

**REPUBLIQUE DU SENEGAL**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP

**ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES**

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

GC.0172

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur de conception**

**TITRE : ETUDE PARAMETRIQUE DES TOITURES EN GEOBETON  
EN FORME DE COUPOLE**

**AUTEUR : Oumar Boun Khatap NDIAYE**

**DIRECTEUR : Moustapha NDIAYE**

**DIRECTEUR EXTERNE : Saïd DIAW**

**DATE : JUILLET 1992**

## REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères et vifs remerciements à mon directeur Mr MOUSTAPHA N'DIAYE professeur à l'école Polytechnique de Thiés pour son encadrement technique et scientifique.

Je remercie également mon co-directeur Mr SAID DIAW agent à la B.H.S pour sa disponibilité et ses conseils pratiques.

Mes remerciements vont également à Mr Babacar Sarr professeur à l'E.P.T pour sa collaboration, aux élèves Ingénieurs Alioune Niang, Wiliame Preira, Babacar fall et à tout ceux qui de près où de loin ont contribué au bon déroulement de ce projet.

## **SOMMAIRE**

Le présent projet consiste essentiellement à étudier le comportement des couvertures en géobéton en forme de coupole. Il s'agit notamment de la coupole sphérique et de la coupole sphérique avec pendentif. Différents cas de figures sont considérés suivant l'importance de la flèche ou le type de fondation.

Des généralités sur la latérite, la présentation des coques et de la méthode des éléments finis font également partie de l'ossature du projet; lequel projet est terminé par des propositions et recommandations.

## TABLE DES MATIERES

Remerciements.....	iii
Sommaire.....	iv
Tables des matières.....	v
Liste des figures et tableaux .....	vi
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I: GENERALITES SUR LES LATERITES .....</b>	<b>3</b>
1) Définition et historique.....	3
2) Disponibilité au Sénégal.....	4
3) Techniques de construction.....	4
<b>Chapitre II: PRESENTATION DES COQUES .....</b>	<b>6</b>
1) Structure à résistance de forme.....	7
2) Surfaces de révolution et de translation....	8
<b>Chapitre III: PRESENTATION DE LA</b>	
<b>METHODE DES ELEMENTS FINIS.....</b>	<b>10</b>
1) type d'éléments.....	11
2) Procédure de calcul par éléments finis....	11
<b>Chapitre IV: ETUDE DE LA COUVERTURE .....</b>	<b>14</b>
1) Optimisation.....	14
2) Analyse structurale.....	17
<b>Chapitre V: RECOMMANDATIONS ET CONCLUSION .....</b>	<b>30</b>
Bibliographie.....	70

## LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX

- figure 3.1: Type d'éléments finis
- figure 4.1: Contraintes dans les coupoles sphériques et elliptiques
- figure 4.2: Élément coque
- figure 4.3: Élément de coque rendu libre
- figure 4.4: Convention de signe des contraintes
- figure 4.5a: Calotte sphérique
- figure 4.5b et c: Idéalisation de la coupole sphérique
- figure 4.6: Déplacement  $D_x$  de la coupole sphérique
- figure 4.7: Déplacement  $D_y$  \_\_\_\_\_
- figure 4.8: Déplacement  $D_z$  \_\_\_\_\_
- figure 4.9 : Contrainte  $\sigma_x$  \_\_\_\_\_
- figure 4.10: Contrainte  $\sigma_y$  \_\_\_\_\_
- figure 4.11: Coupole avec pendentif
- figure 4.12-13-14: Idéalisation du quart de la coupole
- figure 4.15: Déplacement  $D_x$  de la coupole avec pendentif
- figure 4.16: Déplacement  $D_z$  \_\_\_\_\_
- figure 4.17: Contrainte  $\sigma_x$  \_\_\_\_\_
- figure 4.18: Contrainte  $\sigma_y$  \_\_\_\_\_
- tableau 4.1: Coordonnées des points définissant la géométrie
- tableau 4.2: Constantes de raideur K

## INTRODUCTION

Depuis très longtemps la terre a été utilisée comme matériau de construction, on en retrouve des traces dans presque tous les pays. Dans nos sociétés actuelles les structures économiques ont engendré un type de production industrielle, qui n'a pas permis aux techniques traditionnelles de survivre. La construction en terre a donc été abandonnée ne pouvant s'intégrer dans cette structure économique et les contraintes de son mode de production. Cependant l'expérience acquise au cours de ces dernières années a montré les avantages offerts par l'utilisation des matériaux à base de TERRE dans la production de logements économiques, dans les pays en voie de développement.

Suivant le type de structure, certains matériaux "modernes" (béton armé, acier, matériaux synthétiques etc...) sont de plus en plus utilisés. Mais les résultats de recherche sur les matériaux "modernes" ont du mal à être mis en oeuvre, parce qu'on oublie souvent que ce sont les éléments économiques qui déterminent les choix technologiques et non l'inverse. L'erreur serait de croire que le fait de trouver des solutions scientifiques et techniques est la clé du problème.

Un matériau de construction n'a d'intérêt que si les moyens

financiers de la population à laquelle il est destiné permettent son utilisation. Dans le cas des pays du Tiers Monde, lorsqu'on fait intervenir les facteurs économiques, l'utilisation du béton armé, de l'acier peut s'avérer trop onéreuse pour la grande majorité de la population.

Il devient alors réaliste, voire nécessaire, de recommander l'utilisation de la construction en TERRE pour permettre l'essor du logement social en Afrique en particulier.

Toujours dans la recherche de solutions efficaces aux douloureux problèmes de logement, l'Ecole Polytechnique de Thiés, à travers notre étude se propose de faire l'analyse structurale de différents types de géométrie de toiture en géobéton pour aboutir éventuellement à un choix.

**1°)- Définition et historique:**

Il y a un peu plus d'un siècle et demi que le terme "latérite" a fait son apparition dans la littérature scientifique. La latérite provient de l'altération des roches. Les principaux facteurs de l'altération sont:

- \_ la température,
- \_ les précipitations,
- \_ la végétation,
- \_ la nature de la roche mère,
- \_ la topographie et le drainage.

Les latérites sont surtout localisées entre le 35° Nord et le 35° Sud. Pour les besoins de l'ingénieur civil, la définition suivante peut être adoptée:

latérite = tous sols résiduels rougeâtre et tous sols non résiduels ayant subis le processus d'altération tropicale.

L'utilisation de la latérite comme matériau de construction est une pratique très ancienne. Le terme "latérite" ne dérive t-il pas du latin "later" qui signifie "brique"?

L'on comprend dès lors les nombreuses recherches effectuées, ces dernières années, par plusieurs organismes et institutions dont l'Ecole Polytechnique de Thiés.



## **2°)- Disponibilité au Sénégal:**

Le Sénégal dispose d'un sol ferrugineux en grande proportion dans différentes régions (Sénégal Oriental, région du Fleuve, région de Thiés). cette latérite se présente généralement sous deux couleurs:

- l'une rouge, c'est la plus abondante
- l'autre jaunâtre.

## **3)- Techniques de constructions:**

La terre a été depuis très longtemps le matériau principal de l'habitat et surtout celui Africain. Les techniques de construction sont aussi variées que leur culture. Les procédés les plus connus et les plus répandus sont:

- l'adobe, qui utilise des blocs de terre non compactés et séchés au soleil.
- les blocs compressés, où l'on compacte la terre pour former des blocs.
- le pisé, où la terre est compactée dans un coffrage mobile.
- le façonnage direct : qui consiste à façonner directement la terre.
- les techniques mixtes, combinant la terre avec un autre matériau (fibre végétale ou bois).

Les toitures sont généralement en forme de voûtes ou de coupoles sphériques. Les voûtes sont réalisées à l'aide d'un gabarit

glissant couvert d'une mince couche d'enduit et d'un produit de décoffrage

alors que les coupoles se confectionnent souvent sans coffrages mais avec des pendentifs.

Les coques constituent des éléments structuraux porteurs d'une grande efficacité. Une coque correctement appuyée porte les charges par action membrane à l'exception de zones étroites adjacentes aux discontinuités de géométrie ou de chargement telle que les bordures, les ouvertures, les variations brusques d'épaisseur ou de plan tangent, les charges concentrées qui travaillent aussi en flexion. Ce comportement se traduit par un rapport de charge utile sur charge morte beaucoup plus favorable que dans le cas des éléments porteurs travaillants en flexion. Les coques comme les arcs sont donc particulièrement appropriés pour porter des charges sur de grandes portées, quand le poids propre devient une fraction prépondérante du chargement total.

Malgré leurs avantages structuraux, les coques représentent une faible fraction de l'ensemble de la construction. Deux obstacles semblent être à l'origine:

- un obstacle économique dû à l'utilisation d'une quantité considérable de coffrages et d'échafaudages et qui peut être éliminé actuellement par l'emploi de coffrages glissants;
- le manque de méthodes simples d'analyse, la seule méthode précise disponible ayant été la résolution des équations différentielles.

Cet obstacle est maintenant surmonté par l'utilisation de la méthode des éléments finis.

### **1)-Structures à résistance de forme:**

Si nous observons une feuille de papier tenue en main, alors nous remarquerons qu'elle retombe mollement et ne peut supporter son propre poids parce que son épaisseur infime ne fournit pas un bras de levier suffisant aux contraintes de flexion. Cette même feuille, si nous la pinçons en l'incurvant légèrement vers le haut est alors capable de supporter son propre poids et même une certaine surcharge. Cette nouvelle capacité portante est obtenue non en augmentant la quantité de matériau utilisée, mais en lui donnant une forme appropriée. La courbure vers le haut augmente la rigidité et la capacité portante de la feuille en porte-à-faux parce qu'elle éloigne de l'axe neutre une certaine quantité de matériau, de telle sorte que la rigidité en flexion de la feuille considérée comme une poutre, est notablement augmentée. Le même résultat est obtenu en plissant la feuille de papier, c'est-à-dire en lui donnant des brusques changements de pente.

On appelle structure à résistance de forme des structures dont la résistance est obtenue en donnant aux matériaux une forme adaptée aux charges qu'elles doivent supporter. Les membranes appartiennent à la catégorie des structures à résistance de forme travaillant purement en traction. Une membrane retournée sens dessus dessous et portant des charges pour lesquelles elle aurait été initialement façonnée serait une structure à résistance de forme travaillant uniquement en compression, c'est-à-dire la

structure antifuniculaire à deux dimensions pour ces charges. Leur mobilité et leur inaptitude à résister à des contraintes de compression limitent l'emploi des membranes. Les coques permettent d'éviter tous les inconvénients de l'effet de membranes tout en conservant la plupart de ses avantages. Les coques minces sont des structures de résistance de forme suffisamment minces pour ne pas développer de contraintes de flexion appréciables, mais cependant assez épaisses pour transmettre les charges par compression, traction et cisaillement. Les coques minces permettent de construire économiquement des couvertures courbes de formes variées et d'une exceptionnelle résistance. Les coques minces, tout comme les membranes doivent leur efficacité aux courbures et à la torsion.

Pour comprendre leur action structurale, il faut tout d'abord se familiariser avec leurs caractéristiques géométriques. Nous nous intéresserons particulièrement aux surfaces de révolution et de translation.

## **2)-Surfaces de révolution et de translation:**

Les surfaces de révolution sont engendrées par la rotation d'une courbe plane autour d'un axe vertical. La courbe plane, ou courbe méridienne peut avoir des contours variés donnant ainsi naissance à tout un éventail de formes de coupes convenant bien à la couverture d'une surface circulaire. Les sections verticales d'une coque de révolution sont appelées les méridiens, et ses

coupes horizontales qui toutes sont des cercles sont les parallèles, le parallèle le plus grand est appelé équateur.

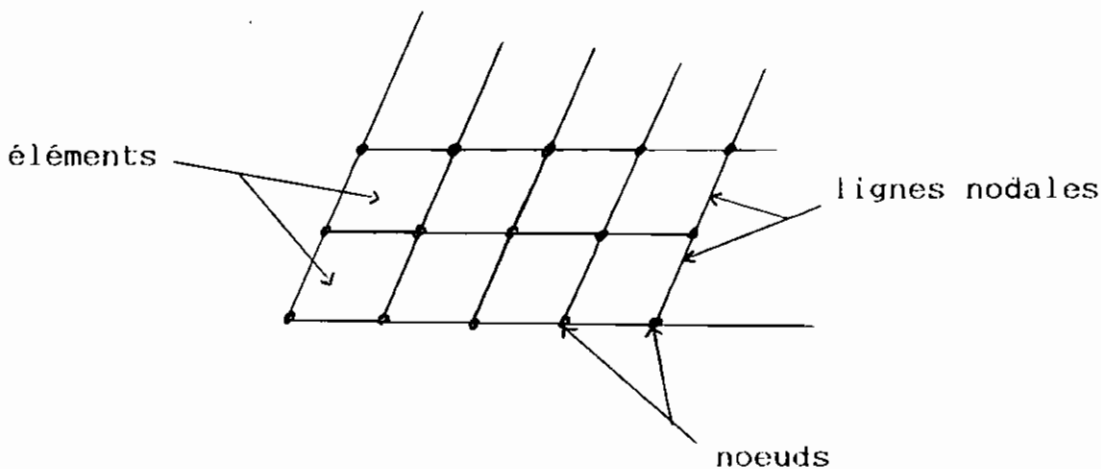
Les surfaces de translation s'obtiennent quant à elles en faisant glisser, tout en la maintenant verticale, une courbe plane sur une autre qui lui est généralement perpendiculaire. Nous citerons par exemple le cylindre, la parabolöide elliptique, la parabolöide hyperbolique.

ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis proposée initialement par TURNER, CHOUGH, MARTIN et TOPP en 1956, s'est révélée un outil puissant pour analyser les problèmes de la mécanique des milieux continus.

La première application de celle-ci a été dans le domaine de l'élasticité plane linéaire. Actuellement, son application est élargie pour résoudre des problèmes non linéaire tenant compte aussi bien du comportement élasto-plastique que du fluage des matériaux que de la non-linéarité de la géométrie de la structure.

C'est une méthode d'analyse numérique, flexible et diversifiée. Le principe de base de la méthode des éléments finis consiste à subdiviser un milieu continu en éléments interreliés par des lignes nodales et les coins des éléments deviennent alors des noeuds.



La littérature sur cette méthode est abondante et spécialisée.

Dans le domaine des structures, la méthode des éléments finis permet de tenir compte de façon plus précise des propriétés des matériaux et de la géométrie de la structure. Elle permet aussi de déterminer les répartitions des contraintes et des déformations en milieux continus où le nombre de liaisons entre "un élément fini" isolé par les frontières arbitraires, et les éléments voisins est infini c'est d'ailleurs là où réside à première vue la plus grande difficulté pour trouver une solution acceptable.

### **1) Type d'éléments:**

Les éléments les plus couramment utilisés dans la pratique sont illustrés au niveau de la figure 3.1.

De nombreuses applications donnent un aperçu sur la manière dont ces éléments sont utilisés, l'envergure et la complexité des problèmes d'analyse qu'ils peuvent rendre solubles. Dans notre étude suivant la géométrie ou la surface à couvrir (circulaire ou carrée) nous opterons pour un de ces éléments précités.

### **2) Procédure d'un calcul par éléments finis:**

Le calcul par éléments finis comprend trois étapes:

-\* idéalisation et discrétisation de la structure:

C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle mathématique de calcul représentant au mieux la structure réelle; elles portent sur les deux aspects principaux du problème pratique: la topologie (géométrie et charges) et la rhéologie (le matériau).



**-\* Evaluation des propriétés des éléments:**

Puisque l'assemblage des éléments doit reconstituer la structure réelle toute entière et son comportement, il convient de prendre certaines précautions dans le choix des propriétés de l'élément fini telles que la compatibilité des déplacements ou l'équilibre des forces tout le long des frontières et les fonctions décrivant les champs de déplacement.

**-\* Résolution de la structure discrétisée:**

La méthode de résolution employée dans notre cas est celle des déplacements; elle découle du principe de variations des déplacements. Les opérations principales de l'analyse par la méthode du déplacement sont les suivantes:

a)- Déterminer la matrice de rigidité de chaque élément dans un système d'axe local c'est-à-dire propre à l'élément.

b)- Transformer, au besoin, la matrice de rigidité du système local au système global relatif à la structure complète.

c)- Superposer les matrices individuelles pour obtenir, par assemblage la matrice de rigidité de la structure complète:  $[K]$

d)- Résoudre l'équation  $\{F\} - [K]\{\delta\} = \{0\}$  où  $\{F\}$ ,  $\{\delta\}$  désignent respectivement les forces et les déplacements aux noeuds.

e)- à partir des solutions trouvées  $\{\delta\}$ , calculer les contraintes aux points désirés.

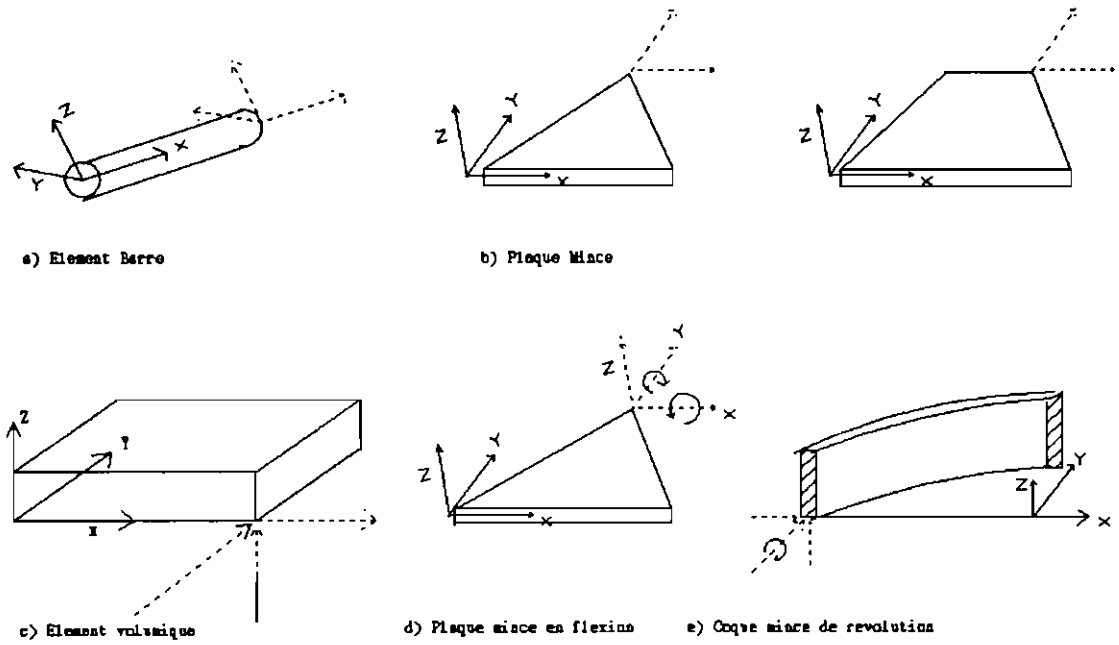


Figure 3.1: type d'éléments finis

La couverture occupe, avec la maçonnerie, une place primordiale dans le bâtiment. Cette importance est concrétisée par l'expression courante qui met sur le même plan "le clos et le couvert".

Pour qu'une couverture assure, dans de bonnes conditions, le rôle qui lui est dévolu, il faut qu'elle soit conçue et réalisée suivant une technique parfaitement définie. Cette technique varie avec le matériau employé; elle est fruit, dans la plupart des cas, d'une longue expérience d'où ont découlé les "règles de l'art" en dehors desquelles une bonne exécution ne peut se concevoir.

Le choix d'un matériau de couverture doit être guidé par le but à atteindre en se plaçant du point de vue de l'esthétique, de la technique, de l'économie et du client.

#### **I)- Optimisation:**

L'optimisation consiste à chercher la solution la meilleure évaluée selon certains critères. Nous nous posons souvent la question à savoir est-il possible de satisfaire à toutes ces conditions et d'obtenir pour un bâtiment donné la meilleure structure?

La réponse à cette question varie selon qu'il s'agit de l'utilisateur, du propriétaire, de la main d'oeuvre, du fournisseur ou de l'ingénieur.

De plus dans cette recherche de la meilleure structure, le

premier obstacle est celui des habitudes qui pèse souvent lourdement sur les choix initiaux bien que la répétition soit parfois à la base d'une amélioration de la productivité. Encore faudrait-il bien choisir le domaine dans lequel doit s'appliquer cette répétition pour ne pas tomber dans la routine et manquer l'occasion d'une recherche intéressante de perfectionnement.

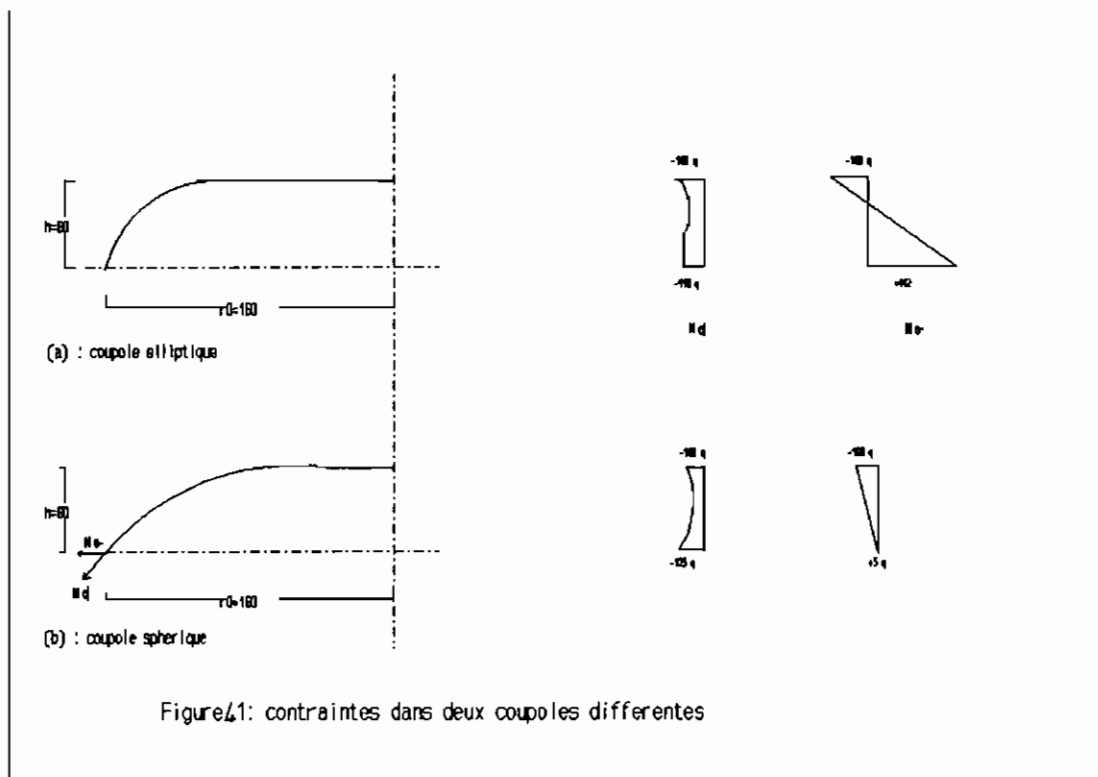
Nous pouvons établir des critères généraux pour la meilleure couverture en envisageant un éventail de formes et de matériau et en comparant éventuellement les prix de revient. Mais il devient très vite évident que le grand nombre de facteurs qui interviennent, même dans le plus simple problème de ce genre, fait qu'il est pratiquement impossible d'établir pour ces facteurs, les valeurs conduisant à une solution optimale. Ainsi nous avons fixé un certain nombre de paramètres tels que le matériau de construction et les formes géométriques à étudier en tenant compte du fait que la construction doit être la plus économique possible et la réalisation la plus simple possible pour être à la portée de la population. Le matériau de construction choisi, le géobéton, fait certes la promotion des matériaux locaux mais présente une résistance à la traction très faible; il doit donc être emmené à travailler au maximum en compression; la compression étant l'état de contrainte dans lequel les particules d'un matériau tendent à se rapprocher les unes des autres. La forme géométrique de la couverture doit aller dans le sens de minimiser les contraintes de

traction dans la structure et tenir compte des moyens dont disposent les techniciens de la place pour la réalisation. Avec toutes ces indications et la littérature aidant, nous avons ciblé certaines formes géométriques dépendamment de la forme de la surface à couvrir. Il s'agit des formes sphérique, elliptique pour les surfaces circulaires et des formes sphérique avec pendentifs, sphérique avec surface de raccordement avec les murs pour les surfaces carrées.

