. D'où l'inclusion.
On a de plus $(x_{ij}, e, x_{kl}) = 0$. Ainsi $(j-k)x_{ij}x_{kl} = 0$. En prenant $k = 1-j$, on obtient $x_{ij}x_{(1-j)l} = 0$. □

La décomposition de Peirce s'étend aux K-algèbres commutatives à puissances associatives et aux K-algèbres de Jordan. Soit A une K-algèbre à puissances associatives admettant un idempotent e. Alors la décomposition de Peirce suivant l'idempotent e est la suivante : $A = A_1(e) \oplus A_{1/2}(e) \oplus A_0(e)$, où $A_\lambda(e)$ est le sous-espace vectoriel de A associé à la valeur propre λ. Le dictionnaire des produits des composantes de Peirce de cette décomposition est donné par :

$A_\lambda^2(e) \subset A_\lambda(e)$ avec $\lambda \in \{0,1\}$,

$A_{1/2}(e)A_\lambda(e) \subset A_{1/2}(e) \oplus A_{1-\lambda}(e)$, avec $\lambda \in \{0,1\}$,

$A_0(e)A_1(e) = 0$,

$A_{1/2}^2(e) \subset A_0(e) \oplus A_1(e)$.

Si A est de Jordan et admettant un idempotent e alors dans sa décomposition de Peirce suivant l'idempotent e on a le dictionnaire ci dessous :

$A_\lambda^2(e) \subset A_\lambda(e)$ avec $\lambda \in \{0,1\}$,

$A_{1/2}(e)A_\lambda(e) \subset A_{1/2}(e)$ avec $\lambda \in \{0,1\}$,

$A_0(e)A_1(e) = 0$,

$A_{1/2}^2(e) \subset A_0(e) \oplus A_1(e)$.

Chapitre 2

Mélanges d'algèbres et homogamétisation d'algèbres pondérées

2.1 Mélanges d'algèbres

Dans [10] Rees définit la notion de combinaison linéaire d'algèbres. Soient A un K-espace vectoriel et $\mathcal{A}(A)$ la famille des K-algèbres définies sur le K-espace vectoriel A. Notons $(xy)_{\mathcal{U}}$ le produit de la K-algèbre $\mathcal{U}$. Les applications suivantes :

$$\mathcal{A}(A) \times \mathcal{A}(A) \longrightarrow \mathcal{A}(A),\ (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \longmapsto \mathcal{U} + \mathcal{V} : (xy)_{\mathcal{U}+\mathcal{B}} = (xy)_{\mathcal{U}} + (xy)_{\mathcal{B}},\ \forall x, y \in A$$

et

$$K \times \mathcal{A}(A) \longrightarrow \mathcal{A}(A),\ (\alpha, \mathcal{U}) \longmapsto \alpha\mathcal{U} : (xy)_{\alpha\mathcal{U}} = \alpha(xy)_{\mathcal{U}},\ \forall x, y \in A,\ \alpha \in K$$

font de $\mathcal{A}(A)$ un $K-$espace vectoriel. Et ainsi se dégage la notion de combinaison linéaire d'algèbres.

Définition 2.1.1. On appelle combinaison linéaire d'algèbres toute écriture de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{U}_i$ avec $\alpha_i \in K$, $\mathcal{U}_i \in \mathcal{A}(A)$.

Définition 2.1.2. (i) Soit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{U}_i$ une combinaison linéaire d'algèbres. La combinaison est dite convexe si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

(ii) On appelle mélange d'algèbres, toute combinaison convexe d'algèbres à coefficients réels positifs.

Définition 2.1.3. Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. A est dite algèbre gamétique si le produit vérifie

$$xy = \frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x), \ \forall x, y \in A.$$

2.2 Gamétisation d'algèbres pondérées

Dans [7], les auteurs définissent la notion de gamétisation d'algèbres pondérées. La gamétisation est un outil permettant de simplifier l'étude de certaines familles classiques d'algèbres pondérées (cf [2]).

Définition 2.2.1. Soient (A, ω) une K-algèbre pondérée et γ un scalaire non nul de K. On appelle algèbre gamétisée de (A, ω) au taux de $1 - \gamma$ et notée A_γ, l'espace vectoriel A muni du produit résultant du mélange convexe entre le produit originel et le produit gamétique donné par la pondération. On définit ce produit par

$$(xy)_\gamma = \gamma xy + \frac{1-\gamma}{2}\Big(\omega(x)y + \omega(y)x\Big) \ \forall x, y \in A.$$

On dit que A_γ est obtenue par gamétisation au taux de $1 - \gamma$ de A.

Remarque 2.2.2. (i) L'application ω est aussi une pondération sur A_γ.

(ii) On a $A_1 = A$ et A_0 est l'algèbre gamétique. Le cas A_0 n'a pas d'intérêt car on perd toute l'information du produit originel de l'algèbre. Ce dernier cas sera donc dorénavant exclu.

Proposition 2.2.3. *Soit $(A_\gamma)_{\gamma \in K^*}$ la famille des gamétisées de (A, ω). Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ et $\gamma_1, ..., \gamma_n \in K^*$, l'algèbre $\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(A_{\gamma_i})$ est munie du produit*

$$(x, y) \longmapsto (xy)_\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (xy)_{\gamma_i} = \Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i\Big]xy + \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(1-\gamma_i)\Big]\Big(\omega(x)y + \omega(y)x\Big).$$

Et en plus $\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_{\gamma_i}$ est une gamétisée de (A, ω) si et seulement si la combinaison $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(A_{\gamma_i})$ est convexe.

Démonstration. Soient $x, y \in A$. Alors

$$\begin{aligned}
(xy)_\mathcal{U} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (xy)_{\gamma_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Big(\gamma_i xy + \frac{1-\gamma_i}{2}\Big(\omega(x)y + \omega(y)x\Big)\Big) \\
&= \Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i\Big]xy + \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(1-\gamma_i)\Big]\Big(\omega(x)y + \omega(y)x\Big).
\end{aligned}$$

Supposons que $\mathcal{U}$ est une combinaison convexe. Alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ et ceci entraine que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(1-\gamma_i) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i$. Par suite $\mathcal{U}$ est la gamétisée au taux de $1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i$ de A.

Réciproquement si $\mathcal{U}$ est une gamétisée de A alors

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(1-\gamma_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i. \end{aligned}$$

Par suite, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Ce qui traduit la convexité de la combinaison. □

Proposition 2.2.4. *(a) $A_\gamma = A$ si et seulement si A est gamétique ou $\gamma = 1$.*
(b) Pour tous γ, δ appartenant à K^*, $\left(A_\gamma\right)_\delta = \left(A_\delta\right)_\gamma = A_{\gamma\delta}$.

Démonstration. (a) $A_\gamma = A$ si et seulement si pour tous $x, y \in A$, $(xy)_\gamma = xy$: ceci est équivalent à l'égalité $\gamma xy + \frac{1-\gamma}{2}\big(\omega(x)y + \omega(y)x\big) = xy$, pour tous $x, y \in A$. D'où $A_\gamma = A$ si et seulement si pour tous $x, y \in A$,

$$(1-\gamma)\Big[xy - \frac{1}{2}\big(\omega(x)y + \omega(y)x\big)\Big] = 0, \ \forall x, y \in A.$$

Cette égalité est vérifiée si et seulement si $\gamma = 1$ ou A est gamétique.
(b) Pour tous $x, y \in A$

$$\begin{aligned} \big((xy)_\gamma\big)_\delta &= \delta(xy)_\gamma + \frac{1-\delta}{2}\big(\omega(x)y + \omega(y)x\big) \\ &= \gamma\delta(xy) + \frac{1-\gamma\delta}{2}\big(\omega(x)y + \omega(y)x\big). \end{aligned}$$

D'où $\left(A_\gamma\right)_\delta = A_{\gamma\delta} = \left(A_\delta\right)_\gamma$. □

Au-delà de la gamétisation, on définit la notion d'homogamétisation qui est une vue plus générale que la gamétisation.

2.3 Homogamétisation d'algèbres pondérées

Le terme homogamétisation est issu de la fusion de deux termes : homothétie et gamétisation. Comme la gamétisation, l'homogamétisation repose aussi sur la classe des K-algèbres pondérées. Elle est une généralisation de la gamétisation.

Définition 2.3.1. Pour tous $\sigma, \tau \in K$ on considère le produit $(...)_{(\sigma,\tau)}$ défini par,

$$A \times A \longrightarrow, \ (x,y) \longmapsto (xy)_{(\sigma,\tau)} = \sigma xy + \frac{\tau}{2}\Big(\omega(x)y + \omega(y)x\Big).$$

On définit l'algèbre $A_{(\sigma,\tau)}$ comme étant l'espace A muni du produit $(...)_{(\sigma,\tau)}$.

Proposition 2.3.2. *(i) La famille des K-algèbres $\Big\{A_{(\sigma,\tau)}; \sigma, \tau \in K\Big\}$ est stable par combinaison linéaire.*

(ii) Pour $\sigma \neq 0$ et $\sigma + \tau = 1$, $A_{(\sigma,\tau)}$ correspond à la gamétsation au tau de $1 - \sigma$.

Démonstration. Soient $\alpha, \beta, \sigma, \tau, \sigma', \tau' \in K$. Alors on a :

(i)

$$\begin{aligned}
\Big(xy\Big)_{\alpha A_{(\sigma,\tau)} + \beta A_{(\sigma',\tau')}} &= \Big(xy\Big)_{\alpha A_{(\sigma,\tau)}} + \Big(xy\Big)_{\alpha A_{(\sigma',\tau')}} \\
&= \alpha\sigma xy + \alpha\frac{\tau}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x) + \beta\sigma' xy + \beta\frac{\tau'}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x) \\
&= (\alpha\sigma + \beta\sigma')xy + \frac{\alpha\tau + \beta\tau'}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x) \\
&= \Big(xy\Big)_{(\alpha\sigma + \beta\sigma' \ , \ \alpha\tau + \beta\tau')}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha A_{(\sigma,\tau)} + \beta A_{(\sigma',\tau')} = A_{(\alpha\sigma+\beta\sigma' \ , \ \alpha\tau+\beta\tau')}$.

(ii) Pour $\sigma \neq 0$ et $\sigma + \tau = 1$ on a :

$$\begin{aligned}
(xy)_{(\sigma,\tau)} &= \sigma xy + \frac{\tau}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x) \\
&= \sigma xy + \frac{1-\sigma}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x).
\end{aligned}$$

□

Si $\sigma = 0$, on perd toute l'information du produit originel de l'algèbre. C'est pourquoi dorénavant on impose que σ soit non nul ; dans ce cas $\sigma + \tau = 1$ correspond à la gamétisation de A au taux de $1 - \sigma$ et en particulier pour $\sigma = 1$, $\tau = 0$ on a $A_{(\sigma,\tau)} = A$.

Proposition 2.3.3. *Si $\sigma \neq 1$ alors $A_{(\sigma,\tau)} = A$ si et seulement si $\sigma + \tau = 1$ et A est gamétique.*

Démonstration. Soient $\sigma, \tau \in K$. Alors $A_{(\sigma,\tau)} = A$ si et seulement si pour tous $x, y \in A$, $(xy)_{(\sigma,\tau)} = xy$. D'où

$$(\sigma - 1)xy + \frac{\tau}{2}\left(\omega(x)y + \omega(y)x\right) = 0. \qquad (\star)$$

Si A est gamétique et $\sigma+\tau=1$ alors on a :

$$\begin{aligned}(\sigma-1)xy+\frac{\tau}{2}\left(\omega(x)y+\omega(y)x\right) &= (\sigma-1)xy+\tau xy\\ &= 0 \text{ car } \sigma-1=-\tau.\\ &\text{D'où } (\star) \text{ et par suite } A_{(\sigma,\tau)}=A.\end{aligned}$$

Pour $A_{(\sigma,\tau)}=A$ on a $(\star)$. Après avoir appliqué ω à $(\star)$, il vient que,

$$(\sigma+\tau-1)\omega(xy)=0. \tag{$\star\star$}$$

Comme ω est une pondération alors il existe $c\in A$ tel que $\omega(c)=1$. Ainsi en faisant $x=y=c$ dans $(\star\star)$ on obtient $\sigma+\tau=1$.

