MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET DE L'INNOVATION

BURKINA - FASO
Unité - Progrès - Justice
Année universitaire: 2016 – 2017

SECRÉTARIAT GÉNÉRAL

UNIVERSITÉ NAZI BONI (U. N. B)

Vu et validé
Dr Joseph BAYARA

UNITÉ DE FORMATION ET DE RECHERCHE
EN SCIENCES ET TECHNIQUES

01 BP 1091 Bobo-Dioulasso 01
Tél. : (226) 20 98 – 51 – 87
Fax : (226) 20 98 – 25 – 77

Laboratoire d'Algèbre, de Mathématiques Discrètes et d'Informatique (L. A. M. D. I)

MÉMOIRE DU DIPLÔME D'ÉTUDES APPROFONDIES (D. E. A) DE MATHÉMATIQUES

Option : Algèbre **Spécialité** : Algèbres non associatives

Thème:

Les nilalgèbres commutatives de dimension finie et le problème d'Albert

Présenté par Baba Philippe DAKOUO

Soutenu publiquement le Mardi 13/06/2017 devant le jury composé de:

Président: Mr Théodore M. Y. TAPSOBA, Professeur Titulaire - Université Nazi Boni (U. N. B)

Membre: Mr Idrissa Kaboré, Maître de Conférences - Université Nazi Boni (U. N. B)

Membre: Mr Joseph BAYARA, Maître de Conférences - Université Nazi Boni (U. N. B)

Directeur de mémoire: Mr Joseph BAYARA, Maître de Conférences - Université Nazi Boni (U. N. B)

LES NILALGEBRES COMMUTATIVES DE DIMENSION FINIE ET LE PROBLEME D'ALBERT

Baba Philippe DAKOUO

11 octobre 2017

Remerciements

"La façon dont un être humain accepte son sort et toute la souffrance que cela implique, la manière dont il porte sa croix, lui donnent amplement l'occasion, même dans les circonstances les plus difficiles, de donner un sens plus profond à sa vie. Il peut alors agir avec dignité, courage et désintéressement."

Je dédie cette œuvre à mon père et à ma mère. Ces deux personnes magnifiques, qui ont accepté rendre possible le rêve de leur fils, d'être le meilleur qu'il est en capacité de devenir. Merci à vous d'avoir osé espérer un avenir pour moi en m'inscrivant à l'école, en y mettant tous les moyens en œuvre avant que ma conscience ne puisse prendre la relève.

Je n'aurais jamais assez de mots pour exprimer ma reconnaissance envers mon directeur de mémoire, le Professeur Joseph BAYARA, dont l'histoire, le parcours et la personnalité constituent pour moi une référence. Malgré vos multiples occupations, vous avez toujours été disponible pour répondre à mes préoccupations et pour m'aider dans mes moments difficiles. Merci pour votre encadrement, et vos différents conseils et soutiens multiformes.

Mes remerciements vont également à l'endroit du Professeur Théodore M. Y. TAPSOBA, directeur du Laboratoire d'Algèbre, de Mathématiques Discrètes et d'Informatique (L.A.M.D.I), pour son engagement à promouvoir la discipline et pour son cadre d'études adéquat mis à notre disposition afin de mener à bien nos différents travaux et activités scientifiques. Merci à vous pour cette sortie d'étude sur banfora. Elle nous a été très enrichissante, à tout point de vue.

J'exprime aussi mes remerciements au président du jury et aux différents membres du jury pour avoir consacré une partie de leur temps enfin de présider le jury.

J'adresse enfin mes remerciements particuliers à tous mes enseignants de l'UPB, au Professeur André KONSEIBO de l'université de Koudougou, aux thésards Wenkouni J. P. OUEDRAOGO et Boukari KIENTEGA, et aux autres camarades pour leurs soutiens.
Merci pour tout.

[1]

1. Directeur de mémoire : Dr Joseph BAYARA. Maître de conférences en mathématiques.

Résumé

Résumé :
La présente étude porte sur les nilalgèbres commutatives de dimension finie et le problème classique d'Albert. Le problème d'Albert a été posé en 1948, par un célèbre mathématicien américain nommé Abraham Adrian Albert. Il consiste à savoir si toute nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension finie est résoluble.

L'étude du problème d'Albert nécessite la connaissance de propriétés spécifiques d'algèbre linéaire, en particulier sur les espaces linéaires de matrices nilpotentes, mais requiert aussi la maitrise de propriétés élémentaires sur les anneaux de façon générale. Dans ce mémoire, nous évoquons ces propriétés spécifiques et étudions des résultats déjà obtenus sur les nilalgèbres commutatives de dimension finie. Une grande partie de cette étude est consacrée aux résultats, relativement récents, obtenus sur les nilalgèbres commutatives à puissances associatives de dimension finie suivant leur nilindice et leur dimension. De ceux-ci, on retient principalement celui obtenu par Zelmanov, qui stipule que toute nilalgèbre de Jordan de nilindice borné, sur un corps de caractéristique $\neq 2$, est localement nilpotente. Ce qui a permis d'établir que toute nilalgèbre commutative de nilindice 3, sur un corps de caractéristique $\neq 2$, est localement nilpotente. Nous énonçons aussi un résultat obtenu par Zelmanov et Suazo, sur les algèbres de nilindice 4, stipulant que toute nilalgèbre de nilindice 4, commutative à puissances associatives de dimension ≤ 10, sur un corps de caractéristique $\neq 2$ et 3, est résoluble. Concernant les nilalgèbres commutatives à puissances associatives de dimension n et de nilindice $\geq n-2$, on retient que sur un corps de caractéristique 0 ou suffisamment grand, toute nilalgèbre de cette classe est résoluble, et si l'algèbre considérée est de dimension et de nilindice n, alors elle est nilpotente d'indice de nilpotence n.

Ces résultats corroborent l'hypothèse que le problème d'Albert admet une réponse positive suivant la dimension et le nilindice de l'algèbre considérée, mais aussi suivant la caractéristique du corps sur lequel celle-ci est définie. De plus, notons que dans certains cas, on n'a pas de précision sur l'indice de nilpotence ou de résolubilité des nilalgèbres considérées, lorsque celles-ci sont nilpotentes ou résolubles. Ainsi, le problème d'Albert demeure toujours ouvert.

Mots-clef : Algèbres à puissances associatives, nilalgèbres, problème d'Albert.

Table des matières

Introduction générale

L'étude de la structure des nilalgèbres a connu une évolution significative vers la fin de la seconde guerre mondiale. Elle a suscité l'intérêt de certains algébristes, parmi lesquels nous pouvons citer le mathématicien américain Abraham Adrian Albert (09 novembre 1905 - 06 juin 1972). Célèbre à travers ses travaux sur les anneaux à puissances associatives, dans [1] et [2], il fut à l'origine d'une des plus grandes problématiques dans le domaine des nilalgèbres commutatives de dimension finie, connue sous le nom du problème d'Albert. Au fil du temps, d'autres mathématiciens tels que Murray Gerstenhaber (un étudiant d'Albert), Myung, Fernandez et plusieurs autres éminents chercheurs se sont intéressés à ce problème, et ont apporté leurs contributions dans sa résolution. A titre d'exemples, Gerstenhaber et Myung ont étudié, dans [27], le problème d'Albert dans le cas des nilalgèbres commutatives à puissances associatives de dimension faible. Fernandez, Garcia et Montoya ont étudié, dans [21], le même problème dans le cas des nilalgèbres à puissances associatives de nilindice et de dimension n. A nos jours, le problème d'Albert reste toujours ouvert. Il a même été l'objet d'un article récent intitulé "*On commutative finite-dimensional nilalgebras*" et publié le 14 janvier 2016 par Juan Carlos Gutierrez Fernandez et Claudia Garcia de l'institut des mathématiques et de la statistique de l'université de Sao Paulo au Brésil. Cet article fait l'objet de notre étude, dans laquelle nous étudions quelques propriétés des nilalgèbres commutatives de dimension finie, et exhibons des conditions sous lesquelles le problème d'Albert admet une réponse positive. Par ailleurs, nous pensons également que cette étude nous permet d'approfondir de façon significative nos connaissances sur la structure des nilalgèbres.

Notre travail est structuré en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous nous attelons à faire d'abord un rappel de quelques définitions, notations et propriétés des algèbres qui sont indispensables à la compréhension du problème d'Albert, ensuite nous faisons une première approche du problème d'Albert en l'énonçant et en établissant le lien entre l'étude des espaces linéaires de matrices nilpotentes et le problème d'Albert. A l'issue de cela, nous étudions, dans le deuxième chapitre, quelques propriétés particulières des espaces linéaires de matrices nilpotentes, relatives au problème d'Albert. Enfin nous revenons, dans le troisième chapitre, sur les récents résultats obtenus sur les nilalgèbres commutatives de dimension finie suivant leur nilindice et leur dimension.

Chapitre 1

Rappels sur les algèbres non associatives

Dans ce chapitre, nous définissons dans un premier temps certaines notions et donnons quelques propriétés des algèbres non associatives. Ensuite, nous énonçons le problème d'Albert et effectuons une première approche de ce problème. Enfin, nous explicitons le lien qui existe entre l'étude des espaces linéaires de matrices nilpotentes et le problème d'Albert. On désigne K comme étant un corps commutatif.

1.1 Algèbres non associatives

Definition 1.1.1. Un ensemble non vide A est appelé une K-algèbre s'il est muni d'une structure de K-espace vectoriel et d'une application bilinéaire $A \times A \longrightarrow A$, $(x; y) \longmapsto xy$. Alors A admet une structure d'anneau sous-jacente.

Une K-algèbre A est dite commutative (respectivement associative) si la structure d'anneau sous-jacente est commutative (respectivement associative).

On dit que A est une K-algèbre non associative si la structure d'anneau sous-jacente n'est pas nécessairement associative.

On dit qu'une K-algèbre A est de dimension finie si sa structure de K-espace vectoriel est de dimension finie.

Une K-algèbre A est dite unitaire si la structure d'anneau sous-jacente admet un élément unité.

Exemple 1.1.2.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre associative, commutative et unitaire.
2. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}); +; \times; \cdot)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une $\mathbb{R}$-algèbre associative, non commutative et unitaire.
3. $(\mathbb{R}^3; +; \wedge; \cdot)$, où $\wedge$ est le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$, est une $\mathbb{R}$-algèbre associative, non commutative et non unitaire ; car pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \wedge y = -y \wedge x$ et $x \wedge x = 0$.

Definition 1.1.3. Soient A une K-algèbre, n un nombre entier naturel et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments de A. On dit que la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de A, si elle est une base pour sa structure de K-espace vectoriel.

Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de la K-algèbre A, alors pour tout $1 \leq i,j \leq n$, il existe une unique famille $\left(\lambda_{ij}^{(k)}\right)_{1\leq k\leq n}$ dans K telle que :

$$e_ie_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ij}^{(k)} e_k. \tag{1.1}$$

Les scalaires $\lambda_{ij}^{(1)}, \lambda_{ij}^{(2)}, ..., \lambda_{ij}^{(n)}$ sont appelés les constantes de structure de A et la relation (1.1) est appelée la table de multiplication de A.

Remarque 1.1.4. Une K-algèbre peut être définie par la donnée de sa table de multiplication. Par exemple, considérons la K-algèbre A de dimension 3 et $\{u, v, w\}$ une base de A telle qu'on ait la table de multiplication consignée dans le tableau ci-dessous :

$\cdot$	u	v	w
u	w	w	v
v	-w	v	u
w	-v	-u	u

A travers ce tableau, on a :

$$uv = -vu \text{ et } u^2u = wu = -uw = -uu^2.$$

Ainsi, l'algèbre A définie par la table de multiplication est un exemple d'algèbre non commutative et non associative.

Dans la théorie des algèbres non associatives, il est utile de préciser le calcul des puissances. En effet, si A est une algèbre non associative et pas nécessairement commutative, alors pour tout $x \in A$ on sait définir sans ambiguité x^2. Par contre, n'ayant pas nécessairement $x^2x = xx^2$, on posera alors $x^3 = x^2x$ ou $x^3 = xx^2$ selon les cas. On introduit ainsi la notion de *puissances principales à droite* et de *puissances principales à gauche* d'un élément x de A définies respectivement par :

$$x^1 = x;\ x^{k+1} = x^kx \textit{ et } x^1 = x;\ x^{k+1} = xx^k,\ \forall k \geq 1.$$

Ces deux notions coincident si l'algèbre est commutative. On définit également les *puissances pleines* d'un élément x de A par :

$$x^{[1]} = x\,;\, x^{[k+1]} = x^{[k]}x^{[k]},\ \forall k \geq 1.$$

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de A. On note UV le sous-espace vectoriel de A engendré par les éléments de la forme uv avec $u \in U$ et $v \in V$.

En particulier, on définit les puissances principales à droite (resp. à gauche) de A par :

$$A^1 = A\,;\, A^{k+1} = A^k A$$
$$(\text{resp. } A^1 = A\,;\, A^{k+1} = AA^k),\ \forall k \geq 1.$$

D'autre part, on définit les puissances principales de A comme suit :

$$A^1 = A,$$

$$A^k = \sum_{i+j=k} A^i A^j;\ \forall k \geq 2$$

et les puissances pleines de A par :

$$A^{[1]} = A,$$
$$A^{[k+1]} = A^{[k]} A^{[k]};\ \forall k \geq 1.$$

Une K-algèbre A est dite à *puissances associatives* si pour tout $a \in A$, la sous-algèbre engendrée par a, notée $K[a]$, est associative, c'est-à-dire :

$$\forall i, j \geq 1;\ a^{i+j} = a^i a^j.$$

On dit qu'un élément $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$. Alors le plus petit entier n ayant cette propriété est l'indice de nilpotence de x. Si tout élément $x \in A$ est nilpotent, on dit que A est une *nilalgèbre* (ou *nil*). S'il existe un entier k tel que tout élément $a \in A$ ait un indice de nilpotence $\leq k$, alors on dit que A est de nilindice borné. Dans ce cas, le plus petit entier k ayant cette propriété est le nilindice de A.

On dit qu'une K-algèbre A est nilpotente d'indice de nilpotence n si $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Autrement dit, une K-algèbre A est dite nilpotente d'indice de nilpotence n si tout produit de n éléments de A est nul et s'il existe un produit de $n-1$ éléments de A qui soit non nul. Notons déjà que toute algèbre nilpotente est nil, mais la réciproque n'est pas vraie.

Une K-algèbre est dite *localement nilpotente* si toute sous-algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments est nilpotente.

On dit qu'une K-algèbre A est *résoluble* d'indice de résolubilité n, si $A^{[n]} = 0$ et $A^{[n-1]} \neq 0$.

Remarque 1.1.5.
- Toute algèbre nilpotente est résoluble, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.
- Toute algèbre nilpotente est localement nilpotente.
- En dimension finie, toute algèbre localement nilpotente est nilpotente. L'algèbre considérée étant une sous-algèbre d'elle même engendrée par les éléments, en nombre fini, de sa base.

1.2 Quelques notations et classes d'algèbres non associatives

Si A est une K-algèbre, on note $R(A)$ l'ensemble des applications linéaires définies par :

$$R_a : A \longrightarrow A,\ x \longmapsto xa \text{ où } a \in A.$$

L'application R_a est appelée *multiplication à droite par a.*

De même, on définit $L(A)$ comme étant l'ensemble des applications linéaires :

$$L_a : A \longrightarrow A,\ x \longmapsto ax \text{ où } a \in A.$$

L'application L_a est appelée *multiplication à gauche par a.*

L'algèbre engendrée par $R(A) \cup L(A)$ est appelée *algèbre des multiplications* de A et est notée $\mathcal{M}(A)$. C'est en fait l'ensemble des sommes finies d'éléments de la forme $S_1S_2...S_n$, avec $S_i \in R(A) \cup L(A)$. Si $a \in A$, alors on note $\mathcal{M}(a)$ l'algèbre engendrée par l'ensemble $\{L_{a^j}; j \geq 1\}$.

Soit A une K-algèbre et $x, y, z \in A$. On pose :

$$[x, y] = xy - yx \text{ (le commutateur de } x \text{ et } y),$$
$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz) \text{ (l'associateur de } x,\ y \text{ et } z).$$

Le premier est bilinéaire et le second est trilinéaire. Il est clair que A est commutative (resp. associative) si et seulement si tous les commutateurs (resp. associateurs) sont nuls.

On dit que A est *alternative* à droite (resp. à gauche) si elle vérifie l'identité $(y, x, x) = 0$ (resp. $(x, x, y) = 0$) pour tous $x, y \in A$.

On dit qu'une algèbre A est alternative si elle est à la fois alternative à droite et à gauche. Ces trois notions coincident si l'algèbre A est commutative.

On dit qu'une algèbre A est *flexible* si pour tous $x, y \in A$ on a $(x, y, x) = 0$.

Elle est dite *anti-commutative* si $x^2 = 0$ pour tout $x \in A$. Par une linéarisation, on obtient $xy = -yx$, pour tous $x, y \in A$. La réciproque est vraie si la caractéristique de K est différente de 2.

Une K-algèbre A est dite de *Jordan*, si pour tous $x, y \in A$ on a les deux conditions suivantes qui sont satisfaites : $\left\{ \begin{array}{rl} [x, y] & = 0 \\ (x, y, x^2) & = 0 \end{array} \right.$.

Elle est dite *d'Engel* si toute multiplication à gauche comme à droite est nilpotente.