Nous nous posons ainsi une question d'intérêt courant à savoir la détermination du système de couverture le plus léger avec des contraintes de traction négligeables; la traction étant l'état de contrainte dans lequel les particules du matériau ont tendance à s'écarter les unes des autres.

Nous pouvons réduire d'avantage le nombre de géométrie à étudier en nous basant sur des analyses déjà faites parmi lesquelles celle de l'influence de la géométrie de la coupole sur les contraintes résultant de la théorie des membranes (figure 4.1).

L'observation des diagrammes de contraintes dans les deux coupoles (figure 4.1) nous emmène à préférer la coupole sphérique de la coupole elliptique du fait de la faiblesse des contraintes de traction que nous cherchons à minimiser. Pour la surface circulaire, nous n'analyserons donc que la coupole sphérique et déterminerons l'influence de la variation de la flèche sur les contraintes à la base.



## II)- Analyse Structurale

### 1)-Choix des éléments:

l'idéalisation dont nous avons parlée dans le processus de calcul des éléments finis est une étape nécessaire dans le calcul des ouvrages de génie civil de toute nature. En effet le désir de vouloir représenter de la meilleure manière possible le jeu des forces qui interviennent dans les parois de notre structure nous emmène à l'idéalisation par solides continus à deux dimensions; ce sont des surfaces porteuses qui se divisent en deux catégories: les surfaces porteuses horizontales ou plaques, et les surfaces porteuses courbes ou coques.

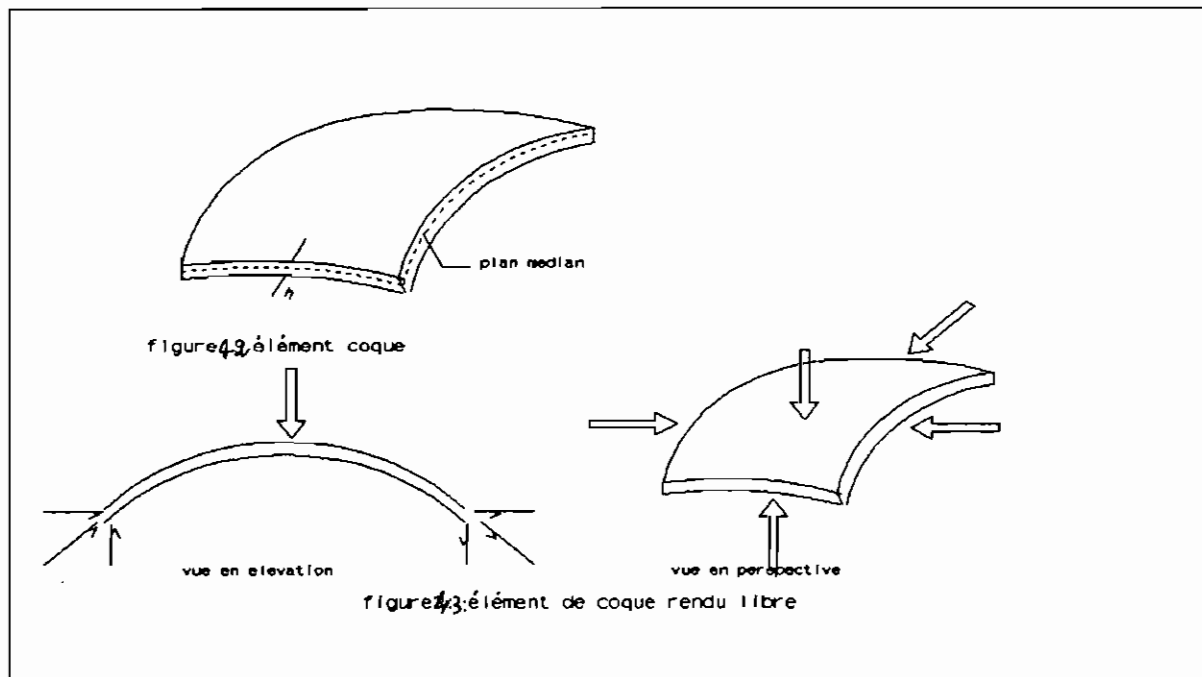
Une coque est limitée par deux surfaces courbes, ses parois;

leur écart  $h$  épaisseur de la membrane est variable, mais reste faible par rapport aux autres dimensions; la surface située entre les deux parois et qui partage en deux l'épaisseur de la coque, est appelée surface médiane; une coque est géométriquement décrite par sa surface médiane et son épaisseur (voir figure 4.2). La courbure de la surface est continue.

De cette définition des coques, on peut dire aussi qu'une coque est une structure qui peut être obtenue à partir d'une plaque mince, en transformant le plan moyen en une surface à simple ou double courbure; il s'en suit que les hypothèses de distribution des contraintes et des déformations sont valables pour les coques; en effet alors que les plaques travaillent essentiellement en flexion, les coques de par leur courbure transmettent également des efforts dans leur plan : effet membrane (figure 4.3); les résultantes agissant parallèlement au plan moyen de la coque ont des composantes normales à la surface et supportant de ce fait la plus grande partie de la charge; ce fait explique que ce type de structure soit économique.

Dans la notation des éléments finis, les difficultés inhérentes au traitement des coques (établissement des équations de comportement) sont éliminées en faisant l'approximation de nature plus physique que mathématique qui consiste à supposer que le comportement d'une surface à courbure continue peut être convenablement représenté par le comportement d'une surface formée

de petits éléments plats. Nous constatons que l'approximation est d'autant meilleure que la taille des éléments décroît. Nous traiterons donc des éléments plats subissant non seulement de la flexion mais également des forces dans leur plans.



## 2)- Présentation du logiciel utilisé:

Nous devons signaler que l'analyse structurale de toutes les formes géométriques est faite à l'aide d'un logiciel appelé IMAGES 3D

### a) - Bref aperçu sur IMAGE 3D

IMAGES 3D est un programme d'analyse par éléments finis des



structures à trois dimensions à l'aide de l'IBM PC/XT/AT/PS2 ou des micro ordinateurs compatibles. Il nous permet de faire trois types d'analyse:

- Analyse statique dans laquelle une large variété de charges statiques peut être définie (concentrée, distribuée, pression, température, gravité, inertie). Les contraintes et déplacements sont déterminés en fonction des charges appliquées.

- Analyse Modale qui permet de calculer beaucoup de paramètres tels que la fréquence, le poids modal. En plus, elle localise le centre de gravité de la structure.

- Analyse Dynamique qui renseigne sur le comportement de la structure soumise soit à une charge variable en fonction du temps ou à un chargement du au séisme.

Beaucoup de problèmes d'ingénierie peuvent être analysés plus économiquement sur micro ordinateurs que par les méthodes conventionnelles.

IMAGES 3D apparaît comme un outil idéal pour les analyses du design particulièrement celles nécessitant des itérations.

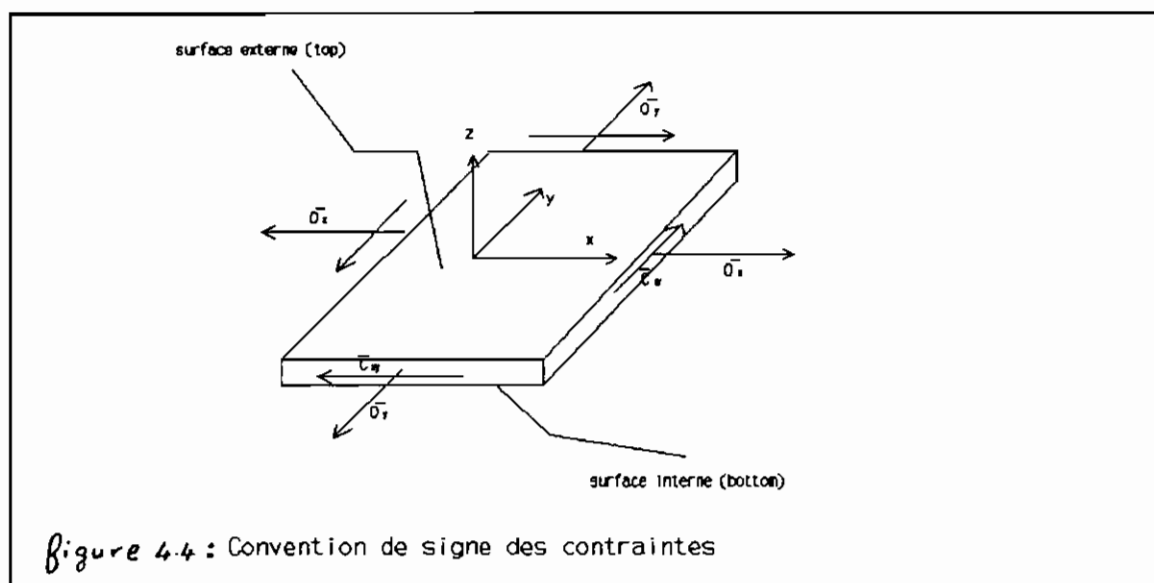
L'accès au programme se fait à travers un menu dont les modules sont les suivants: Définition de la géométrie, Analyse statique, Analyse Modal et l'analyse Dynamique.

Images 3D a l'avantage d'accepter tous les systèmes d'unités. Cependant il faut préciser que la presque totalité des valeurs par défaut sont exprimées en unité anglaise (inches, pounds et seconds)

IL nous offre aussi la possibilité de faire une combinaison des différents modules du menu, par exemple l'analyse statique et l'analyse dynamique.

**-b)-Convention de signe:**

La convention de signes des éléments plaques que nous utilisons pour l'analyse est la suivante:



Les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont données dans le repère local de l'élément plaque.

Rappelons que dans le domaine de l'élasticité plane, les contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  sont données par :

$$\sigma_1 \text{ (max)} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2^2} + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 \text{ (min)} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{Angle} = \frac{90}{\pi} \text{tg}^{-1} \left[ \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)^2} \right]$$

### 3) - Propriétés des matériaux utilisés:

L'essentiel des propriétés du Géobéton a été tiré dans les projets de fin d'études précédents.

#### - Géobéton:

Module d'élasticité:	E = 4,751 MPa
Densité	$\rho = 21,18 \text{ e-6 N/mm}^3$
Résistance à la traction	Rt = 0.15 MPa
Résistance à la compression	Ra = 1.65 MPa
Coefficient de poisson	V = 0.25

#### - Béton:

Module d'élasticité:	E = 27386 Mpa
Densité	$\rho = 1.1 \text{ e-5 N/mm}^3$
Résistance à la traction	Rt = 2.75 Mpa
Résistance à la compression	Rc = 25 Mpa
Coefficient de poisson	V = 0.18

4) - Analyse de la coupole sphérique:

La coupole sphérique est élevée sur un plan circulaire. Sa surface est obtenue par la rotation d'un arc de cercle autour d'un axe vertical.

A) - Calcul des sollicitations:

\*-Poids propre de la coupole

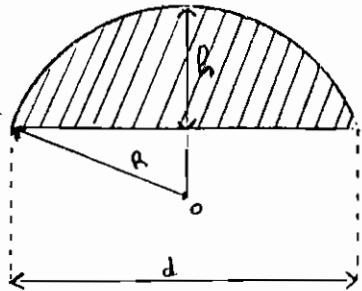


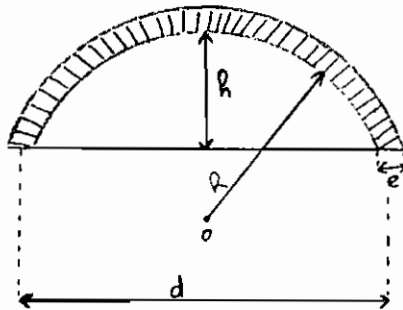
figure 4.5a: calotte spherique

Le volume d'une calotte sphérique est donné par:

$$V = \pi h^2 (3R - h) / 3 \quad (1)$$

et la distance d est donnée par

$$d = 2 \sqrt{h(2R - h)} \quad (2)$$



Soit V le volume de la coupole

$$V = \pi (h+e)^2 [3(R+e) - (h+e)] / 3 - \pi h^2 (3R - h) / 3 \quad (3)$$

Soit P le poids propre de la coupole alors,

$$P = \gamma V \quad (4)$$

## B)- Applications numériques

Nous allons considérer que la surface à couvrir ou simplement la distance  $d$  (voir figure 4.5) est constante et nous faisons varier la profondeur  $h$  de la coupole.

Au regard des dimensions habituelles d'une chambre et de la hauteur fonctionnelle d'une toiture en forme de coupole, une surface circulaire de diamètre  $d=4m$  et l'analyse des cas où la flèche  $h$  serait égale à 2, 1, 0.7m nous semble acceptable.

### 1er essai :

La coupole est constituée par une demi-sphère de rayon  $R=2m$  la flèche  $h$  est égale au rayon  $R$

#### a) Idéalisation et discrétisation:

- Nous constatons que la structure est symétrique; nous n'étudierons alors que le quart de la structure

- Les éléments finis utilisés sont des plaques en flexion rectangulaires et triangulaires au sommet (figure 4.5b et c)

- Nous considérons aussi que la structure n'est sollicitée que par son poids propre  $P$ . L'équation (4) donne:

$$P= 21.18 [ \pi(2+0.07)^2 (3*(2+0.070)-(2+0.07))/3 -\pi 2^2 (3*2-2)/3 ]$$

$$P= 38.5612 \text{ KN}$$

Le poids du quart de la structure sera donc :

$$P_1= P/4= 9.64 \text{ KN}$$

- La coupole est simplement appuyée à la base sur les murs

===== I M A G E S - 3 D =====  
= Copyright (c) 1984 Celestial Software Inc. =  
=====

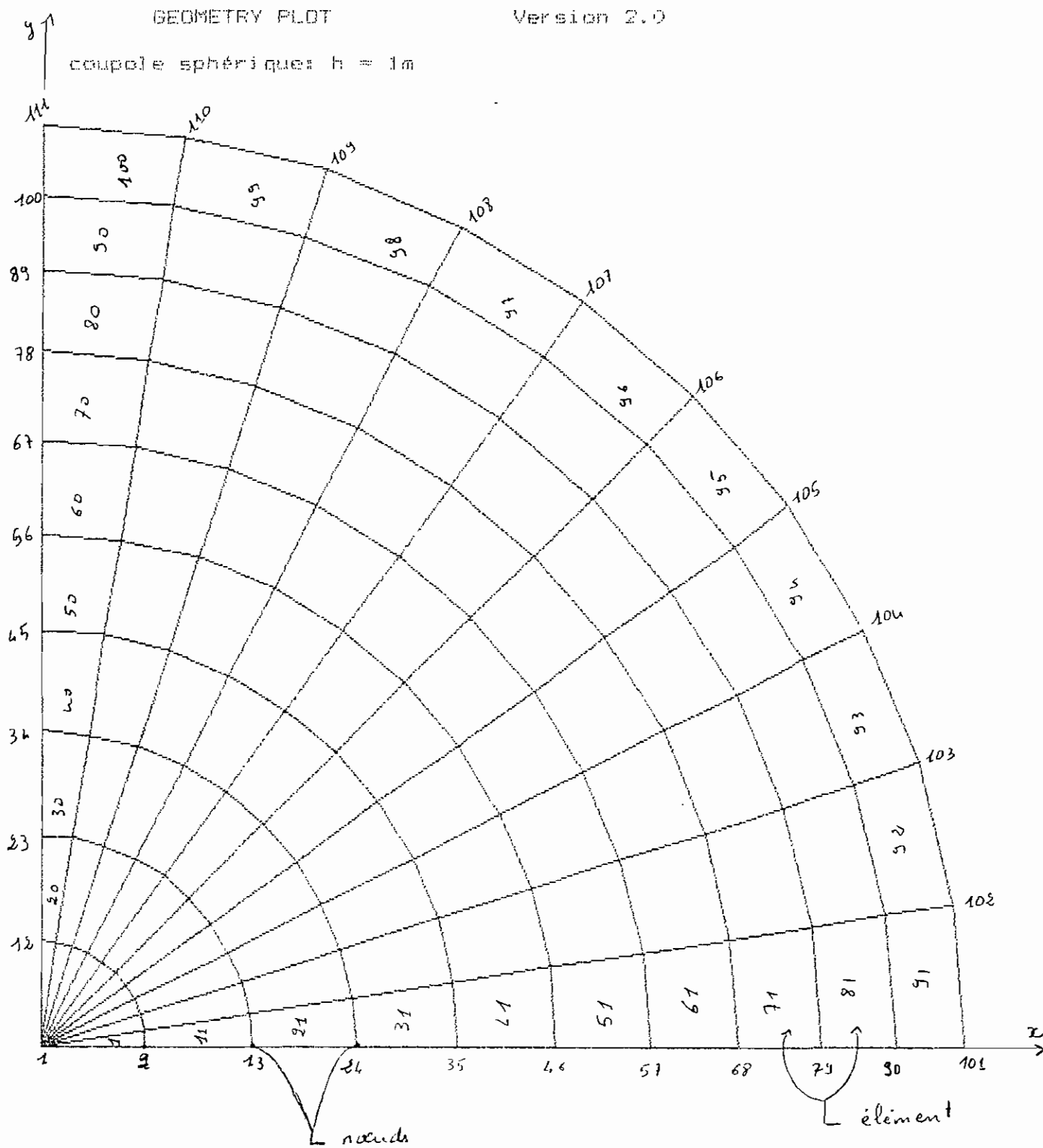


figure 4.5b: idéalisation de la toiture sphérique: vue en plan

===== I M A G E S - 3 D =====  
= Copyright (c) 1984 Celestial Software Inc. =  
=====

GEOMETRY PLOT

Version 2.0

couple sphérique: h = 1m

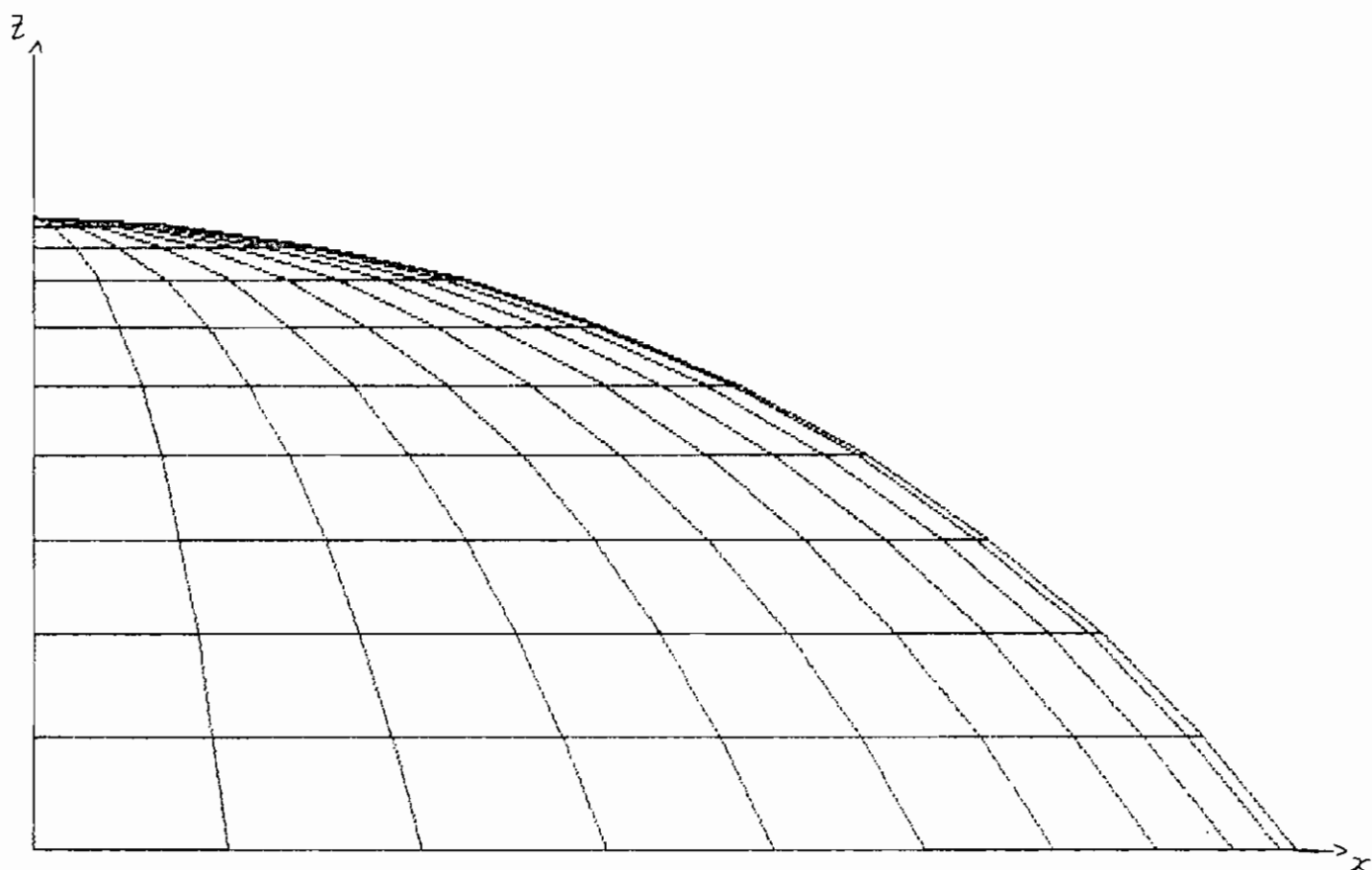


figure 4.5c: idealisation de la coupole sphérique: vue de cote

porteurs.