En remplaçant τ par $1-\sigma$ dans $(\star)$ on a,

$$(\sigma-1)\left[xy-\frac{1}{2}\left(\omega(x)y+\omega(y)x\right)\right]=0.$$

Comme $\sigma-1\neq 0$ alors A est gamétique. $\square$

Proposition 2.3.4. *Le produit de $A_{(\sigma,\tau)}$ est obtenu par combinaison linéaire d'au plus deux gamétisées de A.*

Démonstration. Si $\sigma+\tau=1$ alors $A_{(\sigma,\tau)}$ correspond à la gamétisée A_σ.
Sinon, soient $\gamma,\ \gamma'\in K^*$ tels que $\gamma\neq\gamma'$ et $A_\gamma,\ A_{\gamma'}$ les gamétisées respectives. Résolvons l'équation $A_{(\sigma,\tau)}=\alpha A_\gamma+\beta A_{\gamma'}$ d'inconnues α,β dans K. Alors pour tous x,y appartenant à A on a :

$$\begin{aligned}A_{(\sigma,\tau)}=\alpha A_\gamma+\beta A_{\gamma'} &\Longleftrightarrow (xy)_{(\sigma,\tau)}=\alpha(xy)_\gamma+\beta(xy)_{\gamma'}\\ &\Longleftrightarrow \sigma xy+\frac{\tau}{2}(\omega(x)y+\omega(y)x)=\\ &\left(\alpha\gamma+\beta\gamma'\right)xy+\frac{1}{2}\left[\alpha(1-\gamma)+\beta(1-\gamma')\right]\left(\omega(x)y+\omega(y)x\right)\end{aligned}$$

Déterminons $\alpha,\ \beta$ en imposant $(sys)\begin{cases}\alpha\gamma+\beta\gamma'=\sigma\\ \alpha(1-\gamma)+\beta(1-\gamma')=\tau.\end{cases}$

Alors :

$$(sys) \iff \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{\gamma'}(\sigma - \alpha\gamma) \\ \alpha(1-\gamma) + \dfrac{1}{\gamma'}(\sigma - \alpha\gamma)(1-\gamma') = \tau \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{\gamma'}(\sigma - \alpha\gamma) \\ \alpha\dfrac{(\gamma'-\gamma)}{\gamma'} = \tau - \dfrac{\sigma}{\gamma'}(1-\gamma) \end{cases}$$

$$\iff \alpha = \frac{\tau\gamma' + (\gamma'-1)\sigma}{\gamma'-\gamma} \; et \; \beta = \frac{1}{\gamma'}(\sigma - \alpha\gamma) = \frac{\tau\gamma + (\gamma'-1)\sigma}{\gamma - \gamma'}.$$

□

La loi multiplicative de $A_{(\sigma,\tau)}$ peut être interprétée comme une composition du produit de A par une application linéaire. En effet, on a le résultat suivant.

Proposition 2.3.5. *La loi de A est obtenue,*

(i) Soit en composant par une homothétie de rapport σ la différence de A et de son algèbre gamétique associée si $\sigma + \tau = 0$.

(ii) Soit en composant la loi de A par une gamétisation au tau de $\dfrac{\tau}{\sigma+\tau}$ suivie d'une homothétie de rapport $\sigma + \tau$ si on a $\sigma + \tau \neq 0$.

Démonstration.

(i) Pour $\sigma + \tau = 0$, on a

$$\sigma\Big(xy - \frac{1}{2}\big(\omega(x)y + \omega(y)x\big)\Big) = \sigma xy - \sigma\frac{1}{2}\big(\omega(x)y + \omega(y)x\big) = \sigma xy + \tau\frac{1}{2}\big(\omega(x)y + \omega(y)x\big) = (xy)_{(\sigma,\tau)}.$$

(ii) Pour $\sigma + \tau \neq 0$ on a :

$$\big(\sigma+\tau\big)\Big((1 - \frac{\tau}{\sigma+\tau})xy + \frac{1}{2}\frac{\tau}{\sigma+\tau}\big(\omega(x)y + \omega(y)x\big)\Big) = \sigma xy + \frac{\tau}{2}\big(\omega(x)y + \omega(y)x\big) = (xy)_{(\sigma,\tau)}.$$

□

Remarque 2.3.6. On a $(A_{(\sigma,\tau)})^2 \subset \ker\omega$ si et seulement si $\sigma + \tau = 0$. En effet,

$$\big(A_{(\sigma,\tau)}\big)^2 \subset \ker\omega \iff \omega\big((xy)_{(\sigma,\tau)}\big) = 0; \forall x, y \in A$$
$$\iff (\sigma+\tau)\omega(xy) = 0;\ \forall x, y \in A$$

Puisque ω est une pondération, il existe $c \in A$ tel que $\omega(c) = 1$. En faisant $x = y = c$ on obtient $\sigma + \tau = 0$.

La proposition suivante nous donne une condition suffisante d'existence d'une pondération sur $A_{(\sigma,\tau)}$.

Proposition 2.3.7. *Si $\sigma + \tau \neq 0$ alors $A_{(\sigma,\tau)}$ est pondérable.*

Démonstration. En fait, pour $\sigma + \tau \neq 0$, l'application ω' définie par $\omega' = (\sigma + \tau)\omega$ est K-linéaire et non nul. Pour tous $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} \omega'((xy)_{(\sigma,\tau)}) &= (\sigma + \tau)(\sigma\omega(xy) + \tau\omega(xy)) \\ &= (\sigma + \tau)((\sigma + \tau)\omega(xy)) \\ &= (\sigma + \tau)\omega(x)(\sigma + \tau)\omega(y) \\ &= \omega'(x)\omega'(y)\ \forall x, y \in A. \end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que ω' est une pondération sur $A_{(\sigma,\tau)}$. □

À travers l'exemple suivant, on montre que la condition $\sigma + \tau \neq 0$ dans la proposition précédente est essentielle.

Exemple 2.3.8. Soit la K-algèbre A de dimension 2, de base $\{e_1, e_2\}$ et définie par la table de multiplication suivante : $e_1^2 = e_1 + e_2, e_2^2 = 0$ et $e_1e_2 = e_2e_1 = \alpha e_2$ avec $\alpha \in K$. L'application K-linéaire ω telle que $\omega(e_1) = 1, \omega(e_2) = 0$ est une pondération sur A. Considérons l'algèbre pondérée (A, ω) et l'homogamétisée $A_{(\sigma,-\sigma)}$. Alors dans $A_{(\sigma,-\sigma)}$ on a :

$$\begin{aligned} (e_1^2)_{(\sigma,-\sigma)} &= \sigma e_1^2 - \frac{\sigma}{2}(\omega(e_1)e_1 + \omega(e_1)e_1) = \sigma e_2, \\ (e_2^2)_{(\sigma,-\sigma)} &= \sigma e_2^2 - \frac{\sigma}{2}(\omega(e_2)e_2 + \omega(e_2)e_2) = 0. \end{aligned}$$

Supposons à présent que $A_{(\sigma,-\sigma)}$ possède une pondération notée π. Alors on a, $\pi(e_1) = \pi(e_2) = 0$. En effet, on a $\pi(e_2^2) = \pi(0) = 0$ et donc $\pi(e_2) = 0$. Et $\pi(e_1)^2 = \sigma\pi(e_2) = 0$. Par suite l'application π est identiquement nulle et ceci est contradictoire car π est une pondération sur $A_{(\sigma,-\sigma)}$.

Pour des raisons de pondérabilité, nous considérons dans la suite les algèbres $A_{(\sigma,\tau)}$ telles que $\sigma + \tau \neq 0$.

Définition 2.3.9. Soient (A, ω) une K-algèbre pondérée et $(\sigma, \tau) \in K^* \times K$ telle que $\sigma + \tau \neq 0$. On appelle homogamétisée de rapport (σ, τ) de A le K-espace vectoriel A muni du produit,

$$(x, y) \longmapsto (xy)_{(\sigma,\tau)} = \sigma xy + \frac{\tau}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x).$$

Elle correspond exactement à l'algèbre $A_{(\sigma,\tau)}$. On dit que $A_{(\sigma,\tau)}$ est obtenue par homogamétisation de A.

Remarque 2.3.10. L'application $\omega_{(\sigma,\tau)} = (\sigma+\tau)\omega$ est une pondération sur $A_{(\sigma,\tau)}$. Elle vérifie la relation suivante dite croisée : pour tous $x, y \in A$, $\omega_{(\sigma,\tau)}(xy) = \omega((xy)_{(\sigma,\tau)})$. En effet, pour tous $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}\omega((xy)_{(\sigma,\tau)}) &= \omega[\sigma xy + \frac{\tau}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x)]\\ &= \sigma\omega(xy) + \tau\omega(xy)\\ &= (\sigma+\tau)\omega(xy).\end{aligned}$$

Concernant l'homogamétisation on a les résultats suivants donnant quelques propriétés prévisibles sur $A_{(\sigma,\tau)}$, les connaissant sur A.

Proposition 2.3.11. *(a) L'ensemble des idempotents de A et l'ensemble des idempotents de $A_{(\sigma,\tau)}$ sont homothétiques.*

(b) L'ensemble des automorphismes de A et celui des automorphismes de $A_{(\sigma,\tau)}$ laissant invariantes les pondérations sont égaux.

(c) Si A admet une décomposition de Peirce par rapport à un idempotent de poids 1, alors cette décomposition et la structure algébrique associée sont conservées par homogamétisation.

Démonstration. (a) On sait qu'un idempotent est de poids 0 ou 1 (cf Proposition 1.3.2). Notons $Ip_i(\wedge)$ l'ensemble des idempotents de $\wedge$ de poids i.

Considérons les applications suivantes : $\mu : Ip_1(A) \longrightarrow Ip_1(A_{(\sigma,\tau)}),\ e \longmapsto (\sigma+\tau)^{-1}e$ et

$\nu : Ip_0(A) \longrightarrow Ip_0(A_{(\sigma,\tau)}),\ e \longmapsto \sigma^{-1}e$.

Les applications μ et ν sont bien définies et bijectives. En effet pour $e_1 \in Ip_1(A)$, $e_0 \in Ip_0(A)$ on a :

$$\begin{aligned}\Big((\sigma+\tau)^{-1}e_1\Big)^2_{(\sigma,\tau)} &= (\sigma+\tau)^{-2}(\sigma e_1 + \tau e_1)\\ &= (\sigma+\tau)^{-1}e_1.\end{aligned}$$

D'où $(\sigma+\tau)^{-1}e$ est idempotent de poids 1 de $A_{(\sigma,\tau)}$. Par suite $(\sigma+\tau)^{-1}e$ appartient à $Ip_1\Big(A_{(\sigma,\tau)}\Big)$.

On a de même :

$$\begin{aligned}(\sigma^{-1}e_0)^2_{(\sigma,\tau)} &= \sigma^{-2}\sigma e_0\\ &= \sigma^{-1}e_0. \text{ D'où } \sigma^{-1}e_0 \in Ip_0(A_{(\sigma,\tau)}).\end{aligned}$$

Ceci assure en fait qu'elles sont bien définies.

Soient e, e' appartenant à $Ip_1(A)$ tels que $\mu(e) = \mu(e')$. Alors $(\sigma+\tau)^{-1}(e-e') = 0$. Par suite $e = e'$. Par conséquent μ est injective.

Vérifions que μ surjective.

Soit $x \in Ip_1(A_{(\sigma,\tau)}$. Posons $e_1 = (\sigma+\tau)x$.

Comme $x \in Ip_1(A_{(\sigma,\tau)}$, alors $x^2_{(\sigma,\tau)} = x$ et $\omega_{(\sigma,\tau)}(x) = 1$. Ainsi $x^2 = (\sigma+\tau)^{-1}x$ et $\omega(e_1) = 1$. Par suite, $e_1e_1 = (\sigma+\tau)^2x^2 = (\sigma+\tau)x = e_1$. D'où e_1 est idempotent appartenant à $Ip_1(A)$. Par conséquent μ est bijective.

De façon analogue on parvient à la même conclusion sur ν.

Conclusion : le (a) est une conséquence des deux bijections μ et ν.

(b) Soit f un automorphisme de A. Alors vérifions que f est un automorphisme de $A_{(\sigma,\tau)}$.

L'application f est nécessairement K-linéaire de $A_{(\sigma,\tau)} \longrightarrow A_{(\sigma,\tau)}$. Pour tous x, y appartenant à A, on a :

$$\begin{aligned}
f((xy)_{(\sigma,\tau)}) &= \sigma f(xy) + \frac{\tau}{2}(\omega(x)f(y) + \omega(y)f(x)) \\
&= \sigma f(x)f(y) + \frac{\tau}{2}(\omega(x)f(y) + \omega(y)f(x)) \\
&= (f(x)f(y))_{(\sigma,\tau)}. \text{ Par suite, } f \text{ est un automorphisme de } A_{(\sigma,\tau)}.
\end{aligned}$$

De même si f est un automorphisme de $A_{(\sigma,\tau)}$ alors pour tous $x, y \in A$,

$$f((xy)_{(\sigma,\tau)}) = (f(x)f(y))_{(\sigma,\tau)} = \sigma f(x)f(y) + \frac{\tau}{2}(\omega(x)f(y) + \omega(y)f(x)). \qquad (\star\star\star)$$

De la linéarité de f on a,

$$f((xy)_{(\sigma,\tau)}) = \sigma f(xy) + \frac{\tau}{2}(\omega(x)f(y) + \omega(y)f(x)). \qquad (\star\star\star\star)$$

On obtient l'égalité $\sigma(f(xy) - f(x)f(y)) = 0$ de $(\star\star\star\star) - (\star\star\star)$. Comme $\sigma \neq 0$ alors $f(xy) = f(x)f(y)$. Par conséquent f est un automorphisme de A.

On sait que pour tout automorphisme f de $A_{(\sigma,\tau)}$ on a : $\omega_{(\sigma,\tau)} \circ f = \omega_{(\sigma,\tau)} \Longleftrightarrow (\sigma+\tau)\omega \circ f = (\sigma+\tau)\omega \Longleftrightarrow \omega = \omega \circ f$. Par suite les automorphismes de $A_{(\sigma,\tau)}$ laissant invariantes les pondérations sont les automorphismes de A laissant invariantes les pondérations.

