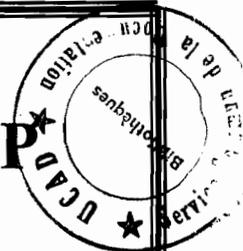


**UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP**



Gm. 0017



**ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE**

**Centre de Thiès**

**DEPARTEMENT DU GENIE MECANIQUE**

**Projet de fin d'études**

**En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur de  
conception**

Titre :

**ETUDE DU CHAMP THERMIQUE DANS  
UNE PLAQUE : APPLICATION A LA MESURE  
DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE DES  
MATERIAUX**

Auteur : M. Babacar SAMBA

Directeur : M. Salif GAYE,  
Docteur ès sciences physiques

Année : 2004 – 2005

# SOMMAIRE

Le but de ce projet est l'étude et la réalisation d'un appareil de mesure de la conductivité thermique des matériaux. Cet appareil pourra permettre aux étudiants de faire des travaux pratiques et des tests de thermique, et éventuellement à l'école de proposer des prestations aux industriels afin de valider leurs données techniques d'exploitation ou d'avoir des données fiables sur la conductibilité thermique de certains de leurs matériaux.

En effet, sachant l'importance considérable des déperditions thermiques dans le domaine du génie civil (ex : bâtiments) et du génie mécanique (installations industrielles), une telle étude se justifie amplement.

Pour mener à bien ce projet, nous adopterons le modèle qui consiste en une étude théorique unidimensionnelle des transferts thermiques dans une plaque plane verticale ayant un flux imposé sur une de ses surfaces par une plaque chauffante et dont la face opposée est exposée à l'air ambiant. Cette étude permettra de choisir la puissance nécessaire pour le chauffage ainsi que l'épaisseur optimale de la plaque en fonction de la nature de l'échantillon à tester (isolant ou conducteur de chaleur).

En outre, une étude économique sera effectuée en vue de minimiser le prix de revient de l'appareil.

Mots clés : Conductivité thermique – appareil – mesure – conception

# DEDICACES

Je dédie ce travail à :

- Mon père pour son soutien inconditionnel et permanent
- Ma mère pour sa générosité et sa disponibilité
- Et à toute ma famille sans qui la réussite de ce travail aurait été profondément compromise.

# REMERCIEMENTS

J'aimerais porter mes sincères remerciements à l'encontre de :

- Monsieur Salif GAYE, DUT et Ingénieur Technologue GM, Docteur ès sciences physiques, et maître assistant à l'Ecole Supérieure Polytechnique, qui, au delà de son rôle d'encadreur principal, n'a ménagé aucun effort pour nous faire partager ses connaissances et son expérience et a facilité le bon déroulement de ce projet par sa disponibilité et son implication
- Monsieur Fadel NIANG, maître assistant et Professeur de procédés de fabrication et de science des matériaux à l'Ecole Supérieure Polytechnique qui a aussi fortement participé à la réussite de ce travail par sa disponibilité et ses conseils avisés.
- Monsieur Paul DEMBA, maître assistant à l'Ecole Supérieure Polytechnique pour son aide sans retenue et sa disponibilité.
- Monsieur Alassane DIENE, professeur de construction et fabrication mécanique.
- Monsieur Youssouf MANDIANG chef de département du Génie Mécanique.
- Monsieur Ngor SARR, maître assistant et professeur à l'Ecole Supérieure Polytechnique.
- Monsieur Ibrahima Ly, Professeur d'électricité
- Madame Rose Marie FAYE secrétaire du département Génie Mécanique pour sa gentillesse et sa disponibilité.

# Liste des Figures

1.1	<b>Matériau granulaire : vermiculite</b>	7
1.2	<b>polystyrène macroporeux</b>	7
1.3	<b>Matériau fibreux : laine de verre</b>	9
2.1	<b>Principaux éléments constituant un appareil à plaque chaude gardée</b>	16
2.2	<b>Enceinte climatisée (schéma de principe)</b>	17
2.3	<b>Configurations possibles pour réduire les pertes de chaleur latérales</b>	18
2.4	<b>Notations de la plaque chaude gardée et déséquilibre thermique entre centre et garde</b>	21
2.5	<b>Principe de la méthode fluxmétrique</b>	24
2.6	<b>Exemples schématiques de réalisation de thermopiles</b>	24
2.7	<b>Configurations d'appareils à fluxmètre</b>	27
2.8	<b>Sensibilité de différents fluxmètres par unité de surface, en fonction de leur épaisseur</b>	29
2.9	<b>Principe de la méthode du fil chaud</b>	31
2.10	<b>Méthode à symétrie cylindrique : appareil de type « gardé » (tube à essai)</b>	35
2.11	<b>Méthode à symétrie cylindrique : appareil de type calibré ou à correction calculée</b>	36
2.12	<b>Correction de Nukiyama (d'après NF EN ISO 8497)</b>	37
2.13	<b>Vue en coupe d'une boîte de mesure pour la méthode des boîtes</b>	38
2.14	<b>Méthode à deux fluxmètres en régime non stationnaire : évolution des flux thermiques</b>	41
2.15	<b>Méthode du fil chaud</b>	43
2.16	<b>Principe de la méthode flash</b>	44
3.1	<b>Modèle en régime permanent</b>	50
3.2	<b>Domaine (D) de fluide limité par une surface (S)</b>	51

3.3	<b>Répartition du champ thermique dans la plaque verticale</b>	55
3.4	<b>Model conceptuel</b>	60
3.5	<b>Model conceptuel</b>	64
3.6	<b>Evolution de la température aux centres des plaques</b>	67
3.7	<b>Distribution de la température dans la plaque en fonction de <math>T_0</math></b>	68
3.8	<b>Schéma de principe du model de l'étude</b>	69
3.9	<b>Répartition adimensionnelle des températures dans une paroi soumise à un changement brusque de température.</b>	76
3.10	<b>Flux de chaleur adimensionnel transmis vers ou à partir d'une paroi soumise à un changement brusque de la température.</b>	76

# Liste des Tableaux

<u>Tableau N°1</u>	Détermination de $B_i$ et de $F_o$ dans le cas des matériaux isolants	78
<u>Tableau N°2</u>	Détermination de l'épaisseur et de la puissance optimale dans le cas des matériaux isolants	79
<u>Tableau N°3</u>	Détermination de $B_i$ et de $F_o$ dans le cas des matériaux conducteurs de chaleur	80
<u>Tableau N°4</u>	Détermination de la puissance et de l'épaisseur optimale dans le cas des matériaux conducteurs de chaleur.	81
<u>Tableau N°5</u>	Estimation de prix de l'appareil.	88

# LISTE DES ANNEXES

<u>ANNEXE 1</u>	Tableau récapitulatif des thermocouples	95
<u>ANNEXE 2</u>	Tableau de la FEM en microvolts ; la jonction de référence étant à 0°C	96
<u>ANNEXE 3</u>	Tableau des tolérances des thermocouples	97
<u>ANNEXE 4</u>	Caractéristiques thermophysiques de quelques métaux et alliages.	98
<u>ANNEXE 5</u>	Caractéristiques thermophysiques de quelques composés et solides non métalliques.	99

# Liste des symboles et abréviations

a	Diffusivité thermique	
A	Aire de la surface	[m <sup>2</sup> ]
b	Effusivité thermique (ou paramètre d'arrachement)	
c	Chaleur massique	[J/kg.K]
C <sub>p</sub>	Chaleur massique à pression constante	
C <sub>v</sub>	Chaleur massique à volume constant	
C	Capacité thermique	
d	Diamètre ou distance	[m]
D	Diamètre, ou diamètre hydraulique, ou distance	[m]
E, L	Epaisseur	[m]
g	Accélération de la pesanteur	
E <sub>e</sub>	Erreur de fuite latérale	
Φ <sub>e</sub>	Flux thermique de fuite	[W]
Φ	Flux thermique	[W]
E <sub>g</sub>	due au déséquilibre entre les températures de la zone centrale de mesure et de l'anneau de garde	
Φ <sub>g</sub>	Flux thermique de déséquilibre	[W]
ΔT <sub>g</sub>	Différence de la température aux bornes du déjoint de largeur g	[K]
E <sub>s</sub>	Erreur due aux conditions non symétriques	
E(V)	Force électromotrice délivrée par le fluxmètre	[V]
f	constante d'étalonnage du fluxmètre,	[W/(V · m <sup>2</sup> )]
U <sub>l</sub>	Coefficient linéique de transmission thermique	
R <sub>l</sub>	Résistance thermique linéique	[Ω/m]
Λ <sub>l</sub>	Conductance thermique linéique	

$F_{Cyl}$	Facteur de transfert (cylindrique)	
$R_{Cyl}$	Résistance thermique (surfactive)	$[\Omega/m^2]$
$\Lambda_{Cyl}$	Conductance thermique (surfactive)	
$\dot{Q}$	Puissance émise par le film	[W]
$\dot{Q}_1$	Puissance échangée entre l'intérieur et l'extérieur de la boîte	[W]
$\dot{Q}_2$	Puissance thermique traversant l'échantillon	[W]
V	Tension appliquée aux bornes de la résistance	[V]
R	Valeur de la résistance chauffante	$[\Omega]$
t	Temps	[s]
T	Température ou tension de cisaillement dans un fluide	[K]
$T_p$	Température de paroi	[K]
$T_\infty$	Température ambiante (loin de la paroi)	[K]
U	Vitesse ou composante de vitesse	[m/s]
$U_i$	Fluctuation de vitesse	[m/s]
v	Volume, ou volume spécifique (volume massique)	$[m^3/kg]$
V	Volume	$[m^3]$
x	Coordonnée cartésienne	
$x_i$	Coordonnées cartésiennes ( $i = 1, 2, 3$ )	
y	Coordonnée cartésienne	
z	Coordonnée cartésienne	
$\theta$	Différence ou fluctuation de température	[K]
$\lambda$	Conductivité thermique	$[W/m.K]$
$\mu$	Viscosité dynamique	
$\nu$	Viscosité cinématique	$[m^2/s]$
$\rho$	Masse volumique	$[kg/m^3]$
$\sigma$	Tension superficielle	
$\tau$	Contrainte de cisaillement dans un fluide	
$\tau_p$	Contrainte de cisaillement à la paroi	
$\varphi$	Densité de flux	$[W/m^2]$
h	Coefficient de convection	$[W/m^2.K]$
Bi	Nombre de BIOT	

Fo	Nombre de FOURIER
Gr	Nombre de GRASHOF
Nu	Nombre de NUSSELT
Pr	Nombre de PRANDTL
Ra	Nombre de RAYLEIGH
St	Nombre de STANTON

# Table des matières

SOMMAIRE	i
DEDICACES	ii
REMERCIEMENTS	iii
LISTE DES FIGURES	iv
LISTE DES TABLEAUX	vi
LISTE DES ANNEXES	vii
LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS	viii
TABLE DES MATIERES	xi
AVANT PROPOS	xvi
INTRODUCTION	1
<b><i>Chapitre I</i> : généralités sur les transferts de chaleur par conduction a travers les matériaux</b>	3
I / Matériaux homogènes	4
I .1 / conductivité thermique	4
a) Matériaux isotropes	4
b) Matériaux anisotropes	4
I.2 / Diffusivité thermique	5
I.3 / Effusivité	5
II / Matériaux hétérogènes	6
1) Phénomènes associés à la conduction	6
2) Matériaux poreux granulaires	7
a. Description	7
b. Influence de l'humidité sur la conductivité thermique	8
3) Matériaux semi transparents	8

a. Description	8
b. Matériaux fibreux semi transparents	9
III / Matériaux composites	10
1) Généralités	10
2) Caractéristiques	10
3) Conduction en milieu anisotrope	11
a. Généralités	11
b. Conductivités principales	12
 <b>Chapitre II : Techniques de mesure de la conductivité thermique</b>	 12
I / régime stationnaire	15
1. plaque chaude gardée	15
a. Principe	15
b. Limites de la méthode.	18
c. Evaluation des erreurs	20
d. Préparation des échantillons	23
2. gradient de température	24
a. Principe	24
b. Fluxmètres	28
c. Erreurs de mesure	29
3. fil chaud	31
a. Principe	31
b. Etude des solides	31
4. cylindres coaxiaux	32
a. Considérations générales et définitions	32
b. Objectifs de la méthode	34

c. Principe	35
d. Calcul des corrections, dans le cas où une conductivité thermique peut être définie	35
5. méthode des boîtes	37
a. Description de l'appareillage	37
b. Boîtes chaudes	37
c. Evaluation de la conductivité thermique	38
d. Détermination du coefficient de détermination C	39
e. Calcul de la conductivité thermique	39
II/ Régime non permanent (instationnaire)	39
1. Méthode à deux fluxmètres	39
a. Principe	39
2. Méthode du fil chaud	42
III / Méthode Flash	44
a. Thermogramme de la face arrière	45
b. Thermogramme de la face avant	46
IV / Echantillonnage	46
V/ Performances des méthodes – choix	46
1. Performance des méthodes	46
2. Choix de la méthode et mesure	47
<b><u>Chapitre III</u> : Etude d'un appareil de mesure de la</b>	
<b>conductivité thermique des matériaux</b>	49
I / Etude du champ thermique dans une plaque en régime permanent	50
1. Etude du modèle en régime permanent	50
1.1 Détermination du coefficient h	51
a. Les équations de la couche limite	51
b. Paramètres caractéristiques	53
c. Cas de la plaque plane verticale	55

1.2 Détermination de $\lambda$	58
II / Etude du champ thermique dans une plaque en régime non permanent	60
1. Etude du modèle en régime non permanent en ne tenant pas compte de la convection	61
a) Solution par la méthode de séparation des variables, séries de FOURIER	61
2. Etude du modèle en régime non permanent en tenant compte de la convection	65
3. Etude de notre modèle en régime non permanent	70
a. Fonctions de Green associées aux problèmes de Conduction de la Chaleur	70
b. Détermination de la fonction de Green pour un problème donné	73
4. Variation d'énergie interne de la plaque	76
5. Détermination de la puissance nécessaire pour le chauffage, ainsi que de l'épaisseur optimale de la plaque en fonction de la nature de l'échantillon	78
a. <i>Pour matériaux isolants</i>	78
b. <i>Pour matériaux conducteur de chaleur</i>	80
III / Conception et dimensionnement d'un appareil de mesure de la conductivité thermique des matériaux	82
1. Design du prototype	82
2. Mesure de la température par des thermocouples	83
a. Principe	83
b. Choix	84
c. Les câbles d'extension	84
VI / Etude de la rentabilité économique et financière	86
1. <u>La valeur d'un bien</u>	86

2. <u>Concept de "cash flow"</u>	88
3. <u>Estimation de coût de l'appareil</u>	88
CONCLUSION : Portée économique et pédagogique de la réalisation	89
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	90
ANNEXES	94

# *Avant propos*

L'Ecole Supérieure Polytechnique est un établissement qui regroupe, depuis la réforme de 1994, l'ex-E.N.S.U.T., l'ex-E.P.T., l'ex-E.N.S.E.P.T.

Elle est rattachée à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar et comporte deux centres : le centre de Dakar et le centre de Thiès.

L'E.S.P. a pour vocation de former des techniciens supérieurs (D.U.T.), des ingénieurs technologues (D.I.T.) et des ingénieurs de conception (D.I.C) mais aussi des diplômes du troisième cycle. Les durées de formation sont de deux ans pour le D.U.T, de trois ans pour le D.I.C.

A la fin de la dernière année du cycle d'ingénieur de conception, l'élève ingénieur est appelé à faire un projet de fin d'études. Ce projet lui permettra en outre de mettre en application les différentes connaissances théoriques et pratiques acquises lors de son cycle. Cette démarche s'inscrit aussi dans le cadre d'une familiarisation de l'élève ingénieur avec le secteur professionnel dans la mesure où elle lui permettra de mieux cerner le sens des responsabilités.

# INTRODUCTION

La détermination des paramètres thermophysiques des matériaux est actuellement un impératif majeur pour le développement dans la mesure où ces données nous permettent de concevoir et réaliser des infrastructures et ouvrages qui répondent à des besoins spécifiques ou d'optimiser des installations déjà existantes par l'introduction de matériaux dont les caractéristiques répondent mieux aux besoins.

Les retombés d'une telle étude justifient amplement les moyens investis ; cependant, vue la concurrence de plus en plus rude sur le marché, une étude en vue de mettre sur pied un modèle dont la réalisation diminuera considérablement le coût d'acquisition de l'appareil présente des avantages considérables.

Ainsi, une étude théorique en une dimension (1D) des transferts thermiques dans une plaque ayant un flux imposé sur la face  $x = 0$  par une plaque chauffante et dont la face opposée est exposée à l'air ambiant, permettra d'obtenir le modèle mathématique de l'étude.

Les régimes transitoires et permanents seront étudiés. Cette démarche permettra de choisir la puissance nécessaire pour le chauffage ainsi que l'épaisseur optimale de la plaque en fonction de la nature de l'échantillon à tester (isolant ou conducteur de chaleur).

Pour mener à bien ce projet, une étude théorique des phénomènes de conduction et convections sur une plaque plane verticale sera effectuée ; de même qu'une étude de la couche limite pour pouvoir déterminer la puissance dissipée en fonction des paramètres caractéristiques du matériaux ainsi qu le coefficient de convection. La réalisation de l'appareil nous permettra de voir les limites de validité du modèle qui théoriquement présente beaucoup d'avantage dans la

mesure où il permet de contourner les problèmes de perturbations thermiques causées par les thermocouples du fait même de leur emplacement.

**CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES**  
***TRANSFERTS DE CHALEUR PAR***  
***CONDUCTION A TRAVERS LES***  
***MATERIAUX***

## I / Matériaux homogènes

### I.1 / conductivité thermique

#### a) Matériaux isotropes

Le processus de conduction de chaleur s'effectue spontanément des corps les plus chauds vers les corps les plus froids. La relation fondamentale qui décrit ce phénomène a été proposée par Joseph FOURIER en 1822.

Considérons une surface élémentaire  $dS$ , entourant un point M à l'intérieur d'un matériau, traversée, durant l'unité de temps, par une quantité  $dQ$  d'énergie calorifique. La densité de flux de chaleur  $\Phi$  est définie par le vecteur module  $dQ/dS$ , d'origine M, dirigé dans le sens de l'écoulement de la chaleur. Selon la loi de Fourier, pour un corps isotrope, cette densité de flux est proportionnelle au gradient de température, soit :

$$\Phi = -\lambda \text{ grad } T \quad (1.1)$$

Par définition  $\lambda$  est le coefficient de conductibilité thermique ou conductivité thermique. Par convention, le sens des coordonnées croissantes est pris dans le sens de l'écoulement de la chaleur ; ainsi le gradient de température est de sens inverse de celui du flux de chaleur.

Elle caractérise la capacité du matériau à s'opposer à l'écoulement de la chaleur.

#### b) Matériaux anisotropes

Pour les matériaux homogènes anisotropes tels que les cristaux, le vecteur flux de chaleur n'est plus colinéaire au vecteur gradient de température. Dans ce cas, les composantes du vecteur  $\Phi$  sont des combinaisons linéaires des composantes du gradient de température. On a en coordonnées cartésiennes :

$$\Phi_i = -k_{i1} \frac{\partial T}{\partial x} - k_{i2} \frac{\partial T}{\partial y} - k_{i3} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (i = 1,2,3) \quad (1.2)$$

Les coefficients  $k_{ij}$  sont les composantes du tenseur  $\Lambda$  d'ordre deux. Si l'on effectue la multiplication contractée du tenseur  $\Lambda$  par le vecteur **grad T**, on obtient le vecteur densité de flux  $\Phi$ . La loi de Fourier s'écrit alors sous forme tensorielle :

$$\Phi = -\Lambda \cdot \text{grad } T \quad (1.3)$$

Pour les matériaux hétérogènes anisotropes tels que les composites, milieux fibreux, etc., la relation précédente peut également être utilisée si l'on peut définir un milieu homogène équivalent.

## I.2 / Diffusivité thermique

Lorsqu'un flux de chaleur, de densité  $\Phi$ , traverse un matériau isotrope et homogène, l'équation de conservation de l'énergie, en conduction pure s'écrit :

$$\rho.C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}\Phi = 0 \quad (1.4)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du matériau ;  $C_p$  sa capacité calorifique massique à pression constante. La densité de flux de chaleur  $\Phi$  est donnée par la relation (1.1) et l'équation (1.4) devient :

$$\rho.C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\lambda \cdot \text{grad}T) \quad (1.5)$$

Pour un intervalle de température suffisamment faible, on peut considérer que la conductivité  $\lambda$  est, en général, constante. L'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T \quad (1.6)$$

Le coefficient :

$$a = \frac{\lambda}{\rho.C_p} \quad (1.7)$$

Est appelé *diffusivité thermique* du matériau. Elle permet de caractériser la vitesse de diffusion de la chaleur dans le matériau.

## I.3 / Effusivité

Considérons un matériau semi-infini porté à une température uniforme  $T_0$ . La face de ce matériau située en  $x = 0$ , est portée brusquement à une température constante  $T_1$ . La résolution de l'équation de la chaleur permet le calcul de la densité de flux qui traverse le matériau en  $x = 0$  ; on obtient :

$$\Phi_0 = (T_1 - T_0) \left( \frac{\lambda \cdot \rho \cdot C_p}{\pi \cdot t} \right)^{1/2} \quad (1.8)$$

La densité de flux  $\Phi_0$  est proportionnelle au paramètre :

$$b = (\lambda \cdot \rho \cdot C_p) \quad (1.9)$$

$b$  est l'*effusivité thermique* du matériau. Cette quantité intervient lors des contacts thermiques entre deux milieux, la densité de flux transféré d'un milieu à l'autre dépendant de

l'effusivité de chacun des milieux. La température d'équilibre sera proche de celle du matériau qui a la plus grande effusivité thermique.

## II / Matériaux hétérogènes

### 1) Phénomènes associés à la conduction

La plupart des matériaux naturels ou artificiels ne sont pas des corps purs et comportent souvent des structures complexes. C'est le cas par exemple des matériaux poreux qui possèdent des cavités remplies d'un fluide, gaz ou liquide.

Des phénomènes de transferts de chaleur par convection et vaporisation peuvent alors avoir lieu dans de tels matériaux. De plus, lorsque les corps considérés sont semi transparents, des transferts radiatifs vont participer également aux apports de chaleur.

Lors d'un transfert de chaleur par conduction dans un milieu, il est donc possible d'avoir simultanément divers types de transferts par :

- Convection,
- Rayonnement,
- Conduction,
- Transport de masse,
- Evaporation, ébullition, condensation,
- Réactions chimiques.

Si l'on mesure un gradient de température, **grad T**, dans un matériau traversé par une densité de flux thermique  $\Phi$  constituée de différents types de transferts, on peut définir un paramètre global  $\lambda_g$  à l'aide de la relation classique :

$$\Phi = -\lambda_g \cdot \text{grad}T \quad (1.10)$$

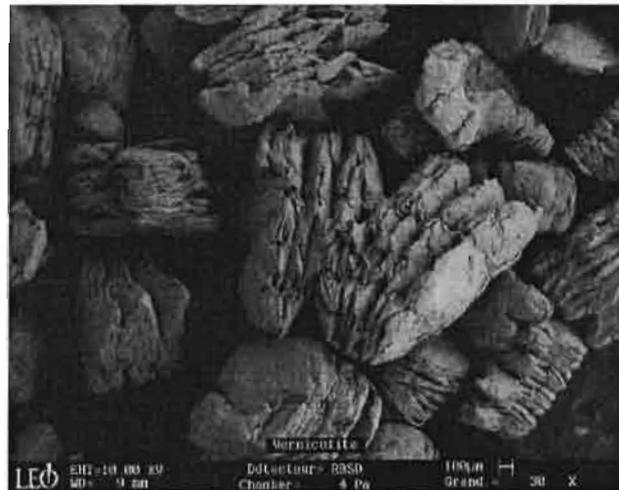
Une étude théorique des différentes composantes qui interviennent dans le transport global de la chaleur, permet éventuellement d'identifier la participation de chaque composante à la valeur de  $\lambda_g$ .

On décrit brièvement quelques exemples de matériaux hétérogènes au sein desquels les transferts thermiques ont été particulièrement étudiés.