Soient A et B deux K-algèbres, où K est un corps commutatif. On considère le produit tensoriel $A \otimes_K B$ de A et B, où une multiplication est définie comme suit :

$$(a \otimes_K b)(a' \otimes_K b') = aa' \otimes_K bb' \text{ avec } a, a' \in A \text{ et } b, b' \in B.$$

Par conséquent, on a :

$$(\sum_i a_i \otimes_K b_i)(\sum_j a_j' \otimes_K b_j') = \sum_{i,j} a_i a_j' \otimes_K b_i b_j'$$

$$
\begin{aligned}
2((yz)x)x + 2((xy)z)x + 2((xy)x)z + 2((xz)y)x + (x^2y)z + 2((xz)x)y \\
+(x^2z)y = 4(yz)x^2 + 8(xy)(xz);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((yz)t)x + ((yz)x)t + ((ty)z)x + ((xy)z)t + ((ty)x)z + ((xy)t)z \\
+((tz)y)x + ((xz)y)t + ((xt)y)z + ((tz)x)y + ((xz)t)y \\
+((xt)z)y = 4(yz)(xt) + 4(ty)(xz) + 4(xy)(tz).
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

En remplaçant z par x et t par x^r, avec $r \geq 1$, dans l'égalité (1.4), on a :

$$
\begin{aligned}
2((yx)x^r)x + 2((yx)x)x^r + 2((yx^r)x)x + 2(yx^{r+1})x + (yx^2)x^r \\
+3(yx^{r+2}) = 8(yx)x^{r+1} + 4(yx^r)x^2.
\end{aligned}
$$

L'algèbre A étant commutative, on obtient :

$$
\begin{aligned}
2x(x^r(xy)) + 2x^r(x(xy)) + 2x(x(x^ry)) + 2x(x^{r+1}y) + x^r(x^2y) \\
+3x^{r+2}y = 8x^{r+1}(xy) + 4x^2(x^ry).
\end{aligned}
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
2L_xL_{x^r}L_x(y) + 2L_{x^r}L_x^2(y) + 2L_x^2L_{x^r}(y) + 2L_xL_{x^{r+1}}(y) + L_{x^r}L_{x^2}(y) \\
+3L_{x^{r+2}}(y) = 8L_{x^{r+1}}L_x(y) + 4L_{x^2}L_{x^r}(y), \forall y \in A.
\end{aligned}
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
3L_{x^{r+2}} =& 8L_{x^{r+1}}L_x - L_{x^r}L_{x^2} - 2L_{x^r}L_x^2 \\
&+ 4L_{x^2}L_{x^r} - 2L_xL_{x^{r+1}} - 2L_xL_{x^r}L_x - 2L_x^2L_{x^r}, \forall r \geq 1.
\end{aligned}
$$

□

Lemme 1.3.4. *Soit A une algèbre commutative à puissances associatives sur un corps K de caractéristique différente de 2 et 3. Alors pour tout $x \in A$, l'algèbre associative engendrée par les applications linéaires L_{x^j}, avec $j \geq 1$, est en fait engendrée par l'ensemble $\{L_x; L_{x^2}\}$.*

Preuve. Démontrons que pour tout $j \geq 1$, $L_{x^{j+2}}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de produits de L_x et L_{x^2}.

Pour $j = 1$, l'équation (1.3) nous donne :

$$L_{x^3} = -2L_x^3 - L_xL_{x^2} + 4L_{x^2}L_x.$$

L'application L_{x^3} s'écrit donc comme une combinaison linéaire de produits de L_x et L_{x^2}. L'assertion est donc vraie pour $j = 1$. Supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre $j-1$ et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre j.

Puisque la caractéristique de K est différente de 2 et 3, alors la relation (1.2) devient :

$$L_{x^{j+2}} = \frac{8}{3}L_{x^{j+1}}L_x - \frac{1}{3}L_{x^j}L_{x^2} - \frac{2}{3}L_{x^j}L_x^2 + \frac{4}{3}L_{x^2}L_{x^j} - \frac{2}{3}L_xL_{x^j}L_x - \frac{2}{3}L_x^2L_{x^j}.$$

Donc $L_{x^{j+2}}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de produits des L_x, L_{x^2}, L_{x^j} et $L_{x^{j+1}}$. Suivant l'hypothèse de récurrence, L_{x^j} et $L_{x^{j+1}}$ sont des combinaisons linéaires de produits de L_x et L_{x^2}. Donc $L_{x^{j+2}}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de produits de L_x et L_{x^2}. On conclut que pour tout $j \geq 1$, $L_{x^{j+2}}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de produits de L_x et L_{x^2}. Ce qui équivaut à dire que pour tout $j \geq 3$, L_{x^j} s'écrit comme une combinaison linéaire de produits de L_x et L_{x^2}. D'où la conclusion que l'algèbre engendrée par $\{L_{x^j}; j \geq 1\}$ est la même que celle engendrée par $\{L_x; L_{x^2}\}$. □

Definition 1.3.5. Une K-algèbre A est dite *simple* si A n'est pas une zéro algèbre (i.e $A^2 \neq 0$) et si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et A.

Une K-algèbre A est dite *algèbre à division* si $A \neq \{0\}$ et si les équations :

$$ax = b,\ ya = b\ (a \neq 0,\ b \in A)$$

ont une solution unique $x, y \in A$. Ce qui équivaut à dire que pour tout élément $a \neq 0$ de A, les applications linéaires L_a et R_a sont bijectives.

Une K-algèbre A est dite *centrale simple* si l'extension scalaire A_F est simple pour toute extension F de K.

Remarque 1.3.6.
- Les algèbres à puissances associatives sont une généralisation des algèbres associatives, alternatives et de Jordan.
- Toute K-algèbre centrale simple est simple (il suffit de poser $F = K$).
- Si A est une K-algèbre simple, alors $A^2 = A$ et donc A n'est ni résoluble, ni nilpotente.
- Par ailleurs, Albert démontre dans [1] que toute algèbre finie à division et simple à puissances associatives en caractéristique différente de 2, 3 et 5 est un corps.

Proposition 1.3.7. *Soit A une algèbre commutative de dimension finie et à puissances associatives sur un corps K. Soit J un idéal résoluble de A. Si A/J est résoluble, alors A est résoluble.*

Preuve. Soient A une K-algèbre commutative de dimension finie à puissances associatives et J un idéal résoluble de A. Supposons que A/J est résoluble et montrons que A est résoluble. Pour cela, considérons le morphisme surjectif canonique $A \longrightarrow A/J$, $a \longmapsto \overline{a}$, où $\overline{a} = a + J$. On a $\overline{A^2} = (\overline{A})^2$ et pour tout $i \geq 3$, $\overline{A^{[i]}} = (\overline{A})^{[i]}$. On sait que $\overline{A} = A/J$. Etant donné que A/J est résoluble, alors il existe un entier $r \geq 2$ tel que $(\overline{A})^{[r]} = 0$; ce qui implique que $\overline{A^{[r]}} = 0$, d'où $A^{[r]} \subseteq J$. Par hypothèse, J est résoluble, donc il existe un entier $s \geq 2$ tel que $J^{[s]} = 0$. D'où, $A^{[r+s]} = (A^{[r]})^{[s+1]} \subseteq J^{[s+1]} = (J^{[s]})^2 = 0$. Par conséquent, A est résoluble. □

Proposition 1.3.8. *Soit A une K-algèbre. Si B et C sont deux idéaux résolubles de A, alors $B + C$ est un idéal résoluble de A, et si A est une algèbre de dimension finie, alors A admet un unique idéal résoluble maximal noté $Sol(A)$. De plus, le seul idéal résoluble de $A/sol(A)$ est 0.*

Preuve. Soient A une K-algèbre et B, C deux idéaux résolubles de A. Puisque B et C sont des idéaux de A, alors $B+C$ est un idéal de A. Par ailleurs, $B/(B\cap C)$ est l'image de l'idéal B de A par le morphisme surjectif canonique défini par
$A \longrightarrow A/(B\cap C), a \longmapsto \overline{a} = a + B\cap C$.

L'idéal B étant résoluble, alors il existe un entier $r \geq 2$ tel que $B^{[r]} = 0$, d'où on a $(\overline{B})^{[r]} = \overline{B^{[r]}} = 0$. Donc $\overline{B} = B/B\cap C$ est résoluble. Du second théorème d'isomorphisme, on a $(B+C)/C \simeq B/(B\cap C)$, d'où $(B+C)/C$ est résoluble. L'idéal C étant résoluble, alors de la Proposition 1.3.7, on en déduit que $B+C$ est un idéal résoluble. Il s'en suit que si A est une algèbre de dimension finie, alors l'idéal résoluble de A de dimension maximale est unique et contient tout autre idéal résoluble de A. Notons $Sol(A)$ cet idéal. L'idéal $Sol(A)$ est donc l'unique idéal résoluble maximal de A dans le cas où A est de dimension finie.

Nous allons maintenant démontrer que le seul idéal résoluble de $A/Sol(A)$ est 0.

Soit $\overline{I}$ un idéal résoluble de $A/Sol(A)$. Considérons le morphisme surjectif canonique $\pi : A \longrightarrow A/Sol(A), a \longmapsto \overline{a} = a + Sol(A)$. L'idéal $\overline{I}$ étant un idéal de $A/Sol(A)$, alors $\pi^{-1}(\overline{I})$ est un idéal de A et π étant une application surjective, alors $\overline{I} = \pi(\pi^{-1}(\overline{I})) = \pi^{-1}(\overline{I})/Sol(A)$. De la Proposition 1.3.7, on déduit que $\pi^{-1}(\overline{I})$ est résoluble et donc $\pi^{-1}(\overline{I}) \subseteq Sol(A)$. D'où $\overline{I} = \pi^{-1}(\overline{I})/Sol(A) = 0$. □

Remarque 1.3.9.
- De façon analogue, on démontre que si A est une algèbre commutative de dimension finie et à puissances associatives sur un corps K, alors A admet un unique nilidéal maximal noté $Nil(A)$ et $A/Nil(A)$ admet un unique nilidéal maximal qui est 0.
  L'idéal $Nil(A)$ est appelé le *nilradical* de A et si $Nil(A) = 0$, on dit que A est *semi-simple*. L'idéal $Sol(A)$ est appelé le *radical résoluble* de A.
- Dans [35], Schafer démontre que si A est une K-algèbre commutative, alors un idéal B de A est nilpotent si et seulement si la sous-algèbre B^* est nilpotente. Notons que B^* est la sous-algèbre (associative) de $\mathcal{M}(A)$ engendrée par les L_b et R_b avec b parcourant B. En particulier, l'algèbre A est nilpotente si et seulement si $\mathcal{M}(A)$ est nilpotente.
- Soit A une algèbre centrale simple, commutative à puissances associatives sur un corps K de caractéristique premier avec 30. Le degré de A est le nombre maximum t d'idempotents 2 à 2 orthogonaux u_i, prisent dans l'extension scalaire A_F, tels que $1 = u_1 + ... + u_t$, où F est la clôture algébrique de K. Si le degré de A est > 2, alors A est une algèbre de Jordan. Si la caractéristique de K est 0, alors toute algèbre semi-simple et à puissances associatives est de Jordan [3, 30].

1.4 Théorie et énoncé du problème d'Albert

Sachant déjà que toute nilalgèbre de Jordan de dimension finie sur un corps K de caractéristique différente de 2 est nilpotente, Albert s'est alors posé la question, dans [2], de savoir s'il en est de même pour tous les types d'algèbres commutatives à puissances associatives. En réponse à la question d'Albert, Suttles proposa, en 1972, le contre-exemple suivant :

Exemple 1.4.1. Soit A la K-algèbre commutative de dimension 5 dont la table de multiplication dans la base $B = \{e_1, ..., e_5\}$ est la suivante :

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	0	e_3	e_4	0	$-e_3$
e_2	e_3	0	e_5	e_3	0
e_3	e_4	e_5	0	0	0
e_4	0	e_3	0	0	0
e_5	$-e_3$	0	0	0	0

On remarque que pour tout $k \geq 2$, on a $A^k = Vect_K\{e_3, e_4, e_5\}$. Ce qui implique que A est à puissances associatives, nil de nilindice 4 et vérifie $(A^2)^2 = 0$. L'algèbre A, ainsi définie, est donc résoluble d'indice 3, mais pas nilpotente.

Depuis lors, la question suivante connue sous le nom de *problème d'Albert* reste posée.
Toute nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension finie est-elle résoluble ?

Il existe également d'autres problèmes similaires :

1. Existe-t-il une nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension finie qui soit simple ?

2. Si A est une algèbre commutative à puissances associatives de dimension finie, a-t-on nécessairement Sol(A)=Nil(A) ?

3. Toute algèbre d'Engel de dimension finie (ou à puissances associatives) et anti-commutative (ou commutative) est-elle résoluble ?

Remarque 1.4.2.
- Toute algèbre anti-commutative est nil de nilindice 2. Par conséquent, dans la classe des algèbres anti-commutatives, le concept de nilalgèbre est inutile. Dans la suite, plusieurs concepts analogues à celui de nilalgèbre seront utilisés. L'algèbre d'Engel en est un exemple.
- Une algèbre d'Engel commutative d'indice fini n'est pas nécessairement localement nilpotente. Cependant, si l'indice de nilpotence de la multiplication à gauche est ≤ 3, alors toute algèbre d'Engel commutative sur un corps K de caractéristique différente de 2 est localement nilpotente [6, 7, 18].
  Par ailleurs, on ne sait pas si une algèbre d'Engel commutative (anti-commutative) de dimension finie est résoluble.
- En ce qui concerne les algèbres commutatives et vérifiant l'identité $x(x(xy)) = 0$, Correa et Hentzel ont démontré, dans [6], que toute algèbre commutative, sur un corps de caractéristique $\neq 2$, vérifiant l'identité ci-dessus est résoluble. Dans [18], Fernandez démontre que toute algèbre A commutative de dimension finie, sur un corps K de caractéristique $\neq 2$ et 3, vérifiant l'identité $x(x(xy)) = 0$, est nilpotente.

Dans le cas des algèbres anti-commutatives, Kuzmin démontre, dans [31], la nilpotence de toute algèbre anti-commutative avec condition maximale sur les sous-algèbres et vérifiant l'identité $x(x(xy)) = 0$.

1.5 Approche du problème d'Albert

Soit $K[x;y]$ l'anneau commutatif, non associatif, des polynômes engendrés par x et y sur le corps K. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_r \in K[x;y]$ et $\delta(\alpha_1; ...; \alpha_r)$ un opérateur de linéarisation sur $K[x;y]$. Cet opérateur de linéarisation est défini dans [24], par Murray Gerstenhaber. Considérons maintenant l'anneau $\Delta = \{\delta(\alpha_1; ...; \alpha_r) : \alpha_i \in K[x;y]\}$ comme étant l'anneau des opérateurs de linéarisation agissant sur $K[x;y]$. Dans [24], Murray Gerstenhaber développe des propriétés intéressantes sur cet anneau. Il y démontre que toute nilalgèbre commutative de nilindice $\leq t$, sur un corps K de caractéristique 0, est une algèbre d'Engel et que toute multiplication à gauche est nilpotente d'indice $\leq 2t-3$.

Pour la suite de notre travail, les trois théorèmes ci-dessous, démontrés par Gerstenhaber dans [24], seront utiles.

Théorème 1.5.1. *Soit A une algèbre commutative à puissances associatives sur un corps K de caractéristique 0 ou $\geq t$. Si B est une sous-algèbre de A telle que $a^t \in B$ pour tout $a \in A$, alors pour tous $a, c \in A$, $L_a^{2t-3}(c) \in B$.*

En particulier, si A est nil d'indice $\leq t$, alors la multiplication à gauche L_a est nilpotente d'indice $\leq 2t-3$, pour tout $a \in A$.

Théorème 1.5.2. *Soit A une nilalgèbre commutative de nilindice t sur un corps K. Si la caractéristique de K est 0 ou $\geq 2t-3$, alors $L_a^{2t-3} = 0$ pour tout $a \in A$.*

Théorème 1.5.3. *Soit A une algèbre commutative à puissances associatives. S'il existe un élément a de A vérifiant $a^t = 0$, alors l'algèbre associative $\mathcal{M}(a)$ engendrée par l'ensemble $\{L_{a^j}; j \geq 1\}$ est nilpotente d'indice $f(t) \leq 2(t-1)^2 + 1$.*

1.6 Interaction entre le problème d'Albert et l'étude de la structure des espaces linéaires de matrices nilpotentes

Considérons maintenant A comme étant une nilalgèbre de dimension finie à puissances associatives sur un corps K de caractéristique 0 ou suffisamment grand. On rappelle que $End_K(A)$ est l'ensemble des endomorphismes de A sur K. Notons qu'il a une structure d'algèbre associative. Le Théorème 1.5.1 nous dit que l'ensemble des multiplications à gauche (ou à droite) est un sous-espace vectoriel d'applications linéaires nilpotentes de $End_K(A)$. Puisque A est de dimension finie, alors ces applications linéaires nilpotentes peuvent être représentées par des matrices carrées nilpotentes. Notons que plusieurs travaux ont porté sur l'étude des propriétés des sous-espaces vectoriels de matrices nilpotentes ([4] et [5]), et que ces propriétés constituent un outil fondamental dans l'étude des nilalgèbres de dimension finie. En effet, l'étude de la structure des espaces linéaires de matrices carrées d'ordre 3 nilpotentes a été très utile dans la résolution du problème d'Albert dans le cas où l'algèbre considérée est de dimension n et de nilindice $n-2$. Nous pensons aussi qu'une étude précise et complète des espaces linéaires de matrices carrées d'ordre 4 nilpotentes nous permettra de résoudre le problème d'Albert dans le cas où l'algèbre considérée est de dimension n et de nilindice $n-3$. De plus, le Théorème 1.5.3 nous montre que si A est nil d'indice borné, alors pour tout $a \in A$, l'algèbre $\mathcal{M}(a)$ engendrée par l'ensemble $\{L_{a^j}; j \geq 1\}$ est nilpotente d'indice de nilpotence borné. Par conséquent, le problème d'Albert dans la théorie classique des anneaux et l'étude de la structure des espaces linéaires de matrices nilpotentes sont étroitement liés.

1.7 Problèmes et conjectures

Conjecture 1. *Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de nilindice borné $\leq t$ sur un corps K de caractéristique 0 ou suffisamment grand. Alors tout polynôme homogène $f(x;y) \in K[x;y]$ de degré en $x \geq 2t-3$ et de degré en y égal à 1 est une identité polynômiale sur A ; en particulier, $\mathcal{M}(a)$ est une nilalgèbre associative de nilindice $\leq 2t-3$.*

Chapitre 2

Les espaces linéaires de matrices nilpotentes

Dans ce chapitre, K désigne un corps commutatif et $\mathcal{M}_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, avec $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Introduction

Murray Gerstenhaber a établi des résultats sur les matrices carrées nilpotentes sur un corps K donné. Dans [23], il démontre que si $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$ composé de matrices nilpotentes, alors $dim(\mathcal{S}) \leq \frac{n(n-1)}{2}$. En particulier, si $dim(\mathcal{S}) = \frac{n(n-1)}{2}$, alors il existe une matrice inversible P dans $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $P\mathcal{S}P^{-1}$ soit l'algèbre des matrices nilpotentes strictement triangulaires supérieures.