(c) Comme $\omega_{(\sigma,\tau)} = (\sigma+\tau)\omega$ alors $\ker\omega = \ker\omega_{(\sigma,\tau)}$. Soit e un idempotent de poids 1 et λ une valeur propre de L_e. Alors pour tout $x \in \ker\omega_{(\sigma,\tau)}$, $(ex)_{(\sigma,\tau)} = \sigma ex + \frac{\tau}{2}x = (\sigma\lambda + \frac{\tau}{2})x$. Posons $\tilde{e}$, l'idempotent de $A_{(\sigma,\tau)}$ associé à e à travers μ. On a $\tilde{e} = (\sigma+\tau)^{-1}e$ et :

$(\tilde{e}x)_{(\sigma,\tau)} = \dfrac{\sigma\lambda + \frac{\tau}{2}}{\sigma+\tau}x$ d'où l'égalité

$$\left\{x \in A /\ ex = \lambda x\right\} = \left\{x \in A_{(\sigma,\tau)}/\ (\tilde{e}x)_{(\sigma,\tau)} = \tilde{\lambda}x \text{ où } \tilde{\lambda} = \frac{\sigma\lambda + \frac{\tau}{2}}{\sigma+\tau}\right\}.$$

Par analogie, si λ est une valeur propre de R_e, alors on a pour tout $x \in \ker \omega$,

$$\begin{aligned}(x\tilde{e})_{(\sigma,\tau)} &= \sigma x\tilde{e} + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}x \\ &= \frac{\sigma\lambda + \frac{\tau}{2}}{\sigma+\tau}x \quad \text{puis on obtient l'égalité sivante :}\end{aligned}$$

$$\left\{x \in A / \ xe = \lambda x\right\} = \left\{x \in A_{(\sigma,\tau)} / \ (x\tilde{e})_{(\sigma,\tau)} = \tilde{\lambda}x \text{ où } \tilde{\lambda} = \frac{\sigma\lambda + \frac{\tau}{2}}{\sigma+\tau}\right\}.$$

Par conséquent les composantes de la de décomposition de Peirce se conservent par homogamétisation. La conservation de la structure algébrique s'explique par l'égalité

$$(xy)_{(\sigma,\tau)} = \sigma xy, \text{ pour tous } x, y \in \ker \omega_{(\sigma,\tau)}.$$

$\square$

Chapitre 3

Action du groupe des opérateurs d'homogamétisation sur $K\langle X\rangle$

Dans [8], les auteurs définissent les opérateurs de gamétisation et le groupe des opérateurs de gamétisation. Ils définissent également une action de ce groupe sur la K-algèbre libre $K\langle X\rangle$.

3.1 Groupe des opérateurs de gamétisation

Définition 3.1.1. Étant donnés un scalaire non nul γ et Ω la classe des algèbres pondérées, on appelle opérateur de gamétisation au taux de $1-\gamma$, l'application Γ_γ définie par :

$$\Gamma_\gamma : \Omega \longrightarrow \Omega,\ (A,\omega) \longmapsto (A_\gamma,\omega).$$

Proposition 3.1.2. *L'ensemble $\Gamma = \{\Gamma_\gamma, \gamma \in K^*\}$ muni de la loi de composition des applications a une structure de groupe abélien et est isomorphe à K^*.*

Le couple $(\Gamma,\circ)$ est alors appelé groupe des opérateurs de gamétisation.

Démonstration. De la Proposition 2.2.4 on a : $\Gamma_1 = Id_\Omega$, et pour tous $\gamma,\delta \in K^*$, $\Gamma_\gamma \circ \Gamma_\delta = \Gamma_\delta \circ \Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma\delta}$. □

Remarque 3.1.3. On retrouve les résultats énoncés dans [8] en posant $O_\gamma = \Gamma_{1-\gamma}$.

Le groupe Γ des opérateurs de gamétisation est une vue particulière de celui des opérateurs d'homogamétisation.

3.2 Groupe des opérateurs d'homogamétisation

La classe des K-algèbres obtenues par homogamétisation de A est stable par homogamétisation. À cet effet on énonce les deux propositions suivantes afin de définir le groupe des opérateurs d'homogamétisation.

Proposition 3.2.1. *Pour tous σ, σ', τ et τ' appartenant à K, on a*
$\left(A_{(\sigma,\tau)}\right)_{(\sigma',\tau')} = A_{(\sigma\sigma',(\sigma+\tau)(\sigma'+\tau')-\sigma\sigma')}$.

Démonstration. En effet, pour tous x, y appartenant A on a :

$$\begin{aligned}
\left((xy)_{(\sigma,\tau)}\right)_{(\sigma',\tau')} &= \sigma'((xy)_{(\sigma,\tau)} + \frac{\tau'}{2}(\omega_{(\sigma,\tau)}(x)y + \omega_{(\sigma,\tau)}(y)x) \\
&= \sigma\sigma'xy + \sigma'\frac{\tau}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x) + \frac{\tau'(\sigma+\tau)}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x) \\
&= \sigma\sigma'xy + \frac{1}{2}(\sigma'\tau + \tau'(\sigma+\tau))(\omega(x)y + \omega(y)x) \\
&= \sigma\sigma'xy + \frac{1}{2}(\sigma'\tau + \sigma\tau' + \tau\tau')(\omega(x)y + \omega(y)x) \\
&= \sigma\sigma'xy + \frac{1}{2}((\sigma+\tau)(\sigma'+\tau') - \sigma\sigma')(\omega(x)y + \omega(y)x) \\
&= (xy)_{(\sigma\sigma',(\sigma+\tau)(\sigma'+\tau')-\sigma\sigma')}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.2. *L'ensemble $H = K^* \times K\backslash\{(\alpha, -\alpha) : \alpha \in K\}$ muni du produit $\star$ défini par, $(\sigma,\tau) \star (\sigma',\tau') = (\sigma\sigma', (\sigma+\tau)(\sigma'+\tau') - \sigma\sigma')$, a une structure de groupe abélien. On notera le produit $(\sigma,\tau) \star (\sigma',\tau')$ par $(\sigma,\tau)(\sigma',\tau')$ si cela ne prête à aucune confusion.*

Démonstration. Nous procédons par la vérification des propriétés d'un groupe abélien.
Pour tous $(\sigma,\tau), (\sigma',\tau') \in H$ on a $(\sigma,\tau)\star(\sigma',\tau') \in H$. Sinon, on obtiendrait $(\sigma+\tau)(\sigma'+\tau') - \sigma\sigma' = -\sigma\sigma'$. Par suite $\sigma = -\tau \quad ou \quad \sigma' = -\tau'$: ceci est absurde.
Pour l'associativité et la commutativié, on se donne 3 éléments $(\sigma,\tau), (\sigma',\tau')$ et (μ,ν) de H. On a :

$$\begin{aligned}
[(\sigma,\tau)(\sigma',\tau')](\mu,\nu) &= (\sigma\sigma', (\sigma+\tau)(\sigma'+\tau') - \sigma\sigma')(\mu,\nu) \\
&= ((\sigma\sigma')\mu, ((\sigma+\tau)(\sigma'+\tau'))(\mu+\nu) - (\sigma\sigma')\mu) \\
&= (\sigma(\sigma'\mu), (\sigma+\tau)((\sigma'+\tau')(\mu+\nu)) - \sigma(\sigma'\mu)) \\
&= (\sigma,\tau)(\sigma'\mu, (\sigma'+\tau')(\mu+\nu) - \sigma'\mu) \\
&= (\sigma,\tau)[(\sigma',\tau')(\mu,\nu)].
\end{aligned}$$

La commutativité est héritée du corps.

Vérifions l'existence d'un élément neutre. Notons donc (σ', τ') le neutre s'il en existe. Alors on a pour tout $(\sigma, \tau) \in H$,

$$\begin{aligned}(\sigma,\tau)(\sigma',\tau') = (\sigma,\tau) &\Longleftrightarrow \Big(\sigma\sigma', (\sigma+\tau)(\sigma'+\tau') - \sigma\sigma'\Big) = (\sigma,\tau)\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \sigma\sigma' = \sigma \\ (\sigma+\tau)(\sigma'+\tau') - \sigma\sigma' = \tau. \end{cases}\end{aligned}$$

Comme $\sigma \neq 0$ alors on a $\begin{cases} \sigma' = 1 \\ \tau'(\sigma+\tau) = 0 \end{cases}$. Par suite $\begin{cases} \sigma' = 1 \\ \tau' = 0 \text{ car } \sigma+\tau \neq 0 \end{cases}$. On vérifie sans difficulté que $(1,0)$ représente le neutre.

Pour vérifier l'inversibilité, montrons que pour tout (σ,τ) appartenant à H, l'équation $(\sigma,\tau)(\mu,\nu) = (1,0)$ d'inconnue (μ,ν) admet une solution dans H. Soit $(\sigma,\tau) \in H$. Alors on a :

$$\begin{aligned}(\sigma,\tau)(\mu,\nu) = (1,0) &\Longleftrightarrow \Big(\sigma'\mu, (\sigma'+\tau')(\mu+\nu) - \sigma'\mu\Big) = (1,0)\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \sigma\mu = 1 \\ (\sigma+\tau)(\mu+\nu) - \sigma\mu = 0 \end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu = \sigma^{-1} \\ (\sigma+\tau)(\sigma^{-1}+\nu) = 1 \end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu = \sigma^{-1} \\ (\sigma+\tau)\nu = 1 - \dfrac{\sigma+\tau}{\sigma} \end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu = \sigma^{-1} \\ \nu = \dfrac{1}{\sigma+\tau} - \dfrac{1}{\sigma} = -\dfrac{\tau}{\sigma(\sigma+\tau)} = -\sigma^{-1}(\sigma+\tau)^{-1}\tau. \end{cases}\end{aligned}$$

D'où $(\sigma,\tau)^{-1} = (\mu,\nu) = \Big(\sigma^{-1}, -\sigma^{-1}(\sigma+\tau)^{-1}\tau\Big)$. □

Définition 3.2.3. Le groupe $(H,\star)$ est appelé groupe des opérateurs d'homogamétisation.

Le groupe $(H,\star)$ ainsi défini agit sur la classe des K-algèbres pondérées. Étant donnée la classe des algèbres pondérées Ω, l'homogamétisation est exprimée comme action du groupe H sur Ω à travers l'application

$$H \times \Omega \longrightarrow \Omega, \quad \Big((\sigma,\tau),(A,\omega)\Big) \longmapsto (\sigma,\tau)(A,\omega) = \Big(A_{(\sigma+\tau)}, \omega_{(\sigma,\tau)}\Big).$$

Proposition 3.2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $((\sigma_i,\tau_i))_{1\leqslant i\leqslant n} \in H^n$ on a,*

$$\prod_{k=1}^{n}(\sigma_k,\tau_k) = \left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k, \prod_{k=1}^{n}(\sigma_k+\tau_k) - \prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right).$$

De plus $\prod_{k=1}^{n}(\sigma_k,\tau_k)A = A$ *si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(a) $\prod_{k=1}^{n}\sigma_k = \prod_{k=1}^{n}(\sigma_k+\tau_k) = 1$,

(b) $\prod_{k=1}^{n}\sigma_k \neq 1$ *avec* $\prod_{k=1}^{n}(\sigma_k+\tau_k) = 1$ *et* A *est gamétique.*

Démonstration. Procédons par une récurrence sur n :

Pour $n=1$ on a : $(\sigma,\tau) = (\sigma,(\sigma+\tau)-\sigma)$

Supposons $\prod_{k=1}^{m}(\sigma_k,\tau_k) = \left(\prod_{k=1}^{m}\sigma_k, \prod_{k=1}^{m}(\sigma_k+\tau_k) - \prod_{k=1}^{m}\sigma_k\right)$ pour tout $m \leq n$. Vérifions à l'ordre supérieur.

$$\begin{aligned}(\sigma_{n+1},\tau_{n+1})\prod_{k=1}^{n}(\sigma_k,\tau_k) &= (\sigma_{n+1},\tau_{n+1})\Big(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k, \prod_{k=1}^{n}(\sigma_k+\tau_k) - \prod_{k=1}^{n}\sigma_k\Big)\\ &= \Big(\sigma_{n+1}\prod_{k=1}^{n}\sigma_k, (\sigma_{n+1}+\tau_{n+1})\prod_{k=1}^{n}(\sigma_k+\tau_k) - \sigma_{n+1}\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\Big)\\ &= \Big(\prod_{k=1}^{n+1}\sigma_k, \prod_{k=1}^{n+1}(\sigma_k+\tau_k) - \prod_{k=1}^{n+1}\sigma_k\Big)\\ &= \prod_{k=1}^{n+1}(\sigma_k,\tau_k).\end{aligned}$$

Posons $\sigma = \prod_{k=1}^{n}\sigma_k$ et $\tau = \prod_{k=1}^{n}(\sigma_k+\tau_k)$. Alors on a :

$\Big(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k, \prod_{k=1}^{n}(\sigma_k+\tau_k) - \prod_{k=1}^{n}\sigma_k\Big) = (\sigma,\tau-\sigma)$ et

$\prod_{k=1}^{n}(\sigma_k,\tau_k)A = (\sigma,\tau-\sigma)A = A_{(\sigma,\tau-\sigma)}$.

Si $\sigma \neq 1$, alors de la Proposition 2.3.3, $A_{(\sigma,\tau-\sigma)} = A$ si et seulement si on a (b) c'est à dire $\sigma \neq 1, \tau = 1$ et A est gamétique.

Si $\sigma = 1$ et $A_{(\sigma,\tau-\sigma)} = A$, alors pour tous $x, y \in A$ on a

$$(\sigma-1)xy + \frac{\tau-\sigma}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x) = 0 \qquad (\bullet)$$

En appliquant ω à $(\bullet)$ il vient que, pour tous $x, y \in A$, $(\tau-1)\omega(xy) = 0$, et par suite $\tau = 1$. (a) est alors vérifié. Réciproquement si (a) est vérifié on obtient directement l'égalité $A_{(\sigma,\tau-\sigma)} = A$. $\square$

Outre l'action du groupe H des opérateurs d'homogamétisation sur Ω, on définit une deuxième action de H sur la K- algèbre libre $K\langle X\rangle$.