**b) Résolution de la structure:**

Dans le souci d'une meilleure interprétation, la presque totalité des résultats est présentée sous forme de graphiques. C'est ainsi que la variation des contraintes et déplacements dans la structure est représentée en fonction de la côte z (figure 4.6 à 4.10)

**2ème essai:**

$$d = 4\text{m} \quad h = 1\text{m}$$

L'équation (2) donne:

$$R = \frac{1}{2}(d^2/4h + h)$$

$$R = \frac{1}{2}(4/4*1 + 1) = 2.5\text{m}$$

Les hypothèses posées lors du premier essai ( $h = R = 2\text{m}$ ) restent valables sauf que le poids propre de la structure devient plus faible

$$P = \gamma V$$

$$P = 21.18 [ [\pi(1+0.07)^2 [3(2.5+0.07) - (1+0.07)] - \pi*1^2 (3*2.5-1)/3 ]$$

$$P = 24.433 \text{ KN}$$

Soit  $P_2$ , le poids du quart de la structure

$$P_2 = P/4 = 6.108 \text{ KN}$$

La variation des contraintes et des déplacements dans la structure en fonction de la côte z est illustrée par les figures 4.6 à 4.10



### 3ème essai:

$$d= 4m \quad h= 0.7m \quad R= 3.21m$$

Les hypothèses précédentes sont maintenues et le poids propre devient:

$$P= 21.18 [\pi (0.7+0.07)^2 [3(3.21+0.07) - (0.7+0.07)] - \pi * 0.7^2 (3*3.21 - 0.7)/3]$$

$$P= 22.211 \text{ KN}$$

$P_3$  , le poids du quart de la structure est donné par :

$$P_3= P/4= 5.553 \text{ KN.}$$

Les résultats sont montrés à la figure 4.6 à 4.10

### C) Interprétation:

Intuitivement, il semblerait qu'en faisant décroître la flèche d'une coupole sphérique la contrainte de traction à la base de celle-ci doit augmenter, et effectivement notre expérience montre une telle augmentation. Reste maintenant à voir, suivant la propriété du matériau que nous utilisons, jusqu' à quelle flèche nous pouvons aller sans prendre de précaution particulières à la base de la coupole.

En effet, pour une coupole sphérique chaque méridien se comporte comme s'il était l'arc funiculaire des charges appliquées c'est à dire qu'il transfère les charges sans développer des contraintes se flexions. Le premier essai, la demi-sphère ( $h=R=2m$ ) nous place dans le cas d'une coupole surhaussée; les points de sa

partie supérieure se meuvent vers l'intérieur sous l'action des charges mais ceux de sa partie inférieure se déplacent vers l'extérieure, c'est à dire, s'éloignent de l'axe. Les parallèles de la partie haute se raccourcissent tandis que ceux de la partie basse s'allongent et développent des contraintes de tractions. La faiblesse de cette traction (0.036 Mpa), en théorie tout au moins, autorise à construire la coupole avec un matériau incapable de développer des contraintes de traction comme le géobéton (0.15Mpa). Lorsque la flèche  $h$  diminue, les déplacements  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  deviennent plus grands, entraînant des contraintes de tractions plus importantes. Nous constatons ainsi, d'après les différents essais que pour des valeurs de la flèche  $h$  inférieures ou égales à  $1m$ , il faudrait penser à prendre des dispositions particulières à la base notamment en la renforçant au moyen d'un anneau rigide et en tenant compte de flexion locale introduite par ce dernier.