Notons que dans sa preuve, Gerstenhaber requiert que le corps K soit fini et qu'il contienne au moins n éléments. Cependant, il affirme plus tard que cette dernière hypothèse pourrait ne pas être nécessaire. Dans [36], Serezhkin obtient une généralisation de ces résultats pour un corps quelconque K.

Gerstenhaber utilise dans sa démonstration (voir [33]) des techniques et théorèmes de la géométrie algébrique, et dans [32], il utilise seulement les théories élémentaires de l'algèbre linéaire.

2.2 Rappels sur les matrices

Dans ce paragraphe, nous faisons un bref rappel de certaines propriétés des matrices, utiles dans l'étude de la structure des espaces linéaires de matrices nilpotentes.

Definition 2.2.1. Une matrice carrée A est dite nilpotente, s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$. Le plus petit entier naturel k ayant cette propriété est l'indice de nilpotence de A.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K. La *trace* de A est définie comme étant la somme des éléments situés sur la diagonale principale de la matrice A. On la note $tr(A)$ et on a :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Remarque 2.2.2. • L'application trace définie par $\mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$, $A \longmapsto tr(A)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(K)$.

• Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(K)$, on a $tr(AB) = tr(BA)$.

Proposition 2.2.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, où n est un entier naturel et K un corps commutatif de caractéristique 0 ou premier avec n. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La matrice A est nilpotente.

(ii) Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, on a $tr(A^k) = 0$.

Proposition 2.2.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, où n est un entier naturel et K un corps commutatif. On a les assertions suivantes :*

(i) Si A est nilpotente, alors $A^n = 0$.

(ii) Si A est une matrice strictement triangulaire, alors elle est nilpotente.

2.3 Propriétés des espaces linéaires de matrices nilpotentes liées au problème d'Albert

Enonçons maintenant une propriété remarquable des espaces linéaires de matrices nilpotentes, établie par Mathes et *al.* [33]. Notons aussi qu'une preuve de cette propriété fut obtenue par MacDonald et *al.* [32].

Lemme 2.3.1. *Soit $\mathcal{S}$ un sous-espace linéaire de $\mathcal{M}_n(K)$ composé de matrices nilpotentes sur un corps K.*

Soient $A, B \in \mathcal{S}$ et $k \in \mathbb{N}$. On suppose que K est de caractéristique 0, ou $> k$ lorsque $n > k$. On a $tr(A^k B) = 0$.

Preuve. Soient $A, B \in \mathcal{S}$ et $k \in \mathbb{N}$. Dans le cas où $k \geq n$, on a $A^k = 0$. En effet, la matrice A étant nilpotente, alors de la Proposition 2.2.4, on tire que $A^n = 0$. D'où $A^k = A^n A^{k-n} = 0$. Ce qui implique que $tr(A^k B) = 0$ dans le cas où $k \geq n$.

Supposons maintenant que $k < n$. Suivant l'hypothèse du lemme, soit la caractéristique de K est égale 0 ou $> k$. Le cas où la caractéristique de K est nul a été étudié par Mathes et *al.* [33]. Nous nous intéressons au cas où la caractéristique de K est $> k$.

Etant donné que A est nilpotente, alors son polynôme caractéristique est scindé et sa seule valeur propre possible est 0. On peut donc supposer sans perte de généralité que A est une matrice de Jordan.

Soit $\lambda \in K$. L'ensemble $\mathcal{S}$ étant un espace vectoriel, alors $\lambda A + B \in \mathcal{S}$. De la Proposition 2.2.4, on déduit que $(\lambda A + B)^n = 0$ et que le polynôme caractéristique de $\lambda A + B$ est $\mathcal{X}_{\lambda A+B} = (-1)^n X^n = \sum_{i=0}^{n} c_{n-i}(\lambda) X^i$. Le coefficient $c_{k+i}(\lambda)$ est donc nul. Par ailleurs, $c_{k+i}(\lambda)$ est la somme des $(k+1) \times (k+1)$ mineurs principaux de $\lambda A + B$. Le coefficient $c_{k+i}(\lambda)$ est donc un polynôme en λ de degré k et de coefficient dominant $+tr(A^k B)$ ou $-tr(A^k B)$. Puisque $car(K) > k$, alors le coefficient de chacun des termes du polynôme $c_{k+1}(\lambda)$ est égal à zéro. En particulier, on a $tr(A^k B) = 0$. □

Corollaire 2.3.2. *Soit $\mathcal{S}$ un espace linéaire de $\mathcal{M}_n(K)$ composé de matrices nilpotentes sur un corps K.*

Si $A, B \in \mathcal{S}$, alors $tr(AB) = 0$.

Preuve. Il suffit de prendre $k = 1$ dans le Lemme 2.3.1. □

Théorème 2.3.3 ([33]). *Soit X l'ensemble de matrices carrées d'ordre n sur un corps de caractéristique 0. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le semi-groupe additif engendré par X est composé de matrices nilpotentes.

(ii) L'espace linéaire engendré par X est composé de matrices nilpotentes.

(iii) Pour toute suite finie de matrices $(A_i)_{1\leq i\leq k}$ de X, on a :

$$\sum_{\sigma \in S_k} tr(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(k)}) = 0.$$

Ici, S_k est l'ensemble des permutations σ sur $\{1, \ldots, k\}$. On note que S_k, muni de la loi de composition des applications, a une structure de groupe. On l'appelle groupe symétrique.

Remarque 2.3.4. Dans le cas où $car(K) = 0$, le Lemme 2.3.1 devient un cas particulier du Théorème 2.3.3. En effet, considérons X comme étant un espace linéaire de matrices d'ordre n nilpotentes et soient A et B deux matrices de X. On construit une suite de matrices nilpotentes $(A_i)_{1\leq i\leq k+1}$ telle que $A_i = A$, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $A_{k+1} = B$. On a :

$$0 = \sum_{\sigma \in S_k} tr(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(k+1)}) = (k+1)! tr(A^k B),$$

d'où $tr(A^k B) = 0$ car $car(K) = 0$.

Une preuve relativement simple du résultat de Gerstenhaber utilisant le Lemme 2.3.1 est donnée dans [39] (une autre preuve similaire est donnée dans [32] p. 2213).

Definition 2.3.5. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K donné. On définit un produit scalaire sur V comme étant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V par l'application

$$V \times V \longrightarrow K, (u; v) \longmapsto < u; v >$$

telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

- $< u; v >=< v; u >$, pour tous $u, v \in V$ (symétrie).
- $< v; \alpha u + \beta w >= \alpha < v; u > +\beta < v; w >$, pour tous $\alpha, \beta \in K$ et $u, v, w \in V$ (bilinéarité).
- Soit $v \in V$ (fixé). Si pour tout $u \in V$ on a $< v; u >= 0$, alors $v = 0$ (forme non-dégénérée).

Remarque 2.3.6.
- Pour tout sous-espace vectoriel S de V, l'ensemble défini par :

$$S^{\perp} = \{v \in V; < u; v >= 0, \forall u \in S\}$$

est un sous-espace vectoriel de V. De plus, $dim(S) + dim(S^{\perp}) = dim(V)$ et on a $(S^{\perp})^{\perp} = S$.
- Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de V, alors $A \subseteq B$ implique que $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

Proposition 2.3.7. *L'application bilinéaire définie par :*

$$\mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K, (A; B) \longmapsto < A; B >= tr(AB)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(K)$.

Preuve. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. On a $< A; B >= tr(AB) = tr(BA) =< B; A >$. Donc l'application est bien symétrique.

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\alpha, \beta \in K$. On a :

$$\begin{aligned} < A; \alpha B + \beta C > &= tr(A(\alpha B + \beta C)) \\ &= tr(\alpha AB + \beta AC) \\ &= \alpha tr(AB) + \beta tr(AC) \\ &= \alpha < A; B > +\beta < A; C > . \end{aligned}$$

L'application est linéaire par rapport à la seconde variable. Vu qu'elle est symétrique, alors elle est bilinéaire.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que pour tout $B \in \mathcal{M}_n(K)$, on ait $< A; B >= tr(AB) = 0$. On pose $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où les coefficients a_{ij} et b_{ij} sont pris dans le corps K. On a :

$$AB = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. D'où :

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}.$$

Suivant l'hypothèse de départ, on a $tr(AB) = 0$. Ce qui implique que :

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = 0.$$

Considérons la suite de matrices $(B_{p,q})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$ définie par :

$$B_{p,q} = (b_{ij}^{p,q})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ telle que } b_{ij}^{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = p \text{ et } j = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a :

- pour $B = B_{1,1}$, on a $tr(AB) = a_{11} = 0$ donc $a_{11} = 0$,
- pour $B = B_{1,2}$, on a $tr(AB) = a_{12} = 0$ donc $a_{12} = 0$.

En parcourant la suite de matrices $(B_{p,q})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$, on aura finalement $a_{ij} = 0$, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$. Donc $A = 0$. L'application est par conséquent non dégénérée. On conclut qu'elle définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(K)$. □

Proposition 2.3.8. *Si $\mathcal{T}$ est l'espace vectoriel des matrices strictement triangulaires supérieures, alors $\mathcal{T}^\perp$ est l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Ainsi $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^\perp$.*

Preuve. Soit $\mathcal{T}$ l'espace vectoriel des matrices strictement triangulaires supérieures. De la Remarque 2.3.6, on sait que $\mathcal{T}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$, et a donc une structure d'espace vectoriel. Montrons maintenant qu'il s'agit de l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures.

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{T}^\perp$. Alors pour toute matrice $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{T}$, on a $tr(AB) = 0$. La matrice B étant strictement triangulaire supérieure, alors :

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} a_{ik}b_{ki}.$$

Considérons maintenant la suite de matrices $(B_{p,q})_{1\leqslant p<q\leqslant n}$, définie par :

$$B_{p,q} = (b_{ij}^{p,q})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ telle que } b_{ij}^{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = p \text{ et } j = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a :

- pour $B = B_{1,2}$, on a $tr(AB) = a_{21} = 0$,
- pour $B = B_{1,3}$, on a $tr(AB) = a_{31} = 0$.

En parcourant de façon analogue la suite de matrices $(B_{p,q})_{1\leqslant p<q\leqslant n}$, on obtient que pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$, $a_{ij} = 0$ si $i > j$. La matrice A est donc triangulaire supérieure.

Par ailleurs, si A est une matrice triangulaire supérieure, alors pour toute matrice $B \in \mathcal{T}$, $tr(AB) = 0$. Donc $A \in \mathcal{T}^\perp$. On conclut que $\mathcal{T}^\perp$ est l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures et qu'on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^\perp$. □

Nous pouvons maintenant énoncer un premier résultat de Gerstenhaber, sur les espaces linéaires de matrices nilpotentes.

Théorème 2.3.9 (Gerstenhaber-Serezkin). *Si $\mathcal{S}$ est un espace linéaire de matrices carrées d'ordre n nilpotentes, sur un corps K quelconque, alors $dim(\mathcal{S}) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{T}$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre n strictement triangulaires supérieures. Posons $\mathcal{W} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ et soit $\mathcal{U}$ le sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{S}$. Ainsi, on a $\mathcal{S} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$. Considérons maintenant le produit scalaire, sur $\mathcal{M}_n(K)$, défini dans la Proposition 2.3.7. Etant donné que le sous-espace vectoriel $\mathcal{U}$ est composé de matrices nilpotentes, alors $\mathcal{U} \cap \mathcal{T}^{\perp} = \{0\}$.

Soient $B \in \mathcal{U}$ et $C \in \mathcal{T}^{\perp}$. D'après le Corollaire 2.3.2, pour toute matrice $A \in \mathcal{W}$, on a $tr(AB) = 0$. Puisque $A \in \mathcal{W} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, alors $A \in \mathcal{T}$. D'où $tr(AC) = 0$. Finalement $tr(A(B+C)) = tr(AB) + tr(AC) = 0$. Ce qui implique que $\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^{\perp} \subset \mathcal{W}^{\perp}$. Donc :

$$dim(\mathcal{U}) + dim(\mathcal{T}^{\perp}) = dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^{\perp}) \leq dim(\mathcal{W}^{\perp}).$$

Sachant que $dim(\mathcal{W}^{\perp}) = n^2 - dim(\mathcal{W})$ et que $dim(\mathcal{T}^{\perp}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, alors :

$$dim(\mathcal{U}) + \frac{n(n+1)}{2} \leq n^2 - dim(\mathcal{W}).$$

D'où $dim(\mathcal{S}) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$, car $\mathcal{S} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$. □

Dans ce qui suit, nous allons donner une preuve du second résultat de Gerstenhaber, basée sur le théorème de Jacobson [29].

Definition 2.3.10. Un ensemble $\mathcal{C}$ d'opérateurs linéaires sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension finie sera dit triangularisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}$ telle que la matrice représentative de tout élément de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure.

Definition 2.3.11. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble d'opérateurs linéaires sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$. Pour tout $A \in \mathcal{C}$, un sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$ de $\mathcal{V}$ est dit invariant par A si pour tout $x \in \mathcal{M}$, $Ax \in \mathcal{M}$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$ est dit invariant par $\mathcal{C}$ si pour tout $x \in \mathcal{M}$ et $A \in \mathcal{C}$, $Ax \in \mathcal{M}$.

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$ de $\mathcal{V}$ est dit non trivial s'il est différent de $\{0\}$ et de $\mathcal{V}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est dit réductible s'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$ de $\mathcal{V}$ qui soit non trivial et invariant par $\mathcal{C}$.

Definition 2.3.12. Soient $\mathcal{V}$ un espace vectoriel et $\mathcal{N}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$. On définit l'espace quotient $\mathcal{V}/\mathcal{N}$ comme étant l'ensemble des classes $[x] = x + \mathcal{N} = \{x + z : z \in \mathcal{N}\}$ avec $x \in \mathcal{V}$ tel que $[x] + [y] = [x+y]$ et $\lambda[x] = [\lambda x]$ avec λ un scalaire.

Si A est un opérateur linéaire sur $\mathcal{V}$ et $\mathcal{N}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ invariant par A, alors l'opérateur quotient $\overline{A}$ sur $\mathcal{V}/\mathcal{N}$ est défini par $\overline{A}[x] = [Ax]$ avec $x \in \mathcal{V}$ (le fait que $\mathcal{N}$ soit un invariant par A, implique que $\overline{A}$ est bien défini).

Enonçons maintenant le théorème de Jacobson [29] repris par Radjavi et Engel dans [34].

Théorème 2.3.13. *Soit $\mathcal{N}$ un ensemble d'opérateurs nilpotents sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension finie. Si pour tous opérateurs nilpotents A et B dans $\mathcal{N}$, il existe un opérateur linéaire C sur $\mathcal{V}$ tel que $AB - CA \in \mathcal{N}$, alors $\mathcal{N}$ est triangularisable.*

Preuve. Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$. Pour $n = 1$, $\mathcal{N}$ est trivialement triangularisable.
Supposons que jusqu'à l'ordre n, l'ensemble $\mathcal{N}$ est triangularisable et montrons qu'il est triangularisable à l'ordre $n+1$. Soit $\mathbf{F}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{V}$ qui sont définis comme suit :

$$\bigcap\{KerA : A \in \mathcal{S}\},$$

où $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{N}$.

Soit $\mathcal{W}$ l'élément de $\mathbf{F}$ de dimension maximale. Il existe donc un sous-ensemble $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{N}$ maximal, tel que

$$\mathcal{N}_0 = \{A \in \mathcal{N} : \mathcal{W} \subseteq KerA\} \text{ avec } \mathcal{W} = \bigcap\{KerA : A \in \mathcal{N}_0\}.$$

Pour tout opérateur $A \in \mathcal{N}_0$, on note $\overline{A}$ l'opérateur quotient sur $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ (l'opérateur $\overline{A}$ est bien défini car $\mathcal{W}$ est invariant par A). L'ensemble $\overline{\mathcal{N}_0} = \{\overline{A}; A \in \mathcal{N}_0\}$ vérifie les hypothèses du théorème sur $\mathcal{V}/\mathcal{W}$. La dimension de $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ étant strictement inférieure à la dimension de $\mathcal{V}$, alors $\overline{\mathcal{N}_0}$ est triangularisable par induction. La restriction sur $\mathcal{W}$ de tout opérateur linéaire de $\mathcal{N}_0$ étant nulle, il s'ensuit que $\mathcal{N}_0$ est triangularisable.

Nous allons terminer la preuve en démontrant que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$. Pour cela, supposons par l'absurde que $\mathcal{N} \neq \mathcal{N}_0$. Alors il existe un opérateur $B \in \mathcal{N}$ tel que $B \notin \mathcal{N}_0$. Ce qui implique l'existence d'un élément $x \in \mathcal{W}$ tel que $x \notin KerB$; d'où $Bx \neq 0$. Démontrons que $\mathcal{W}$ n'est pas invariant par B. Si $\mathcal{W}$ était invariant par B, on aurait $Bx_0 = 0$ pour un certain $x_0 \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$. Donc l'ensemble :

$$\{x \in V : Bx = 0 \text{ et } Ax = 0, \forall A \in \mathcal{N}_0\},$$

serait un élément de $\mathbf{F}$ de dimension plus petite que celle de $\mathcal{W}$. Ce qui est absurde. Donc $\mathcal{W}$ n'est pas invariant par B. Etant donné que $\mathcal{W}$ est l'intersection des noyaux des opérateurs de $\mathcal{N}_0$ et qu'il n'est pas invariant par B, alors il existe $x_1 \in \mathcal{W}$ et $A_1 \in \mathcal{N}_0$ tels que $A_1Bx_1 \neq 0$.