3.3 Action du groupe H sur $K\langle X\rangle$

Les définitions suivantes sont données dans [13] par K.A.Zhevlakov et ses collaborateurs.

Définition 3.3.1. Soit $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un alphabet de cardinal n. Alors on note $\mathcal{M}(X)$ le magma engendré par X et $K\langle X\rangle$ la K-algèbre libre non nécessairement commutative et non nécessairement associative de $\mathcal{M}(X)$. La longueur d'un monôme $w \in \mathcal{M}(X)$ est appelée le degré de w et est noté $|w|$. Pour tout $x_i \in X$ on dénote par $|w|_i$ le degré de w en x_i : c'est le nombre d'occurrence de x_i.

Définition 3.3.2. Soit $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k w_k$ avec $w_1, \cdots, w_n \in \mathcal{M}(X)$; $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K^*$. Le degré de f est défini par $max\{|w_k|, 1 \leq k \leq m\}$ et pour tout $x_i \in X$ le degré de f en x_i est défini par $max\{|w_k|_i, 1 \leq k \leq m\}$.

Pour tout entier d on désigne par $\mathcal{M}_d(X)$, l'ensemble des monômes de degré d et par $K\langle X\rangle_d$ le sous-espace vectoriel de $K\langle X\rangle$ engendré par $\mathcal{M}_d(X)$. On note c_d la dimension de $K\langle X\rangle_d$ sur K et $w_{d,i}$ un élément de $\mathcal{M}_d(X)$. La famille $(w_{d,i})_{1\leq i\leq c_d}$ est alors une base canonique de $K\langle X\rangle_d$.

Le lemme suivant est énoncé dans [6]. Il nous donne une formule explicite pour le calcul de la dimension de $K\langle X\rangle_d$.

Lemme 3.3.3.

$$\textit{Pour tout } d \in \mathbb{N}^*, \quad c_d = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} 2d-2 \\ d-1 \end{pmatrix} \sum_{p_1+p_2+\cdots+p_n=d} \frac{d!}{p_1! \cdots p_n!} \tag{3.3.1}$$

Définition 3.3.4. (*i*) Soient (A, ω) une K-algèbre pondérée et $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k w_k$ un polynôme de $K\langle X\rangle$. On dira que le polynôme f est une ω-identité ou que A vérifie l'identité f si

$$\sum_{k=1}^{m} \theta_k \omega(a_1)^{|f|_1-|w_k|_1} \cdots \omega(a_n)^{|f|_n-|w_k|_n} w_k(a_1, \cdots, a_n) = 0, \ \forall a_1, \cdots, a_n \in A \tag{3.3.2}$$

(*ii*) Une algèbre vérifiant une telle identité est dite ω-polynômiale. Le polynôme de plus haut degré de f est appelé polynôme directeur de l'identité. Mais lorsque le polynôme directeur est un monôme, l'identité est dite ω-monômiale.

(*iii*) Le polynôme f est dit homogène si pour tous $1 \leq k \leq m$ et $x_i \in X$ on a $|f|_i = |w_k|_i$.

(*iv*) Une K-algèbre A est dite définie ou caractérisée par une identité f si A vérifie l'identité f et ne vérifie pas une autre identité dont le degré ou le nombre de monôme du polynôme directeur est moins que celui de f.

On donne quelques exemples d'algèbres classiques ω-monômiales.

Exemple 3.3.5. (i) Toute K-algèbre train (A, ω) de degré n de polynôme train P vérifie l'identité P. Le monôme directeur de l'identité est $w = x^n$.

(ii) Les algèbres gamétiques, les algèbres de Bernstein et les algèbres d'Etherington sont toutes ω-monômiales. Ces classes d'algèbres sont respectivement caractérisées par $x^2 - \omega(x)x = 0$, $(x^2)^2 - \omega(x)^2x^2 = 0$ et $(x^2)^2 - \omega(x)^3x = 0$.

Proposition 3.3.6. *(i) Si A vérifie l'identité $f = \sum_{k=1}^{m} \theta_k w_k$, alors $f(\mathbb{1}) = 0$ avec $\mathbb{1} = (1, \cdots, 1) \in K^n$.*

(ii) Si $Card(K) \geq \max\{|f|_{x_i},\ x_i \in X\}$ (c'est à dire que K est suffisamment grand pour linéariser f), alors l'algèbre A vérifie l'identité f si et seulement si $f(y_1, \cdots, y_n) = 0$ pour tous $y_1, \cdots, y_n \in A$, tous de poids 1.

Démonstration. (i) Il suffit de prendre $a_i = c\ \forall i = 1, \cdots, n$ avec c un élément de poids 1 de A. On obtient alors $\sum_{k=1}^{m} \theta_k w(c, \cdots, c) = 0$. En appliquant ω à cette dernière égalité, il résulte que $\sum_{k=1}^{m} \theta_k = 0$.

(ii) Si l'algèbre A vérifie l'identité f alors $f(y_1, \cdots, y_n) = 0$ pour tous $y_1, \cdots, y_n \in A$ de poids 1.

Supposons que $f(y_1, \cdots, y_n) = 0$ pour tous $y_1, \cdots, y_n \in A$, tous de poids 1. L'identité est alors vérifiée pour toute famille $y_1, \cdots, y_n$ de poids 1 de A. Soient à présent $y_1, \cdots, y_n \in A \setminus \ker\omega$. On sait que pour tout w appartenant à $\mathcal{M}(X)$, $w(y_1, \cdots, y_n) = \omega\left(y_1^{|w|_1} \cdots y_n^{|w|_n}\right) w\left(\omega(y_1)^{-1}y_1, \cdots, \omega(y_n)^{-1}y_n\right)$. En remplaçant $w(y_1, \cdots, y_n)$ dans le membre de gauche de l'identité (3.3.2) on a pour tous $y_1, \cdots, y_n \in A$,
$\sum_{k=1}^{m} \theta_k \omega(y_1)^{|f|_1 - |w_k|_1} \cdots \omega(y_n)^{|f|_n - |w_k|_n} \omega\left(y_1^{|w_k|_1} \cdots y_n^{|w_k|_n}\right) w_k\left(\omega(y_1)^{-1}y_1, \cdots, \omega(y_n)^{-1}y_n\right) = \omega\left(y_1^{|f|_1} \cdots y_n^{|f|_n}\right) f\left(\omega(y_1)^{-1}y_1, \cdots, \omega(y_n)^{-1}y_n\right) = 0$. On étend le résultats à $\ker\omega$. En effet, si $y = (y_1, \cdots, y_n)$ appartient à A^n, alors de la décomposition de Lévi on a $y_i = a_i + b_i$ avec $a_i \in A \setminus \ker\omega$ et $b_i \in \ker\omega$.

□

Définition 3.3.7. On définit action du groupe H sur l'algèbre $K\langle X\rangle$ par,

$$H \times K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle,\ \Big((\sigma, \tau),\ f\Big) \longmapsto (\sigma, \tau)f \text{ notée } f_{(\sigma,\tau)} \text{ et défini par,}$$

$\forall x_i \in X,\ (x_i)_{(\sigma,\tau)} = x_i$, et pour tous $f, g \in K\langle X\rangle$,

$(\alpha f + g)_{(\sigma,\tau)} = \alpha f_{(\sigma,\tau)} + g_{(\sigma,\tau)}\ \forall \alpha \in K$,

$(fg)_{(\sigma,\tau)} = \dfrac{\sigma}{\sigma + \tau}\Big((f)_{(\sigma,\tau)}(g)_{(\sigma,\tau)}\Big) + \dfrac{\tau}{2(\sigma + \tau)}\Big(f_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})g_{(\sigma,\tau)} + g_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})f_{(\sigma,\tau)}\Big)$
où $\mathbb{1} = (1, ..., 1) \in K^n$.

Proposition 3.3.8. *Pour tout $f \in K\langle X\rangle$ et pour tout $\lambda \in K^*$, $f_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)} = f_{(\sigma,\tau)}$.*

Démonstration. Comme pour tous $f, g \in K\langle X\rangle$ et pour tout $\alpha \in K$ on a $(\alpha f + g)_{(\sigma,\tau)} = \alpha f_{(\sigma,\tau)} + g_{(\sigma,\tau)}$, alors il nous suffit de faire la vérification pour les monômes. À cet effet raisonnons par récurrence sur le degré des monômes.
Si w est un monôme de degré 1 c'est à dire $w = x_i \in X$ alors on a,

$$\begin{aligned}
w_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)} &= (x_i)_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)} \\
&= x_i \\
&= (x_i)_{(\sigma,\tau)} \\
&= w_{(\sigma,\tau)}.
\end{aligned}$$

Supposons que la proposition est vérifiée pour tout monôme de degré inférieur ou égale à n.
Soit à présent w un monôme de degré $n+1$. Alors il existe deux monômes u et v de degré au plus n tels qu'on ait $w = uv$. Par suite,

$$\begin{aligned}
w_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)} &= \frac{\lambda\sigma}{\lambda(\sigma+\tau)} u_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)} v_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)} + \frac{\lambda\tau}{2\lambda(\sigma+\tau)} \Big(u_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)}(\mathbb{1}) v_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)} + v_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)}(\mathbb{1}) u_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)} \Big) \\
&= \frac{\sigma}{\sigma+\tau} u_{(\sigma,\tau)} v_{(\sigma,\tau)} + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)} \Big(u_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) v_{(\sigma,\tau)} + v_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) u_{(\sigma,\tau)} \Big) \\
&= (uv)_{(\sigma,\tau)} \\
&= w_{(\sigma,\tau)}.
\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant fourni une légère facilité pour les calculs de l'action du groupe H sur $K\langle X\rangle$.

Proposition 3.3.9. *Pour tous $w \in \mathcal{M}(X)$ et $f \in K\langle X\rangle$ on a :*

$$w_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = w(\mathbb{1}) = 1 \quad et \quad f_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = f(\mathbb{1}) \ \text{où}\ \mathbb{1} = (1, \ldots, 1) \in K^n$$

Démonstration. Montrons d'abord que pour tout $w \in \mathcal{M}(X)$, $w_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = w(\mathbb{1}) = 1$.
L'égalité $w(\mathbb{1}) = 1$ est vraie par définition de $\mathcal{M}(X)$. Vérifions par récurrence sur le degré d de $w \in \mathcal{M}(X)$ que $w_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = w(\mathbb{1})$.
Si $d = 1$ alors il existe $x_i \in X$ tel que $w = x_i$. Et par suite $w_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = (x_i)_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = 1$.
Supposons l'égalité vraie pour tout élément de degré inférieure ou égale à d. Soit w un monôme de degré $d+1$. On sait que w s'écrire sous la forme $w = uv$ avec u, v de degré au plus d. On a

donc :

$$\begin{aligned}
w_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) &= \frac{\sigma}{\sigma+\tau}u_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})v_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}\Big(u_{\sigma,\tau)}(\mathbb{1})v_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) + v_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})u_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})\Big)\\
&= u_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})v_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})\\
&= u(\mathbb{1})v(\mathbb{1})\\
&= w(\mathbb{1}).
\end{aligned}$$

Enfin, pour tout $f \in K\langle X\rangle$ tel que $f = \sum_{i=1}^{n}\theta_i w_i$ avec $\theta_i \in K,\ w_i \in \mathcal{M}(X)$ on a,

$$\begin{aligned}
f_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) &= \Big(\sum_{i=1}^{n}\theta_i w_i\Big)_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\theta_i (w_i)_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\theta_i\\
&= f(\mathbb{1}).
\end{aligned}$$

□

On définit sur H un relation d'équivalence $\Re$ liée à l'action du groupe. Étant donnés (σ,τ) et (γ,δ) appartenant à H, $(\sigma,\tau)\Re(\gamma,\delta)$ si et seulement si $f_{(\sigma,\tau)} = f_{(\gamma,\delta)}$ pour tout $f \in K\langle X\rangle$.

Proposition 3.3.10. *Si la structure sous-jacente de $K\langle X\rangle$ est intègre alors la classe d'équivalence d'un élément (σ,τ) appartenant à H est donnée par, $\overline{(\sigma,\tau)} = \Big\{(\lambda\sigma,\lambda\tau),\ \lambda\in K^*\Big\}$.*

Démonstration. De la Proposition 3.3.8 on a l'inclusion $\overline{(\sigma,\tau)} \supset \Big\{(\lambda\sigma,\lambda\tau),\ \lambda\in K^*\Big\}$.

Soient $(\gamma,\delta)\in\overline{(\sigma,\tau)}$ et f le polynôme non nul de degré 1 défini par $f = x_1 - x_2$. Alors de la Proposition 3.3.9 on a $f_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = f_{(\gamma,\delta)} = 0$ car $f(\mathbb{1}) = 0$. Ainsi, on obtient $\frac{\sigma}{\sigma+\tau}f^2_{(\sigma,\tau)} = \frac{\gamma}{\gamma+\delta}f^2_{(\gamma,\delta)}$. Comme f est de degré 1 alors $f_{(\sigma,\tau)} = f = f_{(\gamma,\delta)}$. De l'hypothèse d'intégrité sur $K\langle X\rangle$, on a $\frac{\sigma}{\sigma+\tau} = \frac{\gamma}{\gamma+\delta}$. D'où l'existence d'un scalaire λ tel que $\gamma = \lambda\sigma$ et $\gamma+\delta = \lambda(\sigma+\tau)$. Ainsi $\tau = \lambda\delta$. Par suite $(\gamma,\delta) = (\lambda\sigma,\lambda\tau)$. D'où $\overline{(\sigma,\tau)} \subset \Big\{(\lambda\sigma,\lambda\tau),\ \lambda\in K^*\Big\}$. Par conséquent $\overline{(\sigma,\tau)} = \Big\{(\lambda\sigma,\lambda\tau),\ \lambda\in K^*\Big\}$. □

Remarque 3.3.11. Considérons l'algèbre $K\langle X\rangle^c = K\langle X\rangle \oplus Kc$ qui est obtenue par adjonction d'un élément c tel que $c^2 = 0,\ cf = fc = f,\ \forall f\in K\langle X\rangle$.