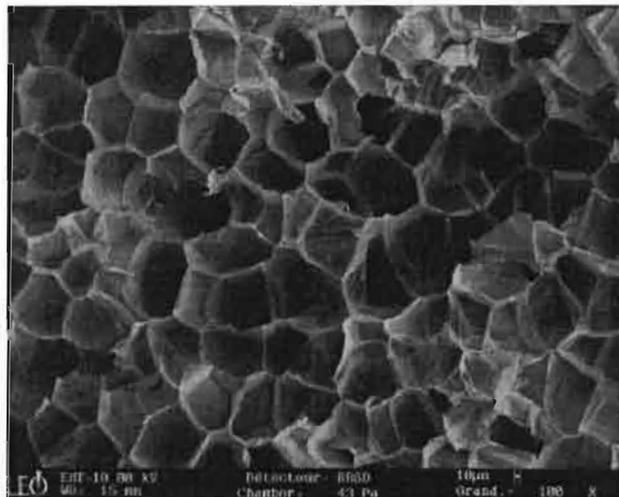
## 2) Matériaux poreux granulaires

### a. Description

La phase solide d'un milieu poreux granulaire est constituée, comme son nom l'indique, de granulats dont l'empilement délimite un réseau poreux de forme extrêmement complexe. Les cavités du réseau poreux sont généralement remplies d'un ou plusieurs fluides. Dans beaucoup de cas, ce sera l'air et éventuellement de l'eau ou un mélange de vapeur d'eau et d'air.



**Fig. 1.1 : Matériau granulaire : vermiculite**



**Fig. 1.2 : polystyrène macroporeux [4]**

La transmission calorifique à travers le réseau poreux peut alors se faire de différentes manières par :

- ✓ La conduction par l'air,

- ✓ La convection lorsque les dimensions des cavités sont suffisantes pour permettre des mouvements convectifs des gaz,
- ✓ La conduction par l'eau,
- ✓ La convection de l'eau sous l'action d'un gradient et de gravité, le déplacement du liquide sous l'action de forces capillaires,
- ✓ Le transport de chaleur par évaporation puis condensation de la vapeur sur les parois des pores.

Lorsque les températures des faces opposées des pores sont différentes, il en résulte une diffusion de la vapeur d'eau de la face chaude vers la face froide où la vapeur se condense ce qui correspond à un transfert de son enthalpie de vaporisation. L'eau de condensation est alors véhiculée par capillarité vers les pores suivants.

### **b. Influence de l'humidité sur la conductivité thermique**

Parmi les matériaux poreux granulaires, les propriétés thermiques des sols ont été l'objet de nombreux travaux. Les mesures de la conductivité globale des sols ont montré une influence importante de la saturation relative en eau sur les transferts thermiques qui peuvent varier du simple au double lorsqu'on passe d'un sol sec à un sol à forte humidité[1]

## **3) Matériaux semi transparents**

### **a. Description**

Lorsque les matériaux sont semi transparents, les transferts radiatifs participent au flux thermique global. Le phénomène radiatif est complexe puisque, dans un milieu semi transparent en équilibre thermique local, le rayonnement monochromatique, dans une direction donnée, résulte d'un antagonisme entre une atténuation par absorption et diffusion, et un renforcement par l'émission propre du milieu ainsi que par le rayonnement diffusé dans la direction considérée, en provenance de toutes les directions du milieu.

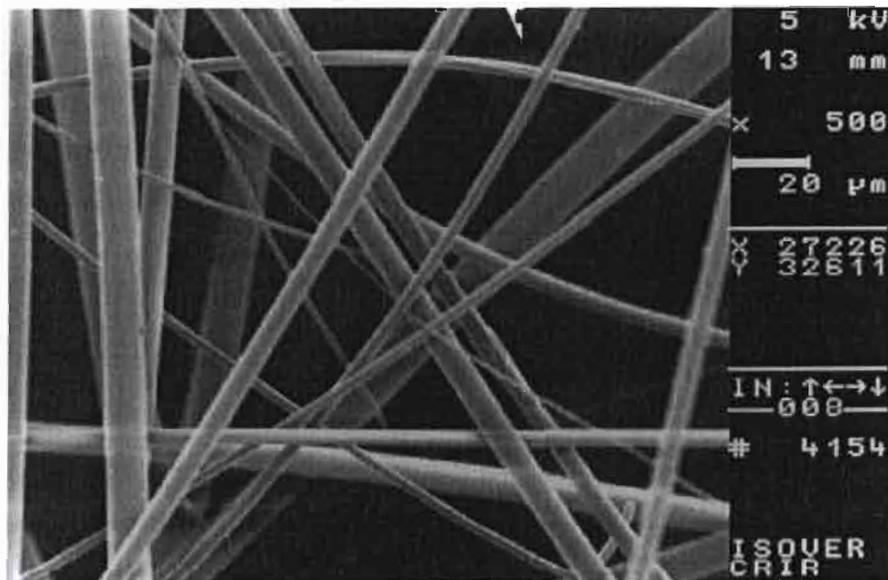
Lorsque l'on dispose d'un modèle de transport couplé rayonnement-conduction, la comparaison entre les flux de chaleur mesuré et calculé, permet l'identification de la conduction phonique (cas des solides) ou moléculaire (cas des fluides) d'un matériau semi transparent.

## b. Matériaux fibreux semi transparents

Les matériaux fibreux de faible densité, telle la laine de verre, se comportent comme des milieux poreux semi transparents dispersifs, dans lesquels la propagation de la chaleur peut avoir lieu par différents modes de transferts couplés qui sont :

- La conduction dans le fluide interstitiel, le plus souvent de l'air, tant que celui-ci demeure immobile ;
- La convection, dès que le fluide est en mouvement ;
- Le rayonnement, qui se propage à l'intérieur des pores par le double mécanisme d'absorption-emission et de diffusion par les fibres.

Actuellement, les modélisations tiennent compte des transferts couplés par convection et rayonnement. Pour que ces modèles soient représentatifs du matériau utilisé, les paramètres radiatifs de ce dernier doivent être évalués le plus précisément possible. En effet, le rayonnement peut être responsable de 25 à 50% du transfert de chaleur dans les isolations du bâtiment ou dans celle des fours[1].



**Fig. 1.3 : Matériau fibreux : laine de verre [4]**

### **III / Matériaux composites**

#### **1) Généralités**

Depuis quelques décennies, dans les industries aéronautiques et spatiales, on remplace les matériaux conventionnels par des matériaux nouveaux ayant des propriétés mécaniques ou thermiques particulières. Ces matériaux sont formés de plusieurs composants dont l'assemblage est déterminé pour obtenir les caractéristiques recherchées. On les regroupe sous le vocable de matériaux composites, et ils ont en commun le fait d'être hétérogène à l'échelle macroscopique. Les éléments de base ayant en général des caractéristiques thermiques ou mécaniques très différentes, leur comportement est souvent du type anisotrope.

On peut les classer en plusieurs types distincts :

- Matériaux à renforcement, c'est-à-dire constitués par des fibres (verre, carbone, kevlar, etc.) noyées dans une résine. Ces fibres peuvent être disposées de manière aléatoire mais le plus souvent elles sont placées parallèlement les unes aux autres, ou suivant un tissage perpendiculaire 2D ou 3D.
- Matériaux multicouches formés de couches élémentaires de fibres unidirectionnelles ou de tissus assemblées de façon croisée.
- Matériaux sandwich à structure alvéolaire formées d'un NIDA métallique (aluminium ou alliage d'aluminium) ou isolant (Normex, kevlar) et de deux semelles collées. Celles-ci peuvent être en matériau homogène ou éventuellement en matériaux composites.

L'épaisseur de ces matériaux multicouches ou monocouches peut être de l'ordre de 0,10mm pour le premier type, de 1mm pour le deuxième, et de plusieurs millimètres pour le dernier [1].

#### **2) Caractéristiques**

Tous ces matériaux hétérogènes ont un comportement thermique complexe. En effet, de par leur formation, il existe des chemins thermiques prépondérants. Si l'on veut modéliser ce comportement, on cherche en général à définir un milieu homogène équivalent. Ce milieu sera à caractère anisotrope, c'est-à-dire que son comportement est différent suivant la direction du transfert convectif.

Si la propriété d'anisotropie ne pose pas de problèmes majeurs, il en est tout autrement des conditions de l'homogénéisation. En régime thermique permanent, et pour des conditions thermiques normales, sans discontinuités importantes, la définition d'un milieu homogène

équivalent est possible et il permet d'obtenir des résultats tout à fait acceptables. Il faut naturellement considérer des dimensions d'une échelle suffisante pour effacer l'effet des hétérogénéités et pouvoir considérer des valeurs moyennes. Cette échelle est importante dans le cas des matériaux à structure alvéolaires (le diamètre d'une cellule étant de plusieurs millimètres en général), elle est beaucoup plus fine dans le cas des matériaux fibreux. En régime thermique transitoire, ou pour des conditions aux limites du type tache ponctuelle, il est difficile d'assimiler le comportement d'un composite à celui d'un matériau homogène équivalent identique pour toutes les conditions. Dans ce cas, le problème d'une caractérisation suffisante est souvent sans solution. Néanmoins, faute d'un modèle meilleur, on adoptera cette démarche et on cherchera toujours à définir les caractéristiques d'un matériau homogène anisotrope équivalent.

### 3) Conduction en milieu anisotrope

#### a. Généralités

Nous rappelons ici la généralisation de la théorie de Fourier au cas d'un milieu homogène anisotrope, qui exprime en un point les densités de flux en fonction des gradients de température suivant les axes du repère  $Oxy z$  [1].

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Les coefficients introduits définissent le tenseur des conductivités du milieu.

L'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$\begin{aligned} k_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (k_{xy} + k_{yx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \\ + (k_{yz} + k_{zy}) \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} + (k_{xz} + k_{zx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + P_{xyz} = C \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Les répartitions des températures sont essentiellement tridimensionnelles et la densité de flux transféré, suivant un axe, dépend des gradients de température le long des trois axes du repère  $Oxyz$ , soit par exemple :

$$-q_x = k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.13)$$

### b. Conductivités principales

On sait qu'il existe un trièdre tel que le tenseur des conductivités soit diagonal. Nous notons ce trièdre  $Ouvw$  et nous l'appelons repère des directions principales. Le tenseur diagonal est de la forme[1] :

$$\begin{pmatrix} k_u & 0 & 0 \\ 0 & k_v & 0 \\ 0 & 0 & k_w \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Où  $k_u$ ,  $k_v$ , et  $k_w$  sont les conductivités principales du matériau. Elles ont bien la signification classique d'une conductivité, c'est-à-dire qu'elles expriment la proportionnalité entre le flux transféré et le gradient de température dans la direction principale considérée :

$$q_u = -k_u \frac{\partial T}{\partial u}; \quad q_v = -k_v \frac{\partial T}{\partial v}; \quad q_w = -k_w \frac{\partial T}{\partial w} \quad (1.15)$$

Dans ce repère l'équation de la chaleur se réduit à :

$$k_u \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + k_v \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + k_w \frac{\partial^2 T}{\partial w^2} + P_{uvw} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.16)$$

Les écoulements de chaleur le long de ces directions principales sont monodimensionnels. Nous avons des comportements semblables à ceux des matériaux homogènes isotropes.

Cette formulation est la plus générale possible. Dans le cas des matériaux multicouches, plusieurs simplifications peuvent être faites :

- La normale au plan du matériau est la normale à chaque couche, et de par la constitution des couches élémentaires, telles que les couches unidirectionnelles, tissus, structure alvéolaire, c'est une des directions principales. Ceci entraîne :

$$k_{zz} = k_w; \quad k_{xz} = k_{zx} = 0; \quad k_{yz} = k_{zy} = 0 \quad (1.17)$$

### Mesure de conductivités principales

Dans le cas de l'échantillon décrit ci-dessous, nous pouvons mesurer les conductivités principales car les gradients de température sont uniformes et les densités de flux sont proportionnelles au seul gradient existant dans cette direction [1]:

$$q_u = -k_u \frac{\partial T}{\partial u}; \quad q_v = -k_v \frac{\partial T}{\partial v}; \quad q_w = -k_w \frac{\partial T}{\partial w} \quad (1.18)$$

Si le rectangle est découpé suivant des directions quelconques  $x$  et  $y$ , les répartitions étant bidimensionnelles, les gradients de température dans ces directions ne sont pas uniformes et la densité de flux suivant une direction est fonction des gradients dans les deux directions:

$$-q_x = k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.19)$$

Nous ne pouvons pas mesurer une conductivité mais simplement une conductance moyenne dans cette direction. Nous ne pouvons donc mesurer que les conductivités principales  $k_x, k_y$ , et  $k_w$  en découpant des échantillons suivant les directions principales.

Les techniques sont tout a fait identiques à celles utilisées dans le cas des matériaux isotropes. Ceci est normal car suivant une direction principale, le comportement est du type isotrope avec des coefficients différents dans les trois directions. Une difficulté peut apparaître dans le cas des produits monocouches ou multicouches fibreux car l'épaisseur des échantillons est souvent très faible.

Si l'on veut éliminer le gradient de température, il est nécessaire d'imposer des flux thermiques faibles donc difficiles à mesure avec précision. Les pertes inhérentes aux montages expérimentaux (rayonnement, conduction dans les fils, etc.) ne sont plus négligeables

Les termes  $k_{xx}, k_{xy}, k_{yy}$  ne sont pas directement mesurables. Lorsque l'on connaît le tenseur des conductivités principales, il est possible de déterminer le tenseur des conductivités dans tout repère en utilisant les formules de passage entre les repères :

$$\begin{aligned} k_{xx} &= k_u \cos^2 \alpha + k_v \sin^2 \alpha \\ k_{yy} &= k_v \cos^2 \alpha + k_u \sin^2 \alpha \\ k_{xy} &= (k_u - k_v) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.20)$$

# **CHAPITRE II : TECHNIQUES DE MESURE DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE**

## I / régime stationnaire

### 1. plaque chaude gardée

#### a. principe

Le principe de l'appareillage est de reproduire les conditions du transfert de chaleur à travers une plaque infinie limitée par deux plans parallèles et isothermes : c'est le cas du champ thermique uniforme et unidirectionnel (densité de flux thermique uniforme et constante en chaque point). Cette méthode est normalisée [2] [3].

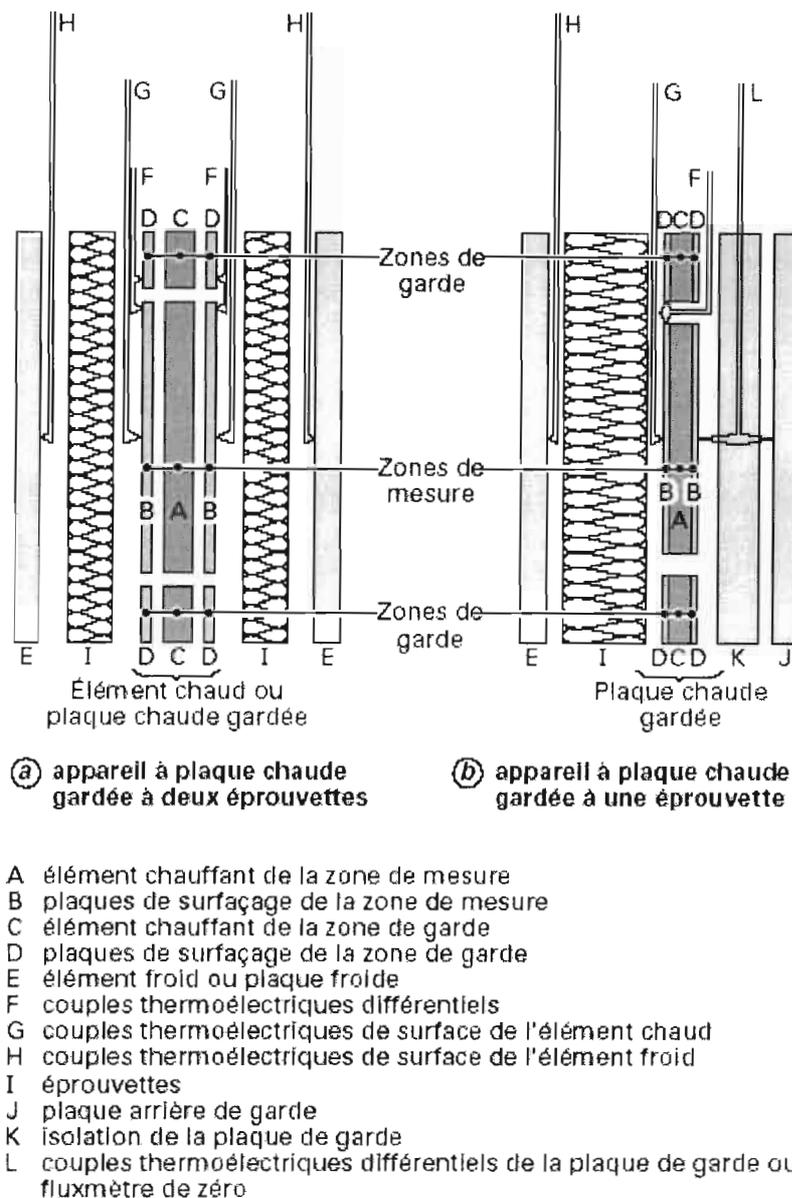
On suppose le matériau homogène en surface, c'est-à-dire selon des plans parallèles aux surfaces qui le limitent, mais il peut être hétérogène en épaisseur, dans la direction perpendiculaire aux surfaces.

Pour effectuer des mesures sur des éprouvettes planes de dimensions finies, étant donné que les matériaux ne sont pas des isolants parfaits, on doit prendre en considération les transferts thermiques aux bords de la plaque, qui ont pour effet de modifier le champ de température par rapport au cas idéal. On peut considérer, comme première hypothèse, que les perturbations dues aux bords modifient le champ thermique de l'éprouvette jusqu'à une distance de la périphérie de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'éprouvette. Si l'on est capable de mesurer la quantité de chaleur transmise par la zone centrale de l'éprouvette, on se retrouve proche des conditions idéales.

La deuxième hypothèse est de considérer que si l'on réchauffe par effet Joule une plaque métallique, appelée **plaque chaude**, située entre deux éprouvettes identiques en contact chacune, vers l'extérieur, avec une plaque de refroidissement, appelée **plaque froide**, et de températures égales mais inférieures à celle de la plaque chaude, la puissance électrique dissipée par effet Joule dans la plaque chaude se répartira en deux parties égales. Pour éviter les fuites latérales à travers la structure même de la plaque chaude, la zone centrale de cette plaque, appelée **zone de mesure**, est séparée par un déjoint (espace) de la partie périphérique, appelée **zone de garde** ou **anneau de garde** (d'où le nom de *plaque chaude gardée*). La zone de garde est régulée en température à l'aide d'une thermopile située entre le centre et la garde, de part et d'autre du déjoint, de façon à lui assurer en moyenne une température identique à celle de la zone de mesure.

La figure (2.1a) représente le schéma de principe de **l'appareillage dit à deux éprouvettes**. Sur cette figure sont représentés également les capteurs (généralement des couples

thermoélectriques) pour la mesure des températures des plaques et pour la détection de l'équilibre thermique entre la zone centrale de mesure et l'anneau de garde.

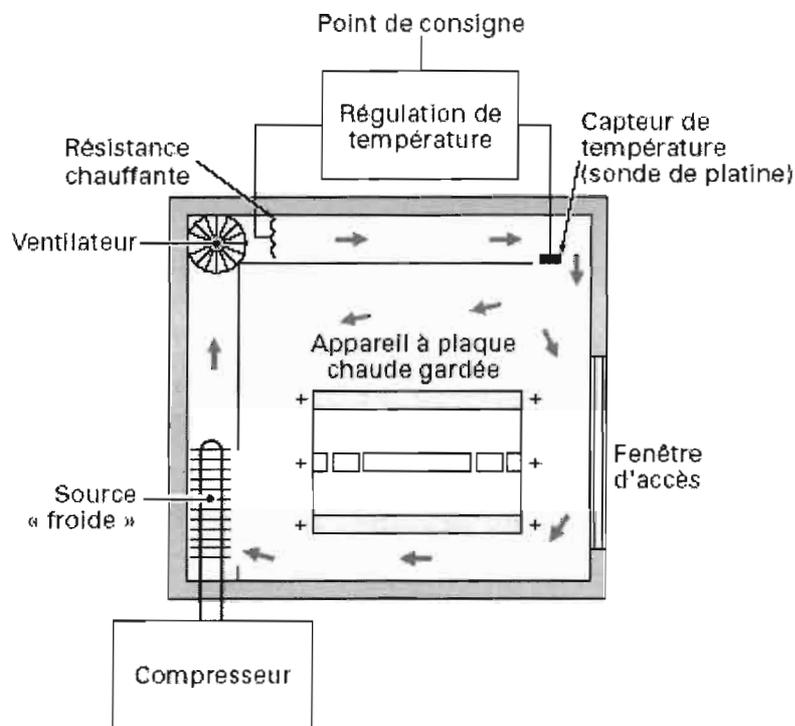


**Fig. 2.1 : Principaux éléments constituant un appareil à plaque chaude gardée [4]**

Quelquefois, on contrôle la température d'une des plaques froides pour qu'elle soit la même que celle de la plaque chaude ; dans un tel cas, le transfert de chaleur à travers l'éprouvette correspondante est nul. En réalité, la plaque froide est remplacée par une plaque chaude régulée en température à l'aide d'un fluxmètre de zéro (qui remplace une des éprouvettes) par rapport à la zone de mesure de la plaque chaude ; elle est appelée **plaque arrière de garde**. Cette configuration est dite **à une éprouvette** ; elle est moins fréquente que celle à deux éprouvettes et nécessite un réglage très fin de l'équilibre thermique entre la plaque chaude et

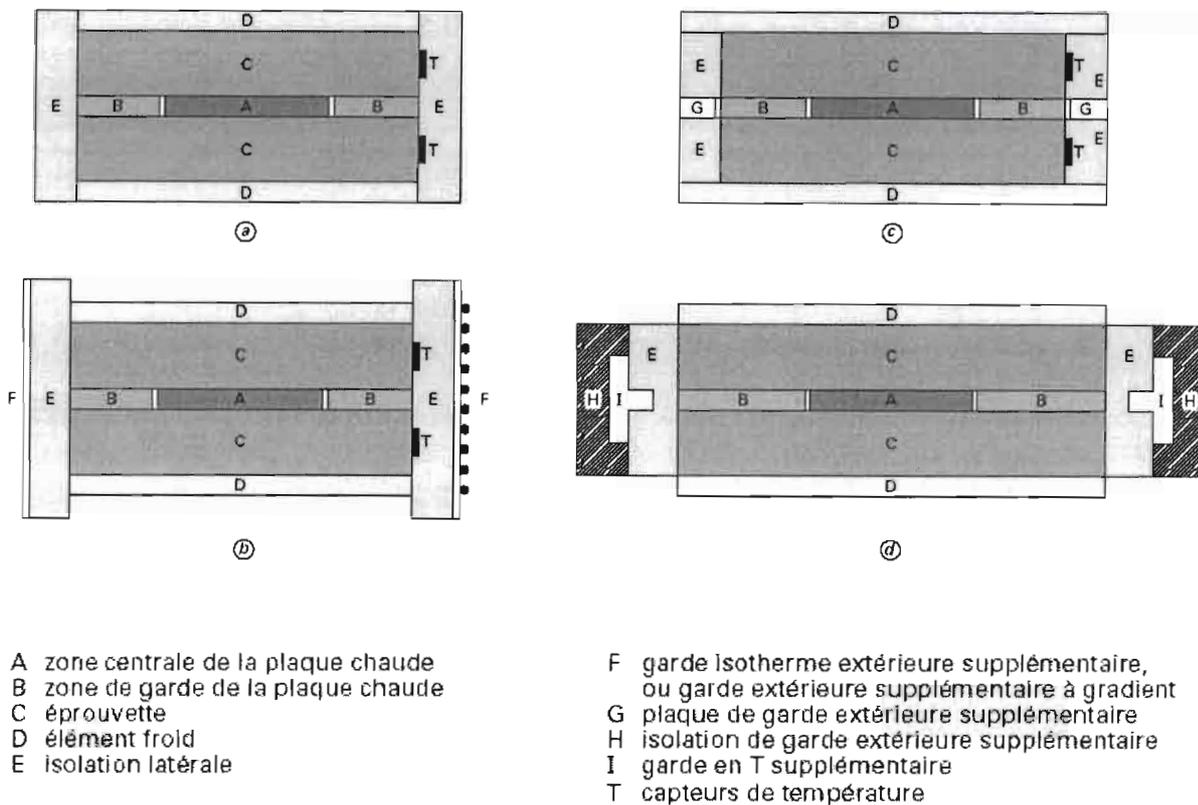
la plaque arrière de garde (ou contre-plaqué). Ce type d'appareillage ne nécessite pas des couples d'éprouvettes identiques et il est précieux quand on doit étudier le transfert de chaleur en fonction de l'orientation du gradient de température par rapport au champ gravitationnel (étude de la convection naturelle). Il est alors nécessaire que l'ensemble de l'éprouvette et de la plaque soit orientable. Un schéma de principe est donné sur la figure (2.1b).