Soit maintenant C_1 un opérateur linéaire sur $\mathcal{V}$ tel que $A_1B + C_1A_1 \in \mathcal{N}$. En posant $B_1 = A_1B + C_1A_1$, on a $B_1x_1 \neq 0$ car $C_1A_1x_1 = 0$ et $A_1Bx_1 \neq 0$. Par une démonstration analogue à celle effectuée sur B, il s'en suit que $\mathcal{W}$ n'est pas invariant par B_1 et qu'il existe $A_2 \in \mathcal{N}_0$ et $x_2 \in \mathcal{W}$ tels que $A_2B_1x_2 \neq 0$.

Soit à présent C_2 un autre opérateur linéaire sur $\mathcal{V}$ tel que $A_2B_1 + C_2A_2 \in \mathcal{N}$ et posons $B_2 = A_2B_1 + C_2A_2$. On a $B_2x_2 \neq 0$. Par une démonstration analogue à celle effectuée sur B, il s'en suit que $\mathcal{W}$ n'est pas invariant par B_2. Donc il existe $A_3 \in \mathcal{N}_0$ et $x_3 \in \mathcal{W}$ tels que $A_3B_2x_3 \neq 0$.

En réitérant toujours le même procédé, on aboutit à l'existence de deux suites d'opérateurs :

$$\{A_1, A_2, ..., A_{n+1}\} \subseteq \mathcal{N}_0 \text{ et } \{B_1, B_2, ..., B_n\} \subseteq \mathcal{N}$$

et d'une suite de vecteurs $\{x_1, ..., x_{n+1}\} \subset \mathcal{W}$ telles que

$$A_{n+1}A_n...A_1Bx_n = A_{n+1}B_nx_{n+1} \neq 0.$$

Puisque $\mathcal{N}_0$ est un ensemble triangularisable d'opérateurs nilpotents sur un espace vectoriel de dimension $n+1$, alors le produit de $n+1$ éléments de $\mathcal{N}_0$ est nul. Ainsi $A_{n+1}A_n...A_1 = 0$. Ce qui est absurde. On a nécessairement $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$. Ce qui implique que $\mathcal{N}$ est triangularisable à l'ordre $n+1$. En conclusion, $\mathcal{N}$ est triangularisable. $\square$

Ennonçons maintenant le second théorème de Gerstenhaber sur les espaces vectoriels de matrices nilpotentes.

Théorème 2.3.14. *Soit $\mathcal{S}$ un espace vectoriel de matrice d'ordre n nilpotentes de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, sur un corps K contenant au moins 3 éléments. Alors $\mathcal{S}$ est triangularisable.*

Preuve. Utilisons les mêmes notations que le Théorème 2.3.9. Soit $\mathcal{T}$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre n strictement triangulaires supérieures. Soit $\mathcal{W} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ le supplémentaire de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{S}$. On a $\mathcal{S} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ainsi $dim(\mathcal{W}) + dim(\mathcal{U}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Etant donné que $\mathcal{T}^\perp$ est le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures et que $\mathcal{U}$ est composé de matrices nilpotentes, alors $\mathcal{U} \cap \mathcal{T}^\perp = \{0\}$ et du Corollaire 2.3.2, on tire que $\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp \subset \mathcal{W}^\perp$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} dim(\mathcal{T}^\perp \oplus \mathcal{U}) &= dim(\mathcal{T}^\perp) + dim(\mathcal{U}) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} - dim(\mathcal{W}) \text{ car } dim(\mathcal{T}^\perp) = \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n^2 - dim(\mathcal{W}) \\ &= dim(\mathcal{W}^\perp). \end{aligned}$$

En somme, on a $dim(\mathcal{T}^\perp \oplus \mathcal{U}) = dim(\mathcal{W}^\perp)$ et $\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp \subset \mathcal{W}^\perp$. Ce qui implique que $\mathcal{T}^\perp \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W}^\perp$. Par conséquent $\mathcal{W} = ((\mathcal{W})^\perp)^\perp = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp$.

Montrons maintenant que $(\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp = \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{T}$.
Pour cela, montrons d'abord que $(\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp \subseteq \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{T}$.
On sait que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp$, d'où $(\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp \subseteq \mathcal{U}^\perp$. Par ailleurs $\mathcal{T}^\perp \subseteq \mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp$, d'où $(\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp \subseteq (\mathcal{T}^\perp)^\perp = \mathcal{T}$. Finalement, on a $(\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp \subseteq \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{T}$.
Montrons maintenant que $\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{T} \subseteq (\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp$.
Soit $A \in \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{T}$. Alors $A \in \mathcal{U}^\perp$ et $A \in \mathcal{T}$. Donc, pour tous $B \in \mathcal{U}$ et $C \in \mathcal{T}^\perp$, on a $tr(A(B+C)) = tr(AB+AC) = tr(AB) + tr(AC)$ par linéarité de la trace. Par ailleurs, $tr(AB) = 0$ car $A \in \mathcal{U}^\perp$ et $B \in \mathcal{U}$, et $tr(AC) = 0$ car $A \in \mathcal{T}$ et $C \in \mathcal{T}^\perp$. Finalement $tr(A(B+C)) = 0$ et donc $A \in (\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp$. On conclut que $\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{T} \subseteq (\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp$ et que $\mathcal{W} = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{T}^\perp)^\perp = \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{T}$.

Soit $B \in \mathcal{S}$, montrons que $B^2 \in \mathcal{S}$.

La matrice B est nilpotente, donc elle est semblable à une matrice strictement triangulaire supérieure. On peut alors supposer sans perte de généralité que $B \in \mathcal{W}$. Etant donné que K contient au moins 3 éléments, alors sa caractéristique est > 2. Du Lemme 2.3.1, on a $tr(B^2C) = 0$ pour tout $C \in \mathcal{S}$. Donc $B^2 \in \mathcal{S}^\perp$. Par ailleurs, on sait que si $B \in \mathcal{T}$ alors $B^2 \in \mathcal{T}$. D'où $B^2 \in \mathcal{S}^\perp \cap \mathcal{T} \subset \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{T} = \mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}$ (en effet, $\mathcal{U} \subset \mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{S}^\perp \subset \mathcal{U}^\perp$). Par conséquent, pour toute matrice $B \in \mathcal{S}$, on a $B^2 \in \mathcal{S}$.

Pour tous $A, B \in \mathcal{S}$, on a $AB+BA = (A+B)^2 - A^2 - B^2$. Sachant que $(A+B)^2, A^2, B^2 \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel, on en déduit que $AB + BA \in \mathcal{S}$. Le Théorème 2.3.13 permet de conclure que $\mathcal{S}$ est triangularisable. □

Dans [25], Gerstenhaber donne une frontière sur la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ dans le cas où toutes les matrices de $\mathcal{S}$ ont chacune un indice de nilpotence $\leq k$.

Brualdi et Chavey obtiennent, dans [4], une frontière sur la dimension de $\mathcal{S}$ dans le cas où toutes les matrices de $\mathcal{S}$ ont un indice de nilpotence égal à k. Dans [32], les auteurs y généralisent les résultats de Gerstenhaber à travers le théorème ci-dessous, pour obtenir une frontière sur la dimension de $\mathcal{S}$ en fonction du nilindice et du rang de $\mathcal{S}$.

Théorème 2.3.15. *Soit $\mathcal{S}$ un espace linéaire de matrices d'ordre n nilpotentes, sur un corps de caractéristique $> n$. Si toutes les matrices de $\mathcal{S}$ ont un indice de nilpotence $\leq k+1$ et ont chacune un rang $\leq r$, alors :*

$$dim(S) \leq r(n-q) + k\frac{q(q+1)}{2} - \frac{r(r+1)}{2},$$

où q est le plus petit entier possible qui soit $\geq \frac{r}{k}$. Pour $k = 0$, on prendra $q = 0$.

Soit $Q \in \mathcal{S}$ et J sa matrice de Jordan. On partitionne J en blocs de matrices J_{k_i}, avec $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq ... \geq k_t \geq 1$, où J_{k_i} est une matrice d'ordre k_i telle que pour tout $j \in \{1, ..., k_i - 1\}$, les éléments qui sont à la position $(j+1; j)$ du bloc de matrice J_{k_i} soient égales à 1 et que les autres éléments soient nuls. On note que $\sum_{i=1}^{t} k_i = n$.

Si A est une matrice de $\mathcal{S}$, on la partitionne en blocs de matrices dont les tailles correspondent aux tailles des blocs de matrices J_{k_i} de J, où J est la matrice de Jordan de A. Ainsi un bloc A_{ij} est de taille $k_i \times k_j$. Si on pose $B = J^\alpha A J^\beta$, où B est une matrice qui est également décomposée en blocs de matrices de la même manière que A, alors on a $B_{ij} = J_i^\alpha A_{ij} J_j^\beta$.

Dans [32], il est démontré que si $J, A \in \mathcal{S}$ et que le nilindice de $\mathcal{S}$ est k_1, alors $tr(A_{ij}J_{jj}^l) = 0$ pour tout entier positif l tel que $0 \leq k_1 - k_i \leq l \leq k_j - 1$.

Soit n un entier strictement positif.

On définit une partition de l'entier n par la suite d'entiers $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n$ telle que $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ et $n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. La conjuguée (ou duale) de la partition α de n est encore une partition de n, qui est notée $\alpha^* = (a_1^*, a_2^*, ..., a_n^*)$, où $a_j^* = card\{i : a_i \geq j\}$ $(j \in \{1, 2, ..., n\})$.

Soit $\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$ une partition de n. On définit un ordre partiel sur l'ensemble des partitions de n comme suit :

$$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow a_1 + ... + a_j \leq b_1 + ... + b_j \text{ pour tout } j = 1, ..., n.$$

Dans la même dynamique, on remarque aussi que $\alpha \leq \beta \Longrightarrow \beta^* \leq \alpha^*$.

Soit A une matrice d'ordre n nilpotente et J sa matrice de Jordan, que l'on décompose en blocs de matrices J_{k_i} avec $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_t \geq 1$ et où $n = k_1 + ... + k_t$. On associe à A

une partition de n notée $jp(A) = (k_1, k_2, ..., k_t, 0, ..., 0)$, qu'on appelle partition de Jordan de A. De même, si $\mathcal{S}$ est un espace linéaire de matrices carrée d'ordre n nilpotentes, alors on définit la partition de Jordan de l'espace $\mathcal{S}$ comme étant la limite inférieure (dans l'ordre partiel des partitions de n) des partitions de Jordan des matrices de $\mathcal{S}$.

Fort de ces notions et définitions, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le quatrième théorème de Gerstenhaber [26] sur les espaces linéaires de matrices nilpotentes.

Théorème 2.3.16. *Soit $\mathcal{S}$ un espace linéaire de matrices d'ordre n nilpotentes, sur un corps K suffisamment grand. Si $\gamma = (c_1, ..., c_n)$ est la conjuguée de la partition de Jordan de l'espace linéaire $\mathcal{S}$, alors $dim(\mathcal{S}) \leq \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2)$.*

Il existe d'autres problèmes relatifs aux espaces linéaires de matrices nilpotentes qui restent posés. En voici deux exemples :

2.4 Questions et conjectures

Question 1. *Quelle est la dimension maximale d'un espace linéaire irréductible de matrices d'ordre n nilpotentes ?*

Pour $n = 3m$, il existe un espace linéaire irréductible de matrices d'ordre n nilpotentes et qui est de dimension $m^2 + 1$. Cet espace est défini, dans [33], par l'ensemble $\mathcal{L}$ des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ \lambda I_m & 0 & A \\ 0 & -\lambda I_m & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \in K, A \in \mathcal{M}_m(K)$.

On remarque que pour tout $T \in \mathcal{L}$, $T^3 = 0$. En particulier, pour $m = 1$ on obtient un espace linéaire irréductible $S = \{\lambda A + \mu B; \lambda, \mu \in K\}$ de dimension 2 dont tous les éléments sont nilpotents d'indice 3, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En outre, il a été démontré dans [22] qu'en dimension 2 et sur un corps K algébriquement clos et de caractéristique $\neq 2$ et 3, il n'existe pas d'espace linéaire irréductible de matrices d'ordre 3 nilpotentes d'indice 3.

Pour $n = 3$, Fernandez démontre, de façon similaire dans [17], que $\mathcal{S}$ est l'unique espace linéaire non trivial et irréductible de matrices d'ordre 3 nilpotentes.

Comme application de ces résultats, nous pouvons maintenant construire d'une manière naturelle l'algèbre de Suttles. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps K et Φ une base de $\mathcal{V}$. Soient a et b deux opérateurs K-linéaires sur $\mathcal{V}$ tels que A soit la matrice de a dans la base Φ et B la matrice de b dans la base Φ. Si on prend $\mathcal{E}$ comme étant l'espace linéaire des opérateurs K-linéaires sur $\mathcal{V}$ engendré par $\{a, b\}$, alors on a que $\mathcal{L} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{V}$ muni du produit défini par

$$\forall f, g \in \mathcal{E} \text{ et } v, w \in \mathcal{V}, \ (f; v) \cdot (g; w) = (0; f(w) + g(v)),$$

est une K-algèbre isomorphe à l'algèbre de Suttles.

Question 2. *Quelles sont les dimensions des espaces linéaires maximaux des matrices carrées d'ordre n nilpotentes ?*

Dans [16], Fascoli prouve que tout sous-espace linéaire nilpotent maximal de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est conjugué à l'un des 6 sous-espaces suivants :

(Fa. 1) ensemble des matrices strictement triangulaires supérieures,

(Fa. 2) $\{\alpha(E_{21} - E_{32}) + \beta(E_{12} + E_{23}) + \sum_{j=1}^{3} \gamma_j E_{4j} : \alpha, \beta, \gamma_j \in \mathbb{C}\}$,

(Fa. 3) $\{\alpha(E_{21} - E_{32}) + \beta(E_{12} + E_{23}) + \sum_{i=1}^{3} \gamma_i E_{i4} : \alpha, \beta, \gamma_i \in \mathbb{C}\}$,

(Fa. 4) $\{\alpha(E_{31} - E_{42}) + \beta(E_{12} + E_{34}) + \gamma E_{23} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$,

(Fa. 5) $\{\alpha(E_{21} - E_{32}) + \beta(E_{12} + E_{23} + E_{34}) + \gamma(E_{31} - E_{42}) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$,

(Fa. 6) $\{\alpha(E_{21} - E_{32} + E_{31} - E_{42}) + \beta(E_{12} + E_{24} + E_{34}) + \gamma(E_{12} + E_{23} + E_{34}) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$.

On note que E_{ij} est la matrice d'ordre n, avec la valeur 1 à la position (i, j) et 0 par ailleurs.

Un exemple d'espace linéaire irréductible de matrices nilpotentes d'ordre n, pour $n \geq 3$, fut obtenu dans [33]. Les auteurs y exhibent une suite de matrices nilpotentes :

$T = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i}$; $S_{j-1} = E_{j,1} - E_{j+1,2}$; pour tout $j = 2, 3, ..., n-1$, et montrent que l'ensemble $\{T, S_1, ..., S_{n-2}\}$ engendre un espace linéaire maximal de matrices nilpotentes. En particulier, pour $n = 4$ et $K = \mathbb{C}$, on obtient l'exemple (Fa. 4) ci-dessus. Par ailleurs, notons que le sous-espace linéaire engendré par $\{T, S_{n-2}\}$ est irréductible.

D'autres exemples d'espaces linéaires, de dimension 2, de matrices d'ordre 5 et 7 nilpotentes et de rang maximal constant sont donnés dans [5]. Ces matrices sont respectivement de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\beta & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\beta & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\beta & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha, \beta \in K.$$

Chapitre 3

Récents résultats obtenus sur les nilalgèbres commutatives en fonction de leur nilindice et de leur dimension

Dans certains cas, le problème d'Albert admet une réponse positive. C'est par exemple le cas des algèbres à dimension ≤ 8. Les cas où la dimension est ≥ 5 furent étudiés individuellement depuis 2001 par plusieurs mathématiciens dont Correa et Peresi [9] pour les algèbres de dimension 5 en 2011, Correa [8] en 2003 pour les algèbres de dimension 6. Shestakov affirma, en 1986, qu'un de ses étudiants en thèse de doctorat a prouvé la résolubilité des nilalgèbres à puissances associatives de dimension ≤ 7. Malheureusement, ses écrits ne furent pas publiés. Dans [19], Fernandez démontre que toute nilalgèbre commutative (pas nécessairement à puissances associatives) de dimension ≤ 7 sur un corps de caractéristique 0 ou suffisamment grand est résoluble. En dimension 8, sur un corps de caractéristique 0 ou > 7, Elgueta et Suazo [14] confirment la conjecture dans le cas où l'algèbre est nil de nilindice 4, Fernandez et Suazo pour les algèbres de nilindice 5 et Fernandez [17] dans le cas où le nilindice est > 6. Le problème d'Albert reste toujours poser en dimension 9.

3.1 Les algèbres de nilindice 3

Le résultat suivant, sur la nilpotence des nilalgèbres de Jordan, est du à Albert.

Proposition 3.1.1 ([40], p. 92). *Toute nilalgèbre de Jordan de dimension finie, sur un corps de caractéristique différente de 2, est nilpotente.*

L'exemple ci-dessous montre que l'hypothèse sur la caractéristique est essentielle.

Exemple 3.1.2. Soit K un corps de caractéristique égale à 2 et A la K-algèbre commutative de dimension 3 dont les produits non nuls dans la base (u, v, w) sont $uv = w$, $vw = u$ et $wu = v$. Cette algèbre vérifie l'identité $x^2 = 0$. Donc A est de Jordan. Par contre, A n'est pas nilpotente car $A^2 = A$.

Dans ce paragraphe, A est une nilalgèbre commutative de nilindice 3. Donc elle vérifie l'égalité $x^3 = 0$ pour tout $x \in A$. On démontre facilement que A est une algèbre de Jordan. Le corollaire suivant est une conséquence de la Proposition 3.1.1 :

Corollaire 3.1.3. *Toute nilalgèbre commutative de dimension finie de nilindice* 3, *sur un corps K de caractéristique différente de* 2, *est nilpotente (donc résoluble).*

Nous allons maintenant énoncer le théorème de Zelmanov [39], sur la locale nilpotence d'une nilalgèbre de Jordan.