On simplifie les calculs de l'action du groupe H sur $K\langle X\rangle$ en définissant sur $K\langle X\rangle^c$ le produit,

$$f * g = \frac{1}{\sigma(\sigma+\tau)}\Big(\sigma f + \frac{\tau}{2}f(\mathbb{1})c\Big)\Big(\sigma g + \frac{\tau}{2}g(\mathbb{1})c\Big).$$

La restriction du produit $*$ à $K\langle X\rangle$ coïncide avec l'homogamétisation du produit : c'est à dire pour tous f, g appartenant à $K\langle X\rangle$ on a,

$$(fg)_{(\sigma,\tau)} = f * g.$$

Ainsi de la Proposition 3.3.9 on en déduit que,

$$(fg)_{(\sigma,\tau)} = \frac{1}{\sigma(\sigma+\tau)}\Big(\sigma f_{(\sigma,\tau)} + \frac{\tau}{2}f(\mathbb{1})c\Big)\Big(\sigma g_{(\sigma,\tau)} + \frac{\tau}{2}g(\mathbb{1})c\Big).$$

Exemple 3.3.12. Nous calculons $f_{(\sigma,\tau)}$ à travers le produit $*$ avec $f = (xy)(uv)$. On a :

$$\begin{aligned}
f_{(\sigma,\tau)} &= \Big((xy)(uv)\Big)_{(\sigma,\tau)} \\
&= \frac{1}{\sigma(\sigma+\tau)}\Big(\sigma(xy)_{(\sigma,\tau)} + \frac{\tau}{2}c\Big)\Big(\sigma(uv)_{(\sigma,\tau)} + \frac{\tau}{2}c\Big) \\
&= \frac{1}{\sigma(\sigma+\tau)}\Big[\frac{1}{\sigma+\tau}\Big(\sigma x + \frac{\tau}{2}c\Big)\Big(\sigma y + \frac{\tau}{2}c\Big) + \frac{\tau}{2}c\Big] \times \Big[\frac{1}{\sigma+\tau}\Big(\sigma u + \frac{\tau}{2}c\Big)\Big(\sigma v + \frac{\tau}{2}c\Big) + \frac{\tau}{2}c\Big] \\
&= \frac{\sigma^3}{(\sigma+\tau)^3}(xy)(uv) + \frac{\sigma^2\tau}{2(\sigma+\tau)^3}\Big((xy)u + (xy)v + x(uv) + y(uv)\Big) \\
&+ \frac{\sigma\tau}{2(\sigma+\tau)^2}(xy+uv) + \frac{\sigma\tau^2}{4(\sigma+\tau)^3}(xu+xv+yu+yv) \\
&+ \frac{\tau^2}{4(\sigma+\tau)^2}(x+y+u+v).
\end{aligned}$$

Les deux résultats suivants établissent un lien entre les actions du groupe H sur une algèbre pondérée (A, ω) et les identités vérifiées par A.

Proposition 3.3.13. *Pour tout $w \in \mathcal{M}(X)$ et pour toute famille $a_1, ..., a_n$ d'éléments de A on a,*

$$\omega\Big(w(a_1, ..., a_n)_{(\sigma,\tau)}\Big) = (\sigma+\tau)^{|w|-1}\omega(a_1)^{|w_1|}...\omega(a_n)^{|w|_n}.$$

Démonstration. De la relation $\omega_{(\sigma,\tau)} = (\sigma+\tau)\omega$ on a,

$$\begin{aligned}
\omega\Big((a_1, ..., a_n)_{(\sigma,\tau)}\Big) &= (\sigma+\tau)^{-1}\omega_{(\sigma,\tau)}\Big(a_1, ..., a_n\Big)_{(\sigma,\tau)} \\
&= (\sigma+\tau)^{-1}\omega_{(\sigma,\tau)}(a_1)^{|w|_1}...\omega_{(\sigma,\tau)}(a_n)^{|w|_n} \\
&= (\sigma+\tau)^{-1}\Big((\sigma+\tau)^{|w|_1}\omega(a_1)^{|w|_1}\Big) \times \cdots \times \Big((\sigma+\tau)^{|w|_n}\omega(a_n)^{|w|_n}\Big) \\
&= (\sigma+\tau)^{-1}\Big(\sigma+\tau\Big)^{(|w|_1+\cdots+|w|_n)}\omega(a_1)^{|w|_1} \times \cdots \times \omega(a_n)^{|w|_n} \\
&= (\sigma+\tau)^{-1}(\sigma+\tau)^{(|w|)}\omega(a_1)^{|w|_1}\cdots\omega(a_n)^{|w|_n} \\
&= (\sigma+\tau)^{(|w|-1)}\omega(a_1)^{|w|_1}\cdots\omega(a_n)^{|w|_n}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.14. *Pour tout $f \in K\langle X\rangle$ et pour toute famille $a_1, \cdots, a_n$ d'éléments de (A, ω) telle que $\omega(a_i) = 1$ on a :*

$$(f(a_1, ..., a_n))_{(\sigma,\tau)} = (\sigma + \tau)^{|f|-1} f_{(\sigma,\tau)}(a_1, ..., a_n).$$

Démonstration. Vérifions d'abord le résultat pour les monômes $w \in \mathcal{M}(X)$: c'est à dire que $(w(a_1, ..., a_n))_{(\sigma,\tau)} = (\sigma + \tau)^{|w|-1} w_{(\sigma,\tau)}(a_1, ..., a_n)$. Pour ce faire procédons par récurrence sur le degré d de w.

La vérification est immédiate pour $d = 1$.

Supposons que l'hypothèse est vraie pour tout monôme de degré $k \leq d$.

Soit donc $w \in \mathcal{M}_{d+1}(X)$. Alors il existe $u, v \in \mathcal{M}(X)$ de degré au plus d tels qu'on ait $w = uv$, $|u| + |v| = d + 1$. Ainsi en posant $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, pour toute famille $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A^n$, on a de l'homogamétisation,

$$\begin{aligned}\Big(w(a)\Big)_{(\sigma,\tau)} &= \Big(u(a)v(a)\Big)_{(\sigma,\tau)} \\ &= \sigma u(a)_{(\sigma,\tau)} v(a)_{(\sigma,\tau)} + \frac{\tau}{2}\Big[\omega\Big(u(a)_{(\sigma,\tau)}\Big) v(a)_{(\sigma,\tau)} + \omega\Big(v(a)_{(\sigma,\tau)}\Big) u(a)_{(\sigma,\tau)}\Big].\end{aligned}$$

De la Proposition 3.3.13 on a,

$$\Big(w(a)\Big)_{(\sigma,\tau)} = \sigma u(a)_{(\sigma,\tau)} v(a)_{(\sigma,\tau)} + \frac{\tau}{2}\Big[\Big(\sigma+\tau\Big)^{|u|-1} v(a)_{(\sigma,\tau)} + \Big((\sigma+\tau\Big)^{|v|-1} u(a)_{(\sigma,\tau)}\Big].$$

De l'hypothèse de récurrence on a,

$$\begin{aligned}\Big(w(a)\Big)_{(\sigma,\tau)} &= (\sigma+\tau)^{|u|+|v|-2}\Big(\sigma u_{(\sigma,\tau)}(a) v_{(\sigma,\tau)}(a) + \frac{\tau}{2}\Big(u_{(\sigma,\tau)}(a) + v_{(\sigma,\tau)}(a)\Big)\Big) \\ &= (\sigma+\tau)^{|u|+|v|-1}\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau} u_{(\sigma,\tau)}(a) v_{(\sigma,\tau)}(a) + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}\Big(u_{(\sigma,\tau)}(a) + v_{(\sigma,\tau)}(a)\Big)\Big) \\ &= (\sigma+\tau)^{|u|+|v|-1}\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau} u_{(\sigma,\tau)}(a) v_{(\sigma,\tau)}(a) + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}\Big(v(\mathbb{1}) u_{(\sigma,\tau)}(a) + u(\mathbb{1}) v_{(\sigma,\tau)}(a)\Big)\Big)\end{aligned}$$

car de la Proposition 3.3.9 on a $u(\mathbb{1}) = v(\mathbb{1}) = 1$. D'où

$$\begin{aligned}\Big(w(a)\Big)_{(\sigma,\tau)} &= (\sigma+\tau)^{|u|+|v|-1} (uv)_{(\sigma,\tau)}(a) \\ &= (\sigma+\tau)^{d} (w)_{(\sigma,\tau)}(a).\end{aligned}$$

Si $f = \sum_{k=1}^{m} \theta_k w_k$ où $\theta_1, ..., \theta_m \in K^*$, $w_1, ..., w_m \in \mathcal{M}(X)$. Alors pour tout $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ appartenant à A^n, on a

$$\Big(f(a)\Big)_{(\sigma,\tau)} = \sum_{k=1}^{m} \theta_k \omega_{(\sigma,\tau)}(a_1)^{|f|_1 - |w_k|_1} \ldots \omega_{(\sigma,\tau)}(a_n)^{|f|_n - |w_k|_n} (w_k(a))_{(\sigma,\tau)}.$$

Or on a, $\omega_{(\sigma,\tau)}(a_i) = \sigma + \tau$, $|f|_1 + \cdots + |f|_n = |f|$, $|w_k|_1 + \cdots + |w_k|_n = |w_k|$.

De l'égalité $(w_k(a))_{(\sigma,\tau)} = (\sigma+\tau)^{|w_k|-1} w_{(\sigma,\tau)}(a)$, on a

$$\left(f(a)\right)_{(\sigma,\tau)} = \sum_{k=1}^{m} (\sigma+\tau)^{|f|-|w_k|} (\sigma+\tau)^{|w_k|-1} \theta_k (w_k)_{(\sigma,\tau)}(a).$$

D'où $(f(a_1,...,a_n))_{(\sigma,\tau)} = (\sigma+\tau)^{|f|-1} f_{(\sigma,\tau)}(a_1,...,a_n)$.

□

Corollaire 3.3.15. *Si A vérifie l'identité f alors $A_{(\sigma,\tau)}$ vérifie l'identité $f_{(\sigma,\tau)}$.*

Démonstration. Soit A une Algèbre vérifiant une identité f. Alors on a pour toute famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de A on a

$$\sum_{k=1}^{m} \theta_k \omega(a_1)^{|f|_1-|w_k|_1} \cdots \omega(a_n)^{|f|_n-|w_k|_n} w_k(a_1,\cdots,a_n) = 0.$$

En particulier pour toute famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de poids $(\sigma+\tau)-1$ de A on a

$$\sum_{k=1}^{m} \theta_k (\sigma+\tau)^{-|f|+|w_k|} w_k(a_1,\cdots,a_n) = 0.$$

Par suite, on obtient de la Proposition précédente l'égalité

$$\sum_{k=1}^{m} \theta_k (\sigma+\tau)^{-|f|+|w_k|} (\sigma+\tau)^{-|w_k|+1} (w_k)_{(\sigma,\tau)}(a_1,...,a_n) = 0.$$

D'où

$$f_{(\sigma,\tau)}(a_1,...,a_n) = \sum_{k=1}^{m} \theta_k (w_k)_{(\sigma,\tau)}(a_1,...,a_n) = 0.$$

En remarquant qu'un élément de poids $(\sigma+\tau)^{-1}$ de (A,ω) est un élément de poids 1 de $\left(A_{(\sigma,\tau)},\omega_{(\sigma,\tau)}\right)$ et d'après la Proposition 3.3.6, $\left(A_{(\sigma,\tau)},\omega_{(\sigma,\tau)}\right)$ vérifie l'identité $f_{(\sigma,\tau)}$. □

Chapitre 4

Invariance par homogamétisation

Dans [7] C.Mallol et R.Varro abordent l'aspect invariance par gamétisation. Ceci est un aspect particulier de l'invariance par homogamétisation. Dans ce chapitre on donnera d'abord quelques éléments d'invariance par gamétisation avant de traiter le cas généralisé qui est d'invariance par homogamétisation.

4.1 Invariance par gamétisation

Définition 4.1.1. Soit f un polynôme de $K\langle X\rangle$. On dit que le polynôme f est :
(i) Invariant sous Γ_γ ou Γ_γ-invariant, si $\gamma \neq 1$ et $f_\gamma = \gamma^{|f|-1}f$,
(ii) Invariant universel ou Γ-invariant, si f est Γ_γ-invariant pour tout $\gamma \in K^*$.

Proposition 4.1.2. *(i) Si f est Γ_γ-invariant et A vérifie l'identité f alors A vérifie l'identité f_γ.*
(ii) Si f est Γ_γ-invariant alors pour tout $\lambda \in K$, λf est Γ_γ-invariant.