En pratique, le contrôle de la répartition des températures au bord de l'éprouvette est très important et les appareillages de haute performance métrologique sont placés dans des enceintes climatisées à des températures proches des températures moyennes de mesure. L'enceinte climatisée est remplie soit par un matériau isolant (souvent sous forme de poudre ou de granule), soit par de l'air en circulation, conditionné en température et humidité (Figure 2.2).



**Fig. 2.2 : Enceinte climatisée (schéma de principe) [5]**

Quelquefois (pour les hautes températures en particulier), on ajoute soit des gardes auxiliaires isothermes (figure 2.3c, d), soit des gardes à gradient thermique (figure 2.3b).



**Fig. 2.3 : Configurations possibles pour réduire les pertes de chaleur latérales [4]**

### b. Limites de la méthode.

L'utilisation de l'appareillage à plaque chaude gardée est limitée soit par la conception de l'appareillage lui-même (possibilité de maintenir une densité de flux thermique constante, uniforme et unidirectionnelle dans l'éprouvette ; possibilité de mesurer la puissance, la température et les dimensions dans les limites de précision exigées), soit par la nature et la forme des éprouvettes (identité des épaisseurs et uniformité de structure des éprouvettes, ainsi que qualité de surface : planéité et parallélisme).

- **Résistances thermiques de contact** : pour des éprouvettes de faible résistance thermique et rigides, dont la forme ne peut être modifiée de façon appréciable par la pression des plaques de l'appareillage, si les surfaces en contact avec les plaques présentent des irrégularités, on introduit des résistances thermiques de contact non régulièrement réparties. Pour comprendre l'importance de cet aspect, on doit savoir que les conductivités thermiques des matériaux tels que les plastiques rigides, le béton ou le verre sont 10 à 100 fois supérieures à celle de l'air. Une lame d'air de quelques dixièmes de millimètre d'épaisseur est équivalente à la résistance thermique de quelques millimètres ou centimètres du matériau constituant l'éprouvette !

- **Limite supérieure pour la résistance thermique** : des résistances thermiques élevées impliquent la dissipation de faibles puissances électriques qui doivent rester en tout cas bien supérieures aux pertes latérales, aux pertes dues au déséquilibre de température entre la zone centrale et la zone de garde, ainsi qu'au niveau de bruit et à la stabilité des instruments de mesure de la puissance électrique et des systèmes de contrôle.

- **Limites des différences de température** : de faibles différences de température impliquent de faibles dissipations de puissance électrique, ce qui ramène le problème au cas précédent. De plus, il faut mentionner la difficulté des mesures de faibles différences de température. En pratique, pour des mesures sur des matériaux isolants, les différences de température couramment utilisées sont d'environ 20 K ; pour des matériaux relativement conducteurs (verre, béton), on peut descendre jusqu'à 10 ou 5 K.

La limite supérieure dépend de la possibilité du système de chauffage à fournir la puissance requise.

- **Épaisseur des éprouvettes** : les éprouvettes épaisses (\*) ont une large surface latérale exposée à l'environnement des plaques mesure ; donc les pertes latérales peuvent être assez importantes. Si le matériau est de type multicouche (constitué de couches de conductivités thermiques très différentes), le contrôle des pertes latérales devient presque impossible à maîtriser. La limite inférieure des épaisseurs (\*) est liée à la limite inférieure de la résistance thermique de l'éprouvette, cas déjà considéré, et à la difficulté de réalisation d'une très bonne qualité des surfaces, dont les irrégularités doivent être d'un ordre de grandeur beaucoup plus faible que l'épaisseur de l'éprouvette.

- **Définition de la surface de mesure** : la surface de mesure (c'est-à-dire la surface de l'éprouvette traversée par le flux thermique fourni par la zone centrale de mesure de la plaque chaude) est une fonction de l'épaisseur de l'éprouvette et de la largeur du déjoint entre la zone centrale et l'anneau de garde. Pour des épaisseurs très faibles, la surface de mesure tend vers la surface limitée par le bord de la zone centrale de la plaque chaude. Pour des éprouvettes épaisses, la surface de mesure s'approche de celle limitée par la ligne médiane idéale qui passe au centre du déjoint. Pour éviter des calculs trop complexes et incertains, on peut limiter l'épaisseur minimale à dix fois la largeur du déjoint.

(\*) Les ordres de grandeur dépendent de la résistance thermique du matériau et de la géométrie de l'appareillage. Pour des matériaux isolants légers, fibreux ou alvéolaires, on peut considérer comme éprouvette épaisse celle ayant une épaisseur de 15 cm environ (dimensions 50 cm [150 cm]) et comme limite inférieure 2 à 3 cm.



▪ **Homogénéité des éprouvettes** : lorsqu'on effectue le mesurage de la résistance thermique d'éprouvettes non homogènes, des distorsions du champ thermique existent dans l'éprouvette et peuvent entraîner de sérieuses erreurs. La région de l'éprouvette contiguë à la zone de mesure, particulièrement celle près des bords de cette zone, est la plus critique. Il est très difficile de donner des critères quantitatifs pour fixer des limites aux hétérogénéités des éprouvettes de façon à assurer des mesures de qualité acceptable ou à évaluer par calcul des erreurs qui en découlent. Un cas particulier est l'hétérogénéité uniformément distribuée, comme c'est le cas des matériaux cellulaires, fibreux ou en vrac. Dans ce cas, on exige que la dimension des hétérogénéités soit beaucoup plus petite, 10 ou 20 fois, que l'épaisseur de l'éprouvette. Un autre aspect est celui de l'homogénéité de l'échantillon au sein du lot de matériaux à partir duquel on a choisi l'éprouvette pour la mesure, si l'on attribue la propriété mesurée à l'échantillon. Ce n'est pas un problème de métrologie, mais plutôt un problème d'échantillonnage [6].

### c. Evaluation des erreurs

Pour calculer la résistance thermique d'une éprouvette, on doit connaître :

- la puissance électrique dissipée dans la zone de mesure ;
- la surface traversée par le flux thermique  $\Phi$  qui en découle ;
- la différence de température entre les surfaces de l'éprouvette.

Si l'on peut définir une conductivité thermique de l'éprouvette, on doit aussi connaître son épaisseur. On doit donc analyser les erreurs de mesure associées à ces quatre grandeurs. En ce qui concerne la puissance électrique et l'épaisseur, l'erreur de mesure est faible. En revanche, les erreurs dues, d'une part, au déséquilibre de température entre le centre et la garde de la plaque chaude, d'autre part, aux fuites thermiques par les bords des éprouvettes (fuites latérales) nécessitent une analyse plus approfondie. Ces erreurs peuvent être évaluées quantitativement à l'aide des **relations approximatives de Woodside** [2] [7].

Mais uniquement pour obtenir un **ordre de grandeur** de ces erreurs et apprécier si elles peuvent être considérées comme négligeables ou non. **En aucun cas, les résultats de mesure ne seront corrigés par les valeurs ainsi obtenues.** Néanmoins, la validité du modèle de Woodside a été vérifiée expérimentalement dans l'analyse de cas d'isolants où le transfert de chaleur est à prédominance conductive. Dans de tels cas, son application peut conduire avec succès à une évaluation quantitative rigoureuse de l'incertitude de mesure fonction des conditions de fonctionnement de l'appareil et du type de matériau utilisé. Des analyses plus

rigoureuses sont proposées par différents auteurs, mais il faut noter que, dans tous les cas, les résultats ont été obtenus en tenant compte uniquement de l'aspect conductif du transfert de chaleur, ce qui limite la validité des résultats, en particulier pour les matériaux isolants légers.

▪ **Erreur due aux fuites latérales par le bord de l'éprouvette :** l'erreur de fuite latérale par les bords de l'éprouvette,  $E_e$ , s'exprimant comme le rapport entre le flux thermique de fuite  $\Phi_e$  et le flux thermique  $\Phi$  qui serait transmis dans des conditions idéales, peut être calculée par la relation :

$$E_e = \frac{\Phi_e}{\Phi} = \left\{ \frac{d}{\pi \ell} \left[ e \ln \frac{ch[\pi(b+l)/d] + 1}{ch(\pi b/d) + 1} + (1-e) \ln \frac{ch[\pi(b+l)/d] - 1}{ch(\pi b/d) - 1} \right] \right\}^2 - 1 \quad (2.1)$$

Avec (Fig. 2.4)

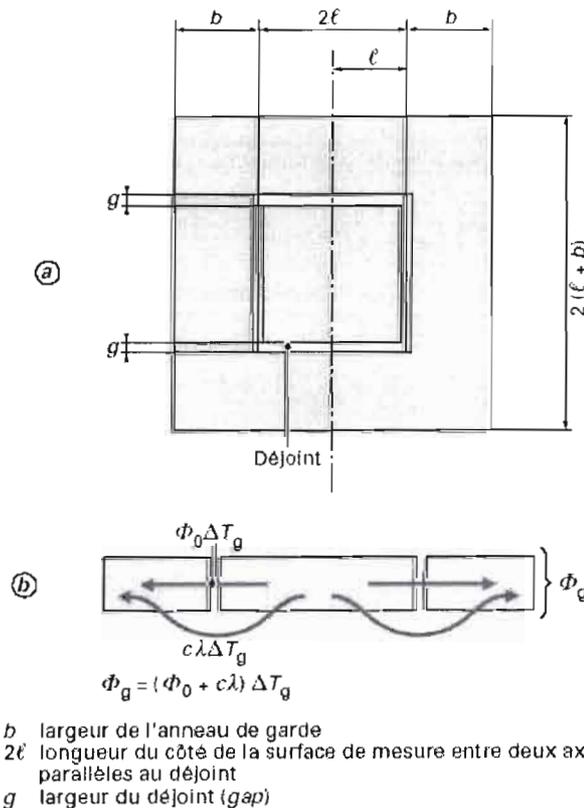
$b$  : largeur de l'anneau de garde (à partir de l'axe du déjoint),

$2\ell$  : longueur du côté de la surface de mesure entre deux axes parallèles au déjoint,

$d$  : épaisseur de l'éprouvette,

$e$  : coefficient sans dimensions tel que la température  $T$  du bord de l'éprouvette, supposée uniforme, soit :

$$T = T_2 + e (T_1 - T_2), \text{ où } T_1 > T_2$$



**Fig. 2.4 : Notations de la plaque chaude gardée et déséquilibrée thermique entre centre et garde [4]**

- **Erreur due au déséquilibre thermique entre centre et garde** : l'erreur  $E_g$  due au déséquilibre entre les températures de la zone centrale de mesure et de l'anneau de garde s'exprime par le rapport entre le flux thermique de déséquilibre  $\Phi_g$  (fuites thermiques dans la plaque de mesure) et le flux thermique  $\Phi$  qui serait transmis dans des conditions idéales :

$$E_g = \Phi_g / \Phi \quad (2.2)$$

$\Phi_g$  peut être calculé par la relation :

$$\Phi_g = (\Phi_0 + \lambda C)\Delta T_g \quad (2.3)$$

Où  $\Phi_0\Delta T_g$  représente le flux thermique direct dans le déjoint dû à la conduction par les circuits de chauffage, par les fils des capteurs de température ou dans les liaisons mécaniques;  $\lambda C\Delta T_g$  est le flux thermique de fuite à travers une éprouvette de conductivité  $\lambda$  (ou dans les deux éprouvettes dans les appareils à deux éprouvettes) ;

$\Delta T_g$  est la différence de la température aux bornes du déjoint de largeur  $g$  ;

$C$  est un coefficient qui peut être calculé par l'expression suivante :

$$C = \frac{16l}{\pi} \ln \frac{4}{1 - \exp\left(-\frac{\pi \cdot g}{d}\right)} \quad (2.4)$$

- **Erreurs sur la valeur de la température et des différences de température** : elles dépendent de la précision d'étalonnage des capteurs de température, de la précision et du bruit de fond des instruments de mesure, de la précision dans la définition du point de mesure de la température au moyen des capteurs et des erreurs dues aux résistances de contact entre les éprouvettes et les capteurs de température. C'est une source très importante d'erreurs, qui nécessite une analyse attentive, étant liée à la fois au placement des capteurs sur l'appareillage et aux caractéristiques de l'éprouvette.

- **Erreur due aux conditions non symétriques** : dans les appareillages à deux éprouvettes, les épaisseurs  $d$  ou les différences de température des deux éprouvettes peuvent n'être pas identiques. Si l'on suppose que les deux éprouvettes possèdent la même conductivité thermique  $\lambda$ , et que celle-ci est constante avec la température, l'erreur  $E_s = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$  aux

conditions non symétriques peut s'écrire de la façon suivante :

$$E_s = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\frac{d_A - d_B}{2d}\right)^2 - \frac{(T_{1A} - T_{2A}) - (T_{1B} - T_{2B})}{2(T_1 - T_2)} \cdot \frac{d_A - d_B}{2d} \quad (2.5)$$

Où l'indice A indique les quantités mesurées relatives à la première éprouvette, B les quantités mesurées relatives à la seconde, tandis que les termes sans indice représentent les valeurs moyennes. Si la conductivité thermique des deux éprouvettes est différente ou si elle dépend de la température, les formules qui définissent  $E_x$  sont plus complexes [3].

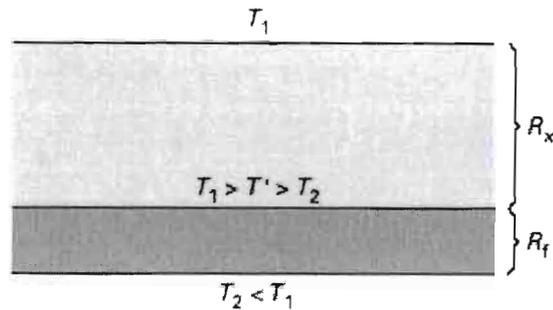
#### d. Préparation des échantillons

##### Que faut-il connaître sur les échantillons ?

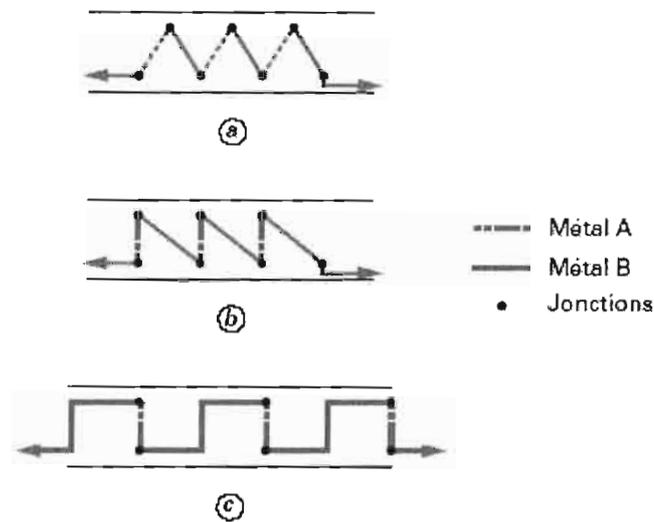
Parmi les règles énumérées ci-après, beaucoup s'appliquent aussi à d'autres méthodes de mesure. Avant tout, on doit savoir s'il existe des **spécifications** pour le matériau soumis au laboratoire ; dans ce cas, on doit en tenir compte pour choisir les conditions de mesure et la méthode d'échantillonnage. Dans les cas où l'on ne peut pas faire référence à des spécifications, on doit examiner le degré d'homogénéité de l'échantillon, le niveau de confiance recherché sur les résultats et déterminer, à partir de ces données, le nombre d'éprouvettes composant l'échantillon soumis au laboratoire. Ensuite, on doit considérer le type du matériau pour prévoir si l'on peut mesurer sa conductivité thermique ou si l'on doit se limiter l'épaisseur. On doit définir également le **conditionnement avant** la mesure, c'est-à-dire spécifier si l'on doit sécher l'éprouvette et à quelle température maximale ou si l'on doit laisser l'éprouvette en équilibre avec l'air à 23 °C et 50 % d'humidité (conditions standards de laboratoire). On doit aussi définir s'il faut faire un vieillissement préalable à la mesure. Dans le cas de produits avec surfaçage, on doit analyser le type du surfaçage et décider si l'on peut effectuer les mesures sur les éprouvettes telles qu'elles sont, ou si l'on doit éliminer les surfaçages. On doit vérifier la qualité de la **planéité** des surfaces. D'habitude, les pressions imposées sur les éprouvettes sont assez faibles (de 1 000 à 2 500 Pa si l'on ne travaille pas à épaisseur imposée) ; dans ces conditions, la majorité des matériaux isolants doit être considérée comme rigide. La limite de planéité est de l'ordre de 0,25 mm pour 1 m de distance entre deux points quelconques considérés sur la surface de l'éprouvette. Cette exigence est impérative pour réduire le plus possible les résistances thermiques de contact. Pour atteindre ces conditions, il est souvent indispensable d'usiner l'éprouvette à mesurer. On doit vérifier le **parallélisme** entre les deux surfaces de chaque éprouvette. Un parallélisme de l'ordre de 1 % de l'épaisseur est généralement requis.

## 2. gradient de température

### a. Principe



**Fig. 2.5: Principe de la méthode fluxométrique [1].**



**Fig. 2.6 : Exemples schématiques de réalisation de thermopiles.**

La méthode flux métrique a pour but, comme la méthode à plaque chaude gardée, d'établir une densité de flux thermique unidirectionnelle, constante dans le temps et uniforme dans l'espace, qui traverse simultanément la zone centrale de mesure de deux éprouvettes planes, superposées, situées entre deux surfaces planes isothermes, de températures imposées  $T_1$  et  $T_2 < T_1$  (Fig.2.5) [8] [9] [10]

La résistance thermique  $R_f$  d'une des deux éprouvettes est connue. Si la résistance thermique  $R_x$  de la seconde éprouvette est inconnue et si la température à l'interface des deux éprouvettes est notée  $T'$ , suite à la conservation de la densité de flux thermique à travers les deux éprouvettes dans les hypothèses énoncées, on peut écrire :

$$q = \frac{T_1 - T'}{R_x} = \frac{T' - T_2}{R_f} \quad (2.6)$$

Ce qui nous permet de déterminer  $R_x$  par rapport à  $R_f$ , selon la relation :

$$R_x = R_f \frac{T_1 - T'}{T' - T_2} \quad (2.7)$$

La différence de température entre les deux faces de l'éprouvette de référence de résistance thermique  $R_f$  est mesurée d'habitude à l'aide d'une thermopile contenant de nombreuses jonctions distribuées uniformément (figure 2.6) dans les plans isothermes de températures  $T'$  et  $T_2$ . Comme dans la plaque chaude, la thermopile occupe seulement une zone centrale de mesure pour éviter l'effet des fuites latérales. Le dispositif ainsi constitué ne fait que définir le principe de fonctionnement d'un fluxmètre thermique de type **à gradient**, dont la thermopile délivre une force électromotrice proportionnelle à la différence de température  $T' - T_2$  et, par voie de conséquence, à la densité de flux thermique  $q$  qui le traverse. La loi de fonctionnement de ce fluxmètre est exprimée par la relation :

$$q = \frac{T' - T_2}{R_f} = f.e \quad (2.8)$$

Avec  $f$  [W/(V · m<sup>2</sup>)] constante d'étalonnage du fluxmètre,

$e$  (V) force électromotrice délivrée par le fluxmètre.

L'épaisseur du fluxmètre est généralement beaucoup plus faible que celle de l'éprouvette à mesurer ; on a aussi généralement  $R_f \ll R_x$ .

Pour l'exploitation courante d'une telle méthode, nous n'avons ni besoin de connaître  $R_f$ , caractéristique thermique du fluxmètre, ni la différence de température  $T' - T_2$  ; il suffit de connaître, dans la relation (2.8), la constante d'étalonnage  $f$ , qui peut être déterminée à l'aide de l'appareil lui-même et d'éprouvettes étalons, de résistance thermique connue  $R_e$ .

Cette méthode de mesure, nécessitant un étalonnage préalable, est une **méthode de mesure relative ou par comparaison**. À partir des relations (2.7) et (2.8), la relation qui nous permet de calculer  $R_x$  devient, dans le cas de cette configuration :

$$R_x = \frac{T_1 - T'}{f.e} \quad (2.9)$$

Comme nous avons supposé  $R_f \ll R_x$ , alors  $T' \approx T_2$ , où  $T_2$  est la température imposée par la surface isotherme « froide » ou « chaude » de l'appareil sur laquelle est fixé le fluxmètre. La surface du fluxmètre en contact avec l'éprouvette doit donc être munie d'un capteur de

température. Si l'on peut associer à l'éprouvette mesurée une conductivité thermique, celle-ci sera donnée par la relation déduite de l'équation (2.9) :

$$\lambda = \frac{f}{T_1 - T'} e.d \quad (2.10)$$

Où  $d$  est l'épaisseur moyenne de l'éprouvette.

Cette conductivité thermique sera associée à la température moyenne de mesure  $T_m = \frac{(T_1 + T')}{2}$ . La constante d'étalonnage du fluxmètre,  $f(T)$ , sera fonction de la

température moyenne du fluxmètre, mais sera en général indépendante des densités du flux thermique mesurées si le fluxmètre a un comportement linéaire. La construction et la théorie des fluxmètres ont connu un développement considérable ces 25 dernières années, le fluxmètre étant considéré comme un des capteurs de base dans la métrologie thermique [10].

Les caractéristiques générales d'un **appareil à fluxmètre**, dans lequel une ou plusieurs éprouvettes ont été mises en place, sont représentées sur la figure (2.7).

L'appareil à fluxmètre doit comprendre un élément chauffant, un ou deux fluxmètres, une ou deux éprouvettes et un élément de refroidissement. Les performances, les procédures d'étalonnage et les erreurs peuvent être différentes entre les diverses configurations.

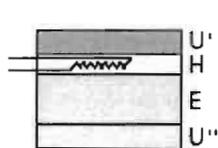
La configuration de la figure 2.7a est appelée **asymétrique, à une seule éprouvette** ; le fluxmètre peut être positionné contre l'un ou l'autre élément.

La configuration 2.7b est appelée **symétrique, à une seule éprouvette**.

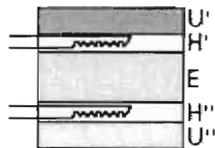
La configuration 2.7c est appelée **symétrique, à deux éprouvettes** ; dans ce cas, comme pour la plaque chaude gardée, les éprouvettes doivent être aussi identiques que possible et prélevées dans le même échantillon de matériau. Il est possible de réaliser un double appareil en utilisant l'autre face de l'élément chauffant et en ajoutant un autre fluxmètre ainsi qu'un élément de refroidissement. Des exemples d'appareils à **fluxmètre double** sont donnés sur les figures 2.7d et e. Dans la pratique, chaque configuration présente des avantages particuliers.

En ce qui concerne la configuration **a**, il est sans importance que le fluxmètre soit monté du côté chaud ou froid de l'appareil ; les erreurs dues aux pertes latérales sont similaires à celles de la plaque chaude gardée. Pour la configuration **b**, chaque fluxmètre indique un flux entaché des erreurs de mesure comme dans la configuration **a**, mais les erreurs des deux fluxmètres sont de signe contraire et se compensent partiellement. La configuration **b** nous donne ainsi la possibilité de faire des mesures sur des éprouvettes plus épaisses que celles utilisées dans le cas d'un appareil à plaque chaude gardée. La configuration **b**, à cause de la compensation entre les densités de flux données par chaque fluxmètre, a aussi l'avantage de s'approcher

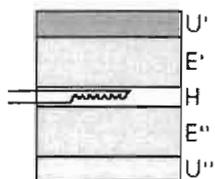
plus vite de la valeur moyenne de la densité de flux correspondant au régime établi, réduisant ainsi le temps de mesure. Si l'on suit indépendamment les indications données par chaque fluxmètre, on peut détecter également des irrégularités de fonctionnement pendant la mesure, comme celle qui résulte d'une migration d'humidité d'une face à l'autre de l'éprouvette et qui retarde l'établissement du régime stationnaire (transfert simultané de chaleur et de masse).