Théorème 3.1.4. *Toute nilalgèbre de Jordan de nilindice borné, sur un corps de caractéristique $\neq 2$, est localement nilpotente.*

Corollaire 3.1.5. *Toute nilalgèbre commutative de nilindice 3, sur un corps de caractéristique $\neq 2$, est localement nilpotente.*

Preuve. Soit A une algèbre commutative, sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, vérifiant l'égalité $x^3 = 0$ pour tout x dans A.

La linéarisation de cette égalité nous donne :

$$yx^2 + 2x(xy) = 0. \tag{3.1}$$

Dans un premier temps, on multiplie (3.1) par x :

$$x(x^2y) + 2x(x(xy)) = 0. \tag{3.2}$$

Ensuite, on remplace y par xy dans (3.1) pour obtenir :

$$(xy)x^2 + 2x(x(xy)) = 0. \tag{3.3}$$

En faisant (3.2)-(3.3), on obtient $x(x^2y) - (xy)x^2 = 0$.

Donc A est une algèbre de Jordan. De plus, elle est nil de nilindice 3 sur un corps K de caractéristique $\neq 2$. Ainsi, le Théorème 3.1.4 (Zelmanov) nous permet de conclure que A est localement nilpotente.

Soit $x \in A$. Considérons la multiplication à gauche par x, définie par l'application

$$L_x : A \longrightarrow A; y \longmapsto xy.$$

L'égalité (3.1) donne $L_{x^2} = -2(L_x)^2$ et ainsi on a $-2L_{ab} = (-2L_a) \circ (-2L_b)$, où $\circ$ est le produit de Jordan défini comme suit :

$$L_x \circ L_y = \frac{1}{2}(L_xL_y + L_yL_x),$$

avec $x, y \in A$. En effet, une linéarisation de $L_{x^2} = -2(L_x)^2$ par rapport à x donne :

$$L_{ab} + L_{ba} = -2L_aL_b - 2L_bL_a.$$

L'algèbre A étant commutative, on a :

$$2L_{ab} = -2(L_aL_b + L_bL_a).$$

Ce qui implique que $-2L_{ab} = 2(L_aL_b + L_bL_a)$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}(-2L_a)\circ(-2L_b) &= \frac{1}{2}[(-2L_a)(-2L_b) + (-2L_b)(-2L_a)]\\ &= \frac{1}{2}(4L_aL_b + 4L_bL_a)\\ &= 2(L_aL_b + L_bL_a).\end{aligned}$$

D'où $-2L_{ab} = (-2L_a)\circ(-2L_b)$. Donc l'application :

$$\phi : A \longrightarrow End_K(A)^+; a \longmapsto -2L_a$$

est un homomorphisme de K-algèbres où $End_K(A)^+$ est le K-espace vectoriel des applications K-linéaires sur A muni du produit de Jordan $\circ$ défini plus haut. On remarque ainsi que $A/Ker\phi$ est une algèbre de Jordan spéciale et est nil de nilindice 3. De plus $Ker\phi = Ann(A) = \{a \in A : ax = 0, \forall x \in A\}$. □

En utilisant les résultats ci-dessus, Zelmanov et Skosyrskii ont établi dans [38] la résolubilité d'une nilalgèbre de Jordan spéciale à travers le théorème suivant :

Théorème 3.1.6 (Zelmanov-Skosyrskii). *Une nilalgèbre de Jordan spéciale de nilindice n sans élément d'ordre $\leq 2n$ dans son groupe additif est résoluble. En particulier, une nilalgèbre commutative de nilindice ≤ 3 sans élément d'ordre ≤ 5 dans son groupe additif est résoluble.*

Par ailleurs, Hentzel et *al.* [28] ont établi une identité sur cette classe d'algèbre à travers le lemme suivant :

Lemme 3.1.7. *Toute nilalgèbre commutative de nilindice 3 sur un corps de caractéristique $\neq 2$ et 3 vérifie l'identité :*

$$a(b^2(c^2(d^2e^2))) = 0.$$

L'une des conséquences directes du lemme ci-dessus est que A^2 est nilpotente d'indice de nilpotence ≤ 5. Si A est engendrée par un nombre fini d'éléments n, alors A est nilpotente d'indice de nilpotence $\leq 3n + 5$. Si A est engendrée par 3 éléments, alors $A^9 = 0$.

En considérant les propriétés des nilalgèbres commutatives données ci-dessus, nous serions tentés de penser que toute nilalgèbre commutative est nilpotente. Ce qui n'est pas toujours vrai. Dans le cas des algèbres associatives sur un corps de caractéristique 0, le théorème de Nagata-Higman nous dit que toute nilalgèbre de nilindice borné est nilpotente d'indice borné. En contradiction avec le cas associatif, Dorofrev, dans [11], a construit un exemple d'algèbre alternative qui est résoluble mais pas nilpotente ([40] p. 127). Notons que cette algèbre n'est pas commutative. D'autre part, si on considère D comme étant cette algèbre, alors $D/ann(D)$ est une nilalgèbre de nilindice 3 qui est résoluble et pas nilpotente.

3.2 Les nilalgèbres à puissances associatives de nilindice 4

Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension finie et de nilindice 4 sur un corps K de caractéristique différente de 2 et 3. Alors l'algèbre A vérifie les égalités suivantes :

$$x^4 = 0,\ x^2x^2 = 0.$$

En linéarisant ces deux équations, on obtient les égalités suivantes pour tous $x, y, z \in A$:

$$\begin{aligned}
(yx)x^2 &= 0 &\quad (3.4)\\
2((yx)x)x + (yx^2)x + yx^3 &= 0 &\quad (3.5)\\
(zy)x^2 + 2(zx)(yx) &= 0 &\quad (3.6)\\
y^2x^2 + 2(yx)^2 &= 0 &\quad (3.7)\\
4(((yx)x)x)x &= (yx^2)x^2 = -2(yx)x^3. &\quad (3.8)
\end{aligned}$$

Enoncons le théorème suivant (voir [12]) qui nous sera très utile pour la suite.

Théorème 3.2.1. *Soit A une nilalgèbre commutative de nilindice t sur un corps K de caractéristique 0 ou $\geq t$. On a $R_a^{2t-3} = 0$ pour tout $a \in A$ dans les cas suivants :*

(i) A est à puissances associatives,

(ii) $t \leq 6$,

(iii) A a au moins $2t-2$ éléments.

Dans notre cas, A est une algèbre à puissances associatives. Donc du Théorème 3.2.1, on tire que $R_x^5 \equiv 0$, pour tout $x \in A$.

Proposition 3.2.2. *Soient x et y deux éléments de A et $\alpha \in K$ tels que $y \neq 0$ et $xy = \alpha y$. Alors $\alpha = 0$.*

Preuve. Soient $x, y \in A$ et $\alpha \in K$ tels que $xy = \alpha y$ et $y \neq 0$. Du Théorème 3.2.1, on a :

$$R_x^5(y) = x(x(x(x(xy)))) = \alpha^5 y = 0,$$

d'où $\alpha^5 y = 0$. Puisque $y \neq 0$, alors $\alpha^5 = 0$; K étant un corps, alors $\alpha = 0$. $\square$

Lemme 3.2.3. *Soit A une nilalgèbre commutative de nilindice 4 à puissances associatives. Alors tout monôme $P(x, y)$ de degré en $x \geq 5$ et de degré en y égal à 1 est une identité sur A.*

Preuve. Nous allons démontrer que la relation $(\ldots((yx_1^{m})x^{m_2})\ldots)x^{m_t} = 0$ est vraie pour tous $x, y \in A$ et tous entiers m_i tels que $m_1 + m_2 + \ldots + m_t \geq 5$.

Du Lemme 1.3.4, on sait que L_{x^j} s'écrit comme une combinaison linéaire de produits de L_x et L_{x^2}, pour tout $j \geq 3$. Par conséquent, on peut supposer que $m_i \in \{1; 2\}$, $\forall i \in \{1, ..., t\}$. Il suffira donc de démonter les égalités suivantes :

$$((((yx)x)x)x)x = 0, \ (((yx)x)x)x^2 = 0, \ (((yx)x)x^2)x = 0, \ (((yx)x^2)x)x = 0,$$
$$(((yx^2)x)x)x = 0, \ ((yx)x^2)x^2 = 0, \ ((yx^2)x^2)x = 0, \ ((yx^2)x)x^2 = 0.$$

L'algèbre A étant à puissances associatives, alors du Théorème 3.2.1, on déduit que $R_x^5(y) = ((((yx)x)x)x)x = 0$ et de l'égalité (3.4), on a :
$(((yx)x)x)x^2 = 0$ en y remplaçant y par $(yx)x$,
$(((yx)x)x^2)x = 0$ en y remplaçant y par yx,
$((yx)x^2)x^2 = 0$ et $(((yx)x^2)x)x = 0$ car $(yx)x^2 = 0$,
$((yx^2)x)x^2 = 0$ en y remplaçant y par yx^2.
En multipliant l'égalité (3.8) par x, on a $4((((yx)x)x)x)x = ((yx^2)x^2)x = 0$ car $R_x^5(y) = 0$. Donc $((yx^2)x^2)x = 0$.

Maintenant, montrons que $(((yx^2)x)x)x = 0$. Pour cela, on considère l'égalité (3.6) en y remplaçant z par x et x par x^2. On obtient $(xy)x^4 + 2(yx^2)x^3 = 0$. Puisque $x^4 = 0$ et que la caractéristique de K est $\neq 2$, alors $(yx^2)x^3 = 0$. Remplaçons maintenant y par yx^2 dans (3.5) pour avoir :

$$2(((yx^2)x)x)x + ((yx^2)x^2)x + (yx^2)x^3 = 0.$$

On a donc $(yx^2)x^3 = -2(((yx^2)x)x)x - ((yx^2)x^2)x = 0$. Sachant déjà que $((yx^2)x^2)x = 0$ et que la caractéristique de K est différente de 2, alors $(((yx^2)x)x)x = 0$.

Toutes les égalités étant établies, on conclut que l'assertion est vraie et que tout monôme $P(x, y)$ de degré en $x \geq 5$ et de degré en y égal à 1 est une identité sur A. □

Lemme 3.2.4. *Soit A une nilalgèbre commutative de nilindice 4 à puissances associatives. S'il existe $a, b \in A$ tels que $L_a^4(b) \neq 0$, alors $dim(A) \geq 9$.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux éléments a et b dans A tels que $L_a^4(b) \neq 0$. En remplaçant x par a et y par b dans l'égalité (3.8), on obtient :

$$4(((ba)a)a)a = (ba^2)a^2 = -2(ba)a^3.$$

Ce qui implique que $(ba^2)a^2 \neq 0$ et $(ba)a^3 \neq 0$ car $(((ba)a)a)a \neq 0$ et $car(K) \neq 2$. Par ailleurs, $(ba)a^3 \neq 0$ implique que $a^3 \neq 0$.

Soit $B =< a, a^2, a^3 >$ la sous-algèbre engendrée par a, a^2 et a^3.

Remarquons que $(ba^2)a^2$ et a^3 sont linéairement indépendants. En effet, s'ils étaient liés, il existerait $\lambda \in K^*$ tel que $(ba^2)a^2 = \lambda a^3$. De l'égalité (3.8), on aurait $-2(ba)a^3 = \lambda a^3$. D'où $(ba)a^3 = (-\frac{\lambda}{2})a^3$. De la Proposition 3.2.2, on déduirait que $\lambda = 0$. Ce qui est absurde.

Montrons maintenant que $L_a^0(b)$, $L_a(b)$, $L_a^2(b)$, $L_a^3(b)$, $L_a^4(b)$, a, a^2, a^3, ba^2 sont linéairement indépendants.

Considérons la suite de scalaires $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma) \in K^9$ telle que :

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i L_a^i(b) + \sum_{j=1}^{3} \beta_j a^j + \gamma ba^2 = 0.$$

On a :

$$\alpha_0 b + \alpha_1 ba + \alpha_2 (ba)a + \alpha_3((ba)a)a + \alpha_4(((ba)a)a)a + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \gamma b^2 a = 0.$$

En multipliant cette équation par a^2, on obtient :

$$\alpha_0 ba^2 + \alpha_1(ba)a^2 + \alpha_2((ba)a)a^2 + \alpha_3(((ba)a)a)a^2 + \alpha_4((((ba)a)a)a)a^2 + \beta_1 a^3 + \beta_2 a^4 + \beta_3 a^5 + \gamma(b^2a)a^2 = 0.$$

De l'égalité (3.4), on a $(ba)a^2 = 0$ et du Lemme 3.2.3, on a $(((ba)a)a)a^2 = 0$ car le degré de ce monôme en a est 5 et son degré en b est 1. De même $((((ba)a)a)a)a^2 = 0$. L'algèbre A étant nil de nilindice 4, alors $a^4 = a^6 = 0$. On obtient finalement l'égalité suivante :

$$\alpha_0 ba^2 + \alpha_2((ba)a)a^2 + \beta_1 a^3 + \gamma(ba^2)a^2 = 0.$$

Par ailleurs, en remplaçant y par ba et x par a dans l'égalité (3.4), on a $((ba)a)a^2 = 0$. D'où $\alpha_0 ba^2 + \beta_1 a^3 + \gamma(ba^2)a^2 = 0$. En multipliant l'égalité obtenue par a^2, on obtient :

$$\alpha_0(ba^2)a^2 + \beta_1(a^3)a^2 + \gamma((ba^2)a^2)a^2 = 0.$$

L'algèbre A étant à puissances associatives, alors $(a^3)a^2 = a^5$. De plus, on a $a^5 = 0$ et $((ba^2)a^2)a^2 = 0$ car $((ba^2)a^2)a^2$ est un monôme dont le degré en a est 6 et le degré en b est 1. Ce qui nous donne $\alpha_0(ba^2)a^2 = 0$. Puisque $(ba^2)a^2 \neq 0$, alors $\alpha_0 = 0$. D'où $\beta_1 a^3 + \gamma(ba^2)a^2 = 0$. Etant donné que a^3 et $(ba^2)a^2$ sont linéairement indépendants, alors $\beta_1 = \gamma = 0$. Notre équation de départ devient :

$$\alpha_1 ba + \alpha_2(ba)a + \alpha_3((ba)a)a + \alpha_4(((ba)a)a)a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 = 0.$$

En la multipliant deux fois par a, on obtient :

$$\alpha_1((ba)a)a + \alpha_2(((ba)a)a)a + \alpha_3((((ba)a)a)a)a + \alpha_4(((((ba)a)a)a)a)a + \beta_2 a^4 + \beta_3 a^5 = 0.$$

Ce qui implique que $\alpha_1((ba)a)a + \alpha_2(((ba)a)a)a = 0$. En multipliant encore par a, on trouve $\alpha_1(((ba)a)a)a + \alpha_2((((ba)a)a)a)a = 0$. Ce qui nous donne $\alpha_1(((ba)a)a)a = 0$ car $((((ba)a)a)a)a = 0$. D'où $\alpha_1 = 0$ car $(((ba)a)a)a \neq 0$, et aussi $\alpha_2 = 0$.

On obtient finalement l'égalité suivante :

$$\alpha_3((ba)a)a + \alpha_4(((ba)a)a)a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 = 0.$$

De l'égalité (3.8), on a $4(((ba)a)a)a = (ba^2)a^2$. D'où $(((ba)a)a)a = \frac{1}{4}(ba^2)a^2$ car $car(K) \neq 2$ et on obtient $\frac{1}{4}\alpha_3(ba^2)a^2 + \beta_2 a^3 = 0$. Puisque $(ba^2)a^2$ et a^3 sont linéairement indépendants, alors $\alpha_3 = \beta_2 = 0$.

On a $\alpha_4(((ba)a)a)a + \beta_3 a^3 = 0$. En utilisant l'égalité (4.8), on obtient $\frac{1}{4}\alpha_4(ba^2)a^2 + \beta_3 a^3 = 0$. Les éléments $(ba^2)a^2$ et a^3 étant linéairement indépendants, alors $\alpha_4 = \beta_3 = 0$. Finalement, on a bien $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma = 0$. Donc la famille $\{L_a^0(b), L_a(b), L_a^2(b), L_a^3(b), L_a^4(b), a, a^2, a^3, ba^2\}$ est linéairement indépendante. $\square$

Lemme 3.2.5. *Soit A une nilalgèbre commutative de nilindice 4 à puissances associatives. Si $R_a^4 \equiv 0$ pour tout $a \in A$, alors $(x^2y)^2 = 0$ et $(xy)^3 = 0$ pour tous $x, y \in A$.*

Preuve. Considérons l'égalité (3.7). En y remplaçant y par y^2, on a :

$$y^4x^2 + 2(y^2x)^2 = 0.$$

Ce qui implique que $2(y^2x)^2 = 0$ car $y^4 = 0$. Puisque $car(K) \neq 2$, alors $(y^2x)^2 = 0$. En inter-changeant x et y, on a $(x^2y)^2 = 0$.

Montrons maintenant qu'on a $(xy)^3 = 0$.

Par hypothèse $R_x^4(y) = 0$, donc l'égalité (3.8) entraine que $(yx^2)x^2 = 0$. En linéarisant, par rapport à x, l'égalité $(yx^2)x^2 = 0$, on a :

$$((zx)y)x^2 + (zx)(yx^2) = 0,$$

en y remplaçant z par y et y par y^2, on obtient $((yx)y^2)x^2 + (yx)(y^2x^2) = 0$. L'égalité (3.4) nous permet de dire que $((yx)y^2)x^2 = 0$ car $(yx)y^2 = 0$. D'où $0 = (yx)(y^2x^2)$. Par ailleurs, en multipliant l'égalité (3.7) par (yx), on a $(yx)(y^2x^2) + 2(yx)^3 = 0$. D'où $2(yx)^3 = -(yx)(y^2x^2) = 0$. La caractéristique de K étant différente de 2, alors $(yx)^3 = 0$. $\square$

Lemme 3.2.6. *Soit A une nilalgèbre commutative de nilindice 4 à puissances associatives. Si $(A^2)^2 \neq 0$, alors $dim(A) \geq 6$.*

Preuve. Supposons que $(A^2)^2 \neq 0$. Alors il existe deux éléments non nuls a et b dans A tels que $a^2b^2 \neq 0$. Nous allons montrer que la famille $\{a, b, a^2, b^2, ab, a^2b^2\}$ est libre.