Démonstration. (i) Soit f un polynôme Γ_γ-invariant appartenant à $K\langle X\rangle$ tel que A vérifie l'identité f. Alors pour toute famille $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de poids 1 de A, on a $f(y_1,\cdots,y_n)=0$. Soit $f_\gamma(y_1,\cdots,y_n)=0$. D'après la Proposition 3.3.6, A vérifie l'identité f_γ.
(ii) Il est claire que pour tout λ appartenant K^*, $\lambda f_\gamma = \gamma^{|\lambda f|-1}\lambda f$ dès que $f_\gamma = \gamma^{|f|-1}f$. $\square$

Proposition 4.1.3. *Soient f et g deux polynômes vérifiant $f(\mathbb{1}) = g(\mathbb{1}) = 0$. Si les deux polynômes f et g sont Γ_γ-invariants alors fg et $xf - \frac{1}{2}f$ le sont. Si de plus f et g sont de même degré alors pour tous scalaires α, β, $\alpha f + \beta g$ est aussi Γ_γ-invariant.*

Démonstration. Soient deux polynômes f et g Γ_γ-invariants vérifiant $f(\mathbb{1}) = g(\mathbb{1}) = 0$. Alors on a $(fg)_\gamma = \gamma f_\gamma g_\gamma = \gamma^{|f|+|g|-1} fg = \gamma^{|fg|-1} fg$. fg est donc Γ_γ-invariants.
De même, $(xf - \frac{1}{2}f)_\gamma = x\gamma f_\gamma + \frac{1-\gamma}{2} f_\gamma - \frac{1}{2} f_\gamma = \gamma(xf_\gamma - \frac{1}{2}f_\gamma) = \gamma^{|f|}(xf - \frac{1}{2}f)$.
Et si $|f| = |g|$, on a $(\alpha f + \beta g)_\gamma = \alpha f_\gamma + \beta g_\gamma = \gamma^{|f|-1}(\alpha f + \beta g)$. □

4.2 Invariance par homogamétisation

Définition 4.2.1. Soit f un polynôme de $K\langle X\rangle$. On dit f est :
(*i*) (σ, τ)-invariant par homogamétisation si $f_{(\sigma,\tau)} = \left(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\right)^{|f|-1} f$,
(*ii*) invariant universel par homogamétisation s'il est (σ, τ)-invariant pour tout $(\sigma, \tau) \in H$.

Remarque 4.2.2. (*i*) Tout polynôme f de $K\langle X\rangle$ est $(\sigma, 0)$-invariant. En effet pour tout $w \in \mathcal{M}(X)$ on a par définition $w_{(\sigma,0)} = w$. D'où $f_{(\sigma,0)} = f$ pour tout $f \in K\langle X\rangle$.

(*ii*) La $(\sigma, 1-\sigma)$-invariance par homogamétisation coïnccide avec la $\Gamma_\sigma - invariance$ par gamétisation telle que définie dans [7].

(iii) Pour tout $f \in K\langle X\rangle$, si f est (σ, τ)-invariant alors pour tout $\lambda \in K$, λf est $(\sigma, 1-\sigma)$-invariant. Il est immédiat que λf est invariant universel dès que f l'est.

Proposition 4.2.3. (*a*) *Si $f \in K\langle X\rangle$ est (σ, τ)-invariant alors pour tout $(\mu, \nu) \in H$, $f_{(\mu,\nu)}$ est (σ, τ)-invariant.*

b) Soit $(\sigma_i, \tau_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'élément de H. Si $f \in K\langle X\rangle$ est (σ_i, τ_i)-invariant pour tout $1 \leq i \leq n$, alors f est $\left(\prod_{i=1}^{n} \sigma_i, \prod_{i=1}^{n}(\sigma_i + \tau_i) - \prod_{i=1}^{n} \sigma_i\right)$-invariant.

Démonstration. (*a*) Si f est (σ, τ)-invariant alors, $f_{(\sigma,\tau)} = \left(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\right)^{|f|-1} f$ et pour tout $(\mu, \nu) \in H$ on a :

$$\begin{aligned}
(\sigma, \tau)\left(f_{(\mu,\nu)}\right) &= (\sigma, \tau)(\mu, \nu)(f) \\
&= (\mu, \nu)(\sigma, \tau)(f) \\
&= (\mu, \nu)\left(f_{(\sigma,\tau)}\right) \\
&= (\mu, \nu)\left(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\right)^{|f|-1} f \\
&= \left(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\right)^{|f|-1} (\mu, \nu) f \\
&= \left(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\right)^{|f|-1} f_{(\mu,\nu)}.
\end{aligned}$$

(b) Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned}(\sigma_1,\tau_1)(\sigma_2,\tau_2)f &= (\sigma_1,\tau_1)\Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_2+\tau_2}\Big)^{|f|-1} f\\ &= \Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_2+\tau_2}\Big)^{|f|-1}(\sigma_1,\tau_1)f\\ &= \Big(\frac{\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1+\tau_1)(\sigma_2+\tau_2)}\Big)^{|f|-1} f.\end{aligned}$$

Supposons que la relation est vraie jusqu'à l'ordre n et f est $\big(\sigma_{n+1},\tau_{n+1}\big)$-invariant. Posons $(\sigma,\tau) = \Big(\prod_{i=1}^{n}\sigma_i,\ \prod_{i=1}^{n}(\sigma_i+\tau_i) - \prod_{i=1}^{n}\sigma_i\Big)$: alors on a,

$$\begin{aligned}(\sigma_1,\tau_1)(\sigma_2,\tau_2)...(\sigma_n,\tau_n)(\sigma_{n+1},\tau_{n+1})(f) &= (\sigma,\tau)(\sigma_{n+1},\tau_{n+1})(f)\\ &= \Big(\frac{\sigma\sigma_{n+1}}{(\sigma+\tau)(\sigma_{n+1}+\tau_{n+1})}\Big)^{|f|-1} f\end{aligned}$$

Ainsi f est $\Big(\prod_{i=1}^{n+1}\sigma_i,\ \prod_{i=1}^{n+1}(\sigma_i+\tau_i) - \prod_{i=1}^{n+1}\sigma_i\Big)$-invariant.

□

Propriétés 4.2.4. Soient f et g deux polynômes dans $K\langle X\rangle$ (σ,τ)-invariants par homogamétisation. Alors les polynômes suivants sont (σ,τ)-invariants sous les conditions énoncées.

(a) fg, si $\tau f(\mathbb{1}) = \tau g(\mathbb{1}) = 0$,

(b) $\alpha f + \beta g$, si f et g ont le même degré,

(c) $hf - \frac{1}{2}h(\mathbb{1})f,\ fh - \frac{1}{2}h(\mathbb{1})f$, pour tout $h \in K\langle X\rangle$, $|h| = 1$ et $\tau f(\mathbb{1}) = 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a)\ (fg)_{(\sigma,\tau)} &= \frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big((f)_{(\sigma,\tau)}(g)_{(\sigma,\tau)}\Big) + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}\Big(f_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})g_{(\sigma,\tau)} + g_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})f_{(\sigma,\tau)}\Big)\\ &= \frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big((f)_{(\sigma,\tau)}(g)_{(\sigma,\tau)}\Big) \text{ car de la Proposition 3.3.9 } f_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = f(\mathbb{1}) = 0\\ &= \frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|-1} f\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|g|-1} g\\ &= \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|+|g|-1} fg\\ &= \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|fg|-1} fg.\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)_{(\sigma,\tau)} &= \alpha f_{(\sigma,\tau)} + \beta g_{(\sigma,\tau)}\\ &= \alpha\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|-1} f + \beta\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|g|-1} g\\ &= \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|-1}(\alpha f + \beta g) \text{ car } |f| = |g|.\end{aligned}$$

$$(c)\ (hf-\frac{1}{2}h(\mathbb{1})f)_{(\sigma,\tau)} = \frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big((f)_{(\sigma,\tau)}(h)_{(\sigma,\tau)}\Big) + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}\Big(f_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})h_{(\sigma,\tau)} + h_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1})f_{(\sigma,\tau)}\Big)$$
$$-\frac{1}{2}h(\mathbb{1})f_{(\sigma,\tau)}$$
$$= \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|}hf + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|-1}h(\mathbb{1})f - \frac{1}{2}\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|-1}h(\mathbb{1})f$$

car $\tau f(\mathbb{1}) = 0$.

$$\text{D'où } (hf-\frac{1}{2}h(\mathbb{1})f)_{(\sigma,\tau)} = \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|}hf - \frac{1}{2}\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|}h(\mathbb{1})f$$
$$= \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|fh|-1}(hf-\frac{1}{2}h(\mathbb{1})f) \text{ car } |h|=1 \text{ et } |fh|-|h|=|f|.$$

□

On désigne par Q la partie du corps K isomorphe au semi-corps $\mathbb{Q}_+$.

Lemme 4.2.5. *Pour tout entier $d\geq 2$ et tout $w_{d,i}\in\mathcal{M}_d(X)$ on a,*
$$(w_{d,i})_{(\sigma,\tau)} = \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{d-1}w_{d,i} + \frac{\sigma^{d-2}\tau}{(\sigma+\tau)^{d-1}}\sum_{j=1}^{c_{d-1}}\lambda_{d-1,j}w_{d-1,j} + \sum_{k=1}^{d-2}\frac{1}{(\sigma+\tau)^{d-1}}\sum_{j=1}^{c_k}P_{k,j}(\sigma,\tau)w_{k,j}$$
où $\lambda_{d-1,j}\in\mathbb{Q}_+$ et $P_{k,j}$ est un élément du semi-anneau des polynômes $\mathbb{Q}_+[X_1\ ,\ X_2]$.

Démonstration. Pour la preuve nous procédons par récurrence sur le degré d.

Dans le cas $d=2$ on a

$$(x_ix_j)_{(\sigma,\tau)} = \frac{\sigma}{\sigma+\tau}x_ix_j + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}(x_i+x_j)$$

. Supposons la relation vraie pour tout $w\in\mathcal{M}_k(X)$. Soit $w_{d+1,i}\in\mathcal{M}_{d+1}(X)$. Alors il existe $w_{r,p}\in\mathcal{M}_r(X)$ et $w_{s,q}\in\mathcal{M}_s(X)$ tels que $w_{d+1,i}=w_{r,p}w_{s,q}$ avec $r,s\geq 2$ et $r+s=d+1$. Sous l'action de (σ,τ), d'après de la Proposition 3.3.9 et l'hypothèse de récurrence on a :

$$(w_{d,i})_{(\sigma,\tau)} = (w_{r,p}w_{s,q})_{(\sigma,\tau)}$$
$$= \frac{\sigma}{\sigma+\tau}(w_{r,q})_{(\sigma,\tau)})(w_{s,q})_{(\sigma,\tau)} + \frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}\Big((w_{r,q})_{(\sigma,\tau)}) + (w_{s,q})_{(\sigma,\tau)}\Big)$$
$$= \frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Bigg[\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{r-1}w_{r,p} + \frac{\sigma^{r-2}\tau}{(\sigma+\tau)^{r-1}}\sum_{j=1}^{c_{r-1}}\lambda_{r-1,j}w_{r-1,j} + \sum_{k=1}^{r-2}\frac{1}{(\sigma+\tau)^{r-1}}\sum_{j=1}^{c_k}P_{k,j}(\sigma,\tau)w_{k,j}\Bigg]\times$$
$$\Bigg[\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{s-1}w_{s,q} + \frac{\sigma^{s-2}\tau}{(\sigma+\tau)^{s-1}}\sum_{j=1}^{c_{s-1}}\lambda_{s-1,j}w_{s-1,j} + \sum_{k=1}^{s-2}\frac{1}{(\sigma+\tau)^{s-1}}\sum_{j=1}^{c_k}P_{k,j}(\sigma,\tau)w_{k,j}\Bigg]$$
$$+\frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}\Bigg[\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{r-1}w_{r,p} + \frac{\sigma^{r-2}\tau}{(\sigma+\tau)^{r-1}}\sum_{j=1}^{c_{r-1}}\lambda_{r-1,j}w_{r-1,j} + \sum_{k=1}^{r-2}\frac{1}{(\sigma+\tau)^{r-1}}\sum_{j=1}^{c_k}P_{k,j}(\sigma,\tau)w_{k,j}\Bigg]$$
$$+\frac{\tau}{2(\sigma+\tau)}\Bigg[\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{s-1}w_{s,q} + \frac{\sigma^{s-2}\tau}{(\sigma+\tau)^{s-1}}\sum_{j=1}^{c_{s-1}}\lambda_{s-1,j}w_{s-1,j} + \sum_{k=1}^{s-2}\frac{1}{(\sigma+\tau)^{s-1}}\sum_{j=1}^{c_k}P_{k,j}(\sigma,\tau)w_{k,j}\Bigg].$$

En développant les deux premiers crochets on obtient

$$(w_{d+1,i})_{(\sigma,\tau)} = \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^d w_{d+1,i} + \frac{\sigma^{d-1}\tau}{(\sigma+\tau)^d}\sum_{j=1}^{c_d}\lambda_{d,j}w_{d,j} + \sum_{k=1}^{d-1}\frac{1}{(\sigma+\tau)^d}\sum_{j=1}^{c_k}P_{k,j}(\sigma,\tau)w_{k,j}. \qquad \square$$

Corollaire 4.2.6. *Si f_n est le polynôme directeur de $f \in K\langle X\rangle$ alors $\left(\dfrac{\sigma}{\sigma+\tau}\right)^{|f|-1} f_n$ est celui de $f_{(\sigma,\tau)}$.*

Démonstration. Si f est un monôme alors ce cas est traité directement par le lemme. En utilisant la linéarité de l'action du groupe, on étend la preuve des monômes aux polynômes. $\square$

Le résultat suivant énonce une propriété de conservation autre que celles citées dans le chapitre 2.