figure 4.6a déplacement  $DX$  en fct° de  $Z$   
flèche  $h = R = 2m$

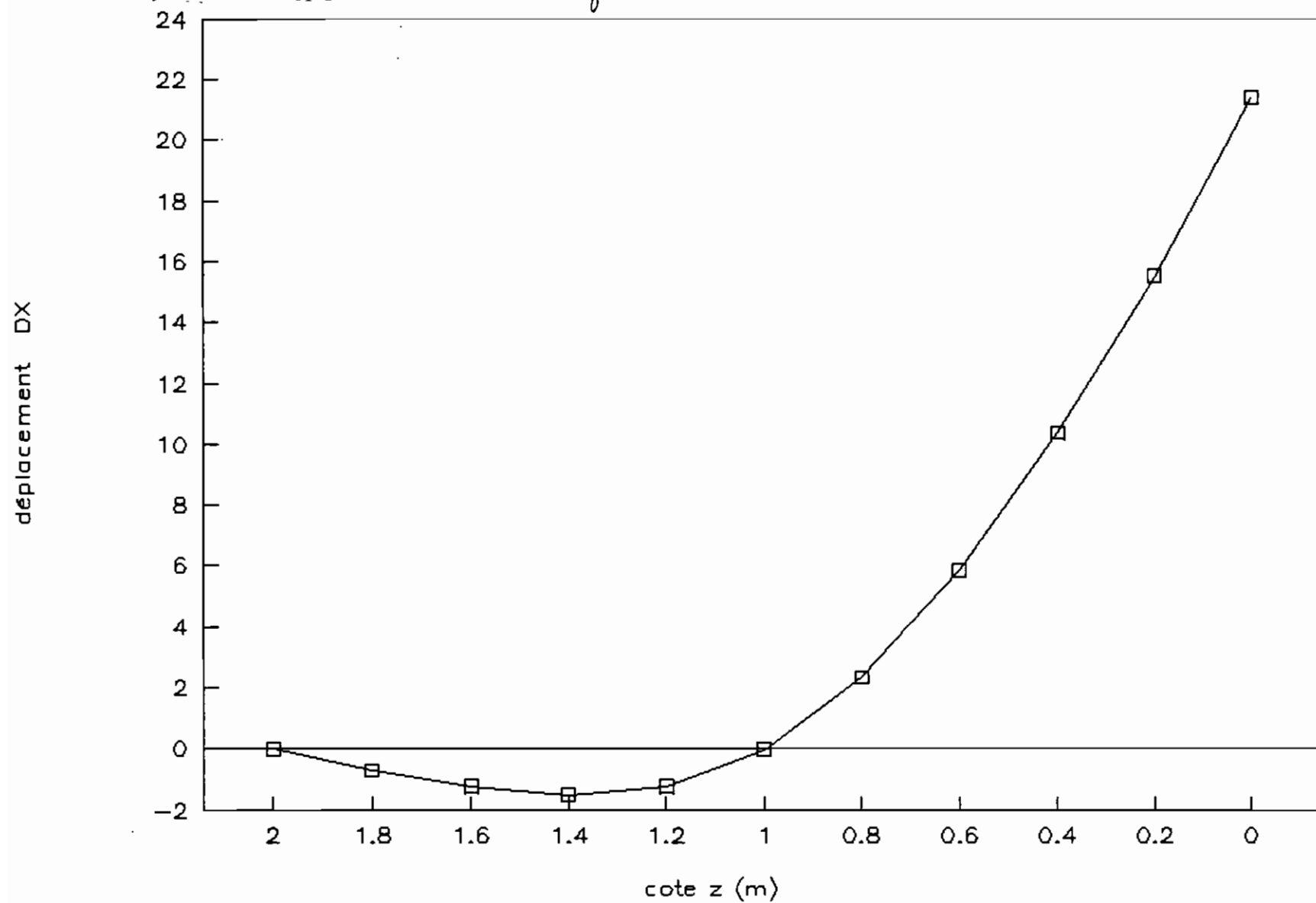


figure 4.6b *deplacement DX en fct° de Z*

la flèche  $h = 1\text{m}$

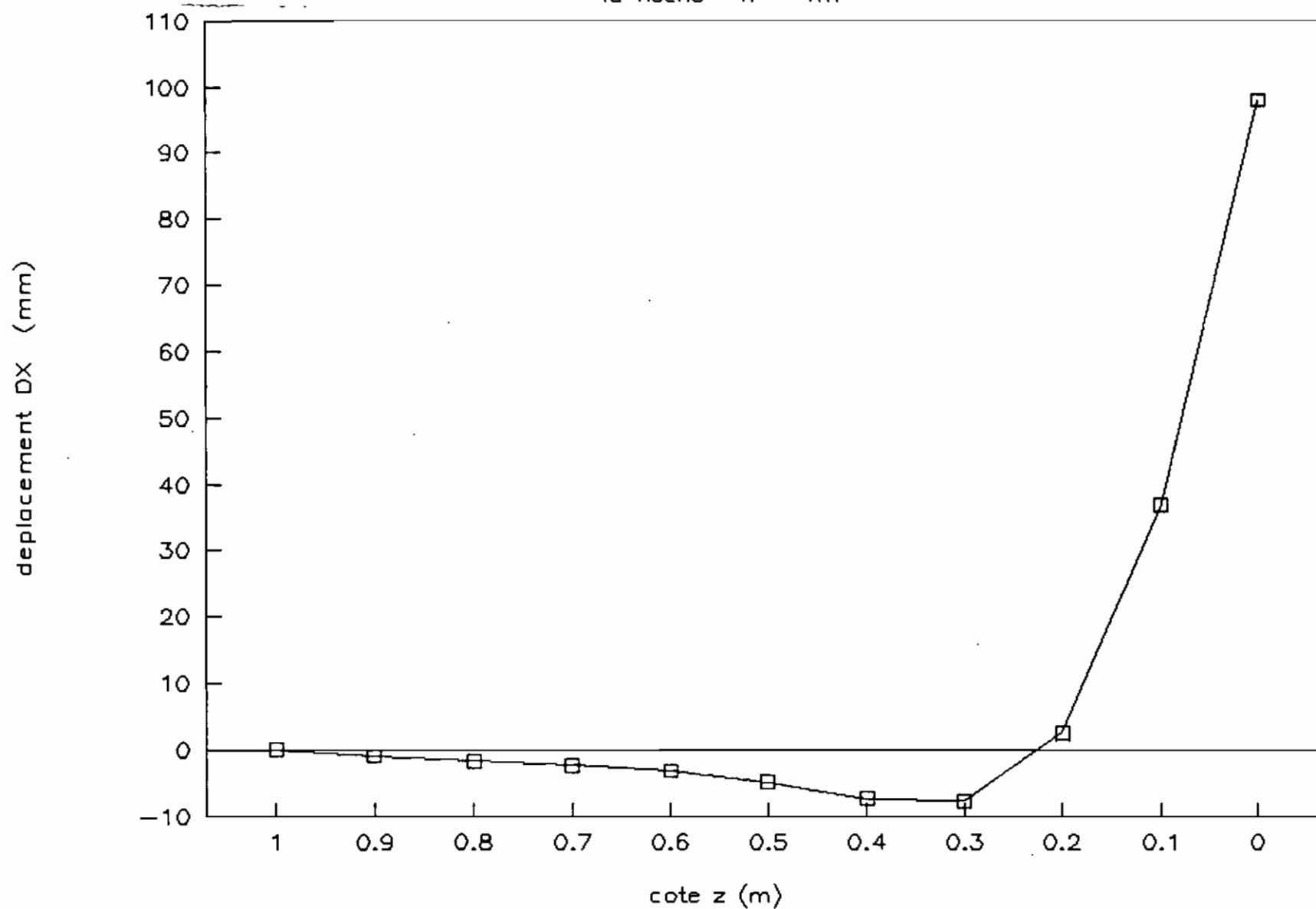


figure 4.6c *deplacement DX en fct° de Z*

la fleche  $h = 0.7m$

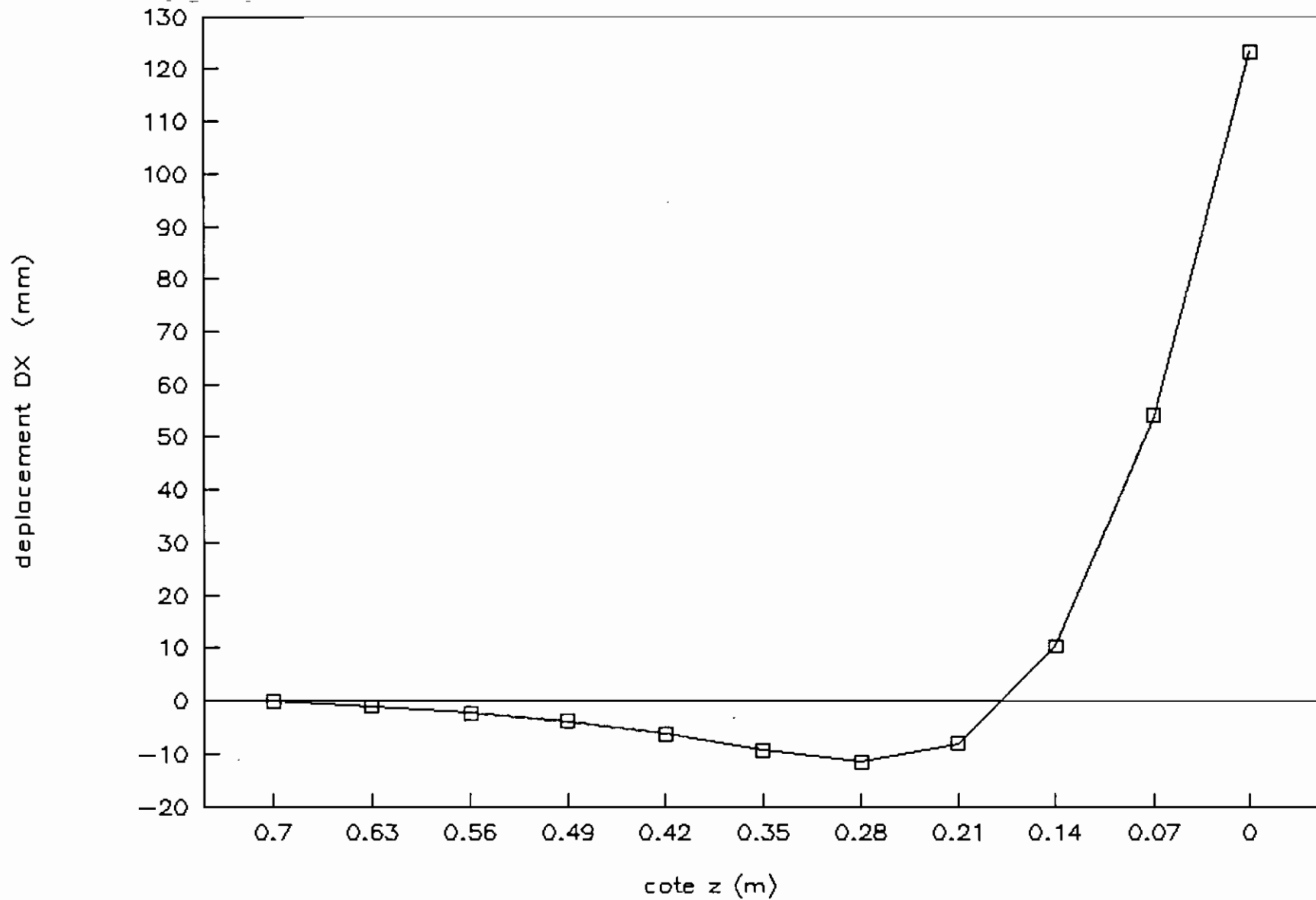


figure 4.7a déplacement  $DY$  en fct° de  $Z$   
flèche  $h = R = 2\text{ m}$

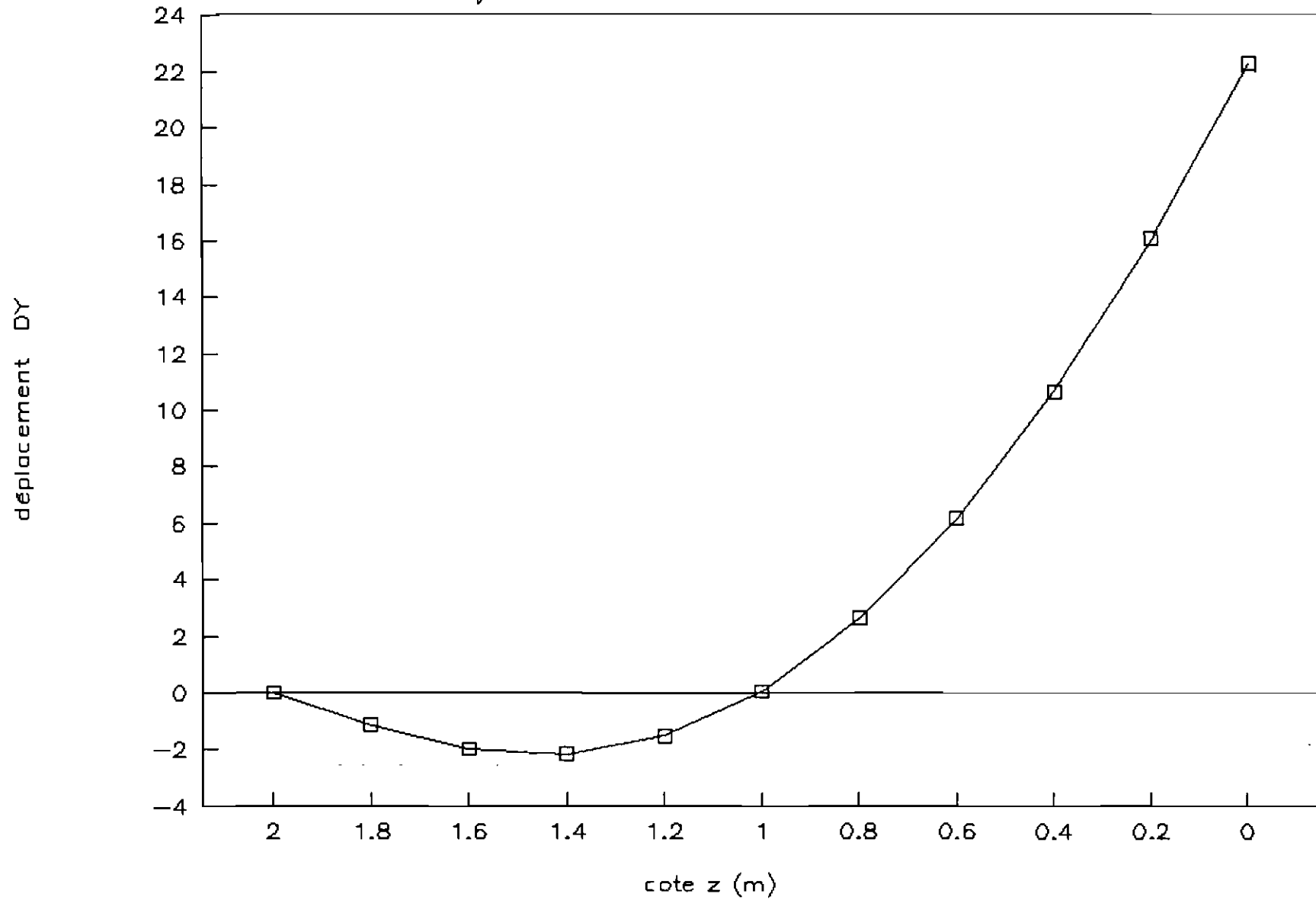


figure 4.7b *deplacement DY en fct° de Z*

la flèche  $h = 1\text{m}$

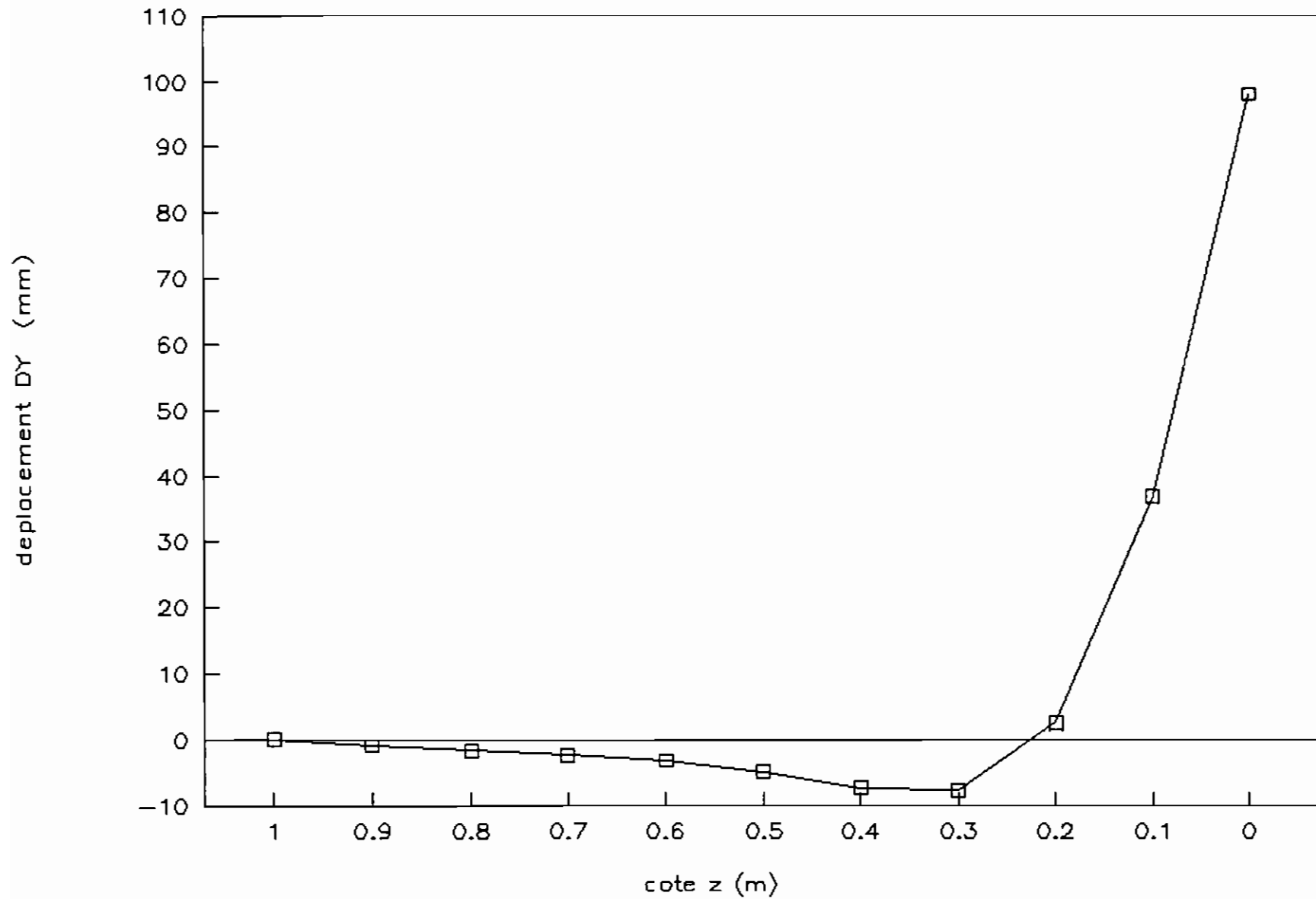


figure 4.7c *deplacement DY en fct° de Z*

la flèche  $h = 0.7m$

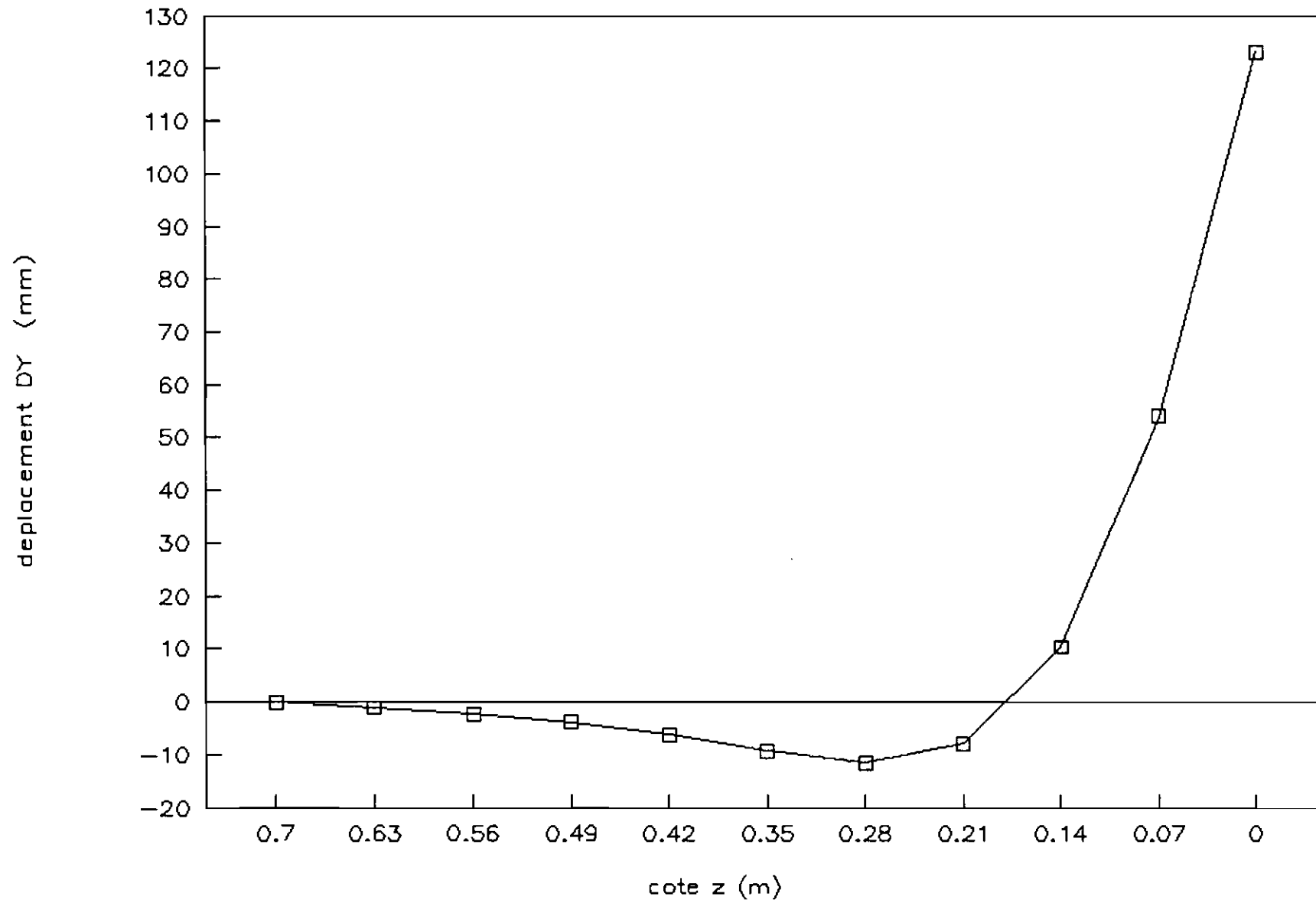




figure 4.8a déplacement  $DZ$  en fct° de  $Z$

flèche  $h = R = 2\text{ m}$

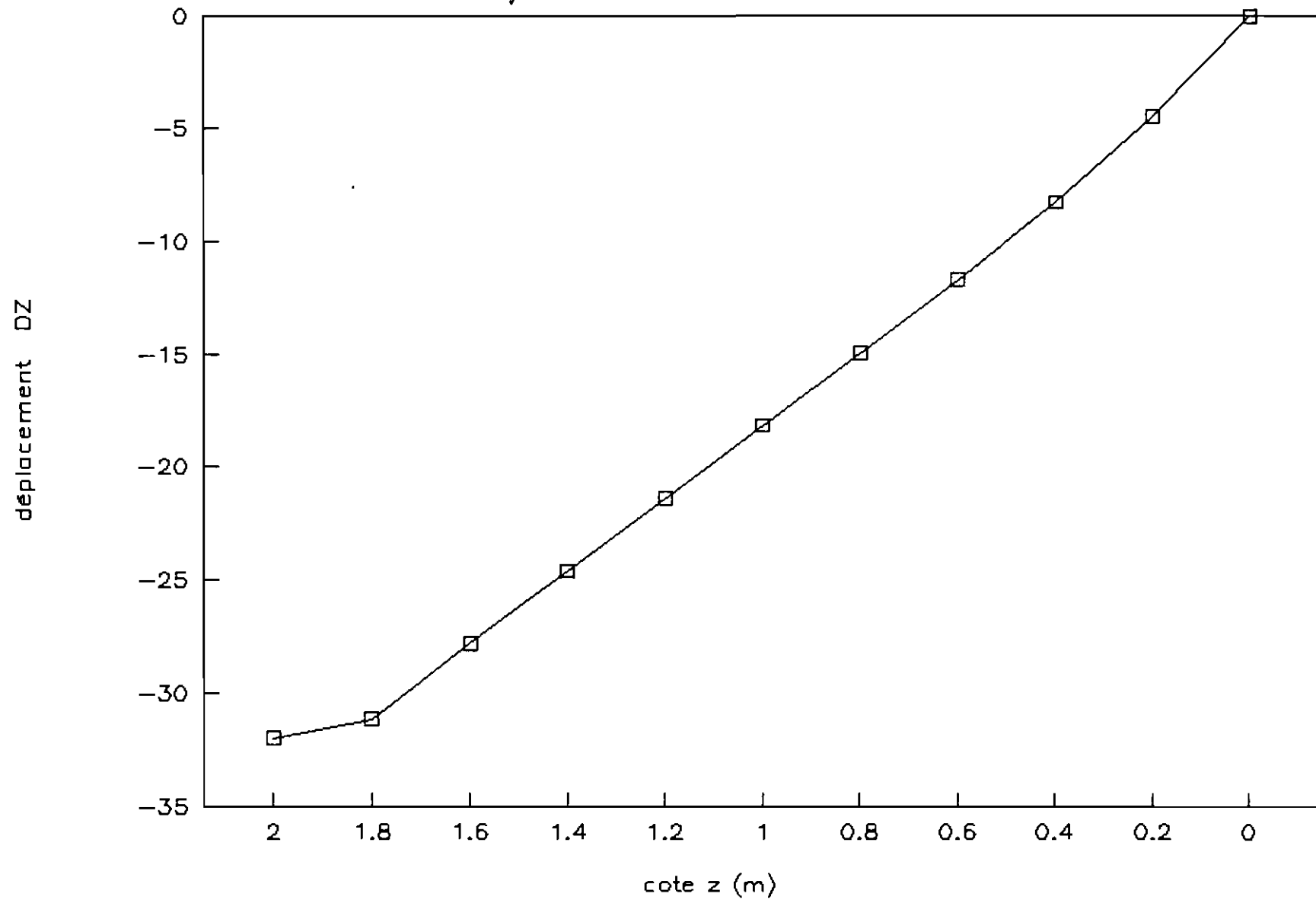


figure 4.8b *deplacement DZ en fct° de Z*

la flèche  $h = 1\text{m}$

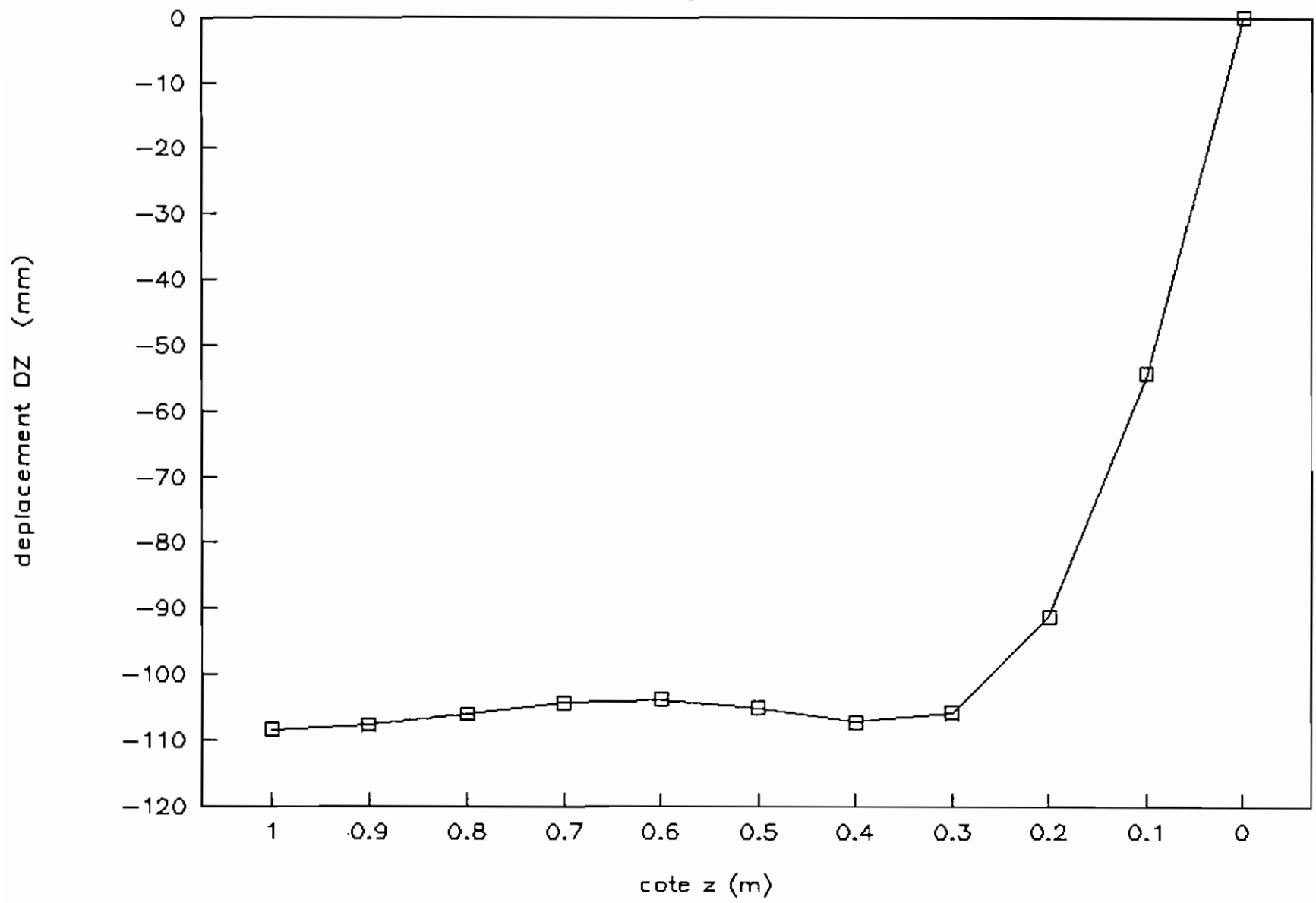


figure 4.8c *deplacement DZ en fct° de Z*

la fleche  $h = 0.7m$

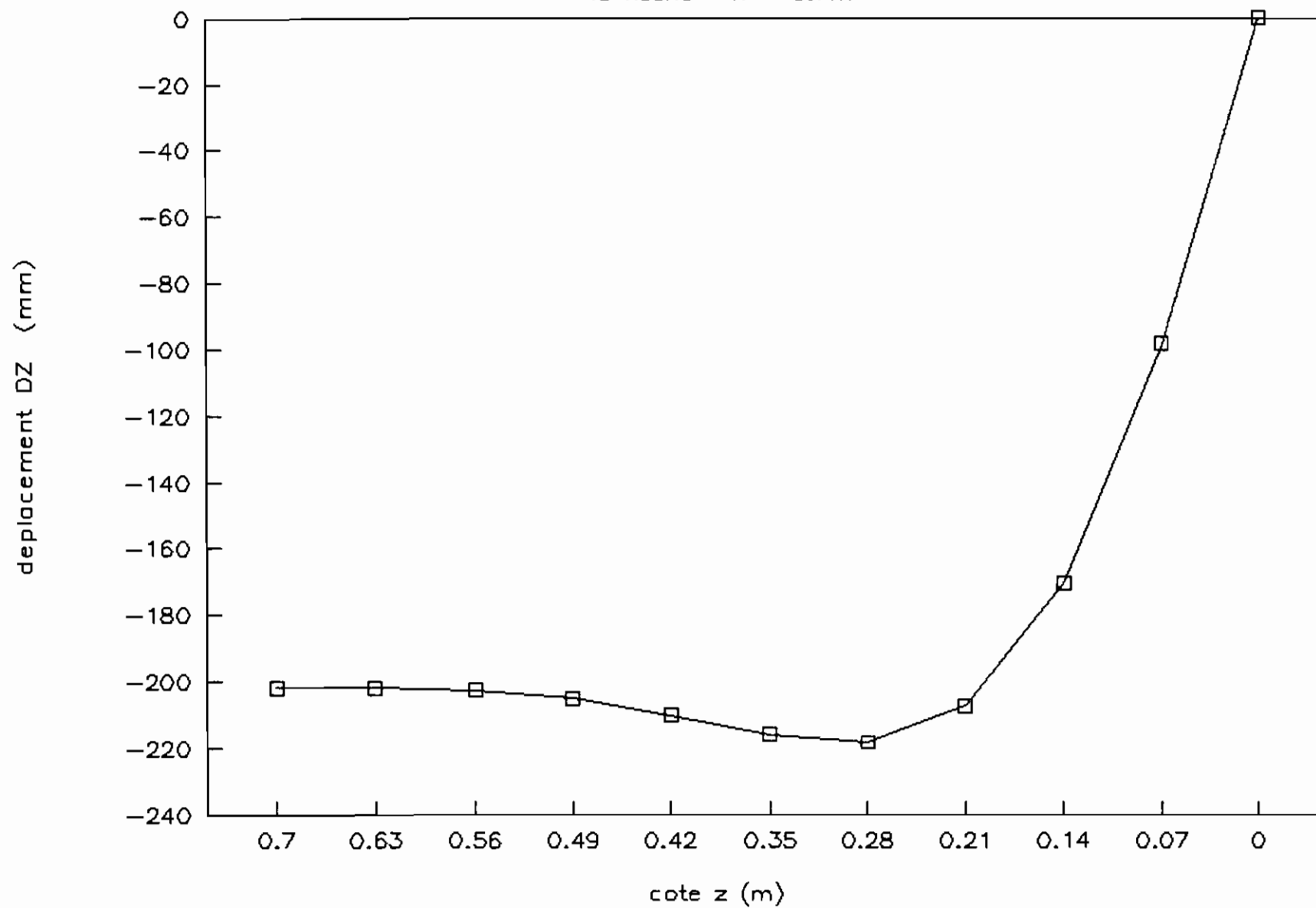


figure 4.9a *variation contrainte  $\sigma_x$  en fct° de z*  
*flèche  $h = R = 2\text{ m}$*

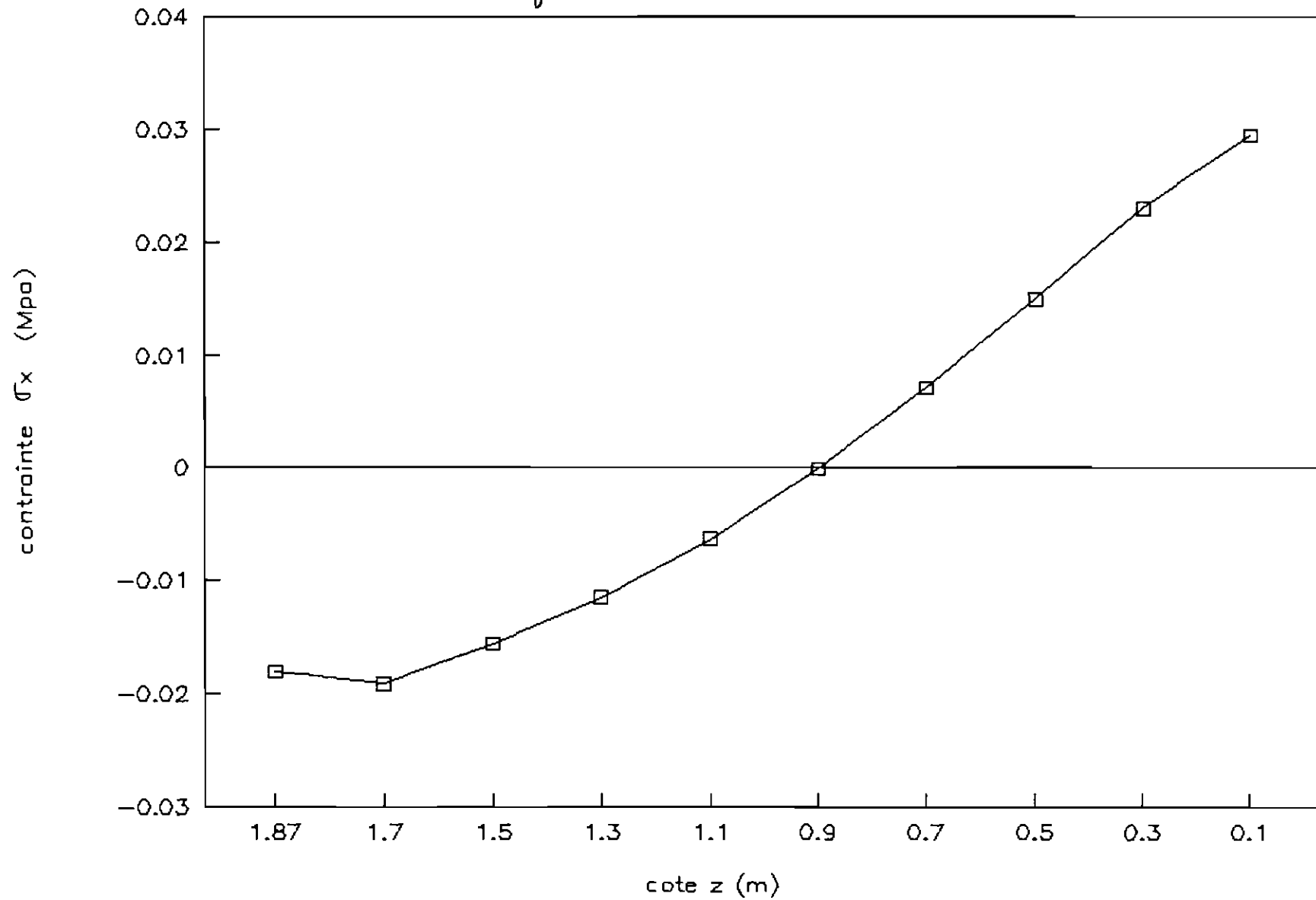


figure 4.9b *variation contrainte  $\bar{\sigma}_x$  en fct° de Z*  
*flèche h = 1 m*

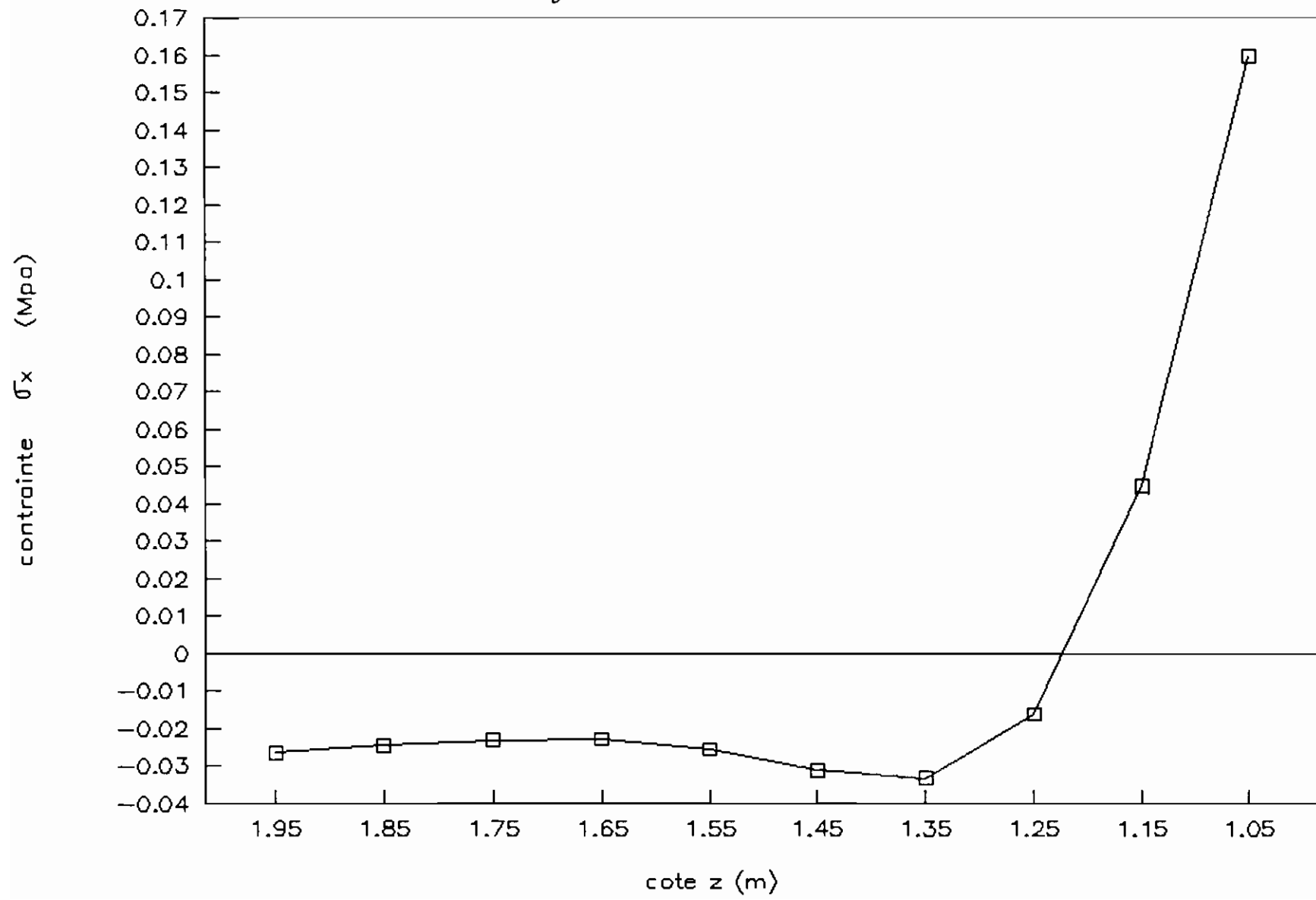


figure 4.9c *variation contrainte  $\sigma_x$  en fct° de Z*

la flèche  $h = 0.7\text{m}$

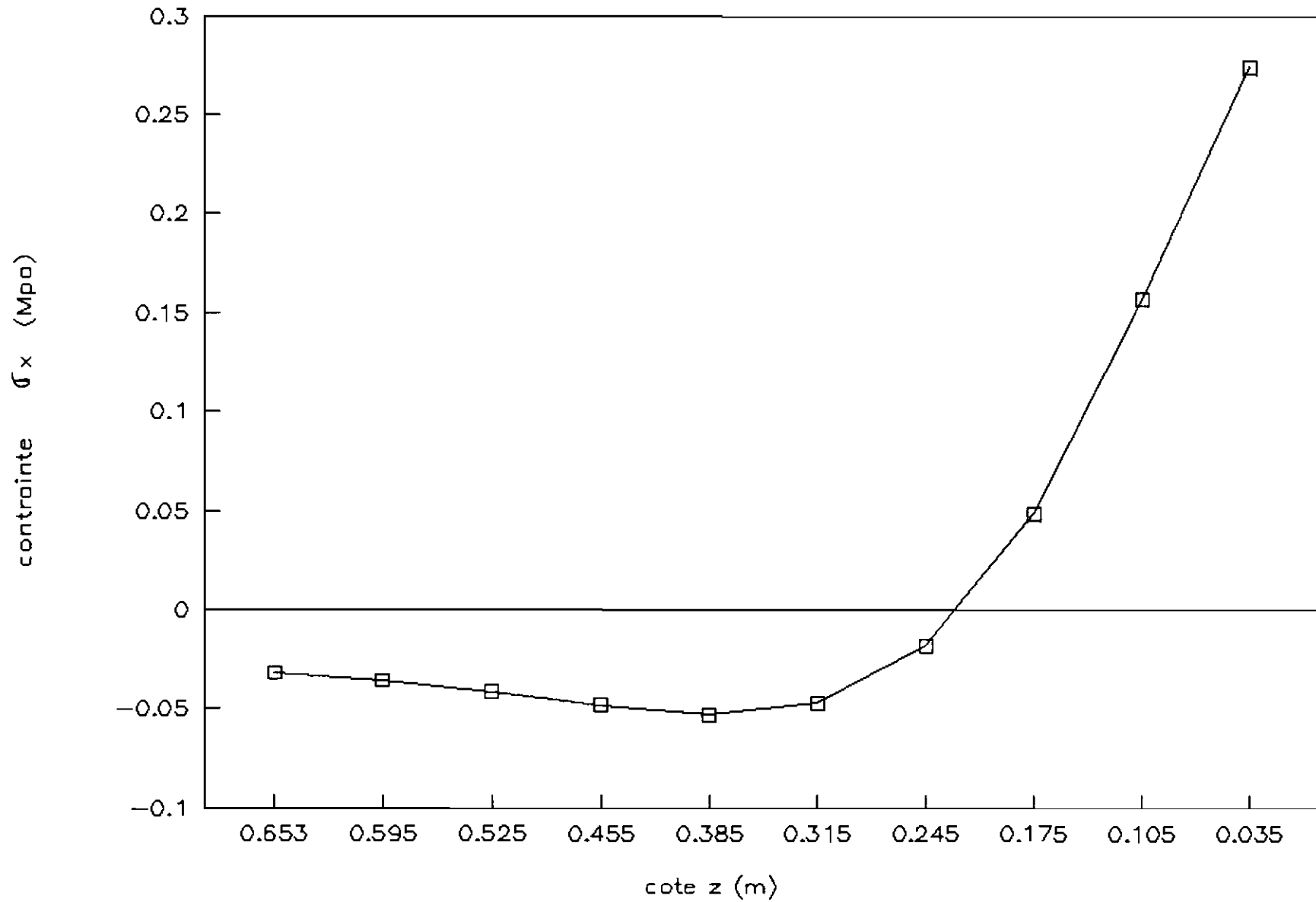


figure 4.10a *variation contrainte  $\sigma_y$  en fct° de Z*  
flèche  $h = R = 2m$