Soient $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in K$ tels que :

$$\alpha_1 a + \beta_1 b + \alpha_2 a^2 + \beta_2 b^2 + \gamma_1 ab + \gamma_2 a^2b^2 = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2 = {} & \alpha_2 a^4 + \beta_2 b^4 + \gamma_1^2(ab)^2 + \gamma_2^2(a^2b^2)^2 + 2\alpha_2\beta_2 a^2b^2 + 2\alpha_2\gamma_1 a^2(ab) \\ & + 2\alpha_2\gamma_2 a^2(a^2b^2) + 2\beta_2\gamma_1 b^2(ab) + 2\beta_2\gamma_2(b^2(a^2b^2)) + 2\gamma_1\gamma_2(ab)(a^2b^2).\end{aligned}$$

On sait déjà que $a^4 = b^4 = 0$. En remplaçant x par b et y par a dans l'égalité (3.7), on a $a^2b^2 = -2(ab)^2$. En élevant cette dernière égalité au carré, on obtient $(a^2b^2)^2 = 4(ab)^4 = 0$, d'où $(a^2b^2)^2 = 0$. Par ailleurs, l'égalité (3.5) nous permet d'avoir $(ab)b^2 = (ba)a^2 = 0$.

En remplaçant z par a^2, y par b^2 et x par a dans l'égalité (3.6), on obtient :

$$(a^2b^2)a^2 + 2a^3(b^2a) = 0.$$

Considérons l'égalité (3.8). En y remplaçant y par b^2 et x par b, on a :

$$-4(((b^2a)a)a)a = 2a^3(b^2a).$$

Du Lemme 3.2.4, on peut supposer que $L_a^4 \equiv 0$ pour tout $a \in A$. Ce qui nous permet de dire que $2a^3(b^2a) = -4(((b^2a)a)a)a = 0$, d'où $0 = (a^2b^2)a^2 + 2a^3(b^2a) = (a^2b^2)a^2$. On conclut que :

$$(a^2b^2)a^2 = (a^2b^2)b^2 = 0.$$

Du Lemme 3.2.5, on déduit que $(ab)^3 = 0$. Par ailleurs, l'égalité (3.7) nous donne $a^2b^2 + 2(ab)^2 = 0$, d'où en multipliant cette équation par (ab), on a :

$$0 = (ab)(a^2b^2) + 2(ab)^3 = (ab)(a^2b^2).$$

Finalement, on obtient :

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2 = \gamma_1^2(ab)^2 + 2\alpha_2\beta_2 a^2b^2.$$

De l'égalité (3.7), on a $(ab)^2 = -\frac{1}{2}a^2b^2$. Donc :

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2 = (2\alpha_2\beta_2 - \frac{\gamma_1^2}{2})a^2b^2.$$

Par ailleurs $(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2 = \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1\beta_1 ab + \beta_1^2 b^2$. En multipliant cette dernière équation par b^2, on trouve $(\alpha_1 a+\beta_1 b)^2b^2 = \alpha_1^2a^2b^2 + 2\alpha_1\beta_1(ab)b^2 + \beta_1^2b^4$. Puisque $b^4 = 0$ et $b^2(ba) = 0$ (égalité (3.4)), alors on a $(\alpha_1 a+\beta_1 b)^2b^2 = \alpha_1^2a^2b^2$. On remarque aussi que $(\alpha_1 a+\beta_1 b)^2b^2 = (2\alpha_2\beta_2 - \frac{\gamma_1^2}{2})(a^2b^2)b^2 = 0$, car $(a^2b^2)b^2 = 0$. Donc $\alpha_1^2a^2b^2 = 0$. Etant donné que $a^2b^2 \neq 0$, alors $\alpha_1 = 0$.

Multiplions maintenant $(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2$ par a^2 :

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2a^2 = \alpha_1^2a^4 + 2\alpha_1\beta_2(ba)a^2 + \beta_1^2a^2b^2 = \beta_1^2a^2b^2.$$

On sait que $(\alpha_1 a+\beta_1 b)^2a^2 = (2\alpha_2\beta_2 - \frac{\gamma_1^2}{2})(a^2b^2)a^2 = 0$ car $(a^2b^2)a^2 = 0$. Donc $\beta_1^2a^2b^2 = 0$. Puisque $a^2b^2 \neq 0$, alors $\beta_1 = 0$.

On a :

$$\alpha_2 a^2 + \beta_2 b^2 + \gamma_1 ab + \gamma_2 a^2b^2 = 0.$$

En la multipliant par a^2, on a :

$$\alpha_2 a^4 + \beta_2 b^2a^2 + \gamma_1(ab)a^2 + \gamma_2(a^2b^2)a^2 = 0.$$

Ce qui nous donne $\beta_2 b^2a^2 = 0$, d'où $\beta_2 = 0$ car $b^2a^2 \neq 0$.

On a :

$$\alpha_2 a^2 + \gamma_1 ab + \gamma_2 a^2b^2 = 0.$$

En multipliant cette dernière équation par b^2, on obtient :

$$\alpha_2 a^2b^2 + \gamma_1(ab)b^2 + \gamma_2(a^2b^2)b^2 = 0.$$

Ce qui implique que $\alpha_2 a^2b^2 = 0$, d'où $\alpha_2 = 0$ car $a^2b^2 \neq 0$. Finalement, on obtient :

$$\gamma_1 ab + \gamma_2 a^2b^2 = 0.$$

En multipliant cette équation obtenue par (ab), on a :

$$\gamma_1(ab)^2 + \gamma_2(a^2b^2)(ab) = \gamma_1(ab)^2 = 0$$

car $(a^2b^2)(ab) = 0$. Puisque $a^2b^2 \neq 0$, alors de l'égalité (3.7), on a $(ab)^2 = -\frac{1}{2}a^2b^2 \neq 0$, d'où $\gamma_1 = 0$.

Notre combinaison linéaire de départ devient $\gamma_2 a^2b^2 = 0$. Ce qui implique que $\gamma_2 = 0$ car $a^2b^2 \neq 0$.

On conclut que la famille $\{a, b, a^2, b^2, ab, a^2b^2\}$ est libre et que $dim(A) \geq 6$. $\square$

Lemme 3.2.7. *Soit A une nilalgèbre commutative de nilindice 4 à puissances associatives. Si A est de dimension 6 et que $(A^2)^2 \neq 0$, alors A est de Jordan et donc nilpotente.*

Preuve. On a déjà démontré que si $(A^2)^2 \neq 0$, alors il existe $a, b \in A$ tels que $\{a, b, a^2, b^2, ab, a^2b^2\}$ soit une famille libre de A. L'algèbre A étant de dimension 6, alors la famille $\{a, b, a^2, b^2, ab, a^2b^2\}$ est une base de A. Construisons maintenant la table de multiplication de cette base en utilisant les résultats précédents.

$\cdot$	a	b	a^2	b^2	ab	a^2b^2
a	a^2	ab	a^3	ab^2	$a(ab)$	$a(a^2b^2)$
b	ba	b^2	ba^2	b^3	$b(ba)$	$b(a^2b^2)$
a^2	a^2	a^2b	0	a^2b^2	0	0
b^2	ab^2	b^3	a^2b^2	0	0	0
ab	$a(ab)$	$b(ba)$	0	0	$-\frac{1}{2}a^2b^2$	0
a^2b^2	$a(a^2b^2)$	$b(a^2b^2)$	0	0	0	0

Soit $D =< a^2, b^2, ab, a^2b^2 >$ la sous-algèbre de A, engendrée par $\{a^2, b^2, ab, a^2b^2\}$. De la table de multiplication, on remarque que $D^2 =< a^2b^2 >$, $D^3 = 0$ et que $A^2 = D$.

Nous allons maintenant montrer que $A^3 = D^2 =< a^2b^2 >= Ann(A)$.

Montrons d'abord que $A^3 = D^2 =< a^2b^2 >$.

Pour cela, il nous suffira de montrer que $a^3, ab^2, (ab)b \in D^2$.

- Cas de a^3 :

  Etant donné que $a^3 \in A$, alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \in K^6$ tel que :

$$a^3 = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 a^2 + \alpha_4 b^2 + \alpha_5 ab + \alpha_6 a^2b^2.$$

  On a :

$$\begin{aligned}(a^3 - \alpha_1 a - \alpha_2 b)^2 &= (\alpha_3 a^2 + \alpha_4 b^2 + \alpha_5 ab + \alpha_6 a^2b^2)^2 \\ &= \alpha_5^2(ab)^2 + 2\alpha_3\alpha_4 a^2b^2 \\ &= (-\frac{1}{2}\alpha_5^2 + 2\alpha_3\alpha_4)a^2b^2\end{aligned}$$

Donc $(a^3-\alpha_1 a-\alpha_2 b)^2 \in D^2 =< a^2b^2 >$. En multipliant par b^2, on a :

$$(a^3-\alpha_1 a-\alpha_2 b)^2 b^2 = 0.$$

Par ailleurs :

$$(a^3-\alpha_1 a-\alpha_2 b)^2 = \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1\alpha_2 ab + \alpha_2^2 b^2 - 2\alpha_2 a^3 b.$$

On en déduit que $(a^3-\alpha_1 a-\alpha_2 b)^2 b^2 = \alpha_1^2 b^2 a^2 + 2\alpha_1\alpha_2 (ab)b^2 + \alpha_2^2 b^4 - 2\alpha_2 (a^3 b)b^2 = 0$. On obtient $\alpha_1^2 a^2 b^2 - 2\alpha_2 b^2 (a^3 b) = 0$. En remplaçant y par a^3 et x par b dans l'égalité (3.4), on obtient $(a^3 b)b^2 = 0$. D'où $\alpha_1^2 a^2 b^2 = 0$ et donc $\alpha_1 = 0$ puisque $a^2 b^2 \neq 0$.
On a donc :

$$(a^3-\alpha_2 b)^2 = \alpha_2^2 b^2 - 2\alpha_2 a^3 b \in < a^2b^2 >,$$

qu'on multiplie par a^2 pour obtenir $\alpha_2^2 a^2 b^2 - 2\alpha_2 a^2 (a^3 b) = 0$. Le monôme $a^2(a^3b)$ ayant un degré en $a \geq 5$ et un degré en b égal à 1, alors du Lemme 3.2.3, on tire que $a^2(a^3b) = 0$. Donc $\alpha_2^2 a^2 b^2 = 0$, d'où $\alpha_2 = 0$ car $a^2b^2 \neq 0$.
Par conséquent :

$$a^3 = \alpha_3 a^2 + \alpha_4 b^2 + \alpha_5 ab + \alpha_6 a^2 b^2 \in D.$$

En multipliant par a^2, on a $0 = a^5 = \alpha_3 a^4 + \alpha_4 a^2 b^2 + \alpha_5 a^2(ab) + \alpha_6 a^2(a^2b^2) = \alpha_4 a^2 b^2$, d'où $\alpha_4 = 0$ car $a^2b^2 \neq 0$. On a donc $a^3 = \alpha_3 a^2 + \alpha_5 ab + \alpha_6 a^2 b^2$. En multipliant cette équation par (ab), on a $a^3(ab) = \alpha_3 a^2(ab) + \alpha_5 (ab)^2 + \alpha_6 (ab)(a^2b^2) = -\frac{1}{2}\alpha_5 a^2 b^2$. En remplaçant x par a et y par ab dans l'égalité (3.8), on obtient :

$$4((((ba)a)a)a)a = ((ba)a^2)a^2 = -2(ab)a^3 = 0$$

car $((((ba)a)a)a)a = 0$ puisque $((((ba)a)a)a)a$ est un monôme de degré en $a \geq 5$ et de degré en b égal à 1. La caractéristique de K étant $\neq 2$ alors $(ab)a^3 = 0$. Donc $0 = (ab)a^3 = -\frac{1}{2}\alpha_5 a^2 b^2$, ce qui implique que $\alpha_5 = 0$ car $a^2b^2 \neq 0$.
Ainsi, on a $a^3 = \alpha_3 a^2 + \alpha_6 a^2 b^2$, d'où $a^2(a - \alpha_6 b^2) = \alpha_3 a^2$. De la Proposition 3.2.2, on a $\alpha_3 = 0$ car $a^2 \neq 0$. Finalement $a^3 = \alpha_6 a^2 b^2 \in D^2$.

- Cas de ab^2 :
Posons $ab^2 = \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 a^2 + \beta_4 b^2 + \beta_5 ab + \beta_6 a^2 b^2$ avec $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6) \in K^6$.
En multipliant par b^2, on a :

$$0 = (ab^2)b^2 = \beta_1 ab^2 + \beta_2 b^3 + \beta_3 a^2 b^2 \in \beta_1 ab^2 + D = \beta_1^2 a + \beta_1\beta_2 b + D,$$

d'où $\beta_1 = 0$. En effet, puisque $dim(A) = 6 < 9$, alors le Lemme 3.2.4 nous donne $L_b^4(a) = 0$ et l'égalité (3.8) entraine que $4(((ab)b)b)b = (ab^2)b^2 = 0$.
On a donc :

$$ab^2 = \beta_2 b + \beta_3 a^2 + \beta_4 b^2 + \beta_5 ab + \beta_6 a^2 b^2.$$

Considérons l'égalité (3.6) en y remplaçant z par b^2, x par a et y par b, on a :

$$b^3 a^2 + 2(b^2 a)(ba) = 0.$$

Ce qui implique que $(b^2a)(ba) = -\frac{1}{2}b^3a^2 \in a^2D^2 = 0$, car $b^3 \in D^2$ et $car(K) \neq 2$. D'où $(b^2a)(ba) = 0$. Aussi, en remplaçant z par a^2, y par a et x par b^2 dans l'égalité (3.6), on a :

$$a^3b^4 + 2(a^2b^2)(ab^2) = 0.$$

Ce qui implique que $(ab^2)(a^2b^2) = 0$, car $b^4 = 0$ et $car(K) \neq 2$.
Sachant que $(b^2a)(ba) = (ab^2)(a^2b^2) = 0$, on a :

$$\beta_2^2b^2 = (ab^2 - \beta_3a^2 - \beta_4b^2 - \beta_5ab - \beta_6a^2b^2)^2 = (ab^2)^2 - \frac{1}{2}\beta_5^2a^2b^2 + 2\beta_3\beta_4a^2b^2.$$

En remplaçant x par b^2 et y par a dans l'équation (3.7), on a :

$$a^2(b^2)^2 + 2(ab^2)^2 = 0.$$

Ce qui implique que $(ab^2)^2 = 0$, car $b^4 = 0$ et $car(K) \neq 2$. D'où :

$$\beta_2^2b^2 = (-\frac{1}{2}\beta_5^2 + 2\beta_3\beta_4)a^2b^2 \in D^2 =< a^2b^2 > .$$

Donc il existe un scalaire $\lambda \in K^*$ tel que $\beta_2^2b^2 = \lambda a^2b^2$. Ce qui implique que $a^2b^2 = \frac{\beta_2^2}{\lambda}b^2$, puisque $\lambda \neq 0$. De la Proposition 3.2.2, on a $\frac{\beta_2^2}{\lambda} = 0$ car $b^2 \neq 0$. D'où $\beta_2 = 0$.
Ainsi, on obtient :

$$ab^2 = \beta_3a^2 + \beta_4b^2 + \beta_5ab + \beta_6a^2b^2.$$

En multipliant cette égalité par b^2, on a $0 = b^2(ab^2) = \beta_3a^2b^2$. Ce qui implique que $\beta_3 = 0$, car $a^2b^2 \neq 0$. Par ailleurs, en la multipliant par a^2, on obtient $0 = a^2(ab^2) = \beta_4a^2b^2$. Ce qui implique que $\beta_4 = 0$ car $a^2b^2 \neq 0$.
Ainsi, on a $ab^2 = \beta_5ab + \beta_6a^2b^2$. En élevant l'équation au carré, on obtient :

$$0 = (ab^2)^2 = (\beta_5ab + \beta_6a^2b^2)^2 = \beta_5^2(ab)^2 + \beta_6^2(a^2b^2)^2 + 2\beta_5\beta_6(ab)(a^2b^2).$$

Ce qui implique que $0 = -\frac{1}{2}\beta_5^2a^2b^2$, d'où $\beta_5^2 = 0$ car $a^2b^2 \neq 0$. Puisque K est un corps, alors il est intègre et donc $\beta_5 = 0$. Finalement $ab^2 = \beta_6a^2b^2 \in D^2$.