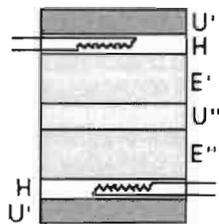
(a) configuration asymétrique, à une seule éprouvette



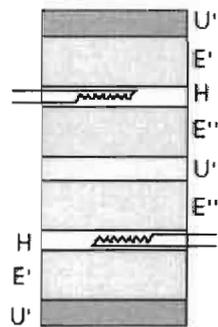
(b) configuration symétrique, à une seule éprouvette



(c) configuration symétrique, à deux éprouvettes



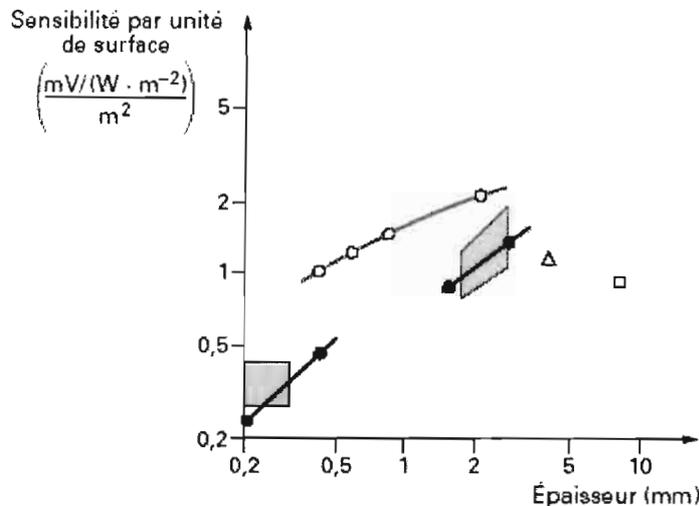
(d) appareil double



(e) appareil double

U', U'' éléments respectivement chaud et froid  
 H, H', H'' fluxmètres thermiques  
 E, E', E'' éprouvettes

**Fig. 2.7 : Configurations d'appareils à fluxmètre [4]**



Les courbes et points de mesure se rapportent à différents types de fluxmètres :

- Flux 2 (cuivre/constantan)
- Flux 1 (nickel/cuivre)
- △ Beckman et Whitley
- fluxmètre de Schmidt
- fluxmètre EKO
- fluxmètre de Thery

**Fig. 2.8: Sensibilité de différents fluxmètres par unité de surface, en fonction de leur épaisseur [4]**

## b. Fluxmètres

Il existe plusieurs **types de fluxmètres thermiques**. Celui dont le principe est décrit sur la figure 2.7a, b et c est appelé **fluxmètre à gradient thermique transversal**. On utilise en pratique deux types de construction pour les fluxmètres à gradient : à haute résistance thermique et à faible résistance thermique. L'utilisation de procédés de métallisation et de photogravure, propres aux techniques de réalisation de circuits imprimés, permet l'obtention de fluxmètres thermiques minces (0,1 à 1 mm), de grande surface de mesure (300 mm x 300 mm), d'excellente uniformité et très sensibles [11] (figure 2.8). Cette technologie a permis la réalisation de **fluxmètres à jonctions coplanaires** ou **fluxmètres à composante tangentielle** (gradient thermique longitudinal) [12] [13].

L'**étalonnage d'un appareil à fluxmètre** est une opération extrêmement délicate. La seule façon correcte d'obtenir la constante d'étalonnage est de monter dans l'appareil une éprouvette dont la résistance thermique est connue préalablement par une mesure avec l'appareil à plaque chaude gardée. Si le fluxmètre est monté directement dans l'appareil à plaque chaude, on obtient des constantes inexactes car l'épaisseur des fluxmètres est faible et l'on ne peut mesurer des éprouvettes trop minces, comme il a été expliqué dans la description

de la plaque chaude. Comme les fuites ou les apports thermiques latéraux dépendent des dimensions de la zone de garde et de l'isolation latérale, on n'a aucune garantie que les fuites ou les apports thermiques soient minimisés dans toutes les conditions de mesure. Pour s'assurer que l'appareil fonctionne convenablement avec des éprouvettes possédant différentes résistances thermiques, il faut l'étalonner avec des matériaux ayant des propriétés thermiques similaires à celles des matériaux à caractériser ; les extrapolations devraient être évitées chaque fois qu'une éprouvette étalon couvrant le domaine de mesure prévu existe. Ces **matériaux de référence** ne doivent être caractérisés que par une méthode de mesure absolue, telle que la méthode de la plaque chaude gardée.

Les fluxmètres sont sensibles à la température moyenne et la constante d'étalonnage varie elle. Il est nécessaire d'établir la courbe ou l'équation d'étalonnage (la constante d'étalonnage en fonction de la température moyenne) de chaque fluxmètre. L'étalonnage doit être effectué avec deux groupes d'étalons au moins, et de préférence trois, ayant des résistances thermiques très différentes les uns des autres, afin de vérifier la linéarité de la réponse de la force électromotrice  $e$  des fluxmètres en fonction de  $q$  [14]. Si la courbe  $q = F(e)$  n'est pas linéaire (la pente étant égale à la constante d'étalonnage  $f$ ),  $F$  variera avec  $q$  et il sera nécessaire d'en tenir compte après avoir vérifié les causes d'un tel manque de linéarité (fuites thermiques latérales excessives, par exemple). Un examen préliminaire de la sensibilité et de la linéarité du fluxmètre destiné à être monté dans un appareil à fluxmètre peut être effectué dans un appareil à plaque chaude gardée (de préférence un appareil à une seule éprouvette) en entourant le fluxmètre avec des éprouvettes de référence. La constante ou la courbe d'étalonnage de l'appareil à fluxmètre est déterminée à l'aide d'étalons ou matériaux de référence, de résistance thermique connue  $R_E(T'_m)$ , à partir de la relation :

$$f(T'_m) = \frac{\Delta T_E}{R_E(T'_m)\theta_E} \quad (2.11)$$

Où la différence de température  $\Delta T_E$  et la force électromotrice  $\theta_E$  sont mesurées dans l'appareil à fluxmètre lui-même à la température moyenne  $T'_m$ .

### c. Erreurs de mesure

La mise en oeuvre de la méthode est limitée par l'aptitude de l'appareil à produire une densité de flux thermique constante et unidirectionnelle à travers des éprouvettes, et par la précision dans la mesure de la température, de l'épaisseur, de la force électromotrice produite par le (ou

les) fluxmètre(s), etc. Les **sources d'erreurs** sont donc très similaires à celles déjà examinées dans le cas de la méthode de la plaque chaude gardée.

La condition idéale de densité de flux thermique unidirectionnelle ne peut être réalisée dans la totalité de la surface de l'éprouvette et du fluxmètre. Cela implique le fait d'accorder impérativement une attention spéciale aux points suivants :

- Problème des fuites thermiques par les bords de l'éprouvette (ou des éprouvettes) et du (ou des) fluxmètre(s) ;
- Différences entre les propriétés géométriques (épaisseur) et thermiques de l'éprouvette (ou des éprouvettes) étalon(s) d'une part et de l'éprouvette (ou des éprouvettes) à mesurer d'autre part ;
- Différences dans les conditions de température aux limites lors de la détermination de la résistance thermique de l'éprouvette (ou des éprouvettes) étalon(s) dans l'appareil à plaque chaude gardée et lors de la procédure d'étalonnage de l'appareil à fluxmètre au moyen de cette (ou de ces) éprouvette(s) ;
- Résistances thermiques de contact.
- Planéité et parallélisme des éprouvettes.

Néanmoins, certaines sources d'erreurs n'existent pas dans la plaque chaude, par exemple la sensibilité du fluxmètre au transfert de chaleur le long du fluxmètre lui-même si la température de la plaque de l'appareil sur lequel il est monté n'est pas uniforme. Si l'on considère la (figure 2.6), on s'aperçoit que la thermopile **a** est sensible à des gradients longitudinaux, tandis que les thermopiles **b** ou **c** ne le sont pas. La configuration **a** de la **figure 2.4** peut être très sensible aux irrégularités des températures dans le fluxmètre à cause des pertes irrégulières aux bords.

En règle générale, la **répétabilité** de la méthode fluxmétrique à des températures autour de la température ambiante, est de l'ordre de  $\pm 1\%$ , pouvant atteindre dans certains cas  $\pm 0,5$  à  $0,1\%$ . Cette qualité métrologique est très importante pour l'utilisation de cette méthode dans le contrôle de qualité industriel. Pour ces applications, les appareils en général fonctionnent à des températures moyennes  $T_m$  constantes (**par exemple 10 ou 24 °C**) permettant d'effectuer des mesures répétitives à fréquence élevée et donc d'obtenir des informations statistiques sur les propriétés thermiques des matériaux.

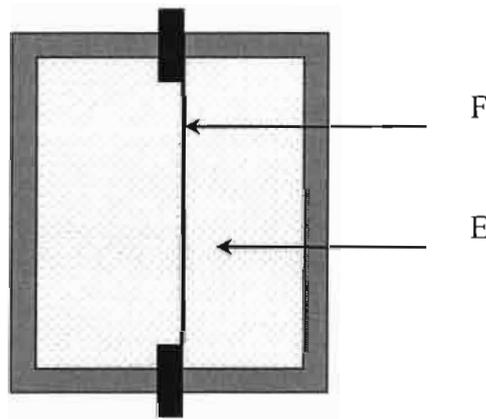
L'**incertitude de mesure** de la méthode est limitée par le procédé d'étalonnage et ne peut jamais être meilleure que celle de la méthode de la plaque chaude gardée utilisée pour la définition des étalons ou matériaux de référence.

### 3. fil chaud

#### a. Principe

Dans la méthode du fil chaud en régime stationnaire, un fil métallique chauffant est situé dans l'axe d'un échantillon cylindrique, fluide ou solide [1].

Le fil de rayon  $r_0$  est maintenu à une température constante  $T_0$  grâce à un chauffage électrique qui apporte un flux thermique  $Q$  par unité de longueur. Un cylindre externe, de rayon  $r_1$ , est maintenu à une température uniforme et constante  $T_1$  (voir Fig. 2.9)



**Fig. 2.9 : Principe de la méthode du fil chaud**

- F : fil chauffant
- E : échantillon

Si l'on suppose une conduction thermique purement axiale, pour un échantillon de conductivité thermique  $\lambda$  l'intégration de l'équation de la chaleur conduit à l'expression [1] :

$$Q = \frac{2\pi\lambda(T_0 - T_1)}{\ln(r_1 / r_0)} \quad (2.12)$$

Le flux thermique peut être calculé grâce à la mesure du courant qui traverse le fil chauffant et à celle de la résistance électrique de ce fil. La mesure de la température de l'enveloppe externe,  $T_1$ , s'effectue à l'aide d'un thermocouple. La température  $T_0$  du fil, peu différente de celle du cylindre extérieur, peut être déterminée en mesurant la résistance du fil chauffant. La relation (2.12) permet alors le calcul de la conductivité thermique  $\lambda$ .

#### b. Etude des solides

Le fil chauffant peut être entouré d'un matériau pulvérulent ou granuleux ; il peut également être enrobé dans un matériau fondu ou un mortier qui se solidifie. Une étude de la

conductivité thermique de la silice 300 et 2100K a été réalisée par K.L Wray et T.J Connoly (1959) avec un fil chauffant enrobé d'un échantillon cylindrique de silice. Un fil de tungstène est soudé à l'intérieur d'un cylindre de silice ; il sert à la fois d'élément chauffant et de thermomètre, par la mesure de la résistance électrique. La surface extérieure du cylindre de silice est maintenue à une température  $T_1$  par une circulation d'eau. Le contact thermique entre le fil et le verre est en général excellent par suite de la technique de soudure employée dans l'industrie du verre. Les pertes radiatives du fil sont estimées à 2% de l'énergie électrique mise en jeu.

#### 4. cylindres coaxiaux

##### a. considérations générales et définitions

Les propriétés relatives au transfert de chaleur à travers un isolant pour conduites doivent être déterminées en utilisant des appareils à symétrie cylindrique plutôt que des appareils prévus pour des éprouvettes planes, tels que la plaque chaude gardée. Le matériau d'isolation sous forme de cylindre (*coquilles*) a souvent une morphologie anisotrope, différente de celle du même matériau sous forme de plaques : plans d'orientation des fibres, allongement des alvéoles par exemple, répartition radiale de masse volumique, etc. C'est la raison pour laquelle l'application d'une méthode à symétrie cylindrique est préférable pour ce type d'isolants. La symétrie cylindrique requiert des termes spécifiques qui ne s'appliquent pas aux éprouvettes planes ; nous les introduirons dans ce paragraphe [4].

- **Coefficient linéique de transmission thermique**  $U_l$  : densité linéique de flux thermique d'un isolant de longueur  $L$  divisée par la différence entre la température de la surface de la conduite,  $T_0$ , et celle de l'air ambiant,  $T_a$  :

$$U_l = \frac{\Phi / L}{T_0 - T_a} \quad (2.13)$$

- **Résistance thermique linéique**  $R_l$  : différence entre la température de la surface de la conduite,  $T_0$ , et celle de la surface extérieure de l'isolation,  $T_2$ , divisée par la densité linéique de flux thermique :

$$R_l = \frac{T_0 - T_2}{\Phi / L} \quad (2.14)$$

- **Conductance thermique linéique**  $\Lambda_l$  : inverse de la résistance thermique linéique :

$$\Lambda_l = 1/R_l \quad (2.15)$$

- **Facteur de transfert** (cylindrique)  $F_{Cyl}$  : il est défini par la relation suivante :

$$F_{Cyl} = \frac{\Phi \ln(d_2 / d_0)}{2\pi L(T_0 - T_2)} \quad (2.16)$$

Avec  $d_2$  diamètre extérieur de l'isolant,

$d_0$  diamètre extérieur de la conduite.

Pour qu'une **conductivité thermique**  $\lambda_{Cyl}$ , caractéristique intrinsèque du matériau, soit égale à  $F_{Cyl}$ , le matériau doit être homogène et opaque au rayonnement, et la conductivité thermique doit être indépendante de la température ou varier linéairement avec elle. En plus de cela, il est indispensable que l'éprouvette soit limitée par deux surfaces concentriques et isotherme chacune, sans résistance thermique de contact.

Il est clair que l'on doit être très prudent quant à l'identification de  $F_{Cyl}$  à une conductivité thermique  $\lambda_{Cyl}$ , caractéristique intrinsèque du matériau. En pratique, cette identification est faite, mais cela implique des approximations plus ou moins importantes.

- **Résistance thermique (surfactive)**  $R_{Cyl}$  : différence de température entre la surface de la conduite et la surface extérieure de l'isolant, divisée par la densité surfactive de flux thermique :

$$R_{Cyl} = \frac{T_0 - T_2}{\Phi / A} \quad (2.17)$$

Où la surface  $A$  doit être spécifiée (habituellement c'est la surface de la conduite, parfois la surface extérieure de l'isolant ou toute autre surface choisie).

- **Conductance thermique (surfactive)**  $\Lambda_{Cyl}$  : inverse de la résistance thermique surfactive  $R_{Cyl}$ .

La valeur de la conductance thermique surfactive est arbitraire puisqu'elle dépend du choix arbitraire de la surface  $A$ .

Dans le cas d'un matériau homogène dont la conductivité thermique  $\lambda_{Cyl}$  est définie comme ci-dessus, la conductance  $\Lambda_{Cyl}$  est donnée par la relation :

$$\Lambda_{Cyl} = \frac{2\pi L \lambda_{Cyl}}{A \ln(d_2 / d_0)} \quad (2.18)$$

Avec  $d_0$  diamètre extérieur de la conduite,

$d_2$  diamètre extérieur du matériau.

Si la surface est choisie de façon à être égale à la surface logarithmique moyenne, c'est-à-dire:

$$A = \pi L(d_2 - d_0) \ln(d_2 / d_0)$$

Alors :

$$\Lambda_{cyl} = 2\lambda_{cyl} / \ln(d_2 / d_0) \quad (2.19)$$

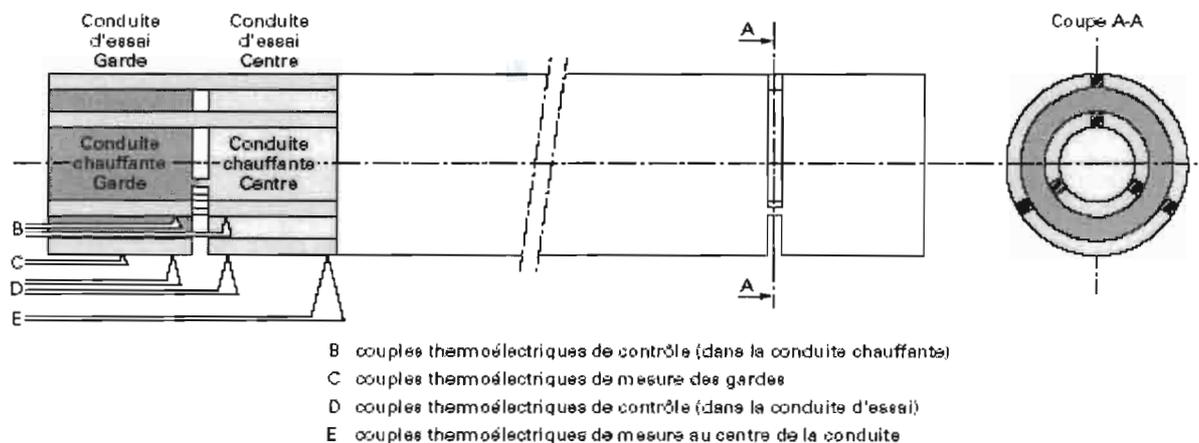
Comme  $(d_2 - d_0)/2$  est égal à l'épaisseur de l'isolant mesurée à partir de la surface de la conduite, la relation (2.18) est analogue à celle existant entre la conductance et la conductivité dans le cas d'une plaque plane.

### b. Objectifs de la méthode

Selon la préparation de l'éprouvette et l'installation utilisée, la méthode en symétrie cylindrique peut répondre à deux objectifs différents :

- Détermination de la **performance « utile »** ; dans un tel cas, l'éprouvette ne doit subir aucune altération et doit être mise en place comme dans une application normale ; les caractéristiques mesurées tiendront compte des effets introduits par les joints ou les fentes, de même que de la résistance thermique de l'espace d'air dû à un contact imparfait entre la conduite et l'éprouvette ;
- Détermination de **propriétés du matériau** : si l'on recherche les propriétés du matériau, on doit avant tout rappeler les limites d'application de la formule (2.6) ; ensuite, l'éprouvette doit être choisie ou modifiée de manière que tous ses éléments s'assemblent parfaitement, sans joints ouverts ni fentes, et qu'elle adhère parfaitement à la conduite sans aucun espace d'air ; la température de la surface extérieure de l'éprouvette peut être fixée en utilisant une gaine extérieure chauffée ou refroidie, ou en ajoutant une couche supplémentaire de matériau isolant.

### c. Principe



**Fig. 2.10 : Méthode à symétrie cylindrique : appareil de type « gardé »  
 (Tube à essai) [4]**

Le principe de fonctionnement de l'appareil à symétrie cylindrique est similaire à celui de la plaque chaude gardée. L'appareil est constitué d'une conduite chauffante génératrice d'une densité de flux thermique unidimensionnel (radial) dans sa zone centrale, déterminé avec une bonne précision. Le flux thermique axial, vers les extrémités de la zone centrale, doit être minimisé en utilisant soit des **gardes thermiques**, chauffées séparément, situées à chaque extrémité de la zone centrale de mesure (figure 2.10), soit des calottes isolantes aux extrémités et, dans ce cas, on effectue les corrections nécessaires sur la puissance dissipée. Ce dernier type de montage s'appelle **appareil de type calibré** ou **à correction calculée** (figure 2.11).

Des dispositifs de contrôle et de régulation permettent d'ajuster la puissance dissipée dans la zone centrale et de mesurer les températures de la conduite et de la surface extérieure de l'isolant. On ne dispose pas, à l'heure actuelle, d'une méthode générale d'analyse et de calcul pour évaluer les longueurs des gardes et le degré d'uniformité des températures, etc., pour assurer une précision désirée des résultats de mesure. En ce qui concerne l'effet du déséquilibre centre/gardes, on peut faire référence aux méthodes de calcul appliquées dans le cas de la plaque chaude gardée.

### d. Calcul des corrections, dans le cas où une conductivité thermique peut être définie

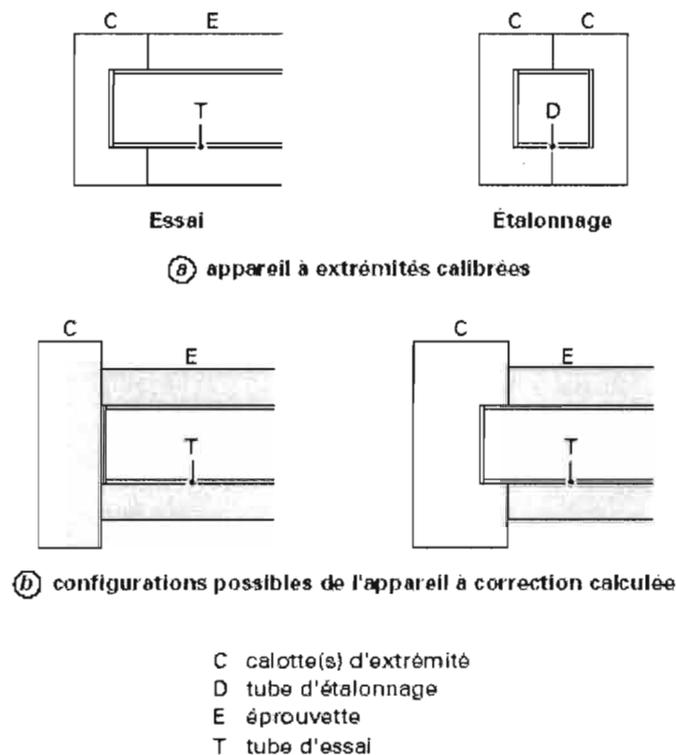
L'utilisation des appareils à correction calculée implique des calculs mathématiques pour corriger l'effet des fuites thermiques par les calottes. On peut citer les méthodes de **Van Rinsum** et de **Nukiyama** (NF EN ISO 8497) pour le cas des calottes calibrées.

- Les **fuites thermiques axiales** provoquent une chute de température vers les extrémités de la surface de la conduite, qui dépend des conductivités des éléments constituant la conduite, ainsi que de l'éprouvette. Si cette chute de température est mesurée et si l'on connaît les conductivités thermiques de la conduite et des éléments chauffants, il est possible de calculer la conductivité thermique *corrigée* de l'éprouvette à partir du flux thermique  $\Phi_{mesuré}$ .

Selon la méthode de Van Rinsum, on calcule la température  $\Delta T_{om}$  qui doit être ajoutée à la température mesurée au centre de la zone centrale de mesure à la surface de la conduite. On a dans ce cas :

$$\lambda_{Cyl} = \frac{\Phi \ln(d_2 / d_0)}{2\pi L(T_0 + \Delta T_{om} - T_2)} \quad (2.20)$$

Avec les mêmes notations que la relation (2.16).



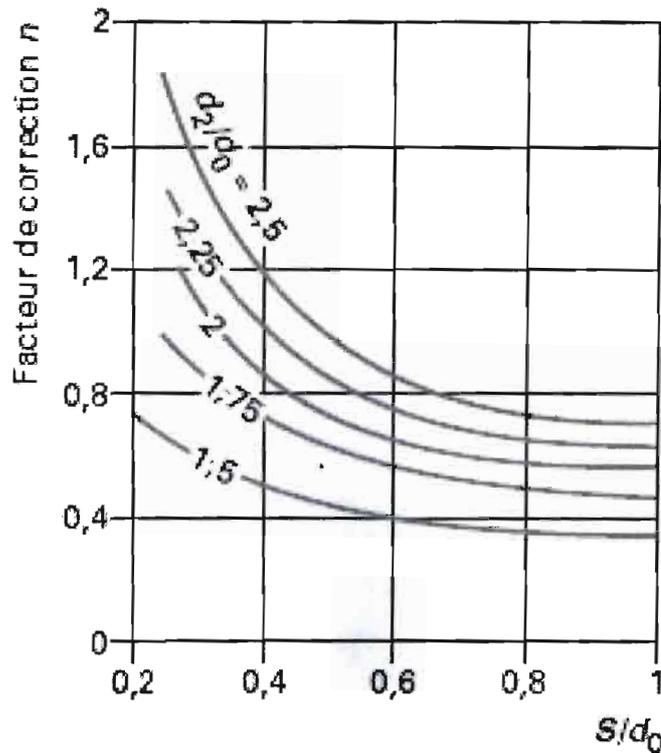
**Fig. 2.11: Méthode à symétrie cylindrique : appareil de type calibré ou à correction calculée [4]**

- Les **fuites thermiques à travers les calottes isolantes** ont le même effet sur la puissance électrique totale fournie mesurée que si l'on ajoutait une certaine longueur supplémentaire à la zone centrale de la conduite. Selon la méthode de Nukiyama, on calcule la

correction de longueur qui devrait être apportée à la longueur  $L$  de la zone centrale de mesure. Dans ce cas, nous obtenons :

$$\lambda_{Cyl} = \frac{\Phi \ln(d_2 / d_0)}{2\pi(L + nd_0)(T_0 - T_2)} \quad (2.21)$$

Le facteur  $n$  est donné par la figure ci dessous à partir du rapport des diamètres ( $d_2/d_0$ ) et du rapport entre l'épaisseur de la calotte et le diamètre du tube ( $S/d_0$ ).