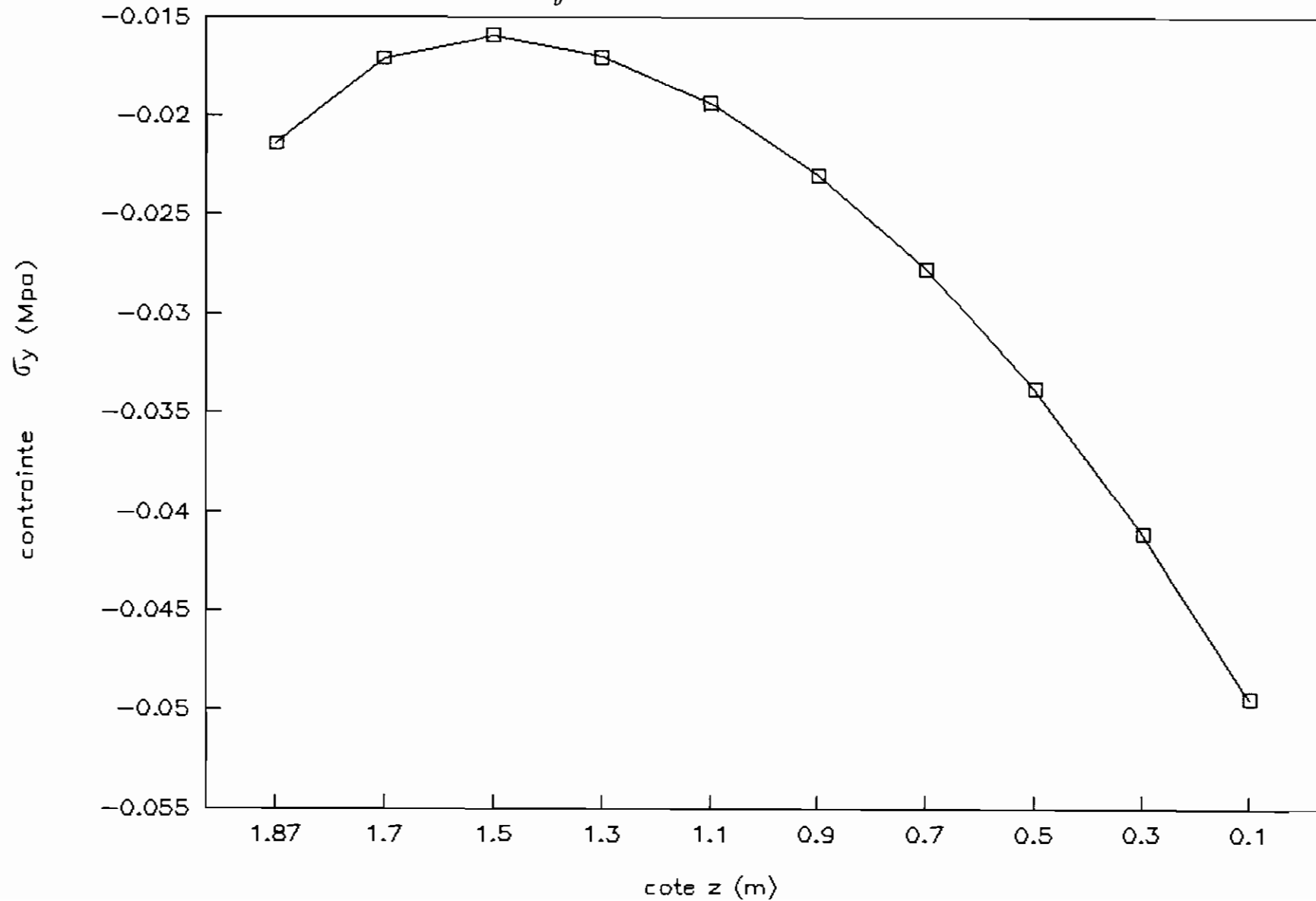


figure 4.10b *variation contrainte  $\sigma_y$  en fct° de Z*  
*flèche h = 1m*

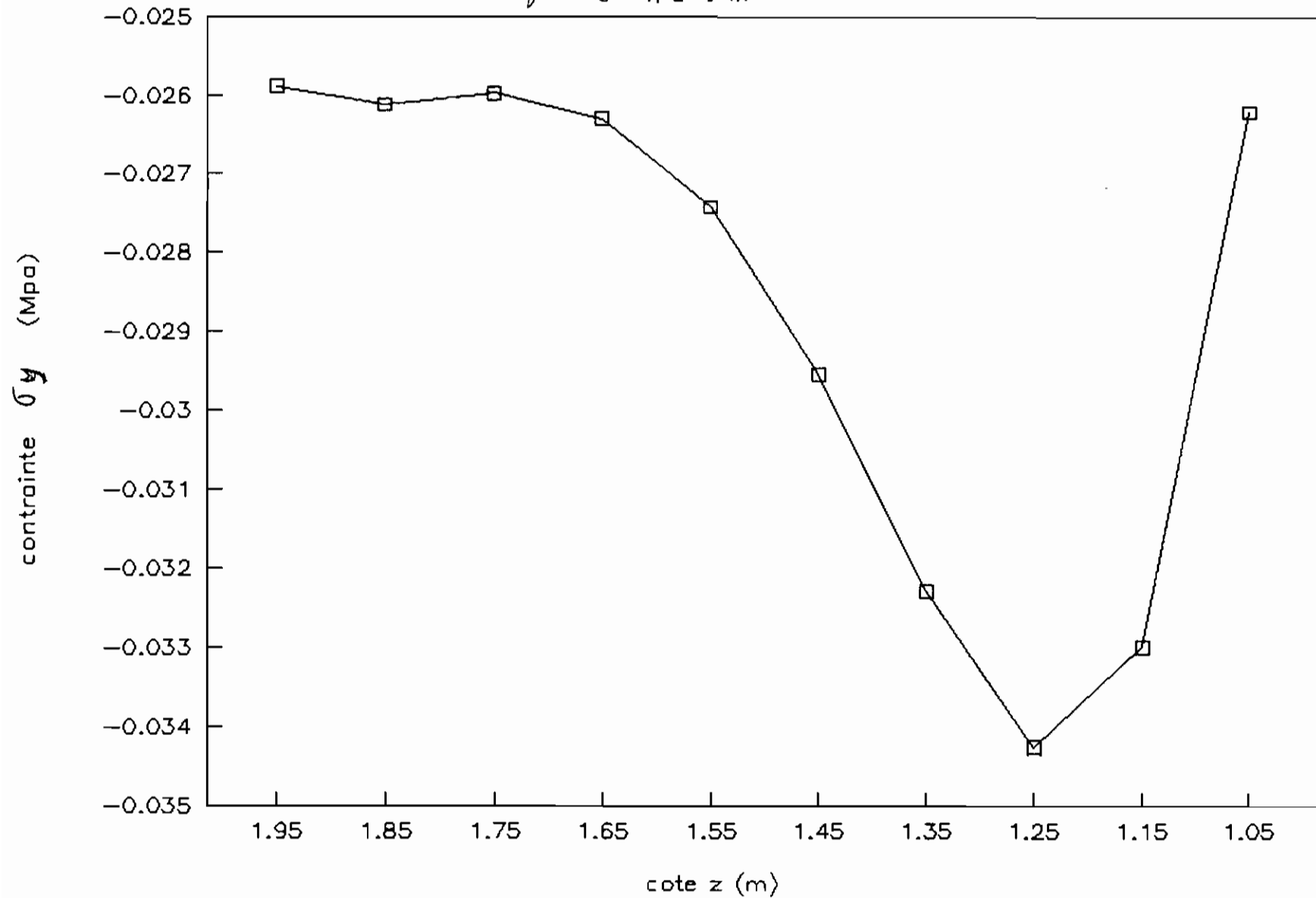
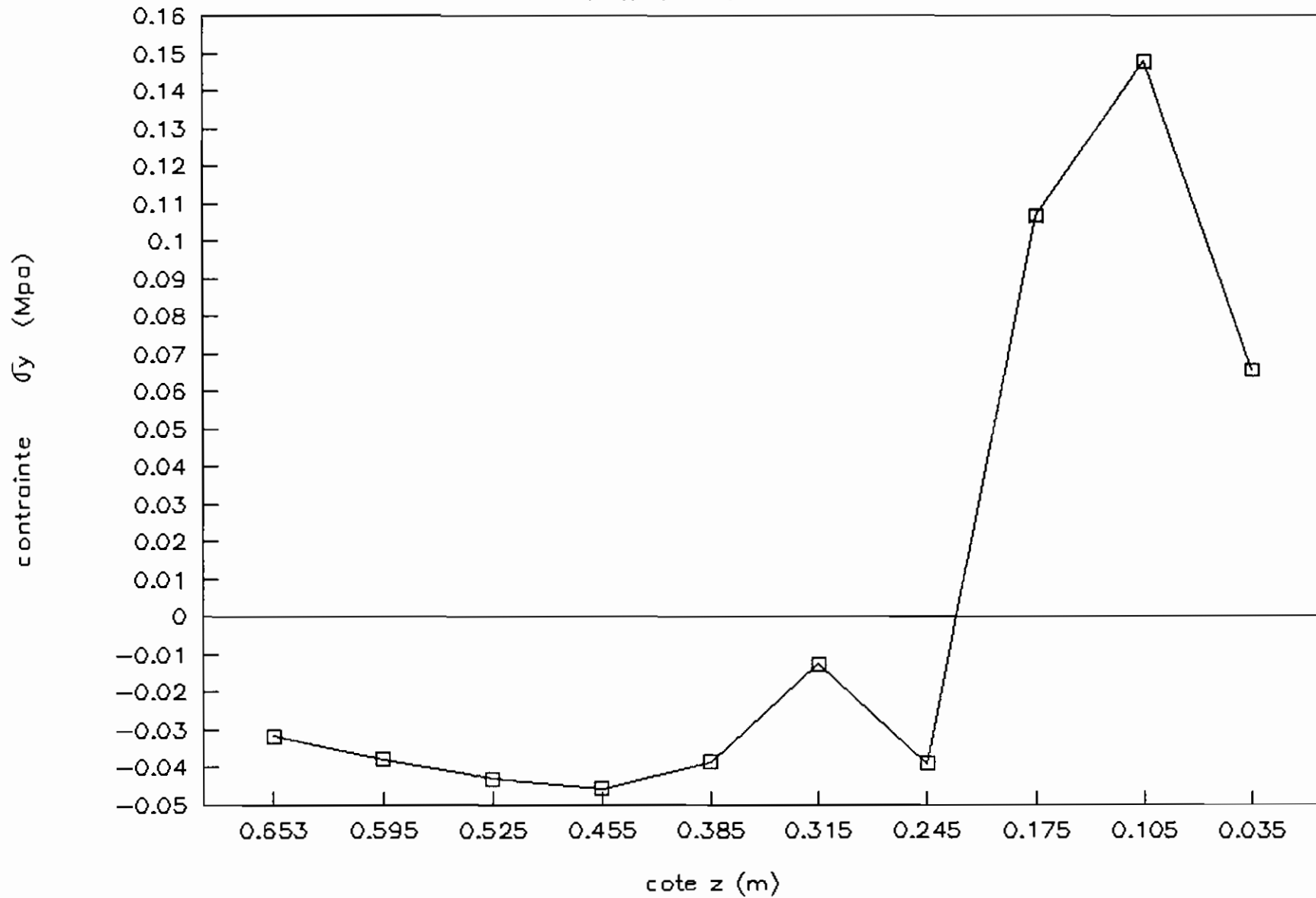




figure 4.10c *variation contrainte  $\sigma_y$  en fct° de Z*

la flèche  $h = 0.7m$



### **5) - Analyse de la coupole sphérique avec pendentif:**

La coupole considérée est élevée sur un plan carré. Entre le plan carré et la base circulaire de la coupole, il existe une surface intermédiaire appelée pendentif. Il peut être en forme de trompe ou de triangle sphérique.

Toujours dans le souci de se rapprocher le plus possible de la réalité, nous sommes partis d'un cas réel (projet de la Banque de l'Habitat du Sénégal à Thiés) que nous avons mis dans quatre (4) conditions de fonctionnement différentes:

- 1er cas: coupole sphérique avec pendentif sur appuis rigides,
- 2eme cas: coupole sphérique avec pendentif sur appuis élastiques,
- 3eme cas: coupole sphérique avec pendentif soutenu par une poutre le long de son pourtour reposant sur une fondation élastique,
- 4eme cas: coupole sphérique avec pendentif soutenue par une poutre le long de sa base reposant sur des appuis rigides.

#### **a) Définition de la géométrie:**

##### **\* Coordonnées des points définissant la géométrie:**

L'équation de la sphère est de:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2.939^2$$

Les huit points définissant le quart de la structure sont consignés dans le tableau 4.1.

**\* idéalisation et discrétisation:**

-La géométrie de la structure et le chargement étant symétriques, seul le quart de la structure est considéré (figure 4.12). La structure entière est montrée à la figure 4.11

-les éléments finis utilisés sont les plaques rectangulaires,

-le maillage est de 9\*9

points	x(m)	y(m)	z(m)
1	0	0	2.939
2	2	0	3.153
3	2	2	1.798
4	0	2	3.153
5	1	0	3.764
6	2	1	2.907
7	1	2	2.907
8	0	1	2.764

Tableau 4.1 coordonnées des points définissant la géométrie de la structure

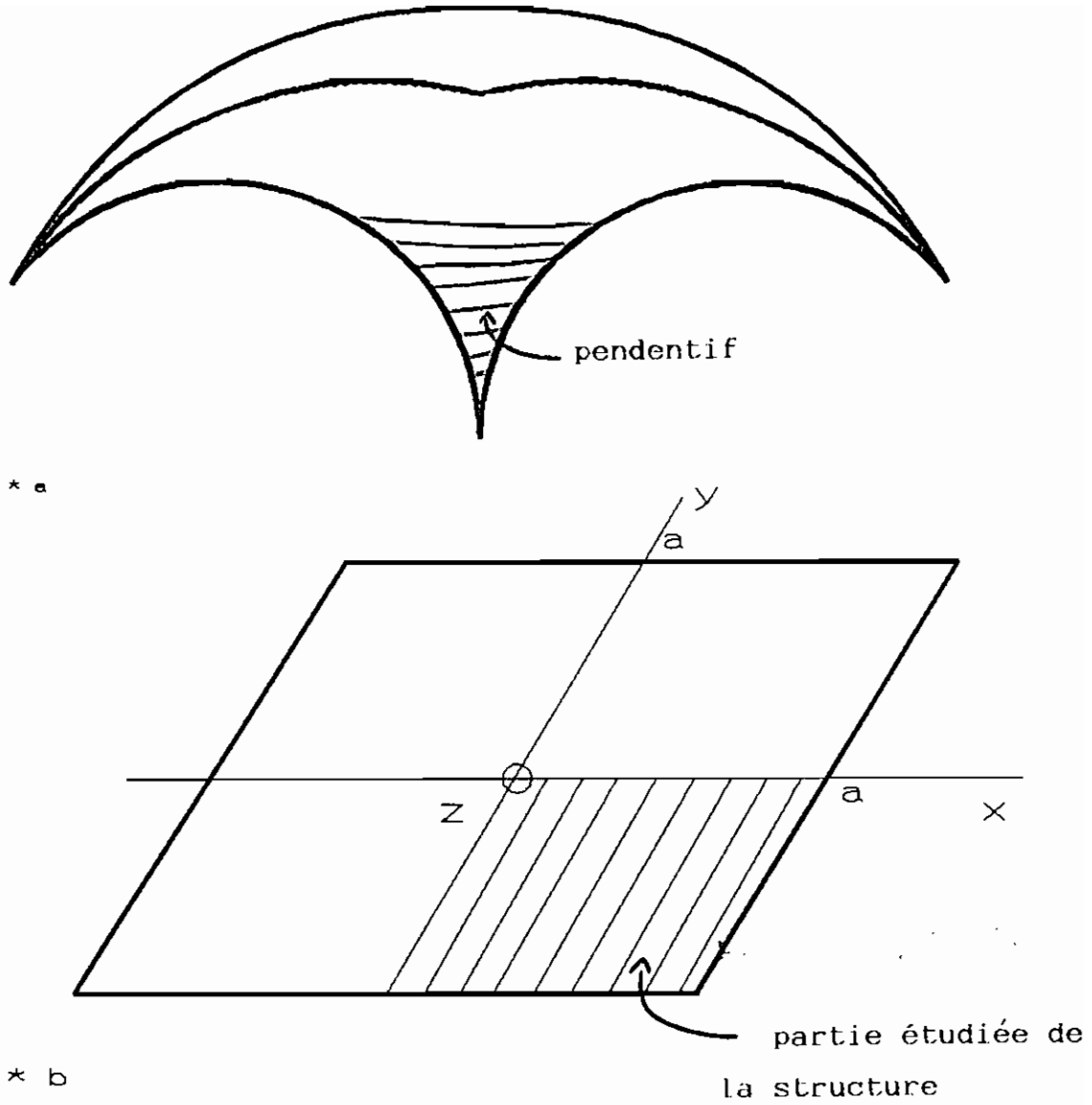


Figure 4.11: Coupole sphérique avec pendentif

a- perspective

b- vue de dessus

===== I M A G E S - 3 D =====  
= Copyright (c) 1984 Celestial Software Inc. =  
=====

GEOMETRY PLOT

Version 2.0

couple- sphérique avec pendentif: maillage 9\*9

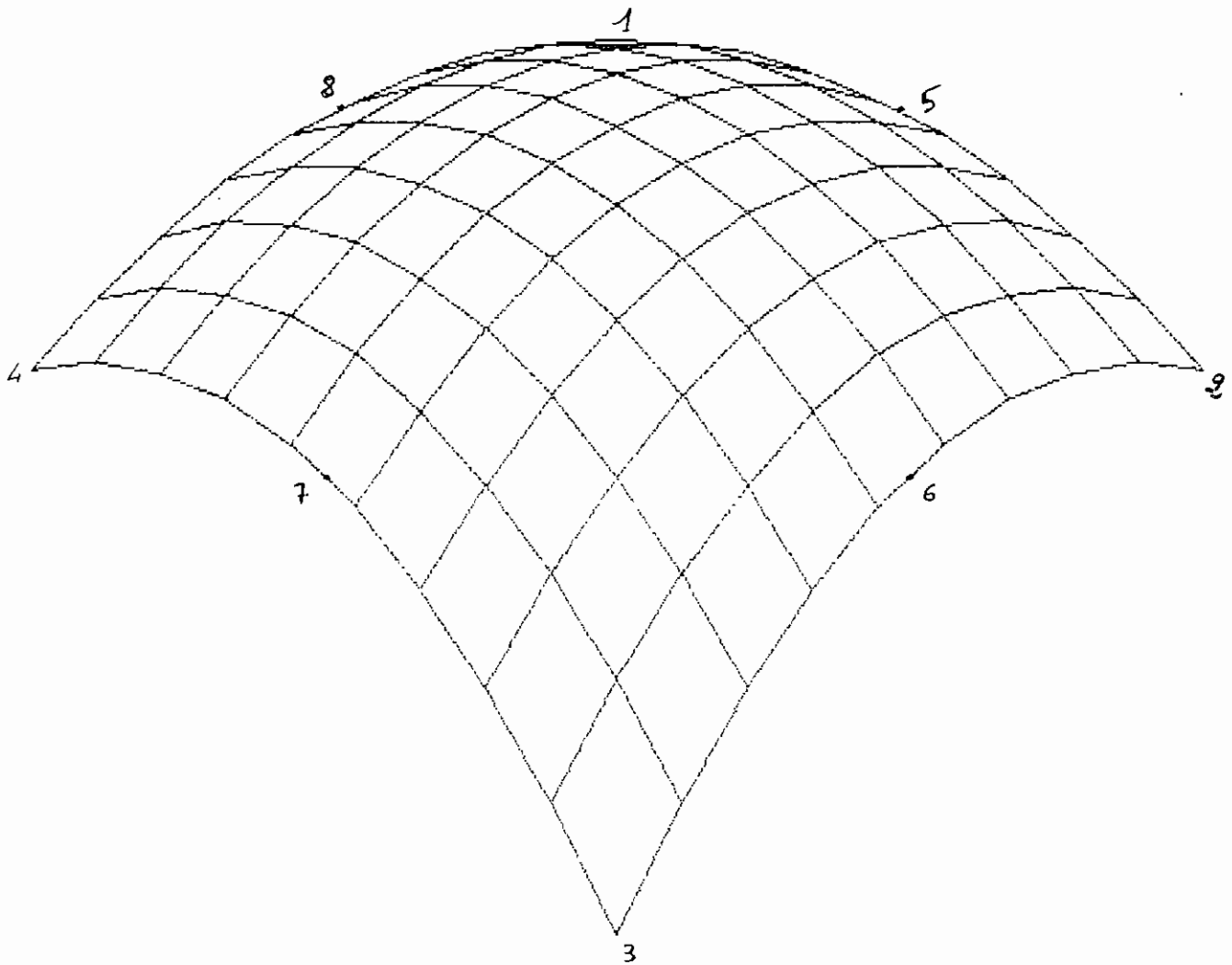


figure 4.12: idealisation du quart de la coupole spherique avec pendentif (vue de cote)