- Cas de $(ab)b$:
Posons $(ab)b = \gamma_1a + \gamma_2b + \gamma_3a^2 + \gamma_4b^2 + \gamma_5ab + \gamma_6a^2b^2$.
En remplaçant z et y par b et x par a dans l'équation (3.9), on a :

$$((ba)b)a^2 + (ba)(ba^2) = 0.$$

D'où $((ba)b)a^2 = -(ba)(ba^2) \in (ab)D^2 = 0$ et si on inter-change les rôles de a et b, on obtient aussi $((ab)a)b^2 = 0$. En remplaçant z par ab, x par b et y par a dans l'égalité (3.6), on a :

$$((ab)a)b^2 + 2((ab)b)(ab) = 0.$$

Ce qui implique que $((ab)b)(ab) = -\frac{1}{2}((ab)a)b^2 = 0$, car la caractéristique de K est différente de 2. De même, l'égalité (3.7) nous donne $a^2b^2+2(ab)^2 = 0$. En multipliant cette égalité par $(ab)b$, on a $((ab)b)(a^2b^2) = -2((ab)b)(ab)^2 = 0$. Ce qui nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned}(\gamma_1 a + \gamma_2 b)^2 &= ((ab)b - \gamma_3 a^2 - \gamma_4 b^2 - \gamma_5 ab - \gamma_6 a^2b^2)^2 \\ &= ((ab)b)^2 + \gamma_5^2(ab)^2 + 2\gamma_3\gamma_4 a^2b^2 - 2\gamma_4((ab)b)b^2 \\ &= (-\frac{1}{2}\gamma_5^2 + 2\gamma_3\gamma_4)a^2b^2.\end{aligned}$$

En effet, en remplaçant y par ab et x par b dans l'égalité (3.4), on a $((ab)b)b^2 = 0$. Par ailleurs, en remplaçant x par ab et y par b dans l'égalité (3.7), on a :

$$(ab)^2b^2 + 2((ab)b)^2 = 0.$$

D'où $((ab)b)^2 = -\frac{1}{2}(ab)^2b^2$. En remplaçant x par a et y par b dans l'égalité (3.7), on a :

$$a^2b^2 + 2(ab)^2 = 0.$$

D'où $(ab)^2 = -\frac{1}{2}a^2b^2$. Ce qui nous donne $((ab)b)^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2)b^2 = 0$. On a bien $(\gamma_1 a + \gamma_2 b)^2 = (-\frac{1}{2}\gamma_5^2 + 2\gamma_3\gamma_4)a^2b^2 \in < a^2b^2 >= D^2$. Donc il existe $\lambda \in K^*$ tel que $(\gamma_1 a + \gamma_2 b)^2 = \lambda a^2b^2$. Ce qui implique que $\gamma_1^2a^2 + \gamma_2^2b^2 + 2\gamma_1\gamma_2 ab = \lambda a^2b^2$. La famille étant libre, on a $\gamma_1 = \gamma_2 = \lambda = 0$. D'où $(ab)b = \gamma_3 a^2 + \gamma_4 b^2 + \gamma_5 ab + \gamma_6 a^2b^2$. En multipliant cette dernière égalité par b^2, on a :

$$0 = ((ab)b)b^2 = \gamma_3 a^2b^2 + \gamma_4 b^4 + \gamma_5(ab)b^2 + \gamma_6(a^2b^2)b^2,$$

donc $0 = \gamma_3 a^2b^2$. D'où $\gamma_3 = 0$ car $a^2b^2 \neq 0$. Ce qui nous donne :

$$(ab)b = \gamma_4 b^2 + \gamma_5 ab + \gamma_6 a^2b^2.$$

En multipliant cette égalité par (ab), on a :

$$0 = ((ab)b)(ab) = \gamma_4 b^2(ab) + \gamma_5(ab)^2 + \gamma_6(a^2b^2)(ab) = -\frac{1}{2}\gamma_5 a^2b^2.$$

D'où $\gamma_5 = 0$. On obtient donc :

$$(ab)b = \gamma_4 b^2 + \gamma_6 a^2b^2.$$

En multipliant cette dernière égalité par a^2, on a :

$$0 = ((ab)b)a^2 = \gamma_4 a^2b^2 + \gamma_6 a^2(a^2b^2) = \gamma_4 a^2b^2.$$

D'où $\gamma_4 = 0$ car $a^2b^2 \neq 0$. Par conséquent $(ab)b = \gamma_6 a^2b^2 \in < a^2b^2 >= D^2$.

Par effet de symétrie, on obtient aussi $b^3, ba^2, (ba)a \in D^2$. Finalement, on a $A^3 = D^2$.

Il reste à prouver que $D^2 = Ann(A)$, où $Ann(A) = \{a \in A : ax = 0, \forall x \in A\}$.

Pour cela, il nous suffit de vérifier que $aD^2 = bD^2 = 0$. Sachant déjà que $a^3, ab^2 \in D^2$, on remplace x par a et y par b^2 dans l'égalité (3.5) pour obtenir :

$$2((b^2a)a)a + (b^2a^2)a + b^2a^3 = 0.$$

Etant donné que $a^3 \in D^2$, alors $b^2a^3 = 0$. D'où $2((b^2a)a)a + (b^2a^2)a = 0$. Ce qui implique que $(b^2a^2)a = -2((b^2a)a)a$. Puisque $ab^2 \in D^2$, alors il existe $\lambda \in K^*$ tel que $ab^2 = \lambda a^2b^2$. D'où $a(a^2b^2) = -2\lambda a(a(a^2b^2))$. Donc de la Proposition 3.2.2, on a $a(a^2b^2) = 0$ car $\lambda \neq 0$. En inter-changeant les rôles de a et b on a $b(b^2a^2) = 0$. D'où $aD^2 = bD^2 = 0$. Donc $D^2 = Ann(A)$ et finalement on a $A^3 = D^2 = Ann(A)$. On conclut que :

$$A^4 = A^2A^2 = D^2 = A^3 = Ann(A) \text{ et } A^j = 0 \text{ pour tout } j \geq 5.$$

Donc A est donc nilpotente et est clairement une algèbre de Jordan.

□

L'une des conséquences immédiates de ce lemme est que, sur un corps K de caractéristique $\neq 2$ et 3, toute nilalgèbre A de nilindice 4 commutative à puissances associatives et de dimension ≤ 6 vérifie nécessairement l'égalité $(A^2)^2 = 0$, si elle n'est pas nilpotente. L'algèbre de Suttles en est un exemple. Ainsi la question suivante reste posée :

Question 3. *Soit A une nilalgèbre de nilindice 4 commutative à puissances associatives de dimension finie, sur un corps de caractéristique $\neq 2$ et 3. A-t-on nécessairement $(A^2)^2 = 0$ si A n'est pas nilpotente ?*

Pour le moment, nous ne connaissons pas de contre-exemple ni de conjecture allant dans le sens de la question posée. Maintenant, nous allons énoncer un résultat obtenu par Elgueta et Suazo dans [15], sur les nilalgèbres de dimension ≤ 10.

Lemme 3.2.8 (Elgueta-Suazo). *Soit A une nilalgèbre de nilindice 4 commutative à puissances associatives et de dimension ≤ 10, sur un corps K de caractéristique $\neq 2$ et 3. Alors A est résoluble d'indice 3 (i.e $A^{[3]} = 0$) et les identités $(xy)^3 = 0$ et $x^2(x^2y^2) = 0$ sont vérifiées pour tous $x, y \in A$.*

Definition 3.2.9. Soit $\mathcal{M}$ une classe d'algèbres commutatives sur un corps K. Soit A une algèbre dans $\mathcal{M}$. On dit qu'un K-espace vectoriel M est un *A-module* dans la classe $\mathcal{M}$, s'il existe une application bilinéaire $A \times M \longrightarrow M$; $(a, m) \longmapsto am$ telle que l'algèbre $E = A \oplus M$, munie de la multiplication définie par :

$$(a + x)(b + y) = ab + (ay + bx)$$

pour tous $a, b \in A$ et $x, y \in M$, appartient à la classe $\mathcal{M}$.

Un *sous A-module* N d'un A-module M est un sous-espace vectoriel, sur K, de M stable par l'action de A.

Un A-module M est dit *irréductible* si M n'est pas nul et si ses seuls sous-modules sont (0) et M.

Avant d'énoncer le lemme de Shestakov, nous allons d'abord énoncer un résultat obtenu par Schafer dans [35].

Proposition 3.2.10 ([35], p. 21). *Toute K-algèbre commutative à puissances associatives de dimension finie qui n'est pas une nilalgèbre contient un idempotent e ($\neq 0$).*

Lemme 3.2.11 (Shestakov). *Soit A une algèbre avec une zéro multiplication (i.e $\exists a \in A$ tel que $L_a \equiv 0$) et V un A-module irréductible dans la variété des algèbres commutatives à puissances associatives de dimension finie. Supposons qu'on peut définir un produit commutatif sur V à valeur dans A : $(u; v) \longmapsto u \cdot v \in A$ tel que $V \cdot V = A$. Si l'espace vectoriel $Q = A \oplus V$, muni de la multiplication définie par :*

$$(a+u)(b+v) = u \cdot v + (av + bu)$$

avec $a, b \in A$ et $u, v \in V$, est une algèbre à puissances associatives, alors Q est nil, simple et constitue un contre-exemple du problème d'Albert.

Preuve. Dans cette preuve, nous allons seulement montrer que $Q = A \oplus V$ est une nilalgèbre. On voit que Q est bien une algèbre. Montrons maintenant que Q est nil. Pour cela, supposons par l'absurde que Q n'est pas nil. Alors du résultat de Schafer, on déduit que Q contient un idempotent non trivial e qui se décompose comme suit :

$$e = a + v, \text{ avec } a \in A \text{ et } v \in V.$$

D'où $e = a + v = e^2 = (a^2 + v^2) + 2av$. On sait déjà que $a^2 \in A$ et que suivant les hypothèses du lemme $v^2 \in A$ et aussi $2av \in V$. Donc suivant la décomposition en somme direct de Q, on a $2av = v$ et $a = a^2 + v^2$. En considérant l'opérateur de multiplication $L_a : v \longmapsto av$, on remarque que $2av = v$ implique que $L_a(v) = \frac{1}{2}v$. Donc $\frac{1}{2}$ est une valeur propre de L_a. Par ailleurs, du Théorème 1.5.2, L_a est nilpotent. Ce qui implique que la seule valeur propre possible de L_a est 0. D'où la contradiction et on en déduit que Q est une nilalgèbre. □

On obtient un résultat analogue au lemme de Schestakov lorsque V est une somme direct de deux autres A-modules irréductibles. Ce lemme demeure toujours une source de motivation pour l'étude des A-modules irréductibles (voir [22]).

Maintenant, nous allons considérer un corps K algébriquement clos et de caractéristique $\neq 2$ et 3. Soient $A = K[a, b]$ (avec $a, b \in A$) une K-algèbre de dimension 2 et V un A-module de dimension n dans la classe des nilalgèbres commutatives à puissances associatives de nilindice 4. Soit $W = \{v \in V : av = 0\}$, on définit $\phi : W \longrightarrow W, v \longmapsto a(bv)$. L'application ϕ est bien définie car $\phi(W) \subset W$. Soit Δ l'ensemble des valeurs propres de ϕ. Pour $0 \neq \lambda \in \Delta$, on considère le sous-ensemble W_λ de V défini par :

$$W_\lambda = Ker(\phi - \lambda I)^n, V_\lambda = W_\lambda + bW_\lambda + b(bW_\lambda)$$

et aussi $V_0 = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} V_0^{[j]}$ où les ensembles $V_0^{[j]}$ sont définis comme suit :

$$V_0^{[0]} = 0 \text{ et } V_0^{[j]} = \{v \in V : av, b \in V_0^{[j-1]}\}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3.2.12. *On a :*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Delta} V_\lambda.$$

Soit A une algèbre nilpotente. Un A-module M est dit non dégénéré s'il ne contient pas de facteurs de dimension 1. Une sous-algèbre nilpotente B d'une algèbre A est dite de *Cartan* si le B-module A/B est non dégénéré. Nous terminons ce paragraphe par le théorème suivant :

Théorème 3.2.13 ([22]). *Soit A une nilalgèbre de nilindice 4, commutative à puissances associatives de dimension finie contenant une sous-algèbre de Cartan de dimension 2. Alors A est résoluble.*

3.3 Les nilalgèbres à puissances associatives de dimension n et de nilindice $\geq n-2$

Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension n et de nilindice $k \in \{n-2, n-1, n, n+1\}$, sur un corps K de caractéristique $\neq 2$ et 3.

Le cas où $k = n$ a été étudié par I. Correa et A. Suazo. Ils ont démontré à travers le Théorème 1 dans [10] que A est nilpotente.

Dans le cas où $k = n+1$, si a est un élément de A tel que $a^{n+1} = 0$ et $a^n \neq 0$, alors $\{a, ..., a^n\}$ est une base de A. De ce fait, si $dim(A) = 1$, alors pour tout $a \in A$ non nul, $\{a\}$ est une base de A et $a^2 = 0$. De plus A est une algèbre à zéro multiplication. Si $dim(A) = 2$, alors soit A est une algèbre à zéro multiplication, soit il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $\{a, a^2\}$ soit une base de A avec $a^3 = a^2a^2 = 0$. Si $dim(A) = 3$ et si A est nil d'indice 4, alors il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $\{a, a^2, a^3\}$ soit une base de A. Cependant si le nilindice de A est 3, alors on obtient une famille d'algèbres $\mathcal{A}(\beta)$ ayant pour base $\{a, a^2, b\}$ telle que $b^2 = \beta a^2$. Notons que $\mathcal{A}(\beta)$ est isomorphe à $\mathcal{A}(\beta')$ si et seulement s'il existe $\gamma \in K^*$ tel que $\beta' = \gamma^2\beta$. Une classification est donnée dans [27].

Lemme 3.3.1 (Gerstenhaber-Myung). *Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives et de dimension 4 sur un corps de K de caractéristique $\neq 2$. Si le nilindice de A est égal à 3, alors A est associative et $A^3 = 0$. Si le nilindice de A est égal à 4, alors $A^4 = 0$ et il existe $x \notin A^2$ tel que $xA^2 = 0$.*

Une description des nilalgèbres commutatives à puissances associatives de dimension 5 et de nilindice 4 a été donnée par Correa et Suazo [10] dans le cas où les algèbres considérées sont de Jordan, et une autre fut donnée par Elgueta et Suazo dans le cas où les algèbres considérées ne sont pas de Jordan [13]. Toutefois, nous résumons ces deux résultats à travers la proposition suivante :

Proposition 3.3.2. *Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension 5 et de nilindice 4, sur un corps K de caractéristique $\neq 2$ et 3. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $dim(A^3) = 3$,

(ii) A n'est pas de Jordan,

(iii) A n'est pas nilpotente.

Si une nilagèbre commutative A à puissances associatives de dimension 5 et de nilindice 4 satisfait l'une des conditions, alors elle est isomorphe à l'algèbre de Suttles.

Si $dim(A^3) = 2$ et $dim(A^2) = 3$, alors $\exists a, b, c \in A \setminus \{0\}$ tels que $\{c, b, a, a^2, a^3\}$ soit une base de A où $c^2 \in < b, a^2, a^3 >$, $ca^2 = b$, et tous les autres produits sont nuls.

Si $dim(A^3) = 1$ et $dim(A^2) = 2$, alors A_a^2 est un idéal de A et $\{c, b, a, a^2, a^3\}$ est une base de A telle que $c^2 \in < b, a^2, a^3 >$; $cb, ca^2 \in < a^3 >$; $ca \in < b >$ et tous les autres produits sont nuls.

Notons que pour tout $a \in A$, A_a est la sous-algèbre de A engendrée par a.

Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives et de dimension finie n, sur un corps K de caractéristique $\neq 2, 3$ et 5. L'algèbre A étant à puissances associatives, alors les identités suivantes sont vérifiées :

$$x^4 = x^2x^2, \; x^2x^3 = x(x^2x^2) \text{ et } x^3x^3 = (x^2)^3.$$

La linéarisation des deux dernières égalités nous donne respectivement les équations suivantes :

$$x^4y = 2x^3(xy) + x^2(x^2y) + 2x^2(x(xy)) - 4x(x^2(xy)),$$
$$x^3(x^2y) + 2x^3(x(xy)) = 2x^2(x^2(xy)) + x^4(xy).$$

Ces deux dernières égalités permettent d'établir les résultats suivants, pour tous $a, b \in A$ [21] :

(F.1) Si $ba \in A_a$, alors :

$$ba^3 = -a(ba^2) + 2a^2(ba) \, ; \; ba^4 = a^2(ba^2) \, ; \; a^3(ba^2) = a^4(ba).$$

(F.2) Si $ba, ba^2 \in A_a$, alors $bA_a \subset A_a$ et $a^{i_1}(a^{i_2}(...(a^{i_k}b))) = a^{s-1}(ba)$ pour tous entiers positifs $k, i_1, i_2, ..., i_k$ où $5 \leqslant i_1 + ... + i_k = s$.

(F.3) Si $ba = 0$ et $bA_a^3 \subset A_a$, alors $a^3(ba^2) = 0$,

$$ba^3 = -a(ba^2), \; ba^5 = -a(ba^4) = 2a^2(ba^3),$$
$$ba^6 = -a(ba^5) = a^2(ba^4) = -2a^3(ba^3) = a^4(ba^2),$$

et $a^{i_1}(a^{i_2}(...(a^{i_k}b))) = 0$, pour tous entiers positifs $k, i_1, ..., i_k$ où $i_1 + ... + i_k \geqslant 7$.

Soit B une sous-algèbre de A. Pour tout élément $x \in A$ tel que $xB \subseteq B$, on définit $\overline{L}_x$ comme étant l'opérateur quotient induit par l'opérateur L_x, sur l'espace quotient A/B. Considérons maintenant les deux sous-espaces linéaires d'opérateurs nilpotents sur l'espace vectoriel A/B suivants :

$$\mathcal{N}_B = \{\overline{L}_x : x \in B\}$$

et

$$\mathcal{M}_B = \{\overline{L}_x : x \in A, xB \subseteq B\}.$$

Nous observons que $\mathcal{M}_B \subseteq \mathcal{N}_B$ et que :

$$\mathcal{N}_B = 0 \Longleftrightarrow B \text{ est un idéal de } A,$$

$$\mathcal{M}_B = 0 \Longleftrightarrow A^2 \subseteq B. \tag{3.9}$$

Le lemme suivant est une conséquence des Théorèmes 2.3.13, 2.3.14 et de l'équivalence (3.9) donnée ci-dessus :

Lemme 3.3.3. *Soit A une algèbre d'Engel sur un corps K de caractéristique 0 ou suffisamment grand. Alors $A^{[k]} \subset B$ pour toute sous-algèbre B, de codimension $k \leq 2$, dans A.*

Pour les nilalgèbres commutatives à puissances associatives, on a le résultat suivant :

Lemme 3.3.4. *Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension n et de nilindice $\geq n-2$, sur un corps K de caractéristique 0 ou suffisamment grand. Soit a un élément de A à nilindice maximal. Alors $A^{[m]} \subset A_a^2$, où m est la codimension de A_a^2 dans A. En particulier, A est résoluble.*

Preuve. Les cas où $m = 1$ et $m = 2$ ont été démontrés dans [10] et [12] respectivement. Soit $m = 3$. Du Lemme 2 et de la preuve du Théorème 1 de [17], on peut conclure qu'il existe un élément non nul $v + A_a \in A/A_a$ dans le noyaux de toute application $f \in \mathcal{M}_{A_a}$. Puisque $\overline{L}_v \in \mathcal{M}_{A_a}$, alors $B = A_a + Kv$ est une sous-algèbre de A de dimension et de nilindice $n-2$. Du Lemme 3.3.3, on tire que $A^{[2]} \subset B$. Donc $A^{[3]} \subset B^2 \subset A_a^2$. En particulier, si $a = 0$, on a $A_0^2 = 0$. Donc $A^{[3]} = 0$. □

Maintenant, établissons une nouvelle et courte preuve du résultat de Correa et Suazo.