**Fig. 2.12 : Correction de Nukiyama (d'après NF EN ISO 8497) [4]**

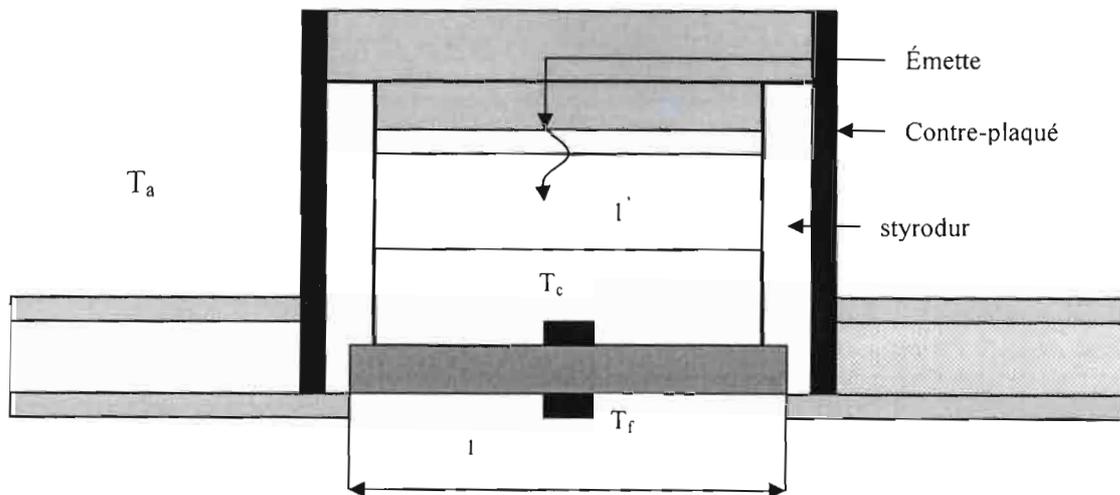
## 5. méthode des boîtes

### a. Description de l'appareillage

La figure (2.13) donne une vue générale du dispositif expérimental dont les principaux éléments sont décrits ci-après.

### b. Boîtes chaudes

Deux boîtes identiques permettent de faire deux mesures simultanées. Ce sont des boîtes en contre-plaqué isolées de l'intérieur par du styrodur. Chacune est munie d'un film chauffant collé contre sa base.



**Fig. 2.13 : Vue en coupe d'une boîte de mesure**

### c. Evaluation de la conductivité thermique

En régime permanent, le flux de chaleur traversant l'échantillon sera donc :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \quad (2.22)$$

Cette équation tient compte aussi bien du flux de chaleur traversant l'échantillon et qui est émis par le film chauffant, que de l'échange mutuel de chaleur entre l'extérieur et l'intérieur de la boîte.

Avec :

$$\dot{Q} : \text{Puissance émise par le film} : \dot{Q} = \frac{V^2}{R}$$

$$\dot{Q}_1 : \text{Puissance échangée entre l'intérieur et l'extérieur de la boîte} : \dot{Q}_1 = C(T_b - T_a)$$

C : coefficient global de déperdition thermique de la boîte [W/°C].

$$\dot{Q}_2 : \text{Puissance thermique traversant l'échantillon} : \dot{Q}_2 = \frac{\lambda}{e} S(T_c - T_f)$$

S = surface utile de l'échantillon [m<sup>2</sup>] ; e = épaisseur de l'échantillon [m]

V = tension appliquée aux bornes de la résistance [V]

R : valeur de la résistance chauffante [Ω]

Afin de limiter les déperditions, et pour déterminer la conductivité thermique avec une bonne précision, on règle l'émission de la chaleur à l'intérieur de la boîte de façon que T<sub>b</sub> soit légèrement supérieur à T<sub>a</sub>, (T<sub>b</sub> - T<sub>a</sub>) < 1°C

#### d. Détermination du coefficient de détermination C

Nous pouvons obtenir la valeur de C par une méthode théorique qui a été proposée par Carslaw et Jaeger, et qui consiste à déterminer les écoulements de chaleur à travers un dièdre en régime permanent, et celle de Langmir qui donne la valeur du coefficient pour un coin.

La détermination expérimentale du coefficient se fait en effectuant deux mesures de la conductivité thermique avec deux valeurs de flux différents. On mesure alors  $\Delta T$  et  $\Delta T'$ , et nous obtenons deux équations à deux inconnues  $\lambda$  et C, hormis ces deux valeurs tous les autres sont connus, et nous obtenons ainsi les valeurs de  $\lambda$  et C.

$$\text{Avec } \Delta T = (T_b - T_a) \text{ et } \Delta T' = (T_b - T_a)'$$

#### e. Calcul de la conductivité thermique

La conductivité thermique apparente en régime permanent est donnée par :

$$\lambda = \frac{e}{S(T_c - T_f)} \left[ \frac{V^2}{R} - C(T_b - T_a) \right] \quad (2.23)$$

$(T_c - T_f)$  = La différence de température entre la face chaude et la face froide de l'échantillon.

$(T_b - T_a)$  = L'écart de température entre l'extérieur et l'intérieur de la boîte.

### II/ Régime non permanent (instationnaire)

On rappelle que, d'une façon générale, les méthodes en régime non stationnaire s'appliquent à des matériaux **opaques**, caractérisés par une conductivité thermique  $\lambda$  et une diffusivité thermique  $a$  constantes et uniformes en l'absence de transfert de masse (**absence d'humidité** dans l'éprouvette). Des progrès récents dans la modélisation des transferts de chaleur dans des milieux semi transparents ont permis d'étendre ces méthodes de mesure à certains matériaux non opaques compacts ou poreux.

#### 1. Méthodes à deux fluxmètres

##### a. Principe

La méthode à deux fluxmètres représente une exploitation en régime transitoire de la méthode fluxmétrique décrite un peu plus haut, appliquée à la configuration symétrique à une seule éprouvette d'épaisseur  $d$ . Le schéma de cette configuration est représenté sur la figure 2.7b [15] [16] [17] [18].



L'isothermie des deux surfaces « chaude » ( $T_1$ ) et « froide » ( $T_2$ ) de l'appareil s'exprime par les conditions initiales suivantes :

Pour  $t = 0$  :

$$\left. \begin{aligned} z = d; \quad T(d) = T_2 \\ z = 0; \quad T(0) = T_1 = T_2 + \Delta T \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Où  $z$  est l'ordonnée et  $d$  l'épaisseur de l'éprouvette.

L'éprouvette à mesurer, mise brutalement en contact avec les deux surfaces isothermes de températures imposées  $T_2$  (*froide*) et  $T_1$  (*chaude*), sera traversée par une densité de flux thermique exprimée par la relation, en fonction du temps  $t$  et de l'ordonnée  $z$ .

$$q(z, t) = \lambda \frac{\Delta T}{d} \left[ 1 + 2 \sum (-1)^n \cos\left(n \frac{\pi z}{d}\right) \exp\left(-a \frac{n^2 \pi^2}{d^2} t\right) \right] \quad (2.25)$$

Avec  $a$  diffusivité thermique de l'éprouvette :

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

En se limitant au terme  $n = 1$  du développement en série (32), les densités de flux thermiques aux frontières sont :

$$\left. \begin{aligned} q_1 = q(0, t) &= \lambda \frac{\Delta T}{d} \left[ 1 - 2 \exp\left(-a \frac{\pi^2}{d^2} t\right) + 2 \exp\left(-\frac{4a\pi^2}{d^2} t\right) \right] \\ q_2 = q(d, t) &= \lambda \frac{\Delta T}{d} \left[ 1 + 2 \exp\left(-\frac{a\pi^2}{d^2} t\right) + 2 \exp\left(-\frac{4a\pi^2}{d^2} t\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Les relations (2.26) montrent que  $q_1$  et  $q_2$  atteignent leur valeur finale en régime stationnaire et que la constante de temps associée est :

$$\tau = \frac{d^2}{\pi^2 a} = \frac{\rho c d^2}{\pi^2 \lambda} \quad (2.27)$$

Avec  $c$  capacité thermique massique,

$\rho$  masse volumique.

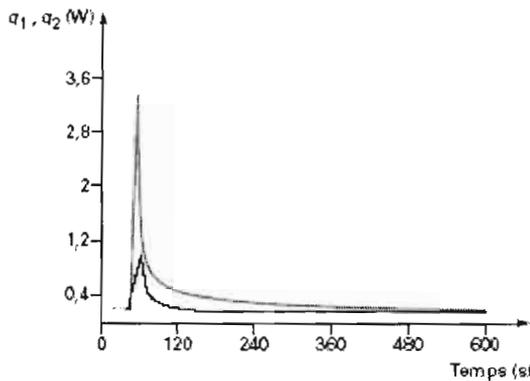
Le temps de mesure effectif peut être estimé entre  $4\tau$  et  $7\tau$ , suivant la précision désirée pour la détermination du régime stationnaire (2 % à 0,1 %).

La somme des deux flux est :

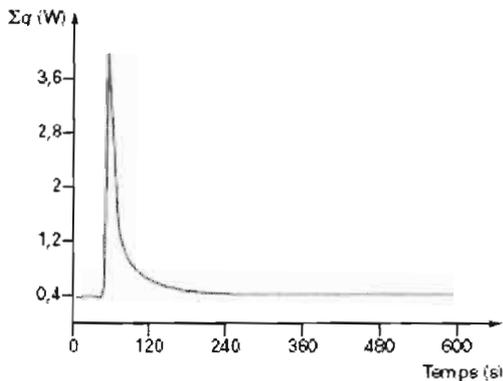
$$\sum q = q_1 + q_2 = 2\lambda \frac{\Delta T}{d} \left[ 1 + 2 \exp\left(-\frac{4a\pi^2}{d^2} t\right) \right] \quad (2.28)$$

Et, dans ce cas, la constante de temps est :

$$\tau_{\Sigma} = \frac{d^2}{4\pi^2 a} = \frac{\tau}{4} \quad (2.29)$$



Ⓒ évolution des valeurs absolues des flux chaud et froid à partir du changement d'échantillons



Ⓓ évolution de la somme des flux en fonction du temps

Polystyrène expansé :  $\lambda (*) = 0,037 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$\rho = 18 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$c = 1700 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$d = 0,049 \text{ m}$

$\tau = \frac{\rho c d^2}{\pi^2 \lambda} = 201 \text{ s, soit } 3,5 \text{ min}$

**Fig. 2.14** : Méthode à deux fluxmètres en régime non stationnaire : évolution des flux thermiques.

Ce qui exprime que  $\Sigma q$  va atteindre l'équilibre quatre fois plus vite que  $q_1$  ou  $q_2$  séparément (figure 2.14). Cela montre qu'il est théoriquement possible de diminuer par 4 le temps de mesure en suivant l'évolution de la somme des densités de flux thermique côté « froid » et côté « chaud », plutôt que chaque densité de flux thermique séparément.

L'avantage de cette méthode en régime transitoire est qu'elle permet d'utiliser des appareils à fluxmètres déjà existants et de les améliorer de manière à réduire le temps de mesure grâce à des modifications simples et peu coûteuses.

## 2. Méthode du fil chaud

La distribution radiale, en fonction du temps, de la température  $T(r, t)$ , autour d'une source linéaire de chaleur qui dissipe une densité linéique de flux thermique, est exprimée par la relation [19] [20] [21] [22] [23] :

$$T(r, t) = \frac{q_l}{4\pi\lambda} \cdot E\left(\frac{r^2}{4at}\right) \quad (2.30)$$

Où  $\lambda$  et  $a$  représentent respectivement la conductivité thermique et la diffusivité thermique du milieu considéré infini où se trouve située la source de chaleur ;  $E(x)$  est l'intégrale exponentielle :

$$E(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Après quelques modifications et simplifications, la relation (2.30) peut se mettre sous la forme:

$$\frac{dT(r, t)}{d(\ln t)} = \frac{q_l}{4\pi\lambda} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \quad (2.31)$$

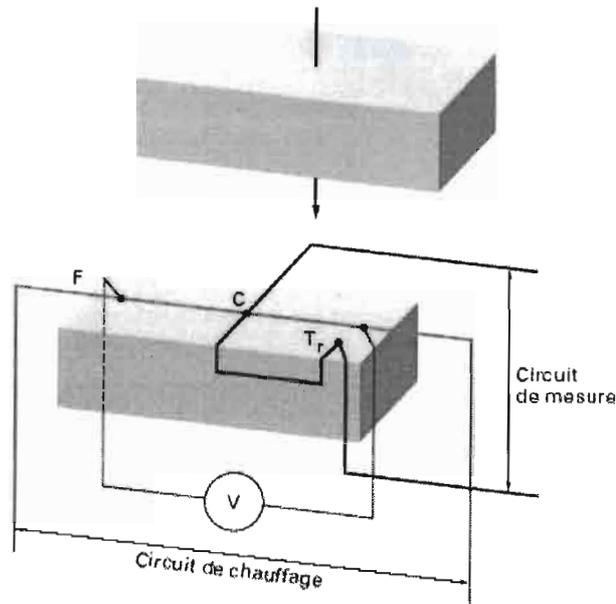
Si le point considéré se trouve sur la source de chaleur même,  $r = 0$ , la relation (51) devient :

$$\frac{dT(0, t)}{d(\ln t)} = \frac{T_2 - T_1}{\ln t_2 - \ln t_1} = \frac{q_l}{4\pi\lambda} \quad (2.32)$$

Nous remarquons que, dans ce cas, la diffusivité thermique  $a$  du milieu n'intervient plus et la conductivité thermique est donnée par la formule :

$$\lambda = \frac{q_l}{4\pi} \cdot \frac{\ln(t_2/t_1)}{T_2 - T_1} \quad (2.33)$$

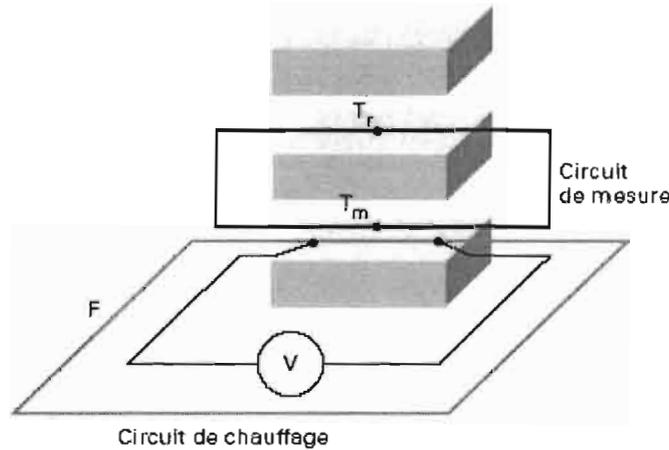
La **méthode du fil chaud standard** ou **méthode du fil chaud croisillon** (ISO 8894-1) est une méthode en régime transitoire dont le principe est de mesurer l'élévation de température d'une source de chaleur linéaire, le fil chaud encastré dans l'éprouvette de mesure.



- C croisillon de mesure, formé par le fil chaud et le couple thermo-électrique de mesure qui est soudé en son centre
- F fil chaud
- $T_r$  couple thermoélectrique de référence
- V voltmètre pour prise de tension

À chaque extrémité du fil chaud sont soudés deux fils du même type, l'un pour fournir le courant de chauffage, l'autre pour mesurer la chute de tension. Le couple thermoélectrique soudé au centre du fil chaud est connecté en opposition à un couple thermoélectrique de référence pour mesurer les modifications de température. L'éprouvette de mesure est constituée de deux parties identiques.

**(a) méthode du fil chaud croisillon**



- F fil chaud
- $T_m$  couple thermoélectrique de mesure
- $T_r$  couple thermoélectrique de référence, monté en opposition avec  $T_m$
- V voltmètre pour prise de tension

L'éprouvette est formée de deux parties identiques, complétées d'une couverture protectrice du même matériau

**(b) méthode du fil chaud parallèle**

**Fig. 2.15 : Méthode du fil chaud**

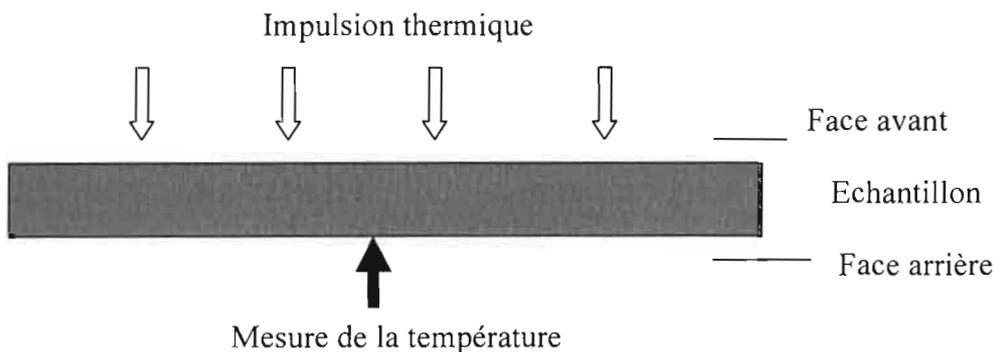
### III / Méthode Flash

Parmi les méthodes transitoires, la **méthode impulsionnelle, dite flash**, proposée par Parker en 1961 [24] est une des plus répandues dans la détermination des propriétés thermophysiques des matériaux.

Cette méthode ne s'applique pas dans des bonnes conditions aux matériaux isolants légers, de haute porosité, où le transfert de chaleur par rayonnement est important, mais elle a été appliquée avec succès aux matériaux composites, aux matériaux poreux de faible porosité et assez lourds, comme les bétons cellulaires, les granulats, etc. La méthode a été adaptée aussi aux matériaux semi-transparents compacts, comme la silice et le verre, donnant accès à une détermination directe à la diffusivité ou conductivité phonique du matériau.

Le **principe** de la méthode consiste à appliquer une perturbation thermique plus ou moins localisée dans le temps et dans l'espace (bref flux de chaleur fourni par un tube à éclat, un laser, etc.) sur la face avant d'une éprouvette cylindrique et à relever, sur la face arrière, l'évolution de température en fonction du temps. On établit ainsi le **thermogramme** du matériau. À partir de ce thermogramme, on détermine la diffusivité thermique de l'éprouvette (ou du matériau).

Une des principales difficultés de la méthode est la prise en compte des pertes thermiques par rayonnement et convection naturelle. De nombreuses techniques ont été proposées pour déterminer la diffusivité thermique d'une éprouvette, par identification du thermogramme expérimental avec un thermogramme théorique issu d'un modèle. Il faut citer dans ce domaine les travaux de **A. Degiovanni** et **D. Balageas**.



**Fig. 2.16 : Principe de la méthode flash**

### a. Thermogramme de la face arrière

Dans le cas idéal on suppose que l'énergie thermique de l'impulsion est instantanée et uniformément répartie sur la face avant de l'échantillon avec une densité surfacique  $Q$ . Le matériau étudié est supposé homogène, isotrope et opaque ; ces caractéristiques thermophysiques sont supposées être constantes avec la température, tout au moins dans les conditions de l'expérience ; on considère que les pertes thermiques des différentes faces sont nulles ; on note  $L$  l'épaisseur de l'échantillon,  $a$  sa diffusivité thermique.

La résolution de l'équation de la chaleur, dont la solution s'obtient aisément dans ce cas à l'aide de la transformation de Laplace, conduit à l'expression des variations de température sur la face arrière du matériau donné par (cf. *Propriétés thermophysiques des matériaux*):

$$T(L,t) = T_m \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 at}{L^2}\right) \right] \quad (2.34)$$

Où  $T_m$  est la valeur maximale de la température atteinte par la face arrière.

Parker a proposé de déterminer la diffusion thermique à partir du temps  $t_{1/2}$  qui est le temps nécessaire pour que la température  $T(L, t_{1/2})$  soit égale à  $T_m/2$ .

L'expression (2.34) conduit alors à :

$$a = \frac{1.38}{\pi^2} \frac{L^2}{t_{1/2}} \quad (2.35)$$

Pour ce cas idéal, les seules mesures de l'épaisseur  $L$  de l'échantillon et du temps de demi montée du thermogramme, permettent donc la détermination de la diffusivité thermique.

En particulier, il n'est pas nécessaire de connaître la densité surfacique  $Q$  d'énergie absorbée par l'échantillon. Cette quantité peut être calculée si l'on connaît la valeur du produit  $\rho C$  où  $\rho$  est la masse volumique de l'échantillon et  $C$  sa capacité thermique. On a alors :

$$Q = \rho C L T_m \quad (2.36)$$

Réciproquement, si l'on connaît la quantité d'énergie  $Q$  absorbée et la valeur de  $T_m$ , on pourra déduire la valeur de  $\rho C$  et par suite la conductivité thermique.

## b. Thermogramme de la face avant

L'évolution de la température sur la face avant est donnée par la relation :

$$T(0,t) = T_m \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 at / L^2) \right] \quad (2.37)$$

Pour de faibles valeurs de t, l'échantillon s'apparente à un mur semi infini et la température a pour expression :

$$T(0,t) \approx \frac{T_m L}{(\pi at)^{1/2}} \quad (2.38)$$

Si l'on connaît la densité d'énergie Q absorbée, on peut en déduire l'effusivité thermique.

## IV / Echantillonnage

Il est bien connu que des propriétés mesurées sur différents échantillons donnent des résultats différents ; les statisticiens nous donnent les outils pour interpréter une série de données expérimentales. Pour les isolants, en général, plus grande est la **dimension** des échantillons, plus faible est la dispersion des résultats, car on mesure une moyenne des petites irrégularités locales. On doit éviter, par exemple, les mesures sur des échantillons de matériaux isolants de quelques centimètres seulement.

On ne doit pas confondre la **répétabilité** des mesures avec l'**uniformité des lots** de matériaux. La répétabilité des appareillages doit être bien meilleure que l'uniformité des lots. Des produits isolants sous un bon contrôle de qualité peuvent avoir une dispersion, pour 90 % des pièces du lot, de quelques pour-cent : d'où la nécessité d'appareillages comme les fluxmètres ayant une répétabilité plus petite que 1 % pour le contrôle de qualité.

## V/ Performances des méthodes – choix

### 1. Performance des méthodes

On examine ici d'une façon très simplifiée l'incertitude de mesure et la répétabilité de différentes méthodes. Une analyse des erreurs, qui est très complexe, est suffisamment connue seulement pour la méthode de la plaque chaude gardée, moins pour les fluxmètres et les appareillages à symétrie cylindrique. La précision des appareillages en régime non stationnaire a été peu étudiée.

- La **répétabilité** la meilleure peut être obtenue avec les méthodes sur des échantillons de grandes dimensions et en régime stationnaire. Avec la méthode fluxmétrique, une

répétabilité meilleure que  $\pm 1 \%$  est couramment obtenue, pouvant aller dans certains cas jusqu'à  $\pm 0,1 \%$ . La même répétabilité peut être obtenue avec la méthode de la plaque chaude gardée avec un bon contrôle de la puissance électrique qui alimente la zone centrale de mesure et une stabilité dans le temps et l'uniformité dans l'espace du champ des températures. Des critères quantitatifs de limite de fonctionnement sont recommandés par la norme ISO 8302 et la réalisation d'une installation de hautes performances métrologiques (aussi bien en répétabilité qu'en incertitude de mesure) doit en tenir compte.

L'**incertitude de mesure** de la méthode absolue de la **plaque chaude gardée** pour des échantillons bons isolants ou faibles conducteurs peut être de 1 à 2 % autour de la température ambiante (la norme ISO 8302 la situe à mieux que  $\pm 2 \%$ ) ; à hautes ou basses températures, la limite de  $\pm 5 \%$  peut être considérée comme satisfaisante.

## 2. Choix de la méthode et mesure

Le choix de la méthode de mesure est lié à de nombreux paramètres, qui sont généralement les suivants :

- incertitude de mesure requise ;
- répétabilité nécessaire ;
- dimensions possibles pour les échantillons ;
- conditions dans lesquelles on doit conduire la mesure (humide ou sèche) ;
- temps acceptable pour l'exécution de la mesure ;
- coût acceptable pour chaque mesure.

- Si le premier but est une mesure de faible incertitude, la méthode absolue de la plaque chaude est d'habitude le seul choix possible.
- Pour des échantillons très homogènes, les **dimensions** peuvent être de quelques centimètres, mais, pour la majorité des matériaux isolants, la dimension des échantillons doit être de plusieurs fois leur épaisseur, de telle sorte que les dimensions typiques sont de 50 cm environ.
- Si l'on doit conduire des mesures sur des **éprouvettes humides**, certains chercheurs préfèrent les méthodes en transitoire pour réduire la possibilité de transfert de masse, mais l'interprétation des résultats est délicate.
- Si le **temps d'exécution des mesures** est un paramètre critique, les méthodes en transitoire sont préférables ; néanmoins, on doit vérifier que leur incertitude de mesure et leur répétabilité sont compatibles avec le but des mesures. Parmi les méthodes en régime

stationnaire, la méthode des fluxmètres est certainement plus rapide que la méthode de la plaque chaude gardée.