===== J M A B E S - 3 D =====  
= Copyright (c) 1984 Celestial Software Inc. =  
=====

GEOMETRY PLOT

Version 2.0

coupole sphérique avec pendentif: maillage 9\*9

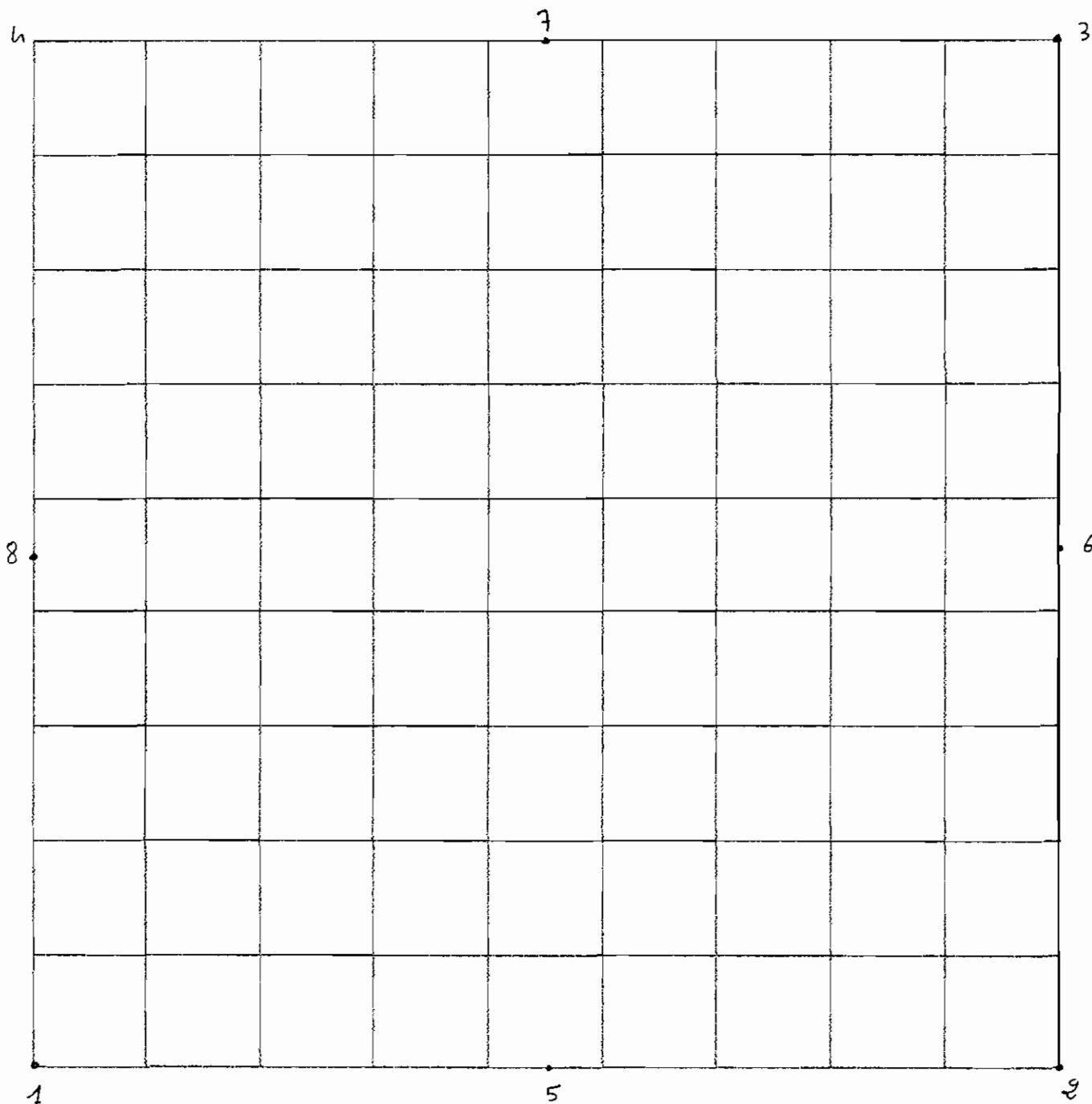


figure 4.13: idealisation du quart de la coupole spherique avec pendentif (vue en plan)

===== I M A G E S - 3 D =====  
= Copyright (c) 1984 Celestial Software Inc. =  
=====

GEOMETRY PLOT

Version 2.0

coupole sphérique avec pendentif: maillage 9\*9

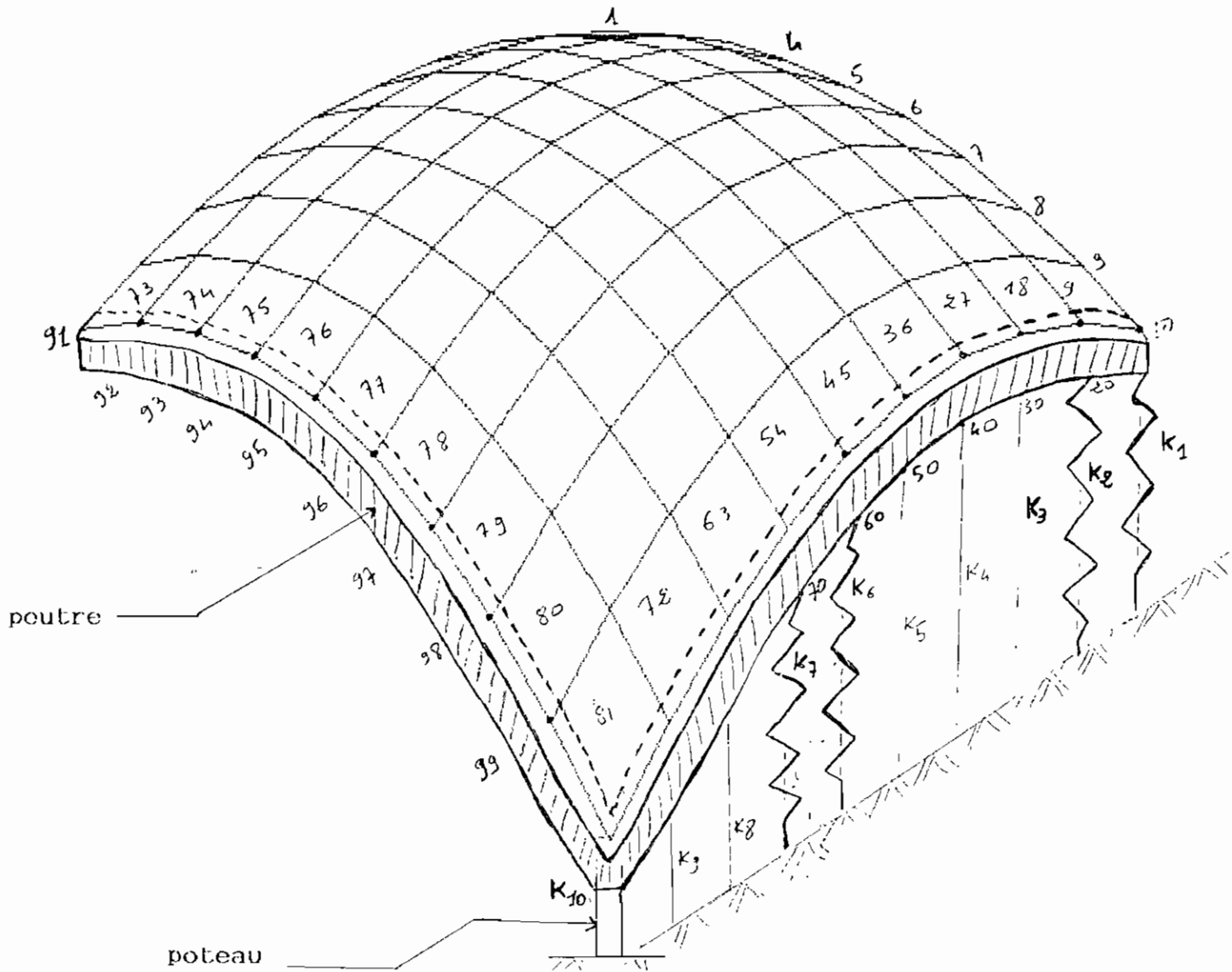


figure 4.14: quart de la coupole avec poutre sur supports  
élastiques

**b) Calcul du poids propre:**

volume de la sphère  $V_1 = 4\pi R^3/3$

volume d'une calotte sphérique  $V_2 = \pi h^2 (3h-R)/3$

nous avons quatre (4) calottes obtenues à partir de l'intersection de la sphère avec le plan des quatre (4) murs.

$$h = R - 2 = 2.939 - 2 = 0.939\text{m} = 939\text{mm}$$

$$d = z_2 - 1 = 3.153 - 1 = 2.153\text{m}$$

où  $z_2$  est la cote du point 2 (figure 4.12 et 4.13)

Le volume de la sphère est alors :

$$V' = V_1 - 4V_2 = 4\pi R^3/3 - 4\pi h^2 (3R - h) = 4\pi [R^3 - h^2 (3R-h)]/3$$

soit  $e$  l'épaisseur de la coupole; le volume de matériau utilisé est:

$$V'' = [4\pi [(R+e)^3 - (h+e)^2 [3(R+e) - (h+e)]]/3] - [4\pi [R^3 - h^2 (3R-h)]/3]$$

AN:

$$V'' = [4 * 3.14 [(2.939+0.07)^3 - (0.939+0.07)^2 [3(2.939+0.07) - (0.939+0.07)]]/3] - [4 * 3.14 [2.939^3 - 0.939^2 (3 * 2.939 - 0.939)]]/3]$$

$$V'' = 2.682\text{m}^3$$

or nous n'avons étudié que le quart de la demi-sphère; le volume de cet élément sera donc:

$$V = \frac{1}{4}(V''/2) = V''/8 = 0.335\text{m}^3$$

$$P = \rho * V = 21.18\text{e-}6 * 0.335\text{e}9 = 7102\text{N}$$

Le poids propre du quart de la structure étudiée est :

$$P = 7102\text{N}$$



**c) Calcul des constantes de raideur K:**

Nous avons supposé, sur tout le long de la base de la coupole, que les noeuds reposent sur des ressorts de constantes de raideurs  $K_i$  (figure 4.14). La valeur de K est donnée par:

$$K = EA/L = E \cdot e \cdot l/L$$

Pour une longueur unitaire du mur ( $l=1m$ ),  $K = E \cdot e/L$  et au niveau des poteaux,  $K = E_b \cdot A_b/L$ , où  $b =$  béton.

Les résultats obtenus tout le long de la base sont consignés dans le tableau 4.2

noeuds	z (m)	K (N/mm)
10 et 91	3.153	0.226
20 et 92	3.173	0.225
30 et 93	3.15	0.226
40 et 94	3.085	0.231
50 et 95	2.977	0.239
60 et 96	2.826	0.232
70 et 97	2.633	0.271
80 et 98	2.397	0.297
90 et 99	2.119	0.336
100	1.8	3423250
Tableau 4.2      constantes de raideurs      K		

**d) Résolution de la structure:**

Les résultats de l'analyse des quatre (4) cas cités précédemment sont illustrés par les figures 4.15 à 4.18. Ces figures

renseignent sur la variation des contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  suivant un plan de coupe parallèle au plan  $yz$  et celle des déplacements pour un plan de coupe parallèle au plan  $xz$ .

**e) Interprétation:**

L'observation des résultats consignés dans les figures 4.15 à 4.18 montre une nette tendance à la baisse et des déplacements et des contraintes, de la structure sur appuis élastiques à la structure avec poutre sur appuis rigides en passant par la structure sur appuis rigides et celle avec poutre sur appuis élastiques respectivement. Cependant la variation des déplacements et des contraintes de la structure avec poutre sur appuis rigides à la structure avec poutre sur appuis élastiques n'est pas très grande.

En effet l'introduction de la poutre dans la structure augmente la rigidité de celle-ci et diminue le taux de travail des éléments de la coupole. Les éléments de la base de la coupole qui avaient tendance à s'écarter des autres sont maintenues par la poutre. Du fait de sa rigidité, la poutre tend à uniformiser les déplacements et par suite les contraintes dans la structure; par exemple l'intervalle de variation de la contrainte  $\sigma_x$  et des déplacements  $D_x$  passent respectivement de  $[-0.13; 0.18]$  à  $[-0.07; -0.03]$  et de  $[-20; 110]$  à  $[-8; 0.5]$ .

Dans la structure sans poutre les contraintes et déplacements dépassent les possibilités de résistance qu'offre le géobéton. L'ajout de la poutre nous ramène dans la zone des contraintes et déplacements admissibles. Nous rappelons que la contrainte de traction admissible dans le géobéton est de 0.15 Mpa.

Les appuis élastiques induisent certes des déplacements et par suite des contraintes supplémentaires , mais pour répondre à un besoin pratique, il serait mieux d'utiliser les résultats obtenus pour la structure avec poutre sur appuis élastiques qui reflète plus la réalité; les appuis rigides impliquant un mur de rigidité très grande, ce qui n'est pas courant.