Lemme 3.3.5. *Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension et de nilindice n, sur un corps K de caractéristique 0 ou suffisamment grand. Alors A est nilpotente d'indice n.*

Preuve. Soit a un élément de A de nilindice maximal. Du Lemme 3.3.4, on a $A^2 = A^{[2]} \subset A_a^2$ (on y prend $m = 2$). En combinant cette relation avec (F. 1) et (F. 2), on obtient $a^k A \subseteq A_a^k$, $\forall k \geq 2$. Cela signifie que $\forall k \geq 2$, A_a^k est un idéal de A puisque $a^k A \subseteq A_a^k$ implique que $A_a^k A \subseteq A_a^k$, pour tout entier $k \geq 2$. En particulier, A_a^3 est un idéal de A. Considérons l'opérateur quotient $\overline{L}_{a^2}$ sur A/A_a^3 induit par l'opérateur L_{a^2}, et défini par :

$$\overline{L}_{a^2} : A/A_a^3 \longrightarrow A/A_a^3,\ \overline{x} \longmapsto \overline{a^2 x}.$$

Du Théorème 1.5.2, l'opérateur L_{a^2} est nilpotent donc l'opérateur $\overline{L}_{a^2}$ est aussi nilpotent. Par ailleurs, on a $Im(\overline{L}_{a^2}) \subset K(\overline{a^2})$ (où $\overline{a^2} = a^2 + A_a^3$), car pour tout $y \in A$ on a

$\overline{L}_{a^2}(\overline{y}) = \overline{a^2y}$. Puisque $a^2y \in a^2A \subseteq A_a^2$, alors $\overline{L}_{a^2}(\overline{y}) \in K(\overline{a^2})$. Etant donné que $\overline{L}_{a^2}$ est nilpotent et que $Im(\overline{L}_{a^2}) \subset K(\overline{a^2})$, alors $\overline{L}_{a^2} = 0$. Ainsi pour tout $y \in A$, on a $\overline{L}_{a^2}(\overline{y}) = \overline{a^2y} = \overline{0}$. Donc $a^2y \in A_a^3$. Ce qui implique que $a^2A \subset A_a^3$. En combinant cette relation avec (F. 1) et (F. 2), on obtient $a^kA \subset A_a^{k+1}$ pour tout entier positif $k \geq 2$. Montrons maintenant, par récurrence, la relation $A^k = A_a^k$, $k \geq 2$. Pour $k = 2$, le résultat est obtenu en remplaçant m par 2 dans le Lemme 3.3.4. On obtient $A^2 = A^{[2]} \subseteq A_a^2$. Par ailleurs, on a naturellement $A_a^2 \subseteq A^2$. D'où $A^2 = A_a^2$. L'assertion est vraie pour $k = 2$, supposons qu'elle est vraie pour tout $i \in \{2; ...; k-1\}$ et montrons qu'elle est vraie pour $i = k$. On a $A^k = \sum_{i=1}^{k-1} A^iA^{k-i} = AA^{k-1} + \sum_{i=2}^{k-2} A^iA^{k-i} + A^{k-1}A = AA^{k-1} + \sum_{i=2}^{k-2} A^iA^{k-i}$. Selon l'hypothèse de récurrence, $A^{k-1} = A_a^{k-1}$. D'où $A^k = AA_a^{k-1} + \sum_{i=2}^{k-2} A^iA^{k-i}$. Sachant que pour tout $i \in \{2; ...; k-2\}$, $A^i = A_a^i$ et que $A^{k-i} = A_a^{k-i}$ car $k - i \in \{2; ...; k-2\}$, alors on a :

$$A^k = AA_a^{k-1} + \sum_{i=2}^{k-2} A_a^iA_a^{k-i}.$$

Puisque $A_a^iA_a^{k-i} = A_a^k$, alors on obtient que $A^k = AA_a^{k-1} + A_a^k$. Par ailleurs, on a $a^{k-1}A \subset A_a^k$, alors $A_a^{k-1}A \subset A_a^k$. D'où $A_a^{k-1}A = A_a^k$. Donc $A^k = A_a^k$. Finalement, on note que $A_a^{n-1} = Ka^{n-1} \neq 0$ et $A_a^n = Ka^n = 0$. D'où $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Par conséquent, A est nilpotent d'indice n. □

Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension et de nilindice n. On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des couples (a, b) avec $a, b \in A$, tels que $\{b, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$ soit une base de A avec :

$$ba \in Ka^2,\ ba^{n-2} = 0 \text{ et } a^{n-1} \in Ann(A).$$

Il a été démontré dans [21] que $\mathcal{P}(A)$ est un ensemble non vide.

Théorème 3.3.6. *Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension et de nilindice n, sur un corps K de caractéristique 0 ou suffisamment grand. Soit $(a, b) \in \mathcal{P}(A)$. Alors $\{b, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$ est une base de A et il existe des scalaires $\alpha, \beta, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ tels que :*

si $n = 3$, alors $b^2 = \beta a^2$, $ba = 0$;
si $n = 4$, alors $b^2 = \alpha a^2 + \beta a^3$, $ba = \lambda a^2$;
si $n = 5$, alors $b^2 = \alpha a^3 + \beta a^4$, $ba = \lambda a^2$, $ba^2 = 2\lambda a^3 + \lambda_1 a^4$;
si $n = 6$, alors

$$b^2 = \alpha a^4 + \beta a^5,\ ba = \lambda a^2,\ ba^2 = \lambda_1 a^4 + \lambda_2 a^5,\ ba^3 = 2\lambda a^4 - \lambda_1 a^5 ;$$

si $n = 7$, alors $ba = 0$ et

$$\begin{aligned} b^2 &= \delta_{7n}\lambda^2 a^{n-3} + \alpha a^{n-2} + \beta a^{n-1}, \\ ba^2 &= \lambda a^{n-3} + \lambda_1 a^{n-2} + \lambda_2 a^{n-1}, \\ ba^3 &= -\lambda a^{n-2} - \lambda_1 a^{n-1}, \\ ba^4 &= \lambda a^{n-1}, \\ ba^k &= 0, \end{aligned}$$

ici, δ_{ij} désigne le symbole de Kroneker. De plus, l'algèbre A est de Jordan si et seulement si $n \leq 4$ ou $n \geq 5$ et $ba = ba^3 = 0$.

Réciproquement, toute algèbre commutative définie comme ci-dessus est une nilalgèbre à puissances associatives de dimension et de nilindice n.

Du Théorème 3.3.6, on déduit le résultat suivant.

Proposition 3.3.7. *Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de nilindice et de dimension $n \geq 5$, sur un corps K. Soit $(a, b) \in \mathcal{P}(A)$ et $x = \xi b + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i a^i \in A$.*

Pour $n = 5$ ou 6, on a que x a un nilindice maximal si et seulement si $\xi_1(\xi_1 + 2\lambda\xi) \neq 0$.

Pour $n \geq 7$, l'élément x a un nilindice maximal si et seulement si $\xi_1 \neq 0$.

Dans [13], Elgueta et Suazo font une description des nilalgèbres de dimension n et de nilindice $n - 1 \geq 4$ en insistant particulièrement sur les propriétés suivantes :

$$n - 3 \leq dim(A^2) \leq n - 2,$$

et

$$n - 4 \leq dim(A^3) \leq n - 3.$$

Dans [20], on a également une description des nilalgèbres commutatives à puissances associatives de dimension $n \geq 6$ et de nilindice $n - 1$, sur un corps K de caractéristique 0 ou suffisamment grand. Ces résultats sont basés sur le théorème suivant.

Théorème 3.3.8 ([20]). *Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de nilindice $n-1$ et de dimension $n \geq 5$, sur un corps K de caractéristique 0 ou suffisamment grand. Alors $dim(A^2) \geq n - 3$.*

Si $dim(A^2) = n - 3$, alors A^2 est une algèbre associative et il existe $a \in A$ tel que $A^k = A_a^k$, pour tout $k \geq 2$.

Si $dim(A^2) \geq n - 2$, alors il existe $a, b, c \in A$ tels que :

(1) a est de nilindice maximal,

(2) $\{c, b, a, a^2, ..., a^{n-2}\}$ est une base de A,

(3) la dimension et le nilindice de la sous-algèbre B de A engendrée par a et b est $n - 1$,

(4) $(a, b) \in \mathcal{P}(A)$,

(5) $ca \in Kb \oplus Ka$.

On termine ce paragraphe en énonçant le théorème suivant, qui est un résultat de Fernandez et *al.* [20].

Théorème 3.3.9. *Soit A une nilalgèbre commutative à puissances associatives de nilindice $n-1$ et de dimension $n \geq 4$, sur un corps K de caractéristique 0 ou suffisamment grand. Alors, A est isomorphe à l'algèbre de Suttles ou est nilpotente d'indice $n-1$. Dans le cas où A est nilpotente et $a \in A$ a un nilindice maximal, alors $A^k = A_a^k$, pour tout $k \geq 4$.*

Nous pensons que l'ensemble de ces résultats nous permettrons d'approfondir, de façon significative, nos connaissances sur la structure des nilalgèbres commutatives à puissances associatives.

Conclusion et perspectives

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à l'étude des nilalgèbres commutatives de dimension finie et du problème classique d'Albert. Le problème d'Albert est une question posée par Albert qui consiste à savoir si toute nilalgèbre commutative à puissances associatives de dimension finie est résoluble.

L'étude de résultats déjà établis, ayant trait à ce problème, nous a permis d'approfondir nos connaissances sur certaines propriétés des nilalgèbres commutatives de dimension finie à puissances associatives. En effet, nous retenons que sur un corps de caractéristique $\neq 2$, toute nilalgèbre de Jordan de nilindice borné est localement nilpotente. Ce qui a permis d'établir que toute nilalgèbre commutative de nilindice 3, sur un corps de caractéristique $\neq 2$, est localement nilpotente. Nous retenons également que toute nilalgèbre de nilindice 4 qui est commutative à puissances associatives de dimension ≤ 10, sur un corps de caractéristique différente de 2 et 3, est résoluble. En ce qui concerne les nilalgèbres commutatives à puissances associatives de dimension n et de nilindice $\geq n-2$, nous retenons que sur un corps de caractéristique 0 ou suffisamment grand, toute nilalgèbre de cette classe est résoluble, et si l'algèbre considérée est de dimension et de nilindice n, alors elle est nilpotente d'indice de nilpotence n.

De cette étude, on remarque qu'il n'y a pas toujours de précision sur l'indice de résolubilité ou de nilpotence des nilalgèbres considérées dans les cas où celles-ci sont résolubles ou nilpotentes. A titre d'exemples, on peut citer le cas des nilalgèbres A commutatives à puissances associatives de nilindice 4 et de dimension 6 vérifiant $A^{[3]} \neq 0$, et des nilalgèbres commutatives de dimension finie de nilindice 3 définies sur un corps de caractéristique différente de 2, qui sont par ailleurs nilpotentes. Comme perspective de recherche, nous comptons nous intéresser à l'étude de l'indice de nilpotence de chacune de ces types d'algèbres.

Bibliographie

[1] Albert A. A. : On the power-associativity on ring. *Summa Bras. Math.* **2**, 21-33 (1948).

[2] Albert A. A. : Power-associative ring. *Trans. Am. Math.* **64**, 552-593 (1948).

[3] Albert A. A. : A theory of power-associative commutative algebras. *Trans. Am. Math. Soc.* **69**, 503-527 (1950).

[4] Brualdi, R. A., Chavey, K. L. : Linear spaces of Toeplitz and nilpotent matrices. *J. Comb. Theory Ser. A* **63** (1), 65-78 (1993).

[5] Causa, A., Re, R., Teodorescu, T. : Some remarks on linear spaces of nilpotent matrices. *Matematiche (Catania)* **53**, 23-32 (1998).

[6] Correa, I., Hentzel, I. R. : Commutative finitely generated algebras satisfying $x(x(xy)) = 0$ are solvable. *Rocky Mt. J. Math.* **39** (3), 757-764 (2009).

[7] Correa, I., Hentzel, I. R, Labra, A. : Nilpotency of commutative finitely generated algebras satisfying $L_x^3 + \gamma L_{x^3} = 0, \gamma = 0, 1$. *J. Algebra* **330**, 48-59 (2011).

[8] Correa, I., Hentzel, I. R., Peresi, L. A. : On the solvability of the commutative power-associative nilalgebras of dimension 6. *linear Algebra Appl.* **369**, 185-192 (2003).

[9] Correa, I., Suazo, A. : On the solvability of the five dimensional commutative power-associative nilalgebras. *Results Math.* **39** (1-2), 23-27 (2001).

[10] Correa, I., Suazo, A. : On class of commutative power-associative nilalgebras. *J. Algebra* **215** (2), 412-417 (1999).

[11] Dorofeev, G. V. : An instance of solvable, though nonnilpotent, alternative ring. *Uspekhi Mat. Nauk* **15** (3), 147-150 (1960).

[12] Elgueta, L., Fernandez, J. C. G., Suazo, A. : Nilpotence of a class of commutative power associative nilalgebras. *J. Algebra* **291** (2), 492-504 (2005).

[13] Elgueta, L., Suazo, A. : Jordan nilalgebras of nilindex N and dimension N+1. *Commun. Algebra* **30**, 5547-5561 (2002).

[14] Elgueta, L., Suazo, A. : Solvability of commutative power-associative nilalgebras of nilinde 4 and dimension. *Proyecciones* **23** (2), 123-129 (2004).

[15] Elgueta, L., Suazo, A. : On the solvability of commutative power-associative nilalgebras of nilindex 4. *Rev. Colomb. Mat.* **44** (2), 119-128 (2010).

[16] Fasoli, M. A. : Classification of nilpotent linear spaces in $\mathcal{M}(4,\mathbb{C})$. *Commun. Algebra* **25** (6), 1919-1932 (1997).

[17] Fernandez, J. C. G. : On commutative power-associative nilalgebras. *Commun. Algebra* **32** (6), 2243-2250 (2004).

[18] Fernandez, J. C. G. : Commutative finite-dimension algebras satisfying $x(x(xy)) = 0$ are nilpotent. *Commun. Algebra* **37** (10), 3760-3776 (2009).

[19] Fernandez, J. C. G. : On commutative nilalgebras of low dimension. *Algebra Discrete Math.* **9** (1), 16-30 (2010).

[20] Fernandez, J. C. G., Garcia, C. I, Matinez, J. I., Montoya, M. L. R. : On power-associative nilalgebras of dimension n and nilindex $n-1$. *Commun. Algebra* **42** (10), 4481-4497 (2014).

[21] Fernandez, J. C. G., Garcia, C. I., Montoya, M. L. R. : On power-associative nilalgebras of nilindex and dimension n. *Rev. Colomb. Mat.* **47** (1), 1-11 (2013).

[22] Fernandez, J. C. G., Garcia, C. I., Montoya, M. L. R., Murakami, L. S. I. : Commutative power-associative algebras of nilindex four. *Commun. Algebra* **39** (9), 3151-3165 (2011).

[23] Gerstenhaber, M. : On nilalgebra and linear varieties of nilpotent matrices I. *Am. J. math.* **80**, 614-622 (1958).

[24] Gerstenhaber, M. : On nilalgebra and linear varieties of nilpotent matrices II. *Duke Math. J.* **27**, 21-31 (1960).

[25] Gerstenhaber, M. : On nilalgebra and linear varieties of nilpotent matrices III. *Ann. Math.* **70**, 167-205 (1959).

[26] Gerstenhaber, M. : On nilalgebra and linear varieties of nilpotent matrices IV. *Ann. Math.* **75**, 382-418 (1962).

[27] Gerstenhaber, M., Myung, M. C. : On commutative power-associative nilalgebras of low dimension. *Proc. Am. Math. Soc.* **48**, 29-32 (1975).

[28] Hentzel, I. R., Jacobs, D., Peresi, L. A., Sverchkov, S. : Solvability of the ideal of all weight zero elements in Bernstein algebras. *Commun. Algebra* **22** (9), 3265-3275 (1994).

[29] Jacobson, N. : Lie Algebras. *Interscience publishers, New York* (1962).

[30] Kokoris, L. A. : Simple power-associative algebras of degree two. *Ann. Math.* **64**, 544-550 (1956).

[31] Kuzmin, E. N. : Anticommutative algebras satisfying Engel's condition. *Sibersk. Mat. Z.* **8**, 1026-1034 (1967).

[32] MacDonald, G. W., MacDougall, J. A., Sweet, L. G. : On dimension of linear spaces of nilpotent matrices. *Linear Algebra Appl.* **436** (7), 2210-2230 (2012).

[33] Mathes, B., Omladic, M., Radjavi, H. : Linear spaces of nilpotent matrices. *Linear Algebra Appl.* **149**, 215-225 (1991).

[34] Radjavi, H. : The Engel-Jacobson theorem revisited. *J. Algebra* **111** (2), 427-430 (1987).

[35] Schafer : An Introduction to Nonassociative Algebras. *Academic Press, New York/London*, 1966.

[36] Serezhkin, V. N. : Linear transformations preserving nilpotency. *Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz-Mat. Navuk* **125** (6), 46-50 (1985).

[37] Suttles, D.A. : A counterexample to a conjecture of Albert. *Not. Am. Math. Soc.* **19**, A-566 (1972).

[38] Zelmanov, E. I., Skosyrskii, V. G. : Special Jordan nilalgebras of bounded index. *Algebra i Logika* **22** (6), 626-635 (1983).

[39] Zelmanov, E. I. : Jordan nilalgebras of bounded index. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **249** (1), 30-33 (1979).

[40] Zhevlakov, K. A., Slin'ko, A. M., Shestakov, I. P., Shirshov, A. I. : Rings that are Nearly Associative. *Academic Press, New York* (1982).