- Le **coût des méthodes de mesure** en régime établi est d'habitude plus élevé que celui des méthodes en régime transitoire et, parmi les méthodes en régime établi, la méthode de la plaque chaude gardée est la plus chère.
- Dans les **systèmes de contrôle de qualité industriels**, l'incertitude de la valeur absolue de la quantité mesurée n'a pas une grande importance ; ce qui est très important, c'est la rapidité de mesure, pour intervenir sur la production, et aussi une très grande répétabilité, pour détecter tout de suite les écarts anormaux et rectifier la production. Sur les lignes de production de matériaux isolants, les appareillages à fluxmètres sont les plus utilisés.

***CHAPITRE III : ETUDE D'UN***  
***APPAREIL DE MESURE DE LA***  
***CONDUCTIVITE THERMIQUE DES***  
***MATERIAUX.***

## I / Etude du champ thermique dans une plaque en régime permanent

En régime permanent, la température en chaque point du milieu est indépendante du temps.

L'équation générale :

$$\Delta T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(M,t)}{\lambda} = 0 \quad (3.1)$$

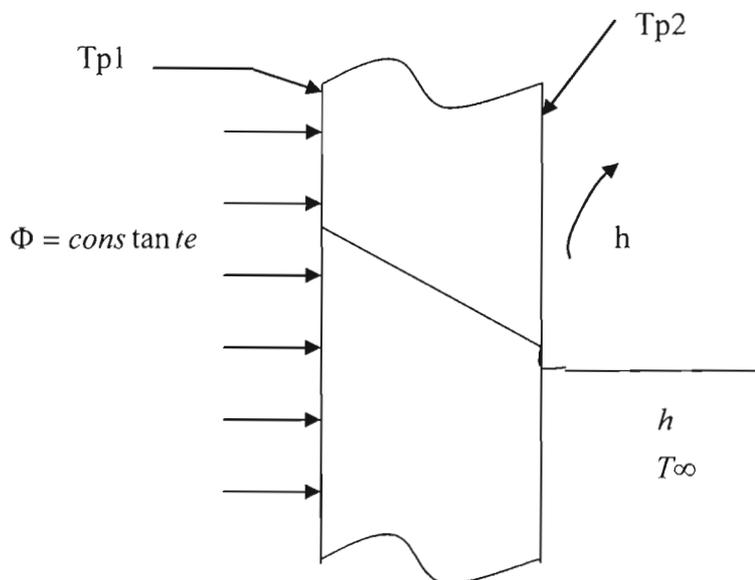
Se réduit à l'équation de Poisson (régime permanent) :

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0 \quad (3.2)$$

Dans le cas où le milieu comporte des sources, ou a l'équation de Laplace :

$$\Delta T = 0 \quad (3.3)$$

### 1. Etude du modèle en régime permanent



**Fig. 3.1 : Modèle en régime permanent**

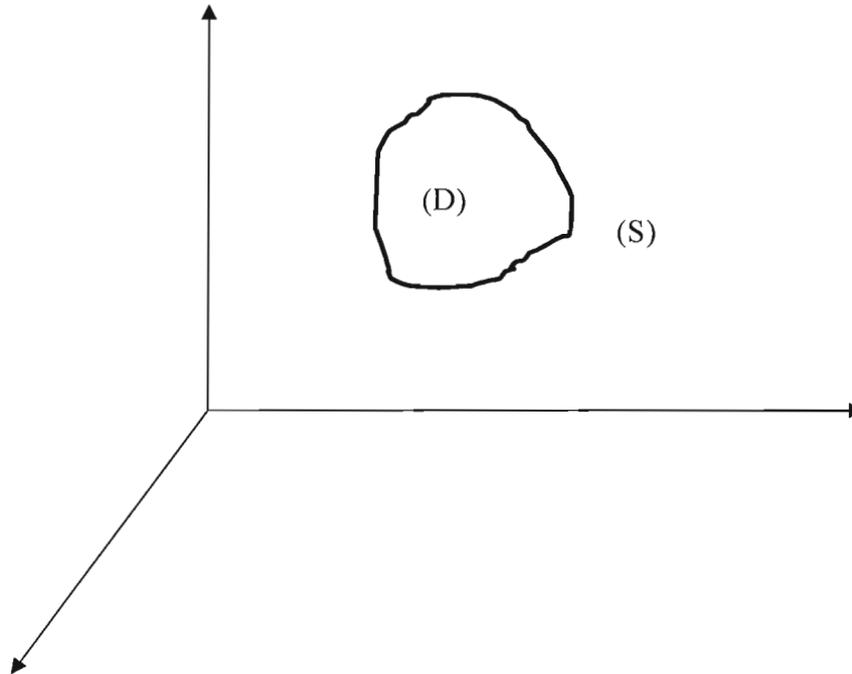
En supposant un transfert de chaleur unidimensionnel, la conservation des flux se traduit par l'égalité :

$$\Phi = \varphi \cdot S = \lambda \cdot \frac{T_{P1} - T_{P2}}{e} \cdot S = (T_{P2} - T_{\infty}) \cdot h \cdot S \quad (3.4)$$

Notons cependant que l'échange de chaleur proprement dit entre la paroi et l'environnement est laminaire et l'écoulement ne devient turbulent que relativement loin de la paroi chaude. De plus l'hypothèse du régime laminaire est d'autant plus justifiée que l'appareil sera essentiellement utilisé en laboratoire d'où des conditions particulières d'utilisation.

## 1.1 Détermination du coefficient h

### a. Les équations de la couche limite



**Fig. 3.2 : Domaine (D) de fluide limité par une surface (S)**

L'écoulement considéré est incompressible, à viscosité constante et permanente. Les forces extérieures sont supposées nulles.

Pour un écoulement quasi parallèle, du type couche limite on admet (hypothèse de PRANDTL) :

- ✓ L'encombrement transversal est petit devant le développement longitudinal.
- ✓ Les forces de viscosité sont du même ordre de grandeur que celles d'inertie.

Dans ce cas, les équations générales de l'écoulement d'un fluide newtonien sans source ni puits de matières, sont donc :

- *L'équation de continuité :*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{U} = 0 \quad (3.5)$$

- Les équations de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} = \rho \cdot F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \cdot \text{div} \vec{U} \right) + \left( \mu \cdot \text{grad} U_i \right) + \text{div} \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \right) \quad (3.6)$$

$$i = 1, 2, 3$$

- L'équation d'énergie :

$$\rho \cdot C_p \frac{dT}{dt} = \text{div} \left( \lambda \cdot \text{grad} T \right) + T\beta \frac{dp}{dt} + q + \bar{\phi} \quad (3.7)$$

Dans la plupart des cas usuels  $\lambda$  et  $\mu$  peuvent être considérés comme constants. Si de plus les vitesses et les écarts de température sont faibles et si l'axe  $x_3$  est dirigé suivant la verticale ascendante et que les forces de volume ne sont dues qu'à l'accélération de la pesanteur, on peut considérer que les équations suivantes décrivent le phénomène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \rho \vec{U} = 0 \\ \rho \frac{dU_i}{dt} = \rho \cdot g \cdot \delta_{i3} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \cdot \Delta U_i \\ \text{(equation de NAVIER - STOCKES)} \\ \frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p} \Delta T = a \cdot \Delta T \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$a$  étant la diffusivité thermique du fluide et  $\delta_{i3}$  le symbole de KRONECKER (égal à 1 si  $i = 3$  et à zéro autrement)

Dans le cas de la convection libre, ce sont les différences de masse volumique dans le fluide qui sont à l'origine de son mouvement.

Si l'on note  $\rho_\infty$  la masse volumique loin des parois chaudes, une particule solide de masse volumique  $\rho$  et de volume  $\Delta V$ , situé au voisinage d'une paroi d'échange, sera soumise à son poids,  $\rho g \Delta V$ , et à la poussée d'ARCHIMÈDE,  $\rho_\infty \cdot g \cdot \Delta V$ . La résultante des forces s'exerçant verticalement sur la particule sera donc :  $F = (\rho_\infty - \rho) \cdot g \cdot \Delta V$

Si l'on admet que, dans les autres termes des équations, la masse volumique  $\rho$  peut être considérée comme constante (approximation de BOUSSINESQ), les équations résultantes s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned}
 & \bullet \text{ Equation de continuité} \\
 & \text{div } \vec{U} = 0 \\
 & \bullet \text{ Equation de NAVIER-STOCKES :} \\
 & \frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} g \cdot \delta_{i3} + \nu \cdot \Delta U_i \\
 & \bullet \text{ Equation de l'énergie :} \\
 & \frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho_\infty \cdot C_p} \Delta T = a \cdot \Delta T
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

**Remarques :**

- ✓ Lorsque  $\lambda, \rho, C_p$  sont constants, l'équation d'énergie est linéaire en T.
- ✓ Si le fluide est en équilibre ( $\vec{U} = \vec{0}$ ), on retrouve l'équation de FOURIER en conduction thermique vive dans un solide :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho_\infty \cdot C_p} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \right] + q \quad (3.10)$$

**b. Paramètres caractéristiques**

Si l'on introduit d'une part les grandeurs caractéristiques suivantes :

$U_0$  : vitesse

$L$  : longueur

$\Theta$  : différence de température

$\beta$  : dilatabilité du fluide :  $\beta(T - T_\infty) = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty}$

Et si d'autre part :

$$X'_i = \frac{X_i}{L}, \quad p' = \frac{p}{\rho_\infty U_0^2}, \quad t' = U_0 \frac{t}{L}, \quad T' = \frac{T - T_\infty}{\theta}$$

Les équations précédentes deviennent alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{U}' &= 0 \\ \frac{dU'_i}{dt'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{g\beta\theta L}{U_0^2} (T' - T'_\infty) + \frac{\nu}{U_0 L} \Delta U' \\ \frac{dT'}{dt'} &= \frac{a}{U_0 L} \Delta T' \end{aligned} \quad (3.11)$$

Trois groupements de paramètres apparaissent dans ces équations :

- ✓  $\frac{g\beta\theta L}{U_0^2}$ , nombre de RICHARDSON, noté Ri, qui compare les effets de gravité à ceux d'inertie ;
- ✓  $\frac{U_0 L}{\nu}$ , le nombre de REYNOLDS ;
- ✓  $\frac{U_0 L}{a}$ , nombre de PECLET que l'on peut d'ailleurs remplacer par le nombre de PRANDTL,  $\nu/a$

Ainsi la solution d'un problème de convection libre se présente sous la forme d'une relation du type :

$$\frac{hL}{\nu} = Nu = f(\operatorname{Re}, Ri, \operatorname{Pr}) \quad (3.12)$$

Dans le cas où la convection libre est pure (la convection libre est dite « pure » lorsque le mouvement n'est dû qu'à des effets thermiques), le choix de la vitesse caractéristique est arbitraire. On peut par exemple prendre  $U_0^2 = g\beta\theta L$  et le nombre de NUSSELT ne sera plus fonction que de deux paramètres adimensionnels. On a l'habitude de prendre, soit le nombre

de PRANDTL  $\operatorname{Pr} = \nu/a$  associé au nombre de GRASHOF  $Gr = \frac{g\beta\theta L^3}{\nu^2}$ , auquel cas :

$$Nu = f(Gr, \operatorname{Pr}) \quad (3.13)$$

Soit d'utiliser le nombre de PRANDTL avec celui de RAYLEIGH,  $Ra = \frac{g\beta\theta L^3}{\nu \cdot a}$ . On a

alors :

$$Nu = f(Ra, \operatorname{Pr}) \quad (3.14)$$

(On remarque que  $Ra = Gr.Pr$ , en se souvenant que le nombre de GRASHOF compare les effets visqueux aux effets de gravité)

### c. Cas de la plaque plane verticale

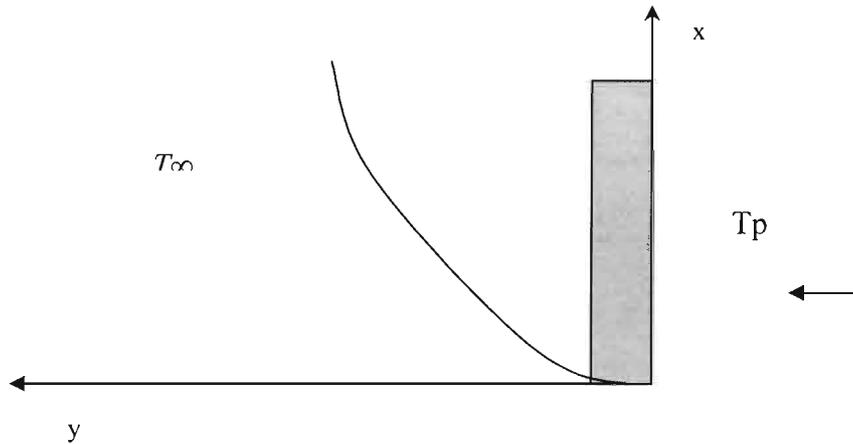


Fig. 3.3 : Répartition du champ thermique dans la plaque verticale

L'expérience prouve que, le long d'une plaque plane verticale chauffée, il existe une couche limite analogue à celle obtenue avec une convection forcée.

Lorsqu'on fait les hypothèses simplificatrices de la couche limite et lorsqu'on prend l'axe des  $x$  vertical, les équations établies plus haut deviennent (en régime permanent) :

✓ Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

✓ Equation de la dynamique

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \cdot \beta (T - T_{\infty}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.16)$$

✓ Equation de l'énergie

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.17)$$

Nous allons essayer de trouver *les régimes affines* de vitesse et de température. Pour cela posons :

$$\left. \begin{aligned} \theta_0(x) &= T_p(x) - T_{\infty} \\ \frac{u}{u_0(x)} &= f(\eta) \\ \frac{T - T_{\infty}}{\theta_0} &= \phi(\eta) \end{aligned} \right\} \text{avec } \eta = \frac{y}{y(x)} \quad (3.18)$$

$\phi$  est une fonction décrivant la distribution des températures et que l'on évitera de confondre avec une densité de flux  $\varphi$ .

En faisant le remplacement dans les équations de la dynamique et de l'énergie avec

$$F(\eta) = \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta, \text{ on obtient :}$$

$$u_0^2 \frac{Y'}{Y} \left[ -Ff' + \frac{u_0' \cdot Y}{u_0 \cdot Y'} (f^2 - Ff') \right] = g \cdot \beta \cdot \theta_0 \cdot \phi + \frac{\nu \cdot u_0}{Y^2} \cdot f'' \quad (3.19)$$

$$\text{et } -\frac{(u_0 \cdot Y)'}{Y} F\phi' + \frac{\theta_0'}{\theta_0} u_0 f = \frac{a}{Y^2} \phi'' \quad (3.20)$$

$f$  et  $\phi$  sont supposés être des fonctions de  $\eta$  seulement. Si  $Y' \neq 0$ , on obtient après division :

$$\begin{aligned} -Ff' + \frac{u_0'}{u_0} \frac{Y}{Y'} (f^2 - Ff') &= \frac{g \cdot \beta \cdot \theta_0 \cdot Y}{u_0^2 \cdot Y'} \phi + \frac{\nu}{u_0 \cdot Y \cdot Y'} f'' \\ -\frac{1}{a} Y(u_0 Y)' F\phi' + \frac{1}{a} u_0 Y^2 \frac{\theta_0'}{\theta_0} f\phi &= \phi'' \end{aligned} \quad (3.21)$$

Les coefficients de  $F\phi'$  et  $f\phi$  doivent être des constantes si les solutions sont affines, puisque dans ce cas là, les fonctions  $f, F$  doivent être indépendantes de  $x$ .

Les solutions sont alors du type :

$$u_0 = A \cdot x^m \quad \theta_0 = B \cdot x^n \quad Y = C \cdot x^p$$

Les coefficients des équations différentielles devant rester constants, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_0' \cdot Y}{u_0 \cdot Y'} = \frac{m}{p} \quad \frac{g \cdot \beta \cdot \theta_0 \cdot Y}{u_0^2 \cdot Y'} = \frac{g \cdot \beta \cdot B}{A^2 P} x^{n+1-2m} \quad \frac{\nu}{u_0 Y Y'} = \frac{\nu}{AC^2 P} x^{-m-2p+1} \\ \frac{1}{a} Y(u_0 Y)' = \frac{(m+P)AC^2}{a} x^{m+2p-1} \quad \frac{1}{a} u_0 \cdot Y^2 \cdot \frac{\theta_0'}{\theta_0} = \frac{n}{a} AC^2 x^{m+2p-1} \end{aligned}$$

Puisque chaque terme doit rester constant, on a :

$$m = \frac{n+1}{2}, \quad p = \frac{1-m}{2} = \frac{1-n}{4}, \quad \frac{m}{p} = b = 2 \frac{1+n}{1-n}$$

Quand  $Y$  varie selon  $p$ , sa variation est imposée en fonction de  $x$ , mais on peut choisir  $C$  de

$$\text{façon à ce que l'on ait : } \frac{\nu}{AC^2 p} = 1 \text{ et pour les vitesses : } \frac{g \cdot \beta \cdot B}{A^2 p} = 1.$$

Les équations différentielles deviendront dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
 F''' + \frac{3+n}{1-n} FF'' - 2 \frac{1+n}{1-n} F'^2 + \phi &= 0 \\
 \phi'' + \text{Pr} \frac{3+n}{1-n} F\phi' - \text{Pr} \frac{4n}{1-n} F'\phi &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Les relations précédentes permettent d'écrire :

$$u_0 = A \cdot x^m = A \cdot x^{\frac{1+n}{2}}, \quad Y = C \cdot x^p = C \cdot x^{\frac{1-n}{4}}, \quad \theta_0 = B \cdot x^n$$

Après remplacement et simplification, on obtient finalement :

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_0 = B \cdot x^n ; \quad Y &= \left[ \left( \frac{4}{1-n} \right) \frac{\nu^2}{g \cdot \beta \cdot B} x^{1-n} \right]^{1/4} \\
 u_0 = \left[ \frac{4}{1-n} g \cdot \beta \cdot B \cdot x^{1+n} \right]^{1/2} ; \quad \frac{u}{u_0} &= f(\eta) ; \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \phi(\eta)
 \end{aligned} \right\}
 \tag{3.23}$$

Lorsque la plaque est à température constante,  $n = 0$ . Les équations précédentes deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned}
 Y &= \left[ \frac{4 \cdot \nu^2 \cdot x}{g \cdot \beta \cdot (T_p - T_\infty)} \right]^{1/4} \\
 u_0 &= 2 \left[ g \cdot \beta \cdot (T_p - T_\infty) \cdot x \right]^{1/2} \\
 F''' + 3FF'' - 2F'^2 + \phi &= 0 \\
 \phi'' + 3\text{Pr} F\phi' &= 0
 \end{aligned} \right\}
 \tag{3.24}$$

Le nombre de NUSSELT peut être aisément calculé en prenant les conditions aux limites suivantes [15] :

$$\text{En } \eta = 0 : F = 0 \quad ; \quad F' = 0 \quad ; \quad \phi = 1 ;$$

$$\text{Et en } \eta = \infty : F' = 0 \quad ; \quad \phi = 0 ;$$

$$\text{La densité de flux est donnée par [15] : } \varphi_0 = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial Y} \right)_0 = -\lambda \frac{T_p - T_0}{Y} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_0$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial Y}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -1/4 \left[ \frac{g \cdot \beta}{4 \cdot \nu \cdot x} \right]^{1/4} \theta^{1/4} \times \frac{\partial \theta}{\partial \eta}
 \tag{3.25}$$

Une résolution numérique nous permet de trouver que  $\frac{1}{Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 2.032$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y} \frac{\partial T}{\partial Y} = -0.25 * 2.032 (\lambda (T_p - T_\infty)) \left[ \frac{g \cdot \beta \cdot (T_p - T_\infty)}{4 \cdot \nu^2 \cdot x} \right]^{1/4} \quad (3.26)$$

Les relations (3.25) et (3.26) nous permettent d'avoir l'expression de  $\varphi_0$  [15]:

$$\varphi_0 = 0.508 \lambda \frac{T_p - T_\infty}{x} \left[ \frac{g \cdot \beta \cdot (T_p - T_\infty) \cdot x^3}{4 \cdot \nu^2} \right]^{1/4} \quad (3.27)$$

$$\text{Et } Nu_x = \frac{\varphi_0}{\lambda \frac{T_p - T_\infty}{x}} = 0.539 Gr^{1/4} \quad (3.28)$$

Pour la convection de l'air à travers une surface plane verticale

En intégrant sur x l'expression du NUSSELT local, on obtient le nombre de NUSSELT moyen :

$$\overline{Nu}_L = 0.479 Gr^{1/4} \quad (3.29)$$

Lorsque le nombre de PRANDTL varie, on a (d'après SPARROW, GREGG, ECKERT) :

$$Nu_x = 0.508 \left[ \frac{Pr^{1/2}}{(0.95 + Pr)^{1/4}} \right] Gr^{1/4} \quad (3.30)$$

Nous trouvons donc, comme prévu, une relation de la forme  $Nu = f(Gr, Pr)$ .

On pourrait faire des calculs analogues dans le cas où la température de la plaque serait variable.

## 1.2 Détermination de $\lambda$

En régime permanent on a :

$$\Phi = \varphi \cdot S = \lambda \cdot \frac{T_{P1} - T_{P2}}{e} \cdot S = (T_{P2} - T_\infty) \cdot h \cdot S \quad (3.31)$$

Or pour l'air on a [25] :

$$\overline{Nu}_L = 0.479 Gr^{1/4}$$

$$Gr = \frac{g \beta \theta L^3}{\nu^2}$$

D'après l'équation d'état on :  $\beta = \frac{1}{T}$

Mais en faisant l'approximation de BOUSSINESQ, on a :  $\beta = \frac{1}{T_\infty}$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$Gr = \frac{g \cdot (T_P - T_\infty) L^3}{T_\infty \cdot \nu^2} \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow \overline{Nu}_L = 0.479 * \left[ \frac{g \cdot (T_P - T_\infty) \cdot L^3}{T_\infty \cdot \nu^2} \right]^{1/4} \quad (3.33)$$

$$\text{Or } Nu = \frac{h \cdot L}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{\lambda \cdot Nu}{L} = 0.479 \frac{\lambda}{L} \left[ \frac{g \cdot (T_P - T_\infty) \cdot L^3}{T_\infty \cdot \nu^2} \right]^{1/4}$$

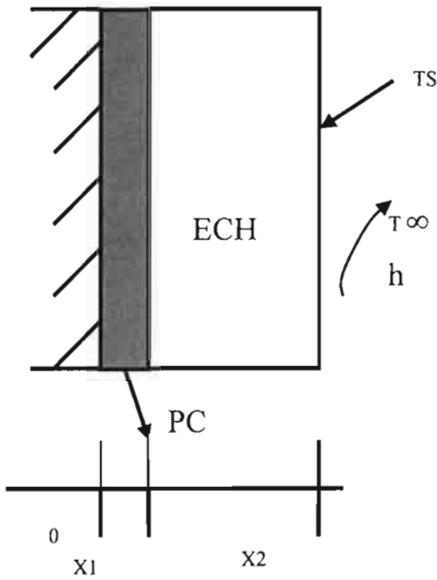
$$\Rightarrow 0.479 \frac{\lambda}{L} \left[ \frac{g \cdot (T_{P2} - T_\infty) \cdot L^3}{T_\infty \cdot \nu^2} \right]^{1/4} [T_{P2} - T_\infty] = \lambda \cdot \frac{T_{P1} - T_{P2}}{e}$$

$$\Rightarrow T_{P1} - T_{P2} = 0.479 \frac{e}{L} \left[ \frac{g \cdot (T_{P2} - T_\infty)^5 \cdot L^3}{T_\infty \cdot \nu^2} \right]^{1/4}$$

$$\Rightarrow \lambda = \Phi \frac{e}{(T_{P1} - T_{P2})S} = \Phi \frac{e}{\left( 0.479 \frac{e}{L} \left[ \frac{g \cdot (T_{P2} - T_\infty)^5 \cdot L^3}{T_\infty \cdot \nu^2} \right]^{1/4} \right) S} \quad (3.34)$$



## II / Etude du champ thermique dans une plaque en régime non permanent

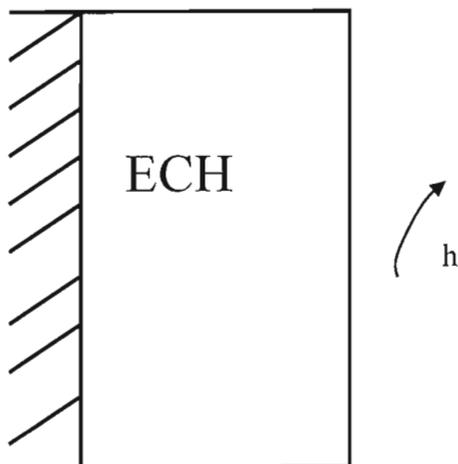


$$\begin{aligned}
 x = 0 &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\
 x = x1 &\Rightarrow \varphi = cste = P \\
 x = x2 &\Rightarrow -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h(T_s - T_\infty)
 \end{aligned}$$

### Hypothèses :

On néglige l'épaisseur de la plaque chauffante.