Proposition 4.2.7. *Si une K-algèbre A est définie par une identité alors cette caractérisation est conservée par homogamétisation.*

La preuve de cette proposition repose sur le résultat ci-dessous.

Proposition 4.2.8. *Soit A une algèbre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) A est une K-algèbre définie par une identité f.
(ii) $A_{(\sigma,\tau)}$ est définie par l'identité $f_{(\sigma,\tau)}$.

Pour la preuve nous utilisons principalement les deux corollaires 3.3.15 et 4.2.6.

Démonstration. Supposons que $A_{(\sigma,\tau)}$ est définie par l'identité $f_{(\sigma,\tau)}$. Alors du Corollaire 3.3.15, A vérifie l'identité f par homogamétisation inverse.

Soit A une algèbre définie par une identité f. Alors en vertu du Corollaire 3.3.15, $A_{(\sigma,\tau)}$ vérifie l'identité $f_{(\sigma,\tau)}$.

Supposons que $A_{(\sigma,\tau)}$ vérifie une autre identité g dont le degré ou le nombre de monômes du polynôme directeur est inférieur à celui de f. Alors toujours du Corollaire 3.3.15, A vérifie l'identité $g_{(\sigma,\tau)^{-1}}$. Ceci est contradictoire car d'après le Corolaire 4.2.6, g et $g_{(\sigma,\tau)^{-1}}$ ont le même polynôme directeur à constante multiplicative près.

$\square$

Nous abordons à présent la dernière partie du chapitre. Elle a pour objectif la détermination explicite des polynômes invariants universels.

4.3 Éléments de $K\langle X\rangle$ et invariance

La détermination des polynômes invariants universels et invariants par homogamétisation utilise celle des polynômes invariants par gamétisation à travers les deux résultats suivants :

Proposition 4.3.1. *Si f est invariant universel par gamétisation, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est invariant universel par homogamétisation,
(ii) f est (σ,σ)-invariant pour $\sigma \in K^*$,
(iii) f est $(1,1)$-invariant.

Démonstration. Supposons que (i) est vérifiée. Alors on obtient (iii) de la définition de l'universelle invariance.
En prenant $\lambda = \sigma^{-1}$ dans la Proposition 3.3.8 on obtient $f_{(\sigma,\sigma)} = f_{(1,1)}$. D'où l'équivalence $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$.
Supposons que (ii) est vérifiée. Alors pour avoir (i) faisons la remarque suivante :
pour tout $(\sigma,\tau) \in H$ on a $(\sigma,\tau) = \Big(\dfrac{\sigma+\tau}{2};\dfrac{\sigma+\tau}{2}\Big)\Big(\dfrac{2\sigma}{\sigma+\tau},1-\dfrac{2\sigma}{\sigma+\tau}\Big)$
De l'hypothèse (ii) f est $\Big(\dfrac{\sigma+\tau}{2};\dfrac{\sigma+\tau}{2}\Big)$-invariant. Comme f est invariant universel par gamétisation alors f est $\Big(\dfrac{2\sigma}{\sigma+\tau},1-\dfrac{2\sigma}{\sigma+\tau}\Big)$-invariant.
Ainsi de la proposition 4.2.3 f est (σ,τ)-invariant. Ce qui permet d'obtenir $(ii) \Rightarrow (i)$. La preuve s'achève en remarquant que l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est triviale. □

Proposition 4.3.2. *Pour qu'un polynôme f soit (σ,τ)-invariant par homogamétisation, il faut et il suffit que f soit $\Big(\dfrac{\sigma}{\sigma+\tau},\dfrac{\tau}{\sigma+\tau}\Big)$-invariant par homogamétisation.*

Démonstration. Pour ce faire, la Proposition 3.3.8 nous suffit. En effet en prenant $\lambda = \dfrac{1}{\sigma+\tau}$ on obtient l'égalité
$f_{(\sigma,\tau)} = f_{(\lambda\sigma,\lambda\tau)} = f_{(\mu,\nu)}$ où $(\mu,\nu) = \Big(\dfrac{\sigma}{\sigma+\tau},\dfrac{\tau}{\sigma+\tau}\Big)$. Ceci établit l'équivalence. □

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des deux résultats précédents.

Théorème 4.3.3. *Les polynômes de $K\langle X\rangle$ invariants universels par homogamétisation sont les invariants universels par gamétisation.*

Démonstration. Par définition tout élément invariant universel par homogamétisation est aussi invariant universel par gamétisation.

Soit f un élément invariant universel par gamétisation. Alors f est particulier $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-invariant. D'après la Proposition 4.3.2, f est $(1,1)$-invariant et d'après la proposition 4.3.1, f est invariant universel par homogamétisation. $\square$

Dans [7], C.Mallol et R.Varro montrent que pour tout entier $d \geq 2$ et pour tout polynôme $f_d \in K\langle X\rangle_d$ il existe à homothétie près, un unique polynôme invariant universel par gamétisation et admettant f_d pour polynôme directeur.

Définition 4.3.4. Les polynômes invariants universels par gamétisation sont obtenus à partir de la donnée de leurs polynômes directeurs en appliquant sur ceux-ci deux opérateurs C et S respectivement appelés condensation et substitution. Soit $Y = \{{}^p x_i,\ x_i^p;\ p \geq 1,\ 1 \leq i \leq n\}$. Ces opérateurs sont définis sur la base canonique de $\mathcal{M}(X)$ de la façon suivante :

$$C\ : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$$

qui à tout monôme $w \in \mathcal{M}(X)$ y remplace les successions du type $L^p_{x_i}(x_i)$ par ${}^p x_i$, celles du type $R^p_{x_i}(x_i)$ par x_i^p et laisse inchangés les autres cas ;

$$S\ : \mathcal{M}(Y)\backslash X \longrightarrow K\langle X\rangle,$$

tel que,

$$\begin{aligned}
&S(x_i x_j) = x_i x_j - \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}x_j,\\
&S(x_i^p) = \Big(R_{x_i} - \frac{1}{2}id\Big)^{p-2}(x_i^2 - x_i),\ S({}^p x_i) = \Big(L_{x_i} - \frac{1}{2}id\Big)^{p-2}(x_i^2 - x_i),\\
&S(wx_i) = \Big(R_{x_i} - \frac{1}{2}id\Big)S(w), \quad S(x_i w) = \Big(L_{x_i} - \frac{1}{2}id\Big)S(w) \text{ pour tout } w \in \mathcal{M}(Y)\backslash X.
\end{aligned}$$

À travers ces applications on montre que chaque polynôme invariant universel par gamétisation, est engendré par la donnée d'un polynôme qui joue le rôle de polynôme directeur de l'invariant. Ces polynômes de degré 1 sont les λx_i $(\lambda \in K^*)$ et ceux de degré 2 de polynôme directeur $f_d = \sum_{i=1}^{c_d} \alpha_i w_{d,i}$ sont les $\lambda \sum_{i=1}^{c_d} \alpha_i SC(w_{d,i})$. Ainsi les polynômes invariants universels de polynôme $f(x,y) = x^2(xy) - x(x^2y)$ sont obtenus par application de cette méthode à partir du développement de

$$(x^2 - x)\Big(xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\Big) - \Big(L_x - \frac{1}{2}id\Big)\Big(\Big(R_y - \frac{1}{2}id\Big)(x^2 - x)\Big).$$

Soit donc

$$\lambda\Big(x^2(xy) - x(x^2y) + \frac{1}{2}({}^3x) - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\Big).$$

Les polynômes invariants universels obtenus en prenant pour polynômes directeurs, les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}(X)$ forment une base de $\mathcal{M}(X)$ très pratique. On pourra donc exprimer un polynôme de $K\langle X\rangle$ dans cette base.
Notons que $\{w_{k,i};\ k \geq 1,\ 1 \leq i \leq c_k\}$ est la base canonique de $K\langle X\rangle$. Posons

$$\tilde{w}_{k,i} = \begin{cases} x_i & si\ k = 1 \\ SC(w_{k,i}) & si\ k \geq 2. \end{cases}$$

Comme précédemment vu, les polynômes $\tilde{w}_{k,i}$ sont invariants universels de polynômes directeurs $w_{k,i}$ et donc de même degré. Ainsi, $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{w}_{k,i};\ k \geq 1,\ 1 \leq i \leq c_k\}$ est aussi une base de $K\langle X\rangle$. On se servira du résultat suivant pour exprimer les polynômes $w_{k,i}$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

Proposition 4.3.5. *Soient $k \geq 1$, $1 \leq i \leq c_d$. Alors $w_{k,i} = BC(w_{k,i})$ où*

$$B\ : \mathcal{M} \longrightarrow K\langle X\rangle$$

est le morphisme de magma défini par :

$$B(x_i^p) = \sum_{k=0}^{p-2}\left(\sum_{j=0}^{p-k-2}\frac{1}{2^j}\begin{pmatrix} k+j \\ k \end{pmatrix}\right)S(x_i^{k+2}) + x_i \quad (p \geq 2),$$
$$B({}^p x_i) = \sum_{k=0}^{p-2}\left(\sum_{j=0}^{p-k-2}\frac{1}{2^j}\begin{pmatrix} k+j \\ k \end{pmatrix}\right)S({}^{k+2}x_i) + x_i \quad (p \geq 2).$$

Démonstration. Pour tous $x \in X$ et $j \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
x^{j+2} - x^{j+1} &= x^j(x^2 - x) \\
&= R_x^j(R_x - id)(x) \\
&= \left(R_x - \frac{1}{2}id + \frac{1}{2}id\right)^j (R_x - id)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{j}\frac{1}{2^{j-k}}\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}\left(R_x - \frac{1}{2}id\right)^k (R_x - id)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{j}\frac{1}{2^{j-k}}\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} S(x^{k+2}).
\end{aligned}$$

En remarquant que $x^p - x = \sum_{j=0}^{p-2}(x^{j+2} - x^{j+1})$, on a

$$\begin{aligned}
x^p - x &= \sum_{j=0}^{p-2}\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{2^{j-k}}\binom{j}{k}S(x^{k+2})\right)\\
&= \sum_{k=0}^{p-2}\left(\sum_{j=k}^{p-2}\frac{1}{2^{j-k}}\binom{j}{k}\right)S(x^{k+2})\\
&= \sum_{k=0}^{p-2}\left(\sum_{j=0}^{p-k-2}\frac{1}{2^{j}}\binom{j+k}{k}\right)S(x^{k+2}).
\end{aligned}$$

Ainsi, $B(x^p) = \sum_{k=0}^{p-2}\left(\sum_{j=0}^{p-k-2}\frac{1}{2^{j}}\binom{j+k}{k}\right)S(x^{k+2}) + x = x^p$.

De même, pour tous $x \in X,\ j \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
{}^{j+2}x - {}^{j+1}x &= x^j(x^2 - x)\\
&= L_x^j(L_x - id)(x)\\
&= \left(L_x - \frac{1}{2}id + \frac{1}{2}id\right)^j (L_x - id)(x)\\
&= \sum_{k=0}^{j}\frac{1}{2^{j-k}}\binom{j}{k}\left(L_x - \frac{1}{2}id\right)^k (L_x - id)(x)\\
&= \sum_{k=0}^{j}\frac{1}{2^{j-k}}\binom{j}{k}S({}^{k+2}x).
\end{aligned}$$

En remarquant que ${}^{p}x - x = \sum_{j=0}^{p-2}({}^{j+2}x - {}^{j+1}x)$ on a

$$\begin{aligned}
{}^{p}x - x &= \sum_{j=0}^{p-2}\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{2^{j-k}}\binom{j}{k}S({}^{k+2}x)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{p-2}\left(\sum_{j=k}^{p-2}\frac{1}{2^{j-k}}\binom{j}{k}\right)S({}^{k+2}x)\\
&= \sum_{k=0}^{p-2}\left(\sum_{j=0}^{p-k-2}\frac{1}{2^{j}}\binom{j+k}{k}\right)S({}^{k+2}x).
\end{aligned}$$

Ainsi, $B({}^{p}x) = \sum_{k=0}^{p-2}\left(\sum_{j=0}^{p-k-2}\frac{1}{2^{j}}\binom{j+k}{k}\right)S({}^{k+2}x) + x = {}^{p}x$.