figure 4.15a: déplacement DX en fct<sup>n</sup> de X

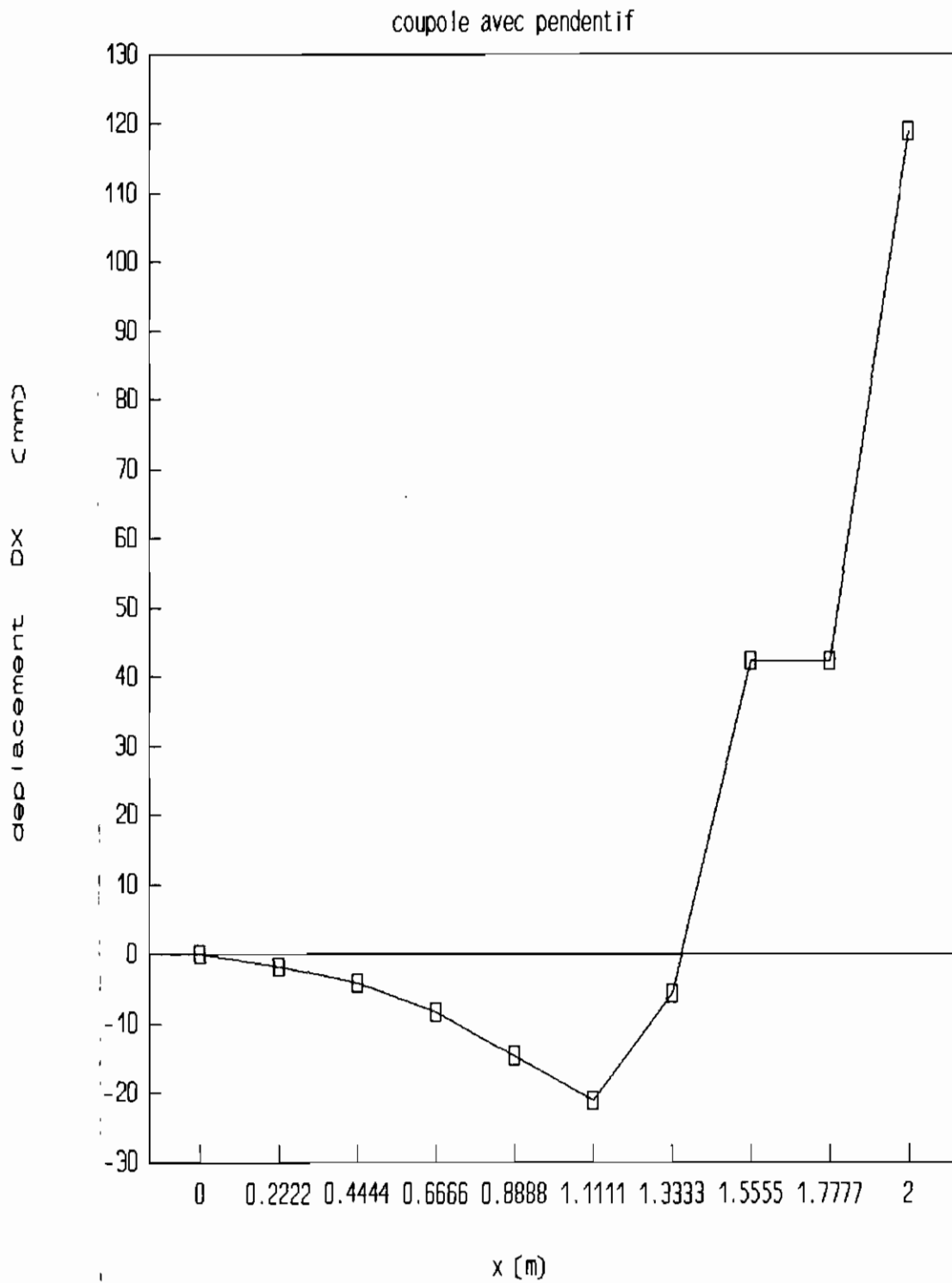


figure 4.15b: déplacement DX en fct<sup>n</sup> de X

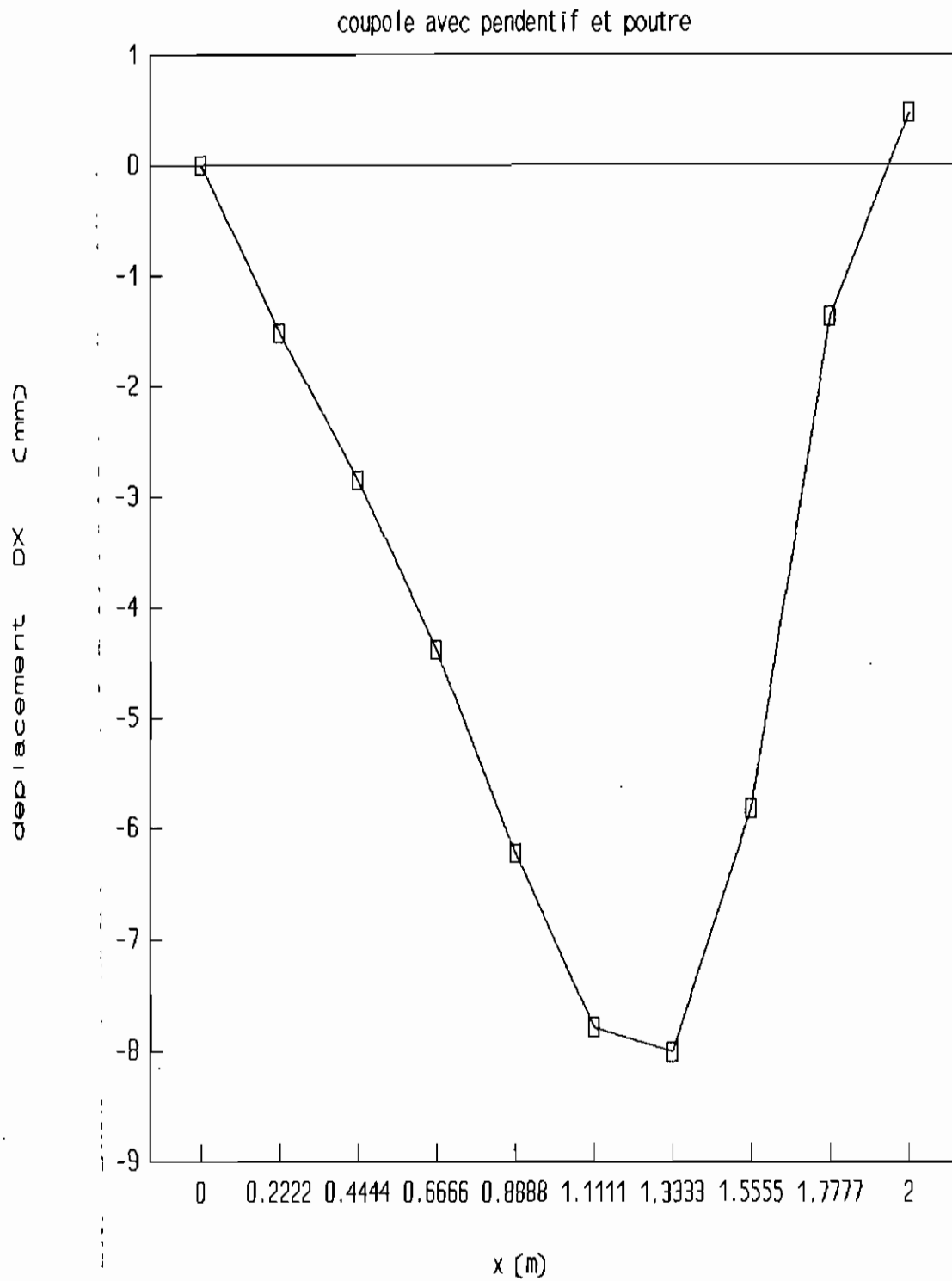


figure 4.15c: déplacement  $\Delta X$  en fct $\square$  de  $x$

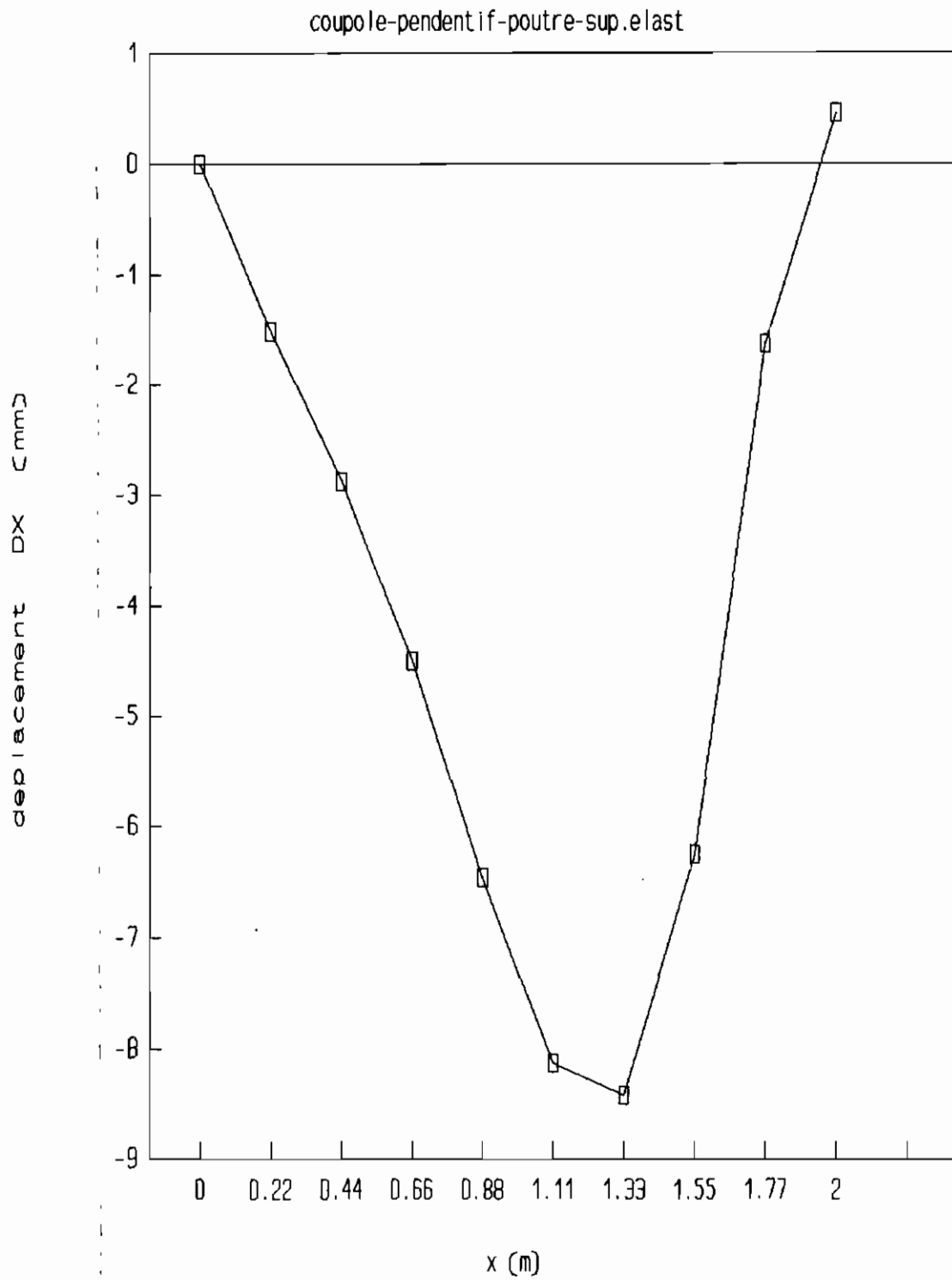


figure 4.16a: déplacement DZ en fctn de X

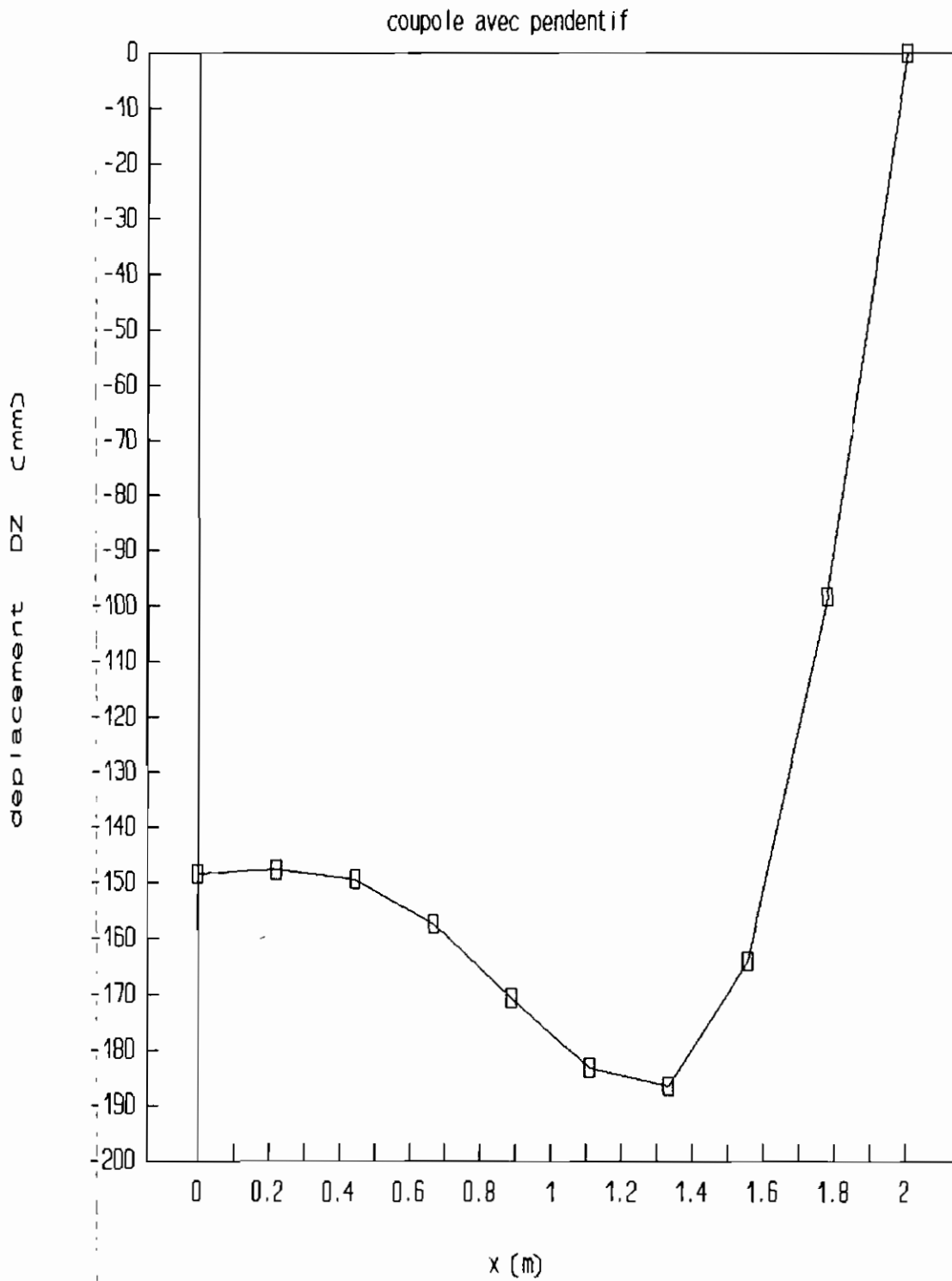




figure 4.16b: déplacement DZ en fctn de X

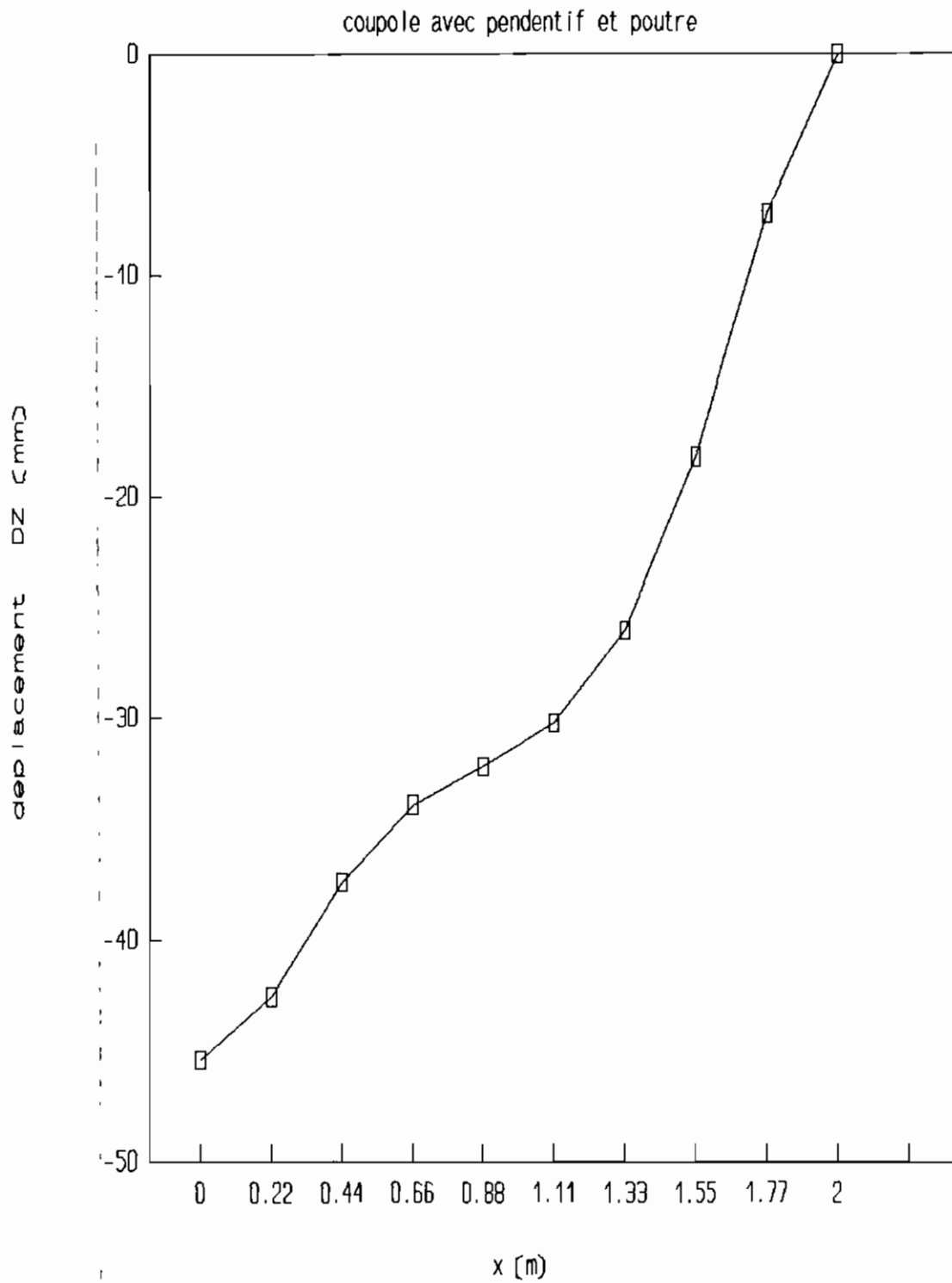


figure 4.16c: déplacement DZ en fctn de x

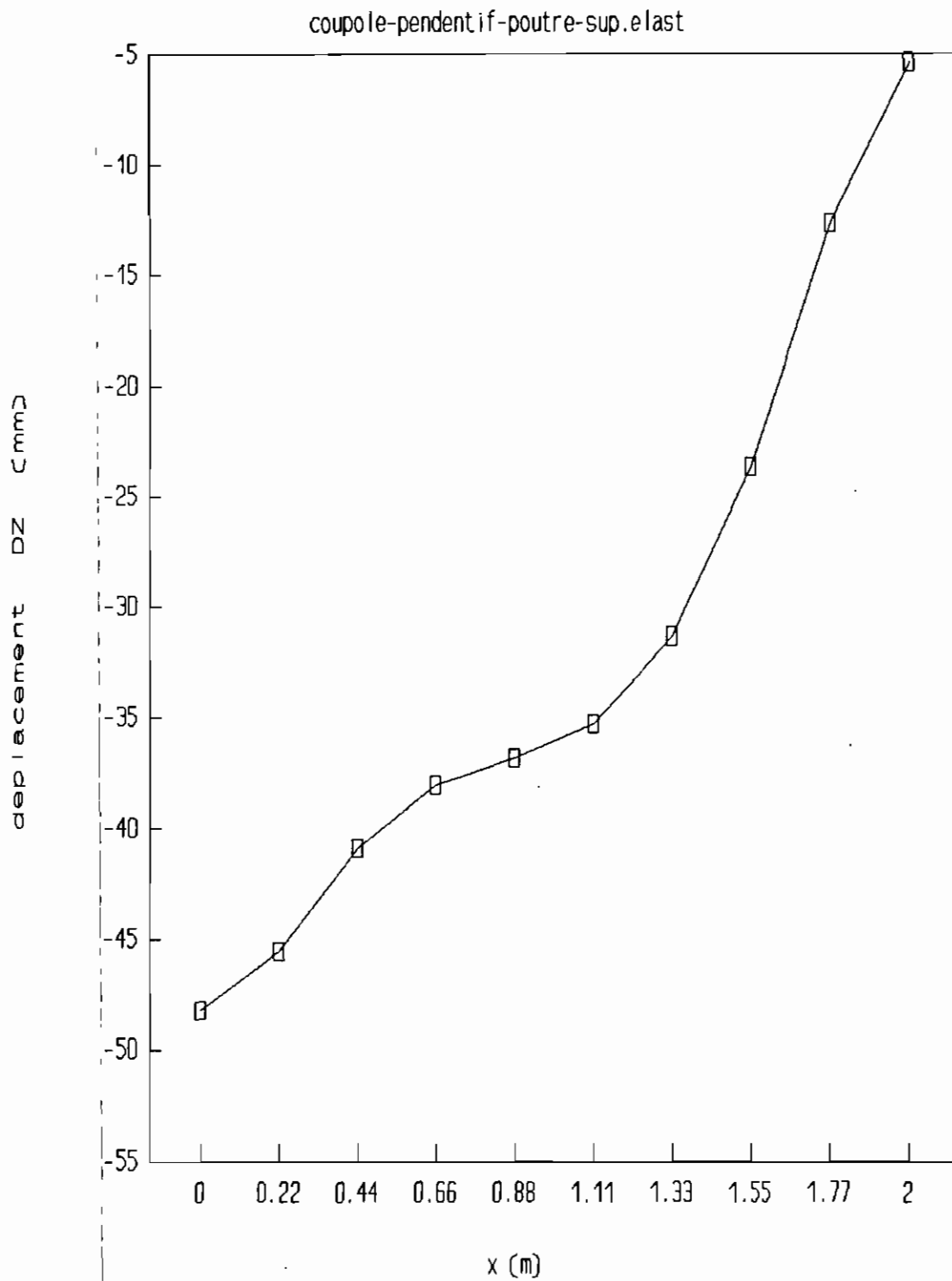


figure 4.17a: variation contrainte  $\sigma_x$  en fct $\square$  de Y

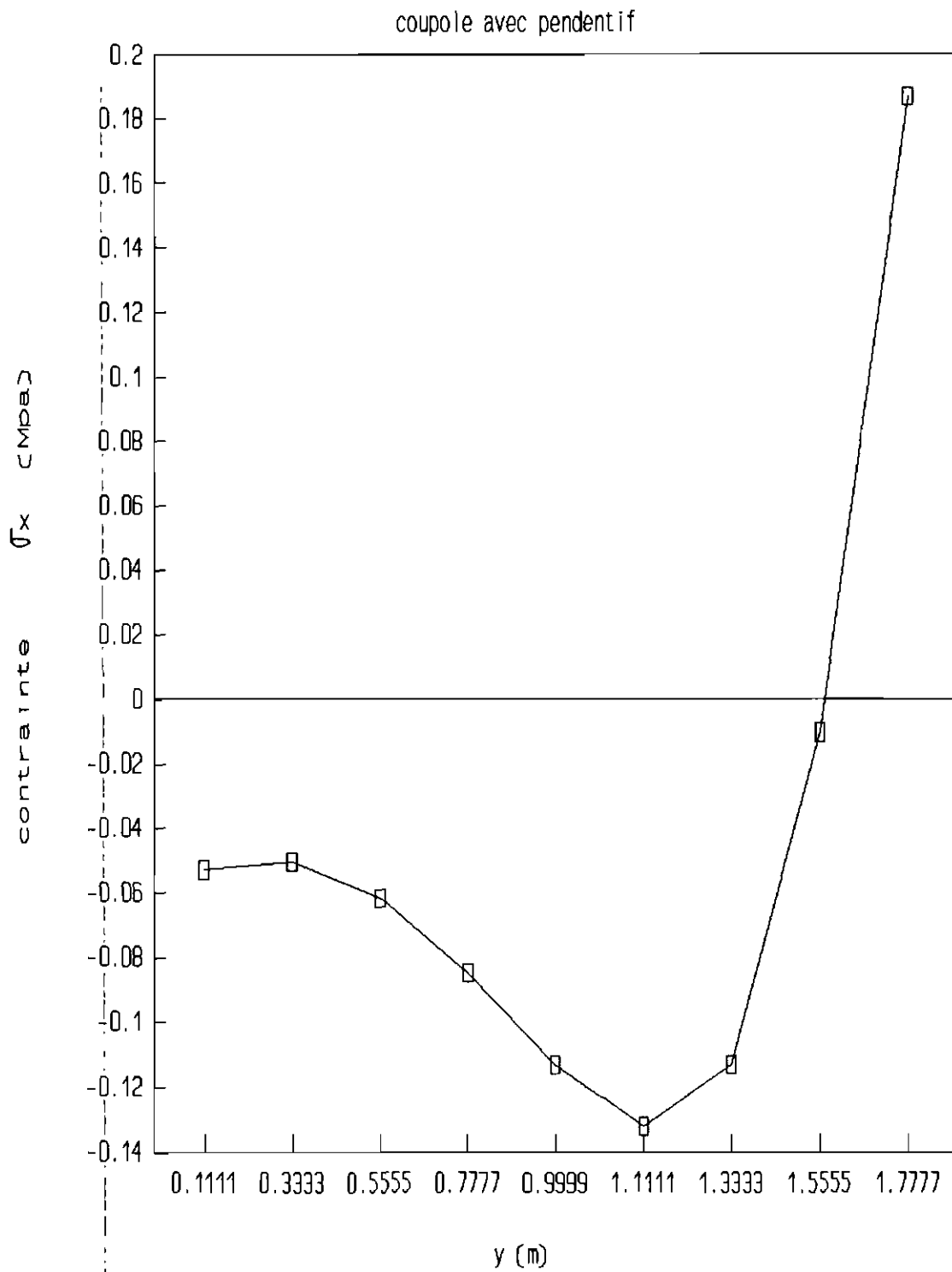


figure 4.17b: variation contrainte  $\sigma_x$  en fct $\square$  de y

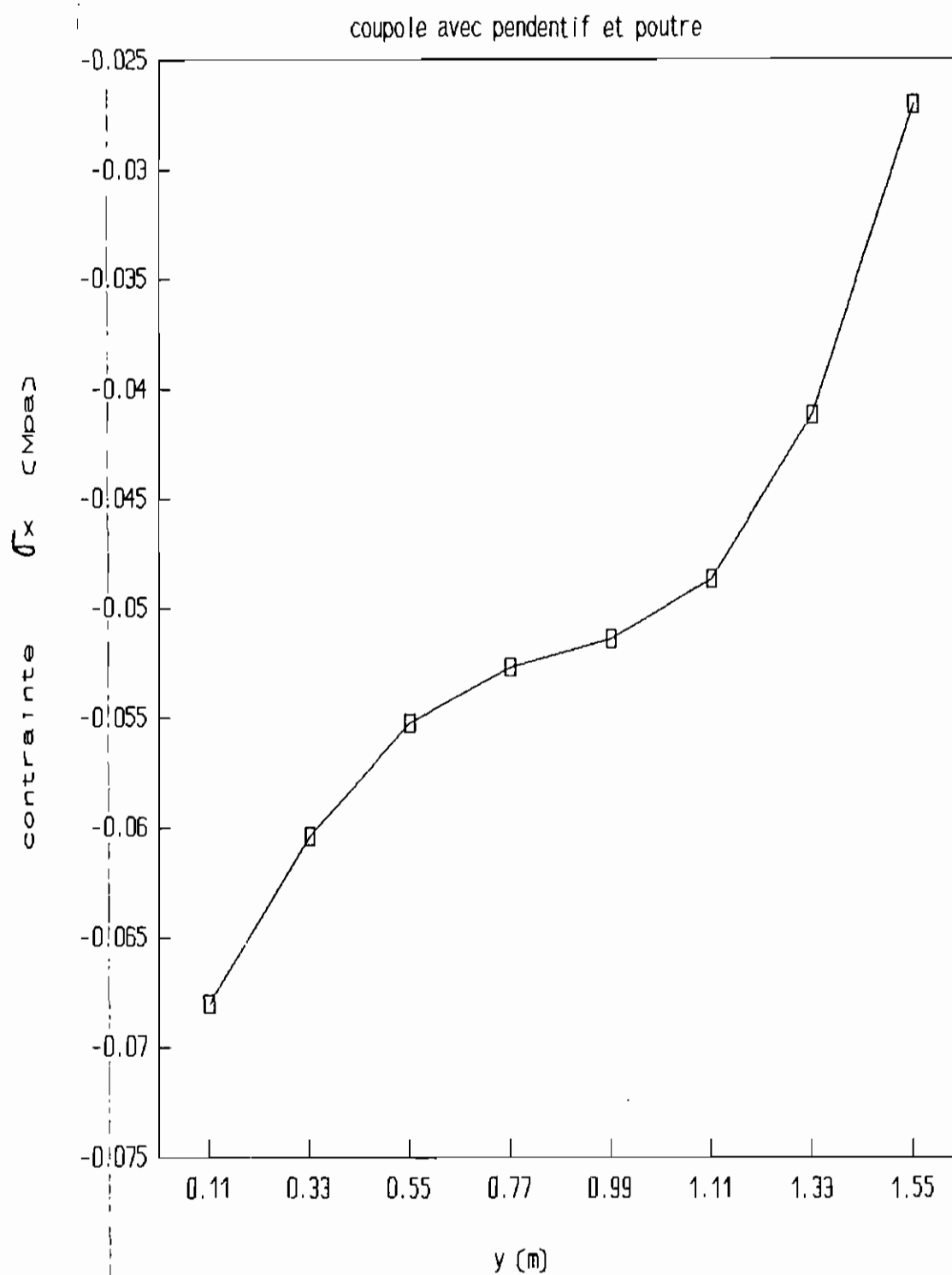


figure 4.17c: variation contrainte  $\sigma_x$  en fct de y

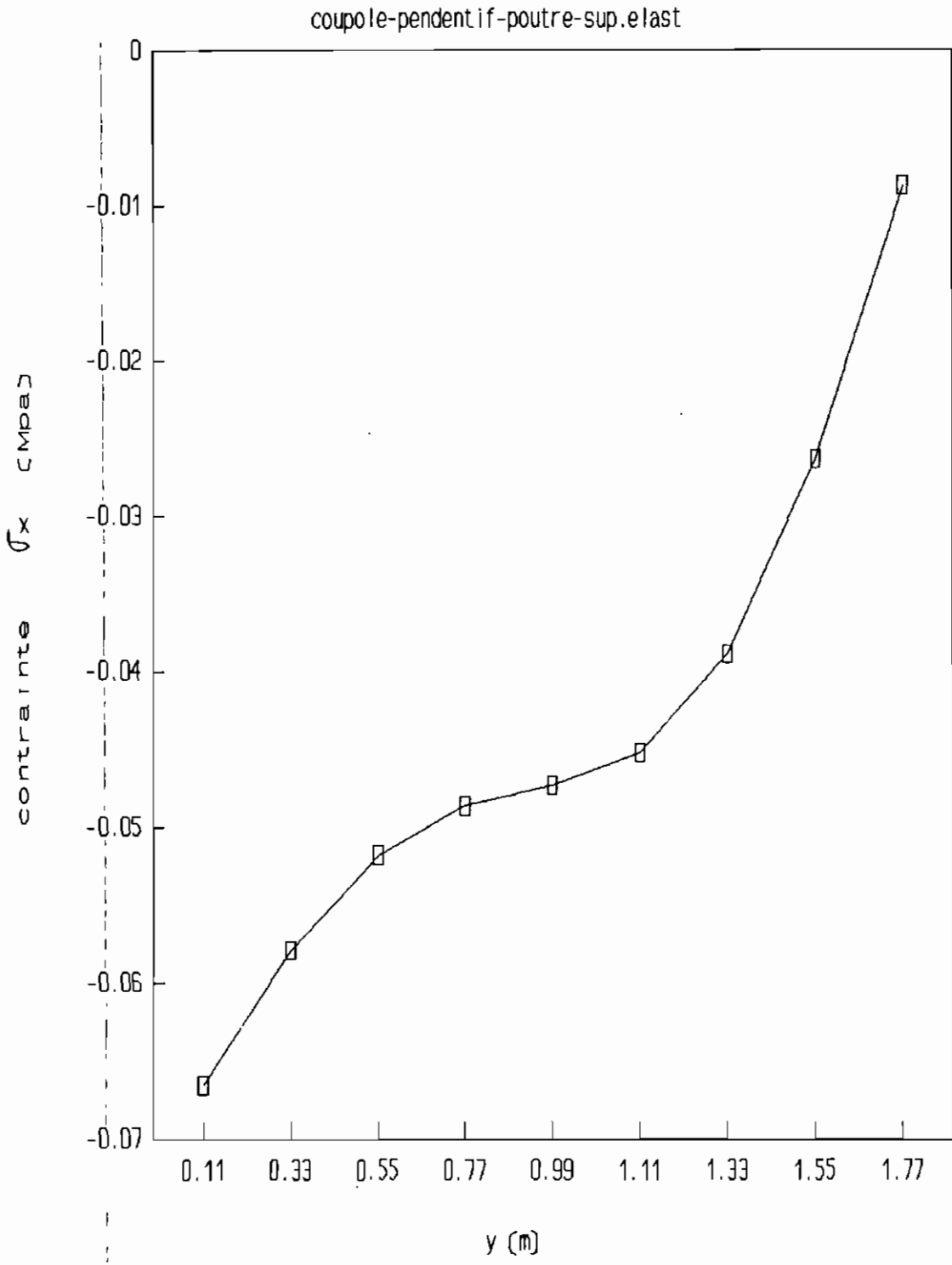


figure 4.17d: variation contrainte  $\sigma_x$  en fct de y

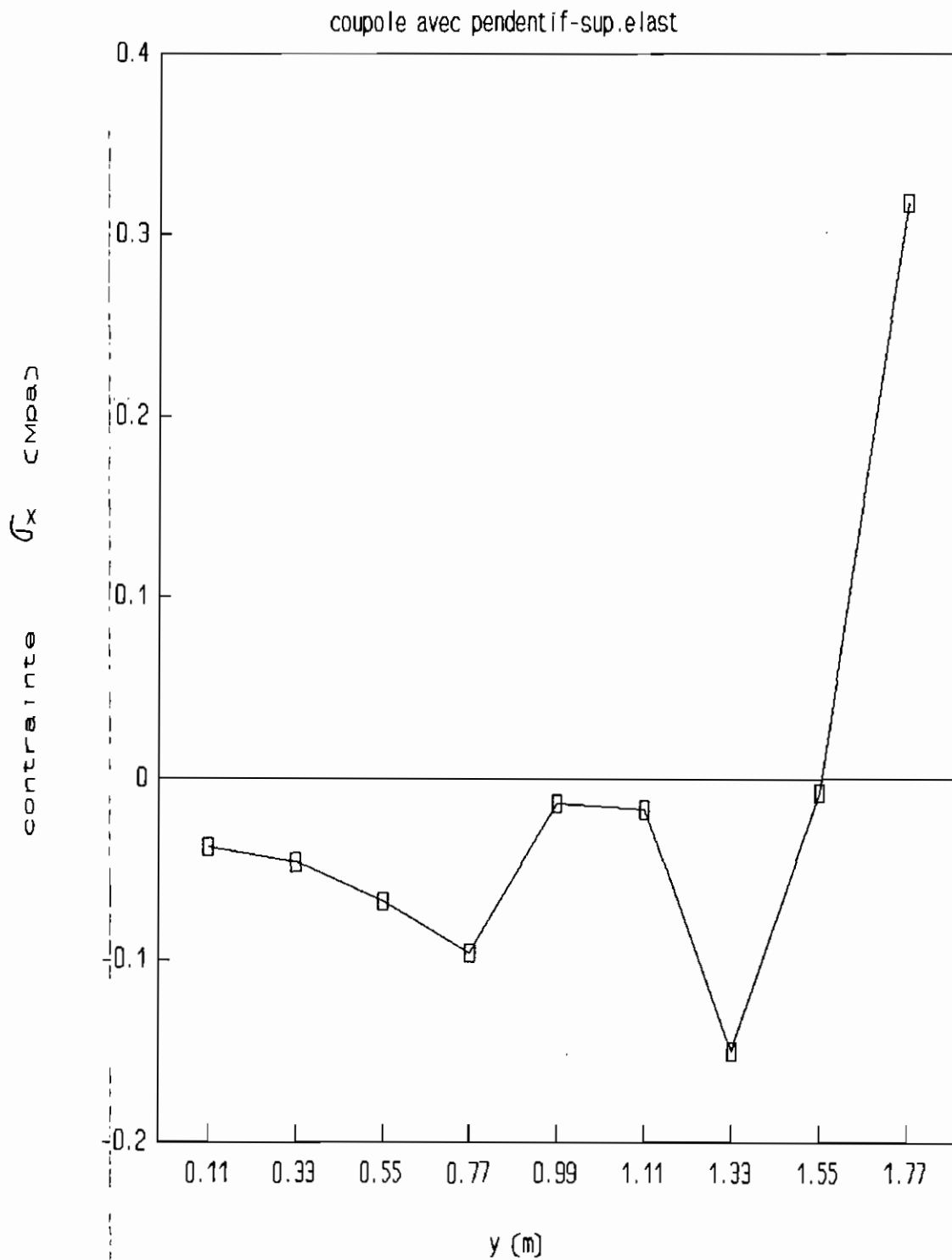


figure 4.18a: variation contrainte  $\sigma_y$  en fct $\square$  de Y

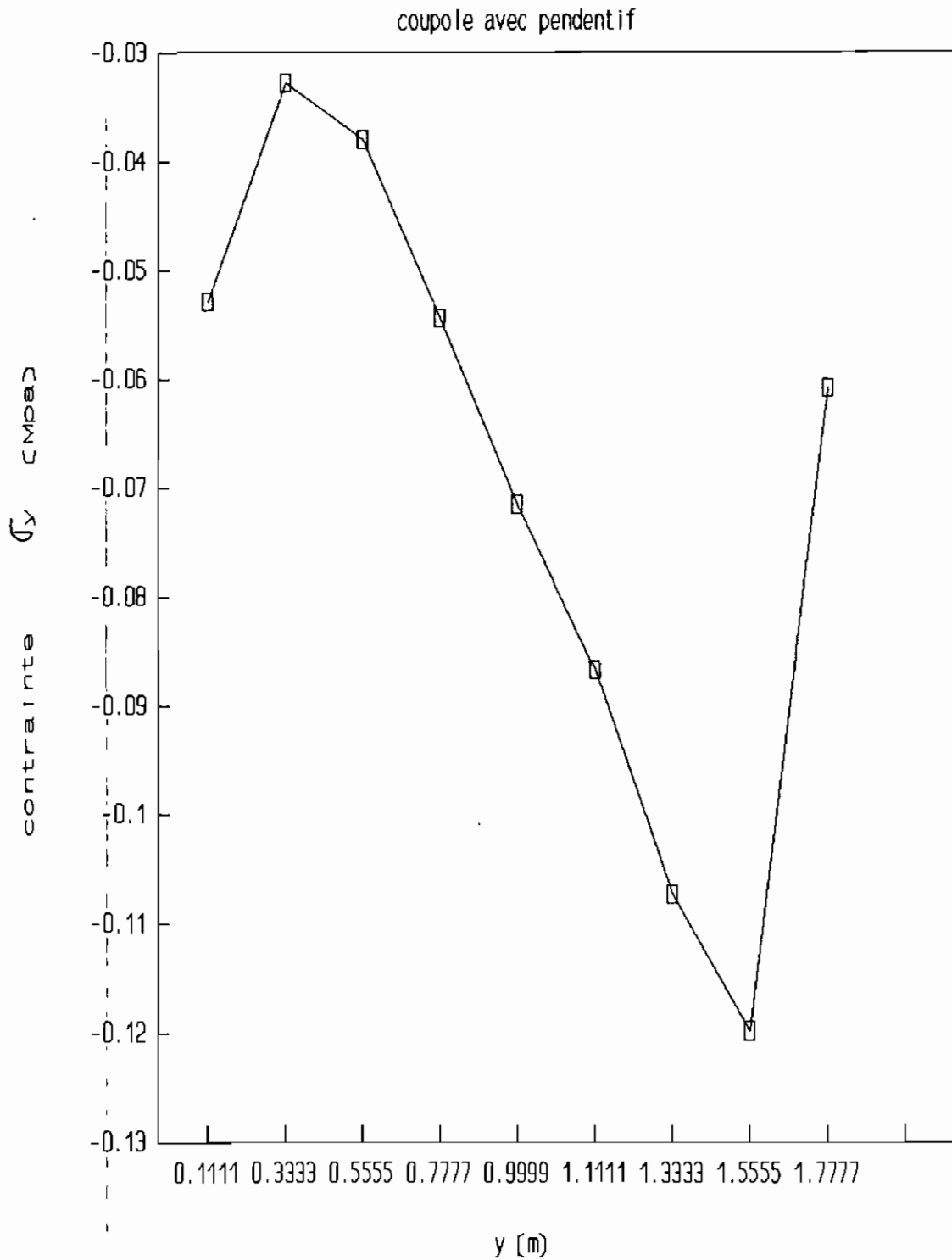


figure 4.18b: variation contrainte  $\sigma_y$  en fct de y

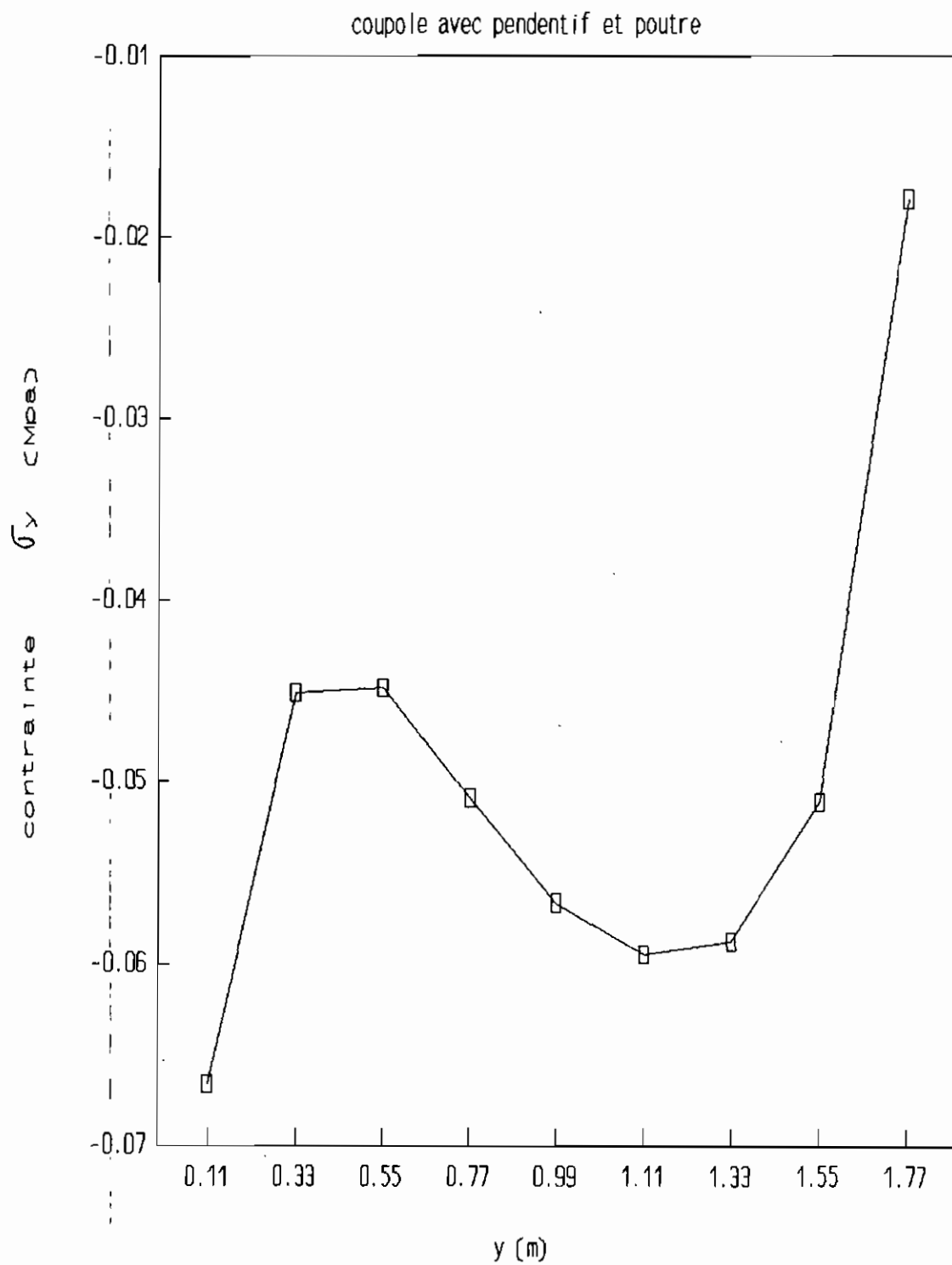




figure 4.18c: variation contrainte  $\sigma_y$  en fct $\square$  de y

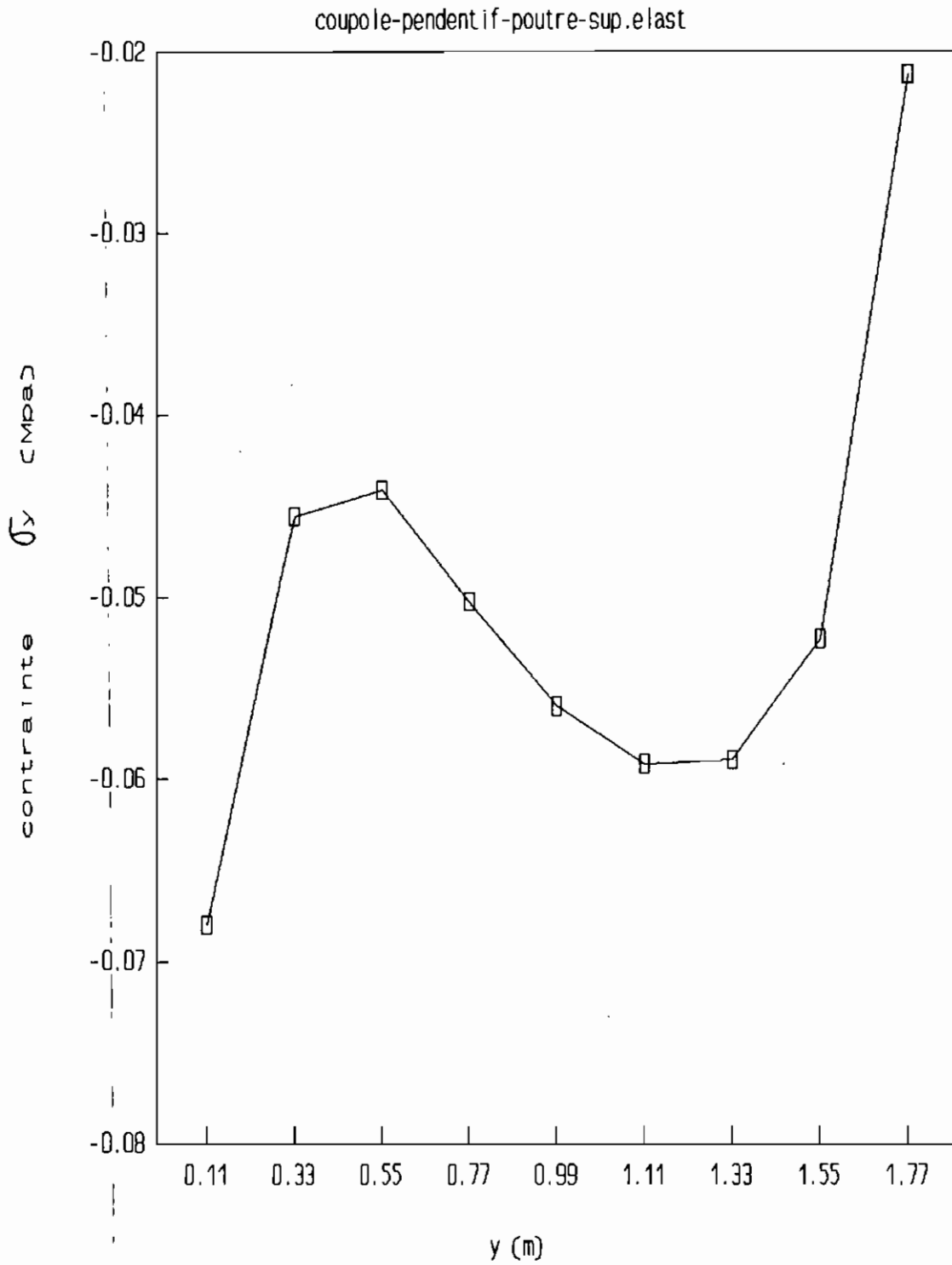
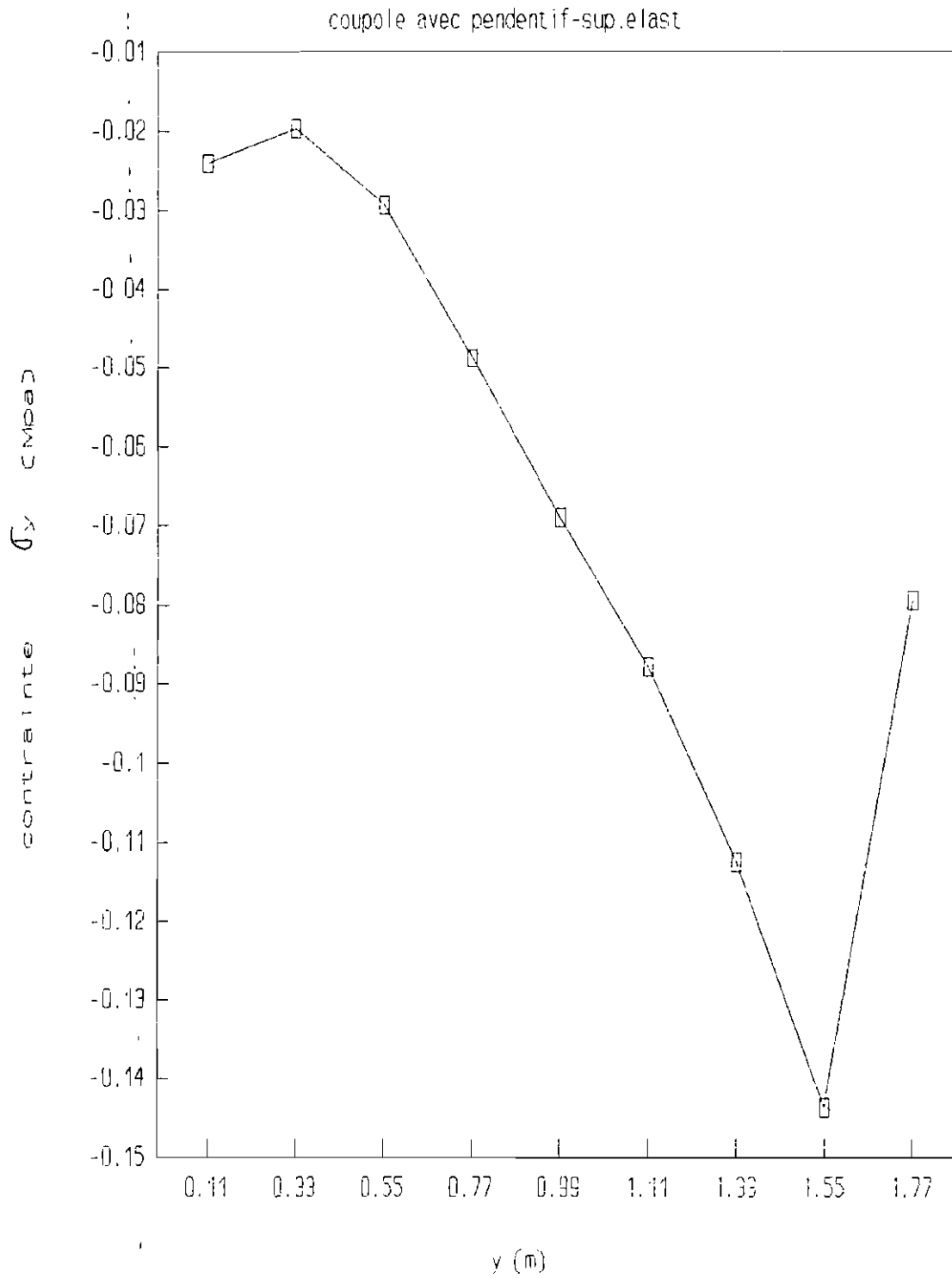


figure 4.18d: variation contrainte  $\sigma_y$  en fct $\square$  de y



Il est à noter que l'analyse des différentes géométries a été faite avec les caractéristiques d'un type de latérite bien déterminé, la latérite rouge de Thiés. Pour tout autre site d'emprunt des essais de résistance doivent être effectués pour évaluer les performances géotechniques de la latérite extraite. Une collaboration étroite entre les différentes institutions s'avère donc nécessaire pour la mise sur pied d'une banque de données. Aussi un certain coefficient de réduction pourrait être appliqué aux résultats du fait de la non prise en compte des joints dont la résistance est plus faible.