Notre modèle se réduira au modèle suivant :



$$x = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

## 1. Etude du modèle en régime non permanent en ne tenant pas compte de la convection

Considérons le système constitué par notre modèle et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

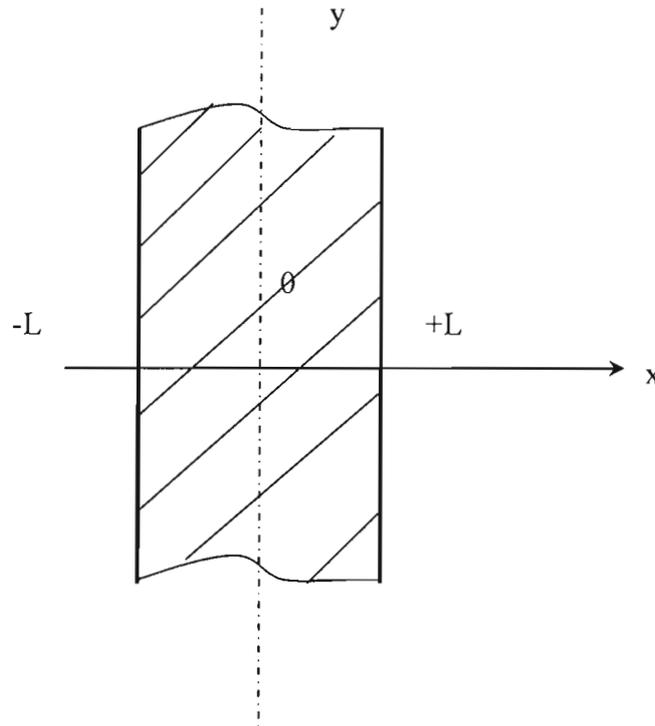


Fig. 3.4 : Modèle conceptuel

### a) Solution par la méthode de séparation des variables, séries de FOURIER

#### ▪ Principe de la méthode

Nous considérons uniquement dans ce qui suit des milieux isotropes, homogènes, de caractéristiques  $\lambda$  et  $a$  constantes et où  $p$  est indépendant de la température. Le problème fondamental de la conduction consiste à trouver, dans un tel milieu, limité, de volume  $V$ , et de frontière  $S$ , la fonction température  $T(M,t)$  satisfaisant à l'équation de la chaleur et aux conditions aux limites spatio-temporelles, soit :

$$\begin{cases} \Delta T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(M,t)}{\lambda} = 0, & M \text{ dans } V, t > 0 \\ T(M,0) = T_0(M), & M \text{ dans } V \text{ ou sur } S, t = 0 \\ T + \alpha \frac{\partial T}{\partial n} = f(M,t), & M \text{ sur } S, t > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

On cherche s'il existe une solution particulière, à variables séparées, satisfaisant au système et de la forme :

$$T(x,t) = X(x) \cdot Y(t) \quad (3.36)$$

Où X(x) est une fonction de x seulement et Y(t) une fonction de t seul.

En reportant dans l'équation de la chaleur, on obtient :

$$X''(x) \cdot Y(t) - \frac{1}{a} X(x) \cdot Y'(t) = 0 \quad (3.37)$$

Ou encore 
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a} \frac{Y'(t)}{Y(t)}$$

L'égalité devant être vérifiée pour toutes les valeurs de x et de t, ceci n'est possible que si chaque membre est égal à une constante, soit :

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha \\ \frac{1}{a} \frac{Y'(t)}{Y(t)} = \alpha \end{cases} \quad \text{Ou} \quad \begin{cases} \frac{a \cdot X''(x)}{X(x)} = \beta \\ \frac{Y'(t)}{Y(t)} = \beta \end{cases} \quad (3.38)$$

(Avec  $\beta = a\alpha$ )

Le choix de la constante  $\alpha$  ou  $\beta$  se fait à partir de considérations physiques :

1/ Pour les processus thermiques tendant vers une distribution de température constante à l'équilibre, on choisit  $\alpha$ , qui doit être nécessairement négatif. En effet l'intégration relative au temps fournit :  $Y = R \cdot \exp(a \cdot \alpha \cdot t)$  où r est une constante. Si  $\alpha$  était positif, pour des temps croissants, la température tendrait vers une valeur infinie, ce qui est physiquement absurde.

En posant  $\alpha = -k^2$ , on obtient  $Y = R \cdot \exp(-a \cdot k^2 \cdot t)$

2/ Si le phénomène est de nature périodique en fonction du temps, on prend alors  $\beta$ . Ce doit être un nombre imaginaire : en effet en posant  $\beta = i \cdot \omega$ , on obtient la solution :

$$Y = R \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) = R(\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t)$$

On résout alors le problème dans le plan complexe et on ne retiendra que la partie réelle de la solution obtenue.

### ▪ Solution

Le système traduisant le problème thermique s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \\ T(x, 0) = T_0(x) = T_{p1} \\ T(0, t) = T_{p2} = T_p \end{cases} \quad (3.39)$$

En posant  $\theta = T - T_p$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= 0 \\ \theta_0(x, 0) &= T_0(x) - T_p \\ \theta(0, t) = \theta(2L, t) &= 0 \end{aligned}$$

Le phénomène tend, dans ce cas, vers un équilibre thermique. La solution de l'équation en x du système s'écrit :  $X = P \cos(kx) + Q \sin(kx)$ , P et Q étant des constantes.

D'où la solution élémentaire,  $\theta = X \cdot Y$  :

$$\theta = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \exp(-k^2 at) \quad (3.40)$$

Avec  $A = PR$  et  $B = QR$  et la solution s'écrit :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)] \exp(-k_n^2 at) \quad (3.41)$$

Cette série solution est très générale.

Imposons des conditions aux limites à chaque solution élémentaire :

$$\begin{aligned} \theta(0, t) = 0 &\rightarrow A_n = 0 \\ \theta(2L, t) = 0 &\rightarrow \sin(k_n 2L) = 0, \end{aligned}$$

Soit  $k_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)$  où n est un entier  $>0$ , car si  $n = 0$ , on a la solution triviale  $\theta \equiv 0$

La solution élémentaire prend la forme :

$$\theta(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 at\right] \quad (3.42)$$

Cherchons maintenant les  $B_n$  satisfaisant à la condition initiale, soit :

$$\theta_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.43)$$

Sous l'hypothèse de la continuité, le développement en série de FOURIER de la fonction  $\theta_0(x)$  nous permet d'avoir les coefficients  $B_n$  :

$$B_n = \frac{1}{L} \int_0^L \theta_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1,3,5,\dots \quad (3.44)$$

Sous réserve de convergence de la série solution et des séries dérivées terme à terme, une fois par rapport à  $t$ , et deux fois par rapport à  $x$ .

La température en un point de la plaque est donc donnée par :

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \left[ \int_0^L \theta_0(u) \sin\left(\frac{n\pi}{L}u\right) du \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 at\right] \quad (3.45)$$

Cette solution est valable pour une répartition initiale connue, mais quelconque, des températures.

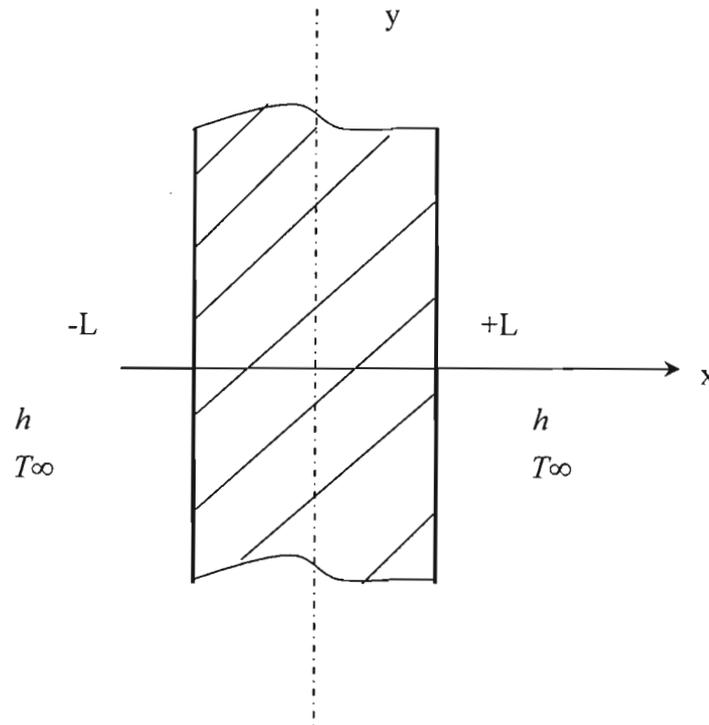
**Pour le cas sur lequel notre étude a été consacrée, on a :**

$$T_0(x) = T_0 = Cte \Rightarrow B_n = \frac{2(T_0 - T_p)}{n\pi}, \quad n = 1,3,5,\dots$$

Ce qui nous permet d'écrire l'équation générale :

$$\boxed{\frac{T - T_p}{T_0 - T_p} = \frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 at\right], \quad n = 1,3,5,\dots} \quad (3.46)$$

## 2. Etude du modèle en régime non permanent en tenant compte de la convection



**Fig. 3.5** : Modèle conceptuel

### Observations :

La distribution de la température est symétrique par rapport au centre.

On définit une nouvelle température variable par :  $\theta = T - T_{\infty}$

### Hypothèses :

Transfert de chaleur unidimensionnel, conductivité thermique constante, diffusivité thermique constante, coefficient de convection constante.

### Equations générales :

Pour avoir des conditions de convection homogène, on introduit la température variable :

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_{\infty}$$

De plus on sait que :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}$

Les conditions aux limites à  $x = 0$  et à  $x = L$  sont :

$$\frac{\partial \theta(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(L,t)}{\partial x} = h\theta(L,t)$$

La condition initiale est :  $\theta(x,0) = f(x) - T_\infty$

On cherche s'il existe une solution particulière, à variables séparées, satisfaisant au système et de la forme :

$$T(x,t) = X(x) \cdot Y(t)$$

Où  $X(x)$  est une fonction de  $x$  seulement et  $Y(t)$  une fonction de  $t$  seul.

En reportant dans l'équation de la chaleur, on obtient :

$$X''(x) \cdot Y(t) - \frac{1}{a} X(x) \cdot Y'(t) = 0$$

Ou encore 
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a} \frac{Y'(t)}{Y(t)}$$

Le phénomène tend, dans ce cas, vers un équilibre thermique. La solution de l'équation en  $x$  du système s'écrit :  $X = P \cos(kx) + Q \sin(kx)$ ,  $P$  et  $Q$  étant des constantes.

D'où la solution élémentaire,  $\theta = X \cdot Y$  :

$$\theta = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \exp(-k^2 at) \quad (3.47)$$

Avec  $A = PR$  et  $B = QR$  et la solution s'écrit :

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)] C_n \exp(-k_n^2 at) \quad (3.48)$$

En appliquant les conditions initiales on a :

$$A_n = 0 \text{ d'où : } X_n(x) = B_n \cos k_n x \quad (3.49)$$

De plus on a :  $k_n L \tan k_n L = Bi$

Où  $Bi$  est le nombre de **Biot** définit par :  $Bi = \frac{hL}{\lambda}$

En procédant aux transformations on obtient ainsi la solution générale :

$$\theta(x,t) = T(x,t) - T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-k^2 at) \cos k_n x \quad (3.50)$$

Avec des conditions initiales non homogènes, on a :

$$f(x) - T_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos k_n x \quad (3.51)$$

Si les conditions à  $x = 0$  et à  $x = L$  sont homogènes, en appliquant la condition d'orthogonalité, on obtient :

$$a_n = \frac{2k_n \int_0^L [f(x) - T_{\infty}] \cos k_n x dx}{k_n L + (\sin k_n L)(\cos k_n L)} \quad (3.52)$$

### ▪ représentation graphique de la solution

En observant la solution précédente, on note que la température dépend de deux variables,  $x$  et  $t$ , et des grandeurs physiques  $h$ ,  $\lambda$ ,  $L$ ,  $T_0$ ,  $T_{\infty}$ , et  $a$ . si une de ces paramètres change, une nouvelle résolution sera nécessaire pour déterminer la distribution de la température  $T(x,t)$ .

La manière la plus efficace de représenter la solution est d'utiliser des variables adimensionnelles.

Les variables adimensionnelles suivantes seront ainsi définies :

$$\theta^* = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad Fo = \frac{at}{L^2} \quad (3.53)$$

Avec  $Fo$  = nombre de **Fourier**.

En faisant les substitutions nécessaires, on obtient l'expression de la température sous la forme adimensionnelle :

$$\theta^* = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin k_n L}{k_n L + (\sin k_n L)(\cos k_n L)} \left[ \exp(-(k_n L)^2 Fo) \right] \xi \cdot \cos k_n L \quad (3.54)$$

En examinant cette solution, on constate qu'elle est fonction : de la distance adimensionnelle  $\xi$ , du nombre de Fourier  $Fo$ , et du nombre de Biot  $Bi$ .

$$\theta^* = f(\xi, Fo, Bi) \quad (3.55)$$

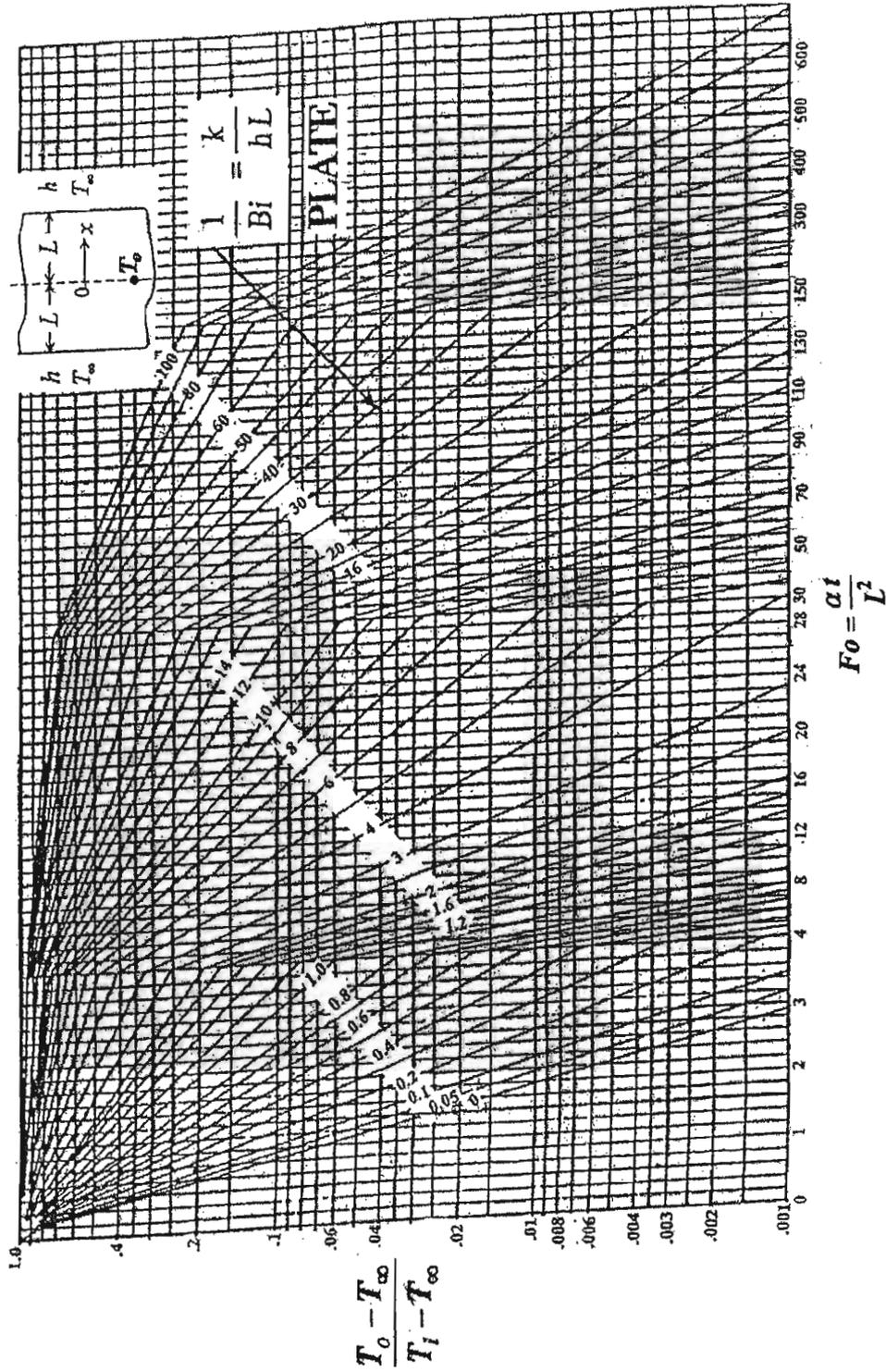


Fig. 3.6: Evolution de la température aux centres des plaques [26]

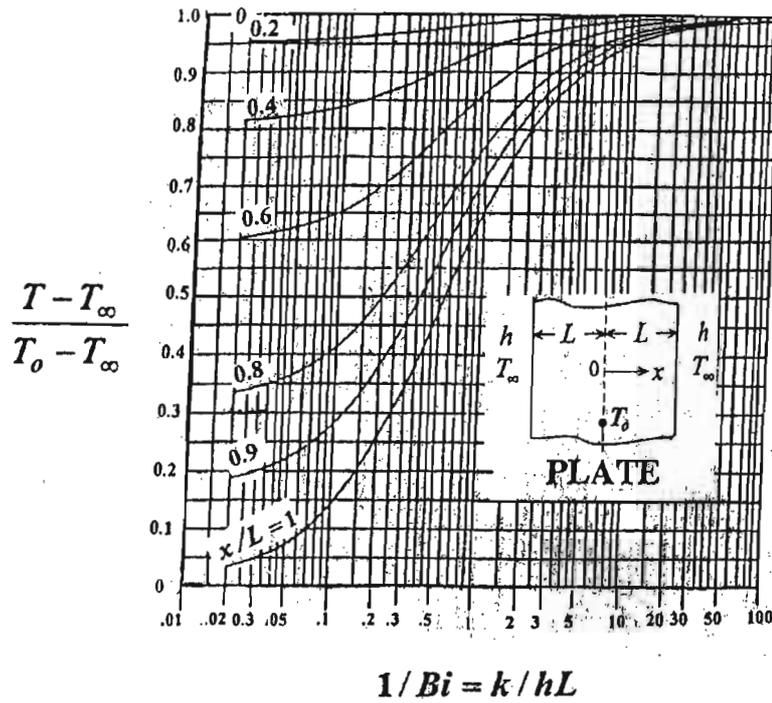


Fig. 3.7: Distribution de la température dans la plaque en fonction de  $T_0$  [26]

### 3. Etude de notre modèle en régime non permanent

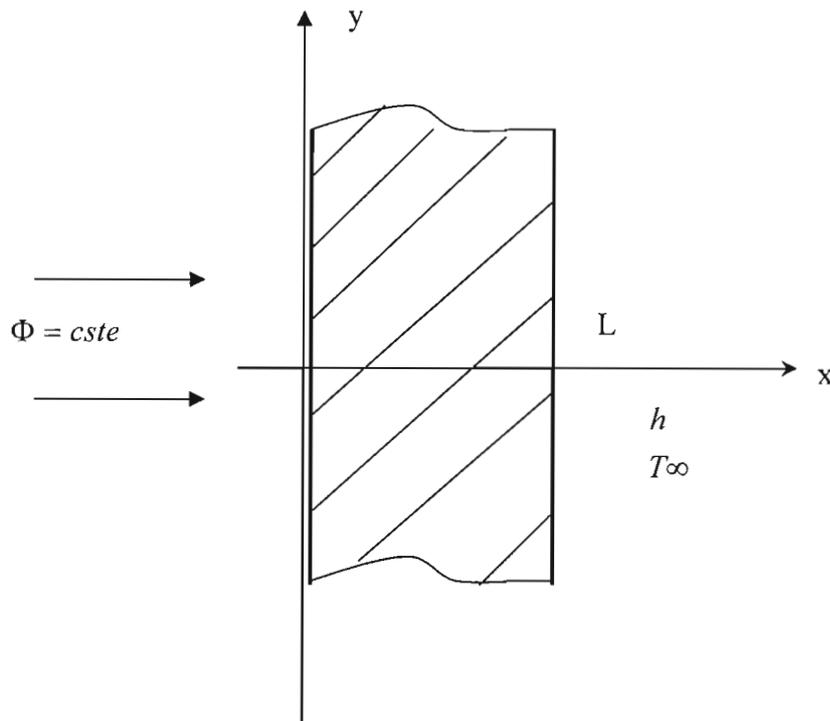


Fig. 3.8 : Schéma de principe du modèle de l'étude

#### a. Fonctions de Green associées aux problèmes de Conduction de la Chaleur

Nous considérons le système d'équations :

$$\begin{aligned} \Delta T(M, t) - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} &= - \frac{P(M, t)}{\lambda} \\ \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T \right)_{S_i} &= f_i(M_i, t) \\ T(M, 0) &= F(M) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ce problème est classique en Conduction de la chaleur. Les sources peuvent être constantes ou variables.

Pour résoudre ce système, on considère les équations :

$$\begin{aligned} \Delta G(M, t | M', t') - \frac{1}{a} \frac{\partial G}{\partial t} &= - \frac{\delta(M - M') \delta(t - t')}{a} \\ \left( \lambda \frac{\partial G}{\partial n_i} + h_i G \right)_{S_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$G(M, t | M', t') = 0 \text{ si } t < t'$$

qui correspondent à la dissipation instantanée au temps  $t'$  d'une quantité de chaleur localisée

en un point  $M'$ , les sources externes étant toutes nulles c'est à dire sans action. La fonction  $G(M, t / M', t')$  traduit la réponse en température à une impulsion de chaleur localisée, le langage généralement employé consiste à parler d'**effet en  $(M, t)$**  du à la **cause en  $(M', t')$** . L'effet est nul si  $t < t'$  puisque la cause ne s'est pas produite. En fait l'origine  $t'$  est arbitraire si bien que, dans la fonction  $G$ ,  $t$  et  $t'$  apparaissent par le groupement  $t - t'$  qui est la durée entre le moment où se produit la cause et le moment où on examine l'effet.

D'autre part les fonctions de Green obéissent à la **relation de réciprocité de la cause et de l'effet** à savoir  $G(M, t / M', t') = G(M', -t' / M, -t)$ . Si la cause est produite en  $M$ , l'effet sera identique en  $M'$  à condition, évidemment, de respecter la durée  $[-t' - (-t) = t - t']$ .