B étant un morphisme de magma, alors $w_{d,i} = B(w_{d,i})$. □

Proposition 4.3.6.

$$B(x_i^p) = \sum_{k=0}^{p-2} \left(2^{k+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-k-2} \sum_{j=0}^{k} \binom{p-1}{j} \right) S(x_i^{k+2}) + x_i \quad (p \geq 2),$$

$$B({}^p x_i) = \sum_{k=0}^{p-2} \left(2^{k+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-k-2} \sum_{j=0}^{k} \binom{p-1}{j} \right) S({}^{k+2}x_i) + x_i \quad (p \geq 2).$$

Démonstration. En effet on a : $\frac{1}{2^j}\binom{k+j}{k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{k+j}\right)_{x=\frac{1}{2}}$ et donc,

$$\sum_{j=0}^{p-k-2} \frac{1}{2^j}\binom{k+j}{k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\Big(\sum_{j=0}^{p-k-2} x^{k+j}\Big)_{x=\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left((x^k - x^{p-1})(1-x)^{-1}\right)_{x=\frac{1}{2}}.$$

De la formule de Leibniz il vient que :

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left((x^k - x^{p-1})(1-x)^{-1}\right)_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\left(\frac{d^j}{dx^j}(x^k - x^{p-1})\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}(1-x)^{-1}\right)_{x=\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\left((A_k^j)x^{k-j} - (A_{p-1}^j)x^{p-j-1}\right)\frac{(k-j)!}{(1-x)^{k-j+1}}\right)_{x=\frac{1}{2}}$$
$$= 2\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-k-2}\sum_{j=0}^{k}\binom{p-1}{j}$$
$$= 2^{k+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-k-2}\sum_{j=0}^{k}\binom{p-1}{j}.$$

Ce qui achève la preuve. □

La proposition suivante permet d'exprimer un polynôme directeur dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

Proposition 4.3.7. *Soit $f \in K\langle X\rangle$ de polynôme directeur $\sum_{i=1}^{c_d}\theta_{d,i}w_{d,i}$. Alors dans la base $(\tilde{w}_{k,i})_{k,i}$, le polynôme directeur de f est $\sum_{i=1}^{c_d}\theta_{d,i}\tilde{w}_{d,i}$.*

Démonstration. Il vient de la proposition précédente que
$B(x_i^p) = S(x_i^p) + u_{p,i}$ avec $u_{p,i} \in Lin\{x_i, S(x_i^k); 1 < k < p\}$,
et $B({}^p x_i) = S({}^p x_i) + u_{p,i}$ avec $u_{p,i} \in Lin\{x_i, S({}^k x_i); 1 < k < p\}$. Comme $C(w_{d,i})$ est produit d'éléments de $\{x_i^p, {}^p x_i; 1 \leq i \leq n; p \geq 1\}$ et $w_{d,i} = BC(w_{d,i})$ alors il en résulte que $w_{d,i} = \tilde{w}_{d,i} + \tilde{w'}$ avec $\tilde{w'} \in Lin\{\tilde{w}_{k,i}; 1 \leq k < d; 1 \leq i \leq c_k\}$. □

En décomposant les éléments de $K\{X\}$ dans la base $(\tilde{w}_{k,i})_{k,i}$ des polynômes invariants universels par homogamétisation, il devient facile l'obtention de l'orbite d'un polynôme sous l'action de H.

Proposition 4.3.8. *Soit* $f = \sum_{k=1}^{d}\sum_{i=1}^{c_k}\theta_{k,i}\tilde{w}_{k,i}$. *L'orbite* H_f *de* f *sous l'action de* H *est donné par,*

$$H_f = \left\{ \sum_{k=1}^{d}\sum_{i=1}^{c_k}\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{k-1}\theta_{k,i}\tilde{w}_{k,i}; (\sigma,\tau)\in H \right\}.$$

Démonstration. En effet, $(\tilde{w}_{k,i})_{(\sigma,\tau)} = \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{k-1}\tilde{w}_{k,i}$. Ce qui conduit donc de

$$H_f = \left\{ f_{(\sigma,\tau)}; (\sigma,\tau)\in H \right\} \text{ à}$$

$$H_f = \left\{ \sum_{k=1}^{d}\sum_{i=1}^{c_k}\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{k-1}\theta_{k,i}\tilde{w}_{k,i}; (\sigma,\tau)\in H \right\}.$$

□

La proposition suivante énoncée réside dans l'utilisation de la base $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{w}_{k,i})_{k,i}$.

Proposition 4.3.9. *Soit* $(\sigma,\tau)\in H$ *tel que* $\tau\neq 0$. *Pour tout* $f\in K\langle X\rangle$ *de degré* $d\geq 2$, *il existe un polynôme* $F\in K\langle X\rangle$ *de polynôme directeur* f, (σ,τ)*-invariant et non invariant universel si et seulement si* $\frac{\sigma}{\sigma+\tau}$ *est une racine de l'unité d'ordre* $\leq d-1$.

Démonstration. - Soit $F\in K\langle X\rangle$ de polynôme directeur $f = \sum_{i=1}^{c_d}\theta_{d,i}w_{d,i}$ avec $\theta_{d,i}\in K$ non tous nuls. En vertu de la Proposition 4.3.7, le polynôme directeur de $F_{(\sigma,\tau)}$ est $\sum_{i=1}^{c_d}\theta_{d,i}\tilde{w}_{d,i}$.

Dans la base $(\tilde{w})_{k,i}$ on a $F = \sum_{k=1}^{d}\sum_{i=1}^{c_k}\theta_{k,i}\tilde{w}_{k,i}$. Si F est (σ,τ)-invariant alors $F_{(\sigma,\tau)} = \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|-1}F$. Mais $F_{(\sigma,\tau)} = \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{|f|-1}F$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{d-1}\sum_{i=1}^{c_{d-k}}\Big(\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{k}-1\Big)\theta_{d-k,i}\tilde{w}_{d-k,i} = 0$. L'équivalence conduit au système linéaire diagonal suivant :

$$\Big(\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{k}-1\Big)\theta_{d-k,i} = 0;\ 1\leq k\leq d-1; 1\leq i\leq c_{d-k} \tag{4.3.1}$$

Le système est à $N = \sum_{k=1}^{d-1}c_k$ inconnues $(\theta_{1,1},\cdots,\theta_{1,n},\cdots,,\theta_{d-1,1},\cdots,\theta_{d-1,c_{d-1}})$ dont le déterminant est : $\Delta = \prod_{k=1}^{d-1}\Big((\frac{\sigma}{\sigma+\tau})^{k}-1\Big)^{c_k}$.

Si F est non invariant universel alors $\Delta = 0$, car sinon le système (4.3.1) serait de Cramer. Et comme $(0,\cdots,0)\in K^N$ satisfait (4.3.1) alors $\theta_{k,i} = 0,\ 1\leq k\leq d-1; 1\leq i\leq c_{d-k}$. D'où

$F = \sum_{k=1}^{c_d} \theta_{d,i}\tilde{w}_{d,i}$ qui est invariant universel et ceci est contradictoire car par hypothèse F est non invariant universel. Ainsi, $\frac{\sigma}{\sigma+\tau}$ est une racine d'ordre $1 \leq p \leq d-1$ de l'unité.

Réciproquement, supposons que $\frac{\sigma}{\sigma+\tau}$ est une racine d'ordre p de l'unité avec $1 \leq p \leq d-1$. Alors le système (4.3.1) est de rang au plus $N-1$. Il admet donc des solutions dans le sous-espace engendré par $\{\tilde{w}_{d-kp,i};\ 1 \leq k \leq q; 1 \leq i \leq c_{d-kp}\}$, où $q = \left\lfloor \frac{d-1}{p} \right\rfloor$. $\square$

La proposition suivante est une conséquence de la Proposition 4.3.9 et du Théorème 4.3.3.

Proposition 4.3.10. *Soient f un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et (σ, τ) appartenant à H telle $\tau \neq 0$ et $\frac{\sigma}{\sigma+\tau}$ ne soit pas une racine d'ordre inférieur à d de l'unité. Alors tout polynôme (σ, τ)-invariant par homogamétisation admettant f pour polynôme directeur est invariant universel par gamétisation.*

Démonstration. Les hypothèses de la Proposition 4.3.9 sont satisfaites. Nous déduisons de cette proposition qu'il n'existe pas de polynôme F admettant f pour polynôme directeur qui soit (σ, τ)-invariant par homogamétisation et non invariant universel par homogamétisation. On conclut donc à travers le Théorème 4.3.3. $\square$

Le résultat suivant donne davantage une précision pour les deux dernières propositions.

Proposition 4.3.11. *(i) Si le polynôme F vérifie $F(\mathbb{1}) \neq 0$ alors $\frac{\sigma}{\sigma+\tau}$ est une racine de l'unité d'ordre diviseur de $d-1$.*

(ii) On peut expliciter ces polynômes : si p désigne l'ordre de la racine de $\frac{\sigma}{\sigma+\tau}$, alors il s'agit de la famille

$$\lambda\Big[\sum_{i=1}^{c_d} \theta_{d,i}\tilde{w}_{d,i} + \sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{c_{d-kp}} \mu_{d-kp,i}\tilde{w}_{d-kp,i}\Big], \quad \Big(\lambda \in K^*,\ q = \left\lfloor \frac{d-1}{p} \right\rfloor\Big)$$

paramétrée par les $\sum_{k=1}^{q} c_d - kp$ paramètres $\mu_{d-kp,i}$ non tous nuls vérifiant la condition $\sum_{i=1}^{n} \mu_{1,i} = F(\mathbb{1})$ si p divise $d-1$.

Démonstration. Le polynôme F étant (σ, τ)-invariant, alors $F_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = \Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{d-1} F(\mathbb{1})$. Comme précédemment vu au chapitre 3 à travers la Proposition 3.3.9, $F_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{1}) = F(\mathbb{1})$. Par suite $\Big(\frac{\sigma}{\sigma+\tau}\Big)^{d-1} = 1$.

(ii) L'obtention de la famille de ces polynômes, (σ, τ)-invariants et non invariants universels de polynômes directeurs f, est directe dans la preuve de la Proposition 4.3.9. $\square$

Conclusion

Nous avons dans ce mémoire de D.E.A, porté notre étude sur une combinaison d'une algèbre pondérée avec son algèbre gamétique associée appelée homogamétisation.

Dans le chapitre 2, nous avons réussi à établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un mélange soit pondérable. Nous avons également donné comment exprimer une gamétisation à travers l'homogamétisation et réciproquement. À travers l'algèbre originelle, nous notons quelques propriétés prévisibles de l'algèbre homogamétisée et vice-versa. Ces prévisions portent notamment sur l'ensemble des idempotents, les composantes de la décomposition de Peirce suivant un idempotent et les automorphismes de $A_{(\sigma,\tau)}$ laissant invariante la pondération.

Nous avons ensuite abordé la partie action du groupe H où nous exprimons l'homogamétisation comme une action du groupe H et nous avons donné comment calculer l'homogamétisée d'un polynôme à travers l'action du groupe H sur $K\langle X\rangle$. Nous notons à ce niveau que : pour qu'une algèbre soit caractérisée par une identité f il faut et il suffit que l'homogametisée soit caractérisée par l'identité homogamétisée de f.

Enfin, la notion d'invariance par homogamétisation est évoquée. Dans cette dernière partie, nous avons établi une équivalence entre invariance universelle par gamétisation et invariance universelle par homogamétisation. Les applications C et S sont ensuite utilisées non seulement pour la construction de la base $\tilde{\mathcal{B}}$ où les éléments sont invariants universels par homogamétisation, mais aussi pour exprimer les éléments de la base canonique dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$. La base $\tilde{\mathcal{B}}$ est ainsi plus pratique et est utilisée pour exprimé l'orbite d'un polynôme invariant universel par homogamétisation.

Nous envisageons dans la suite, nous intéressé aux questions suivantes :

- Quelles propriétés de A pouvons nous vérifier à partir de l'algèbre $A_{(\sigma,\tau)}$, on en cite : la résolubilité, nilpotence de A ?

- Étant donnée une K-algèbre A, quels liens existent-ils entre un A-module et un $A_{(\sigma,\tau)}$-module ?

- Quel impact, l'homogamétisation, peut-elle avoir sur la combinatoire des mots ?

- En prenant K comme un corps fini, comment construire à travers l'homogamétistion, un système cryptographique robuste à l'attaque ?

Bibliographie

[1] A.A.ALBERT, Structure theory of rings and algebras, power-associative algebras, Comm. Algèbra 39(11)(2011), 3956-3968.

[2] ALBERTO ELDUQUE, ALICIA LABRA, On Some Jordan Baric Algebras, J. Algebra Appl. 12 (5) (2013), 1250215. 695-703.

[3] I.M.H.ETHERINGTON, Non-associative algebras and the symbolism of genetic. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. B61(1941), 24-42.

[4] I.HEUCH, Genetic algebras considered as elements in a vector space, SIAM J.Appl.Math. 35(1978), 695-703.

[5] JU.I.LYUBICH, Mathematical Structures in Population Genetic. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[6] C.MALLOL, R.VARRO, Homogamétisation d'algèbres pondérées, Journal of Algebra 427(2015), 1-19.

[7] C.MALLOL, R.VARRO, Action du groupe des opérateurs de gamétisation sur les identités ω-polynômiales, J.Algebra 375(2013), 22-32.

[8] C.MALLOL, R.VARRO AND R.BENAVIDE, Gamétisation d'algèbres pondérée. Journal of Algebra 261(2003), 1-18.

[9] M.NOURIGAT, R. VARRO, Etude des ω-PI algèbres commutative de degré 4 : I.Algèbres non barycentriques non invariantes par gamétisation, Comm. Algebra 39(11)(2011), 3956-3968.

[10] D.REES, Linear systems of algebras, Ann.of Math. 51(1950), 123-160.

[11] R.D.SCHAFER, An Introduction to Nonassociative Algebras. Massachusetts Institute of Technologie, April 24, 2008.

[12] A.WORZ-BUZEKROS, Algebras in Genetic.In lectue Notes in Biomath ; Vol. 36, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[13] K.A.Zhevlakov, A.M.Slin'ko, I.P.Shestakov, Rings that Are Nearly Associative, Pure Appl. Mah, vol 104, Accamic Press, New York-London, 1982.

[14] K.A.Zhevlakov, A.M.Slin'ko, I.P.Shestakov, A.I.Shirshov, Rings that Are Nearly Associative. Editors : Samuel Eilenberg and Hyman Bass. 1980.