Par ailleurs, l'analyse de la coupole sphérique avec pendentif pourrait être complétée par une étude paramétrique qui consisterait à trouver une relation entre l'épaisseur de la coupole, la portée et les dimensions de la poutre. Cependant l'évolution des systèmes de structures est un processus lent et délicat. Ceci ne devrait toutefois pas nous empêcher nous étudiant de rechercher de nouvelles possibilités ou l'ingénieur d'adopter de nouvelles techniques. C'est ainsi que nous suggérons à la place de la coupole sphérique avec pendentif pour les surfaces carrées, une coupole sphérique reliée aux murs par une surface de raccordement. L'intérêt de ce problème réside dans la détermination de l'équation de cette surface qui devrait être tangente à la fois à la sphère et

aux murs.

Nous retenons que la géométrie sphérique avec une flèche  $h=lm$  et la géométrie sphérique avec pendentif et poutre conviendraient respectivement pour la couverture d'une surface circulaire et d'une surface carrée en attendant l'analyse d'autres types de géométrie. Les possibilités économiques que recèlent le géobéton dans le domaine de la construction ne sont plus à démontrer et constituent un facteur essentiel si l'on sait que les moyens financiers de nos populations sont très réduits; mais faudrait-il que des études soient faites dans ce domaine.

Nous dirons simplement qu'un domaine aussi ancien et aussi exploité que celui des structures ne peut être fructueux si l'on ne prodigue pas infiniment plus d'efforts que ceux exigés par une application routinière de principes établis.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1)- Billington, D.P. Thin Shell Concrete Structures, New York, 1ère éd, 1965,332p.
- 2)- Billington, D.P. Thin Shell Concrete Structures, New York, 2ème éd, 1982,373p.
- 3)- Aram, Smikian. Béton armé calcul aux états limites, montréal, 2ème éd, gaeton morin, 1989, 519p.
- 4)- Tournier, A.J. Géométrie vectorielle, montréal, 1ère éd, 1969, 596p.
- 5)-Lloyd, kahn. Habitats construction traditionnelles et marginales, paris, 1979,223p.
- 6)- Gallager, R.H. Introduction aux éléments finis, paris, 1ère éd, 1977, 433p.
- 7)- Zienkiewicz, O.C. La méthode des éléments finis, paris, 1ère éd, 1972, 533p.
- 8) collection CISCO. Les méthodes d'optimisation dans la construction, paris, 1ère éd, 1975,339p.
- 9)- Salvadori, Mario. Structure et Architecture, paris, 1ère éd, 1976, 270p.
- 10)- Prezemieniecki, J.S. Theory of matrix Structural Analysis, New York, 1ère éd, 1968, 467p.
- 11)- 2ème colloque de L'ISLE D'ABEAU. Construction en Terre, 1985, 434p.