Dans le calcul qui suit, on est amené à dériver par rapport à  $M$  ou à  $M'$ . Pour le laplacien, on emploie respectivement la notation  $D$  ou  $D'$ . D'autre part  $\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial G}{\partial t'}$  puisque c'est le groupement  $t - t'$  qui apparaît.

$$\text{Ainsi : } \Delta' G(M', -t' / M, -t) + \frac{1}{a} \frac{\partial G}{\partial t'} = -\frac{\delta(M' - M)\delta(t' - t)}{a}$$

$$\text{Et : } \Delta T(M', t') - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t'} = -\frac{P(M', t')}{\lambda}$$

On multiplie la première des équations par  $T$ , la seconde par  $G$  et on retranche membre à membre ; ce qui nous donne :

$$G\Delta' T - T\Delta' G - \frac{1}{a} \left( T \frac{\partial G}{\partial t'} + G \frac{\partial T}{\partial t'} \right) = -\frac{PG}{\lambda} + \frac{T\delta(M' - M)\delta(t' - t)}{a} \quad (3.58)$$

L'intégration sur la variable  $t'$  entre 0 et  $t + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  infiniment petit positif), sur la région  $R$  siège du phénomène de Conduction de la Chaleur, conduit à :

$$\int_0^{t+\varepsilon} \delta(t' - t) dt' \int_R T(M', t') \delta(M' - M) dV' = a \int_0^{t+\varepsilon} dt' \int_R (G\Delta' T - T\Delta' G) dV' \quad (3.59)$$

$$+ \frac{a}{\lambda} \int_0^{t+\varepsilon} dt' \int_R PG dV' - \int_R dV' \int_0^{t+\varepsilon} \frac{\partial(TG)}{\partial t'} dt'$$

$$* \int_0^{t+\varepsilon} \delta(t'-t) \int_R T(M', t') \delta(M' - M) dV' = T(M, t)$$

$$* \int_R (G \Delta' T - T \Delta' G) dV' = \sum_i \iint_{S_i} \left( G \frac{\partial T}{\partial n'_i} - T \frac{\partial G}{\partial n'_i} \right) dS'_i \quad (\text{pour la démonstration, voir ci-après ;})$$

la sommation doit être faite à toutes les surfaces frontières de la région ; les normales doivent être orientées vers l'extérieur)

**On remarque** que :

\* Pour une condition limite de première espèce (température imposée), le terme entre parenthèse du deuxième membre s'écrit :

$$-T(M'_i, t') \frac{\partial G(M, t / M'_i, t')}{\partial n'_i}$$

\* Pour une condition limite de deuxième espèce (flux imposé) ou de troisième espèce

(condition mixte), on peut écrire  $\frac{\partial T}{\partial n'_i} = -\frac{h_i}{\lambda} T + \frac{f_i(M'_i, t')}{\lambda}$  et  $\frac{\partial G}{\partial n'_i} = -\frac{h_i}{\lambda} G$ , si bien que le

terme entre parenthèses s'écrit :

$$\frac{1}{\lambda} f_i(M'_i, t') G(M, t / M'_i, t')$$

\*  $\int_0^{t+\varepsilon} \frac{\partial(TG)}{\partial t'} dt' = -T(M', 0)G(M', 0 / M, -t) = -F(M')G(M, t / M', 0)$  en se rappelant que

$$G(M', -t - \varepsilon / M, t) = 0 \text{ car } -t - \varepsilon < -t$$

Ainsi en termes de fonctions de Green, la solution du problème de Conduction peut être écrite sous la forme :

$$T(M, t) = \int_R F(M') G(M, t / M', t' = 0) dV' + \frac{a}{\lambda} \int_0^t dt' \int_R P(M', t') G(M, t / M', t') dV' + \int_0^t dt' \sum_i \iint_{S_i} \left[ \frac{f_i(M'_i, t') G(M, t / M'_i, t')}{\lambda} \right] dS'_i \quad (3.60)$$

**NB :** cette relation est vraie pour un flux imposé

### Démonstration

La relation  $\text{div}(\vec{p} \text{ grad } q) = p \Delta q + \text{grad } p \text{ grad } q$  et le théorème d'Ostrogradsky

$\iiint_V \text{div} \vec{a} dV = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS$  entraîne la formule de Green :

$$\iiint_V [\text{div}(\vec{p} \text{ grad } q) - \text{div}(q \text{ grad } p)] dV = \iint_S (p \text{ grad } q - q \text{ grad } p) \cdot \vec{n} dS$$

### Remarques

- La formule ci-dessus est générale c'est à dire valable que les sources existent ou non, qu'elles soient continues ou variables.
- Evidemment le volume élémentaire (ou la surface élémentaire) devra être adapté à la géométrie (et aux symétries) du problème.
- Dans la formule  $\varepsilon$  est "à la limite pris égal à 0" car il n'y a pas de discontinuités dans les termes du second membre.
- Une condition de flux de chaleur imposé sur une surface peut être traitée en source de chaleur localisée sur cette surface.

### **b. Détermination de la fonction de Green pour un problème donné**

Le champ de température est régi par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \Delta T(M, t) - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} &= 0 \\ \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T \right)_{\xi} &= 0 \\ T(M, 0) &= F(M) \end{aligned} \tag{3.61}$$

La solution s'exprime sous la forme  $T(M, t) = \int_R F(M') G(M, t / M', t' = 0) dV'$

On sait donc déterminer la fonction  $G(M, t / M', t' = 0)$ , il suffira de remplacer  $t$  par  $t - t'$  dans cette dernière fonction pour connaître la fonction de Green  $G(M, t / M', t')$  associée à un problème donné.

Les conditions aux limites permettent d'écrire :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{P(x,t)}{\lambda}; T(0,t) = f_1(t); T(L,t) = f_2(t); T(x,0) = F(x) \quad (3.62)$$

En  $x = 0$ , le sens de la normale à cette face est opposé à celle de la direction  $x$ , en  $x = L$  normale et direction  $x$  sont de même sens. Pour résoudre ce problème en terme de fonctions de Green, on considère le système auxiliaire d'équations :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0; \Psi(0,t) = 0; \Psi(L,t) = 0; \Psi(x,0) = F(x) \quad (3.63)$$

$$\text{De solution : } \Psi(x,t) = \int_0^L \frac{2}{L} \sum_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x'}{L}\right) \exp\left(-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right) \quad (3.64)$$

Par identification, on obtient :

$$G(x,t / x', t' = 0) = \frac{2}{L} \sum_k \sin\frac{k\pi x}{L} \sin\frac{k\pi x'}{L} \exp\left(-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right) \quad (3.65)$$

et en substituant  $t - t'$  à  $t$  la fonction de Green associée au problème sera :

$$G(x,t / x', t') = \frac{2}{L} \sum_k \sin\frac{k\pi x}{L} \sin\frac{k\pi x'}{L} \exp\left[-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} (t - t')\right] \quad (3.66)$$

La solution  $T(x,t)$  du problème posé sera donc :

$$\begin{aligned}
 T(x,t) &= \frac{2}{L} \sum_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \exp\left(-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right) \int_0^L F(x') \sin\left(\frac{k\pi x'}{L}\right) dx' \\
 &+ \frac{2a}{\lambda L} \sum_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \exp\left(-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right) \int_0^L \exp\left(a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t'\right) dt' \int_0^L P(x', t') \sin\left(\frac{k\pi x'}{L}\right) dx' \\
 &+ \frac{2a}{L} \sum_k \frac{k\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \exp\left(-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right) \int_0^L f_1(t') \exp\left(a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t'\right) dt' \\
 &- \frac{2a}{L} \sum_k (-1)^k \frac{k\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \exp\left(-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right) \int_0^L f_2(t') \exp\left(a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t'\right) dt'
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

On envisage, en application, pour :

- le cas d'une source instantanée au temps  $t = 0$ ,  $P(x,t) = q_i(x)\delta(t-0)$  où  $q_i$  a la dimension d'une énergie volumique ;

$$\begin{aligned}
 T(x,t) &= \frac{2a}{\lambda L} \sum_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \exp\left(-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right) \int_0^L q_i(x') \sin\left(\frac{k\pi x'}{L}\right) dx' \\
 &= \frac{4a q_0}{\pi \lambda} \sum_n \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)}{2n-1} \exp\left[-a \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{L^2} t\right] \text{ si } q_i(x) = q_0 = \text{Cste}
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

- le cas d'une source localisée en  $x = 0$ ,  $P(x,t) = \varphi_i(t)\delta(x-a)$  où  $\varphi_i$  a la dimension d'une densité de flux de chaleur ;

$$\begin{aligned}
 T(x,t) &= \frac{2a}{\lambda L} \sum_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \exp\left(-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right) \int_0^L \varphi_i(t') \exp\left(a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t'\right) dt' \\
 &= \frac{2\varphi_0}{\pi^2 \lambda L} \sum_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left[1 - \exp\left(-a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right)\right] \text{ si } \varphi_i(t) = \varphi_0 = \text{Cste}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

#### 4. Variation d'énergie interne de la plaque

La densité de flux qui s'écoule de la plaque vers le fluide est :

$$\frac{q}{A_\infty} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = -\frac{2T_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n L \sin^2 k_n L}{k_n L + (\sin k_n L)(\cos k_n L)} \exp(-k^2 Fo) \cos k_n x \quad (3.70)$$

Soit  $dQ$  la quantité de chaleur produite pendant l'intervalle de temps  $dt$  ; on a :

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} dt \quad (3.71)$$

L'énergie interne de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^t -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} dt = \int_0^t \frac{2T_0 \lambda}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n L \sin^2 k_n L}{k_n L + (\sin k_n L)(\cos k_n L)} \exp(-(k_n L)^2 Fo) dt \\ \Rightarrow Q &= \frac{2T_0 \lambda}{L} \cdot \frac{L^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \exp(-(k_n L)^2 Fo)] \frac{\sin^2 k_n L}{(k_n L)^2 + k_n L (\sin k_n L)(\cos k_n L)} \\ \Rightarrow Q &= 2T_0 \rho L C \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \exp(-(k_n L)^2 Fo)] \frac{\sin^2 k_n L}{(k_n L)^2 + k_n L (\sin k_n L)(\cos k_n L)} \end{aligned}$$

$T_0 \rho L C$  représente l'énergie interne initiale par mètre carré de plaque.

En posant  $Q_0 = T_0 \rho L C$ , on obtient :

$$\frac{Q}{Q_0} = \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \exp(-(k_n L)^2 Fo)] \frac{2 \sin^2 k_n L}{(k_n L)^2 + k_n L (\sin k_n L)(\cos k_n L)} \quad (3.72)$$

Cependant, en faisant l'hypothèse que le flux est constant, on a la densité de flux qui est donnée par :

$$Q = Q_0 = L \cdot \rho \cdot C_p (T_0 - T_\infty)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'expression du flux thermique qui traverse la surface :

$$\boxed{\Phi = A \cdot L \cdot \rho \cdot C_p (T_0 - T_\infty)} \quad (3.73)$$

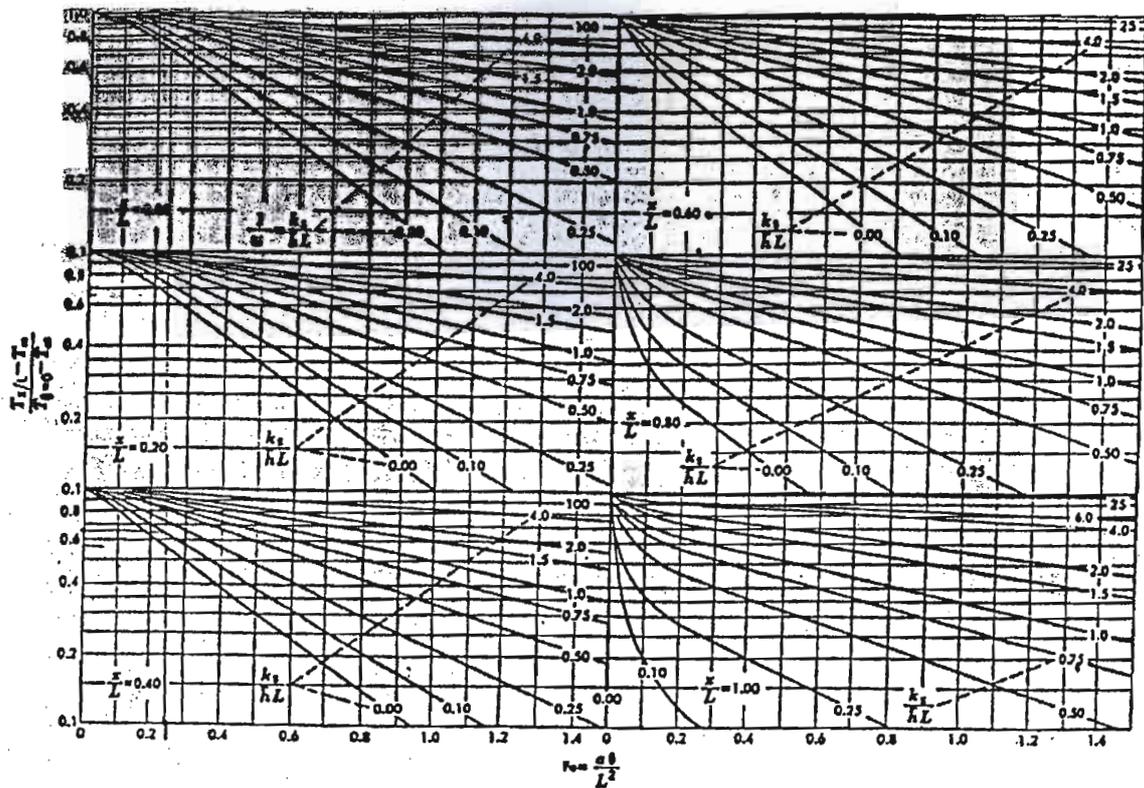


Fig. 3.9: Répartition adimensionnelle des températures dans une paroi soumise à un changement brusque de température.

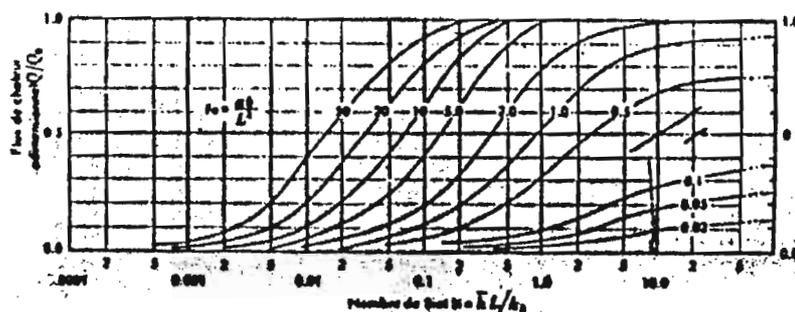


Fig. 3.10 : Flux de chaleur adimensionnel transmis vers ou à partir d'une paroi soumise à un changement brusque de la température.

## 5. Détermination de la puissance nécessaire pour le chauffage, ainsi que de l'épaisseur optimale de la plaque en fonction de la nature de l'échantillon

### a. Pour matériaux isolants

Pour trouver ces paramètres optimaux, résonnons sur un cas très défavorable ; par exemple le béton qui a l'une des diffusivités les plus faibles.

x/L	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
1/Bi	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Fo	1,225	1,225	1,175	1,025	0,8	0,275
t/L <sup>2</sup>	2916666,67	2916666,67	2797619,05	2440476,19	1904761,9	654761,905
x/L	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
1/Bi	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
Fo	1,5	1,5	1,5	1,35	1,175	0,8
t/L <sup>2</sup>	3571428,57	3571428,57	3571428,57	3214285,71	2797619,05	1904761,9

dans les conditions les plus défavorable, et en tenant compte de considérations de dimension et de minimisation de la chaleur fournie, on prend : 1/Bi= 0,25 et Fo = 1,5

Tableau N°1 : Détermination de Bi et de Fo dans le cas des matériaux isolants

Dans ces conditions on a :

$$\frac{Q}{Q_0} \approx 1 \Rightarrow Q = 1 \times CL\rho(T_0 - T_\infty) = 0.96 \cdot 10^3 \times 2300 \times L(T_0 - T_\infty)$$

$$= 2208 \cdot 10^3 \times L(T_0 - T_\infty)$$

En prenant un gradient de température de 25 °C, et une longueur de 200 mm on a :

$$S = 0.2 \times 0.2 = 0.04 \text{ m}^2$$

$$Q = 2208 \cdot 10^3 \cdot L \quad \text{kJ}$$

Cherchons maintenant les valeurs optimales de L et Q

$$Q = 2208 \cdot 10^3 \cdot L \quad \text{kcal / m}^2$$

$$t = 3571429 \cdot L^2$$

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{0.61814}{L}$$

Cherchons donc l'épaisseur L qui minimise à la fois la puissance et le temps ; ainsi, après plusieurs itérations on obtient :

L(m)	P(W)	t(s)
0,01	61,814	357,1429
0,015	41,2093333	803,571525
0,02	30,907	1428,5716
0,025	24,7256	2232,14313
0,03	20,6046667	3214,2861
0,035	17,6611429	4375,00053
0,04	15,4535	5714,2864
0,045	13,7364444	7232,14373
0,05	12,3628	8928,5725
0,055	11,2389091	10803,5727
0,06	10,3023333	12857,1444
0,065	9,50984615	15089,2875
0,07	8,83057143	17500,0021
0,075	8,24186667	20089,2881
0,08	7,72675	22857,1456
0,085	7,27223529	25803,5745
0,09	6,86822222	28928,5749
0,095	6,50673684	32232,1467
0,1	6,1814	35714,29

Tableau N°2 : Détermination de l'épaisseur et de la puissance optimale dans le cas des matériaux isolants

Conclusion :

**Puissance = 21 W**

**Épaisseur = 0.03 m**

**Durée de l'essai : t = 3215 s**

**Dimensions de l'échantillon : 200 x 200 mm**

Cependant on prendra **t = 1h** en tenant compte de la non homogénéité du matériau et pour tenir compte des erreurs dues à l'hypothèse de transfert de chaleur unidirectionnel



*b. Pour matériaux conducteur de chaleur*

Pour trouver ces paramètres optimaux, résonnons sur un cas très défavorable ; par exemple l'acier inox 18/8 qui a l'une des diffusivités les plus faibles.

x/L	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
1/Bi	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Fo	1,225	1,225	1,175	1,025	0,8	0,275
t/L <sup>2</sup>	306250	306250	293750	256250	200000	68750
x/L	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
1/Bi	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
Fo	1,5	1,5	1,5	1,35	1,175	0,8
t/L <sup>2</sup>	375000	375000	375000	337500	293750	200000

dans les conditions les plus defavorable, et en tenant compte de considerations de dimension et de minimisation de la chaleur fournie, on prend : 1/Bi= 0,25 et Fo = 1,5

Tableau N°3 : Détermination de Bi et de Fo dans le cas des matériaux conducteurs de chaleur

Dans ces conditions on a :

$$\frac{Q}{Q_0} \approx 1 \Rightarrow Q = CL\rho(T_0 - T_\infty) = 0.51 \cdot 10^3 \times 7900 \times L(T_0 - T_\infty)$$

$$= 4029 \cdot 10^3 \times L(T_0 - T_\infty)$$

En prenant un gradient de température de 25°C, et une longueur de 200mm on a :

$$S = 0.2 * 0.2 = 0.04 \text{ m}^2$$

$$Q = 4029 \cdot L \quad kJ$$

Cherchons maintenant les valeurs optimales de L et Q

$$Q = 4029 \cdot L \quad kJ$$

$$t = 375000 \cdot L^2$$

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{10.744}{L}$$

Cherchons donc l'épaisseur L qui minimise à la fois la puissance et le temps ; ainsi, après plusieurs itérations on obtient :

0,004	2686	6
0,005	2148,8	9,375
0,006	1790,66667	13,5
0,007	1534,85714	18,375
0,008	1343	24
0,009	1193,77778	30,375
0,01	1074,4	37,5
0,011	976,727273	45,375
0,012	895,333333	54
0,013	826,461538	63,375
0,014	767,428571	73,5
0,015	716,266667	84,375
0,016	671,5	96
0,017	632	108,375
0,018	596,888889	121,5
0,019	565,473684	135,375
0,02	537,2	150
0,021	511,619048	165,375
0,022	488,363636	181,5
0,023	467,130435	198,375
0,024	447,666667	216
0,025	429,76	234,375
0,03	358,133333	337,5

Tableau N°4 : Détermination de la puissance et de l'épaisseur optimale dans le cas des matériaux conducteurs de chaleur.

Conclusion :

**Puissance = 1075 W**

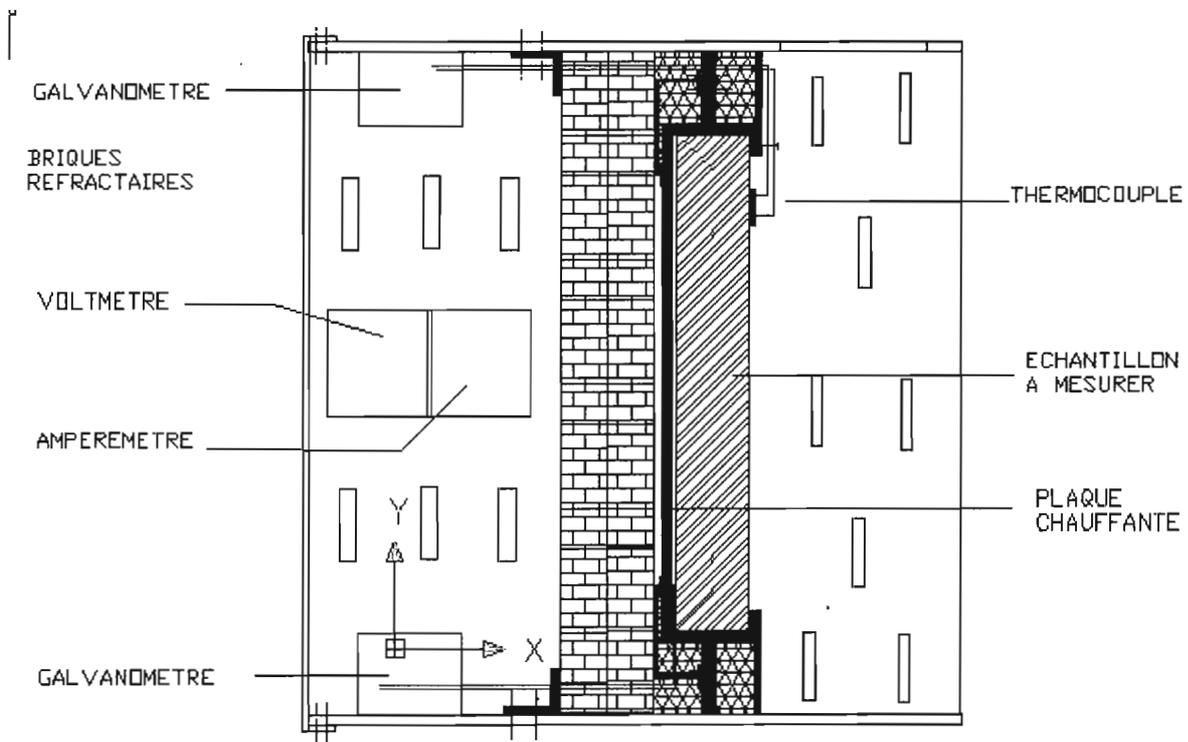
**Epaisseur = 0.01 m**

**Durée de l'essai : t = 37.5 s**

**Dimensions de l'échantillon : 200 x 200 mm**

### III / Conception et dimensionnement d'un appareil de mesure de la conductivité thermique des matériaux

#### 1. Design du prototype



## 2. Mesure de la température par des thermocouples

Les avantages :

- Une échelle de température très large.
- Une souplesse d'utilisation (gaine souple ou rigide).
- Mesure d'un point précis.

Les inconvénients :

- Compensation de la température.
- Câbles d'extension pour les grandes longueurs.

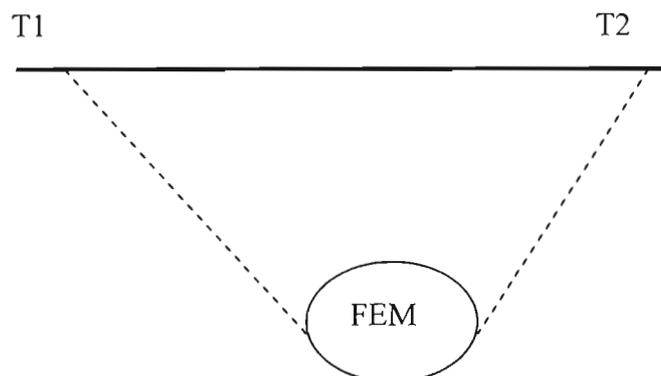
Les normes:

- NF C 42 321
- NF C 42 322
- NF C 42 323

### a. principe

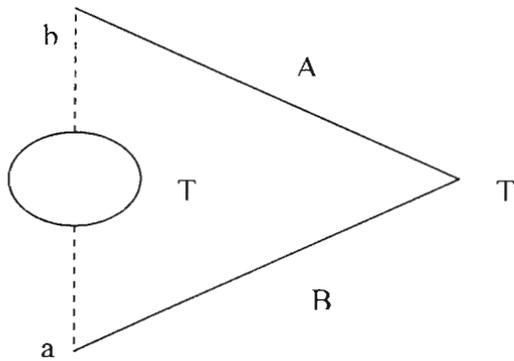
Tout conducteur métallique peut créer " un effet thermoélectrique " qui est représenté par le coefficient de Seebeck. On peut mettre en évidence une FEM thermoélectrique  $E$  régie par l'équation:

$$E = \int_{T_1}^{T_2} s dT$$



En réalité, on utilise deux conducteurs de nature différente réunis en un point par une soudure. Les deux extrémités sont reliées à un appareil de mesure de la FEM qui est à température ambiante ( $T_0$ ). Désignons par  $a$  et  $b$  les extrémités, et par  $A$  et  $B$  les conducteurs, ceci permet d'écrire l'équation de la nouvelle FEM. La relation est donnée par :

$$E(a, b) = \int_{T_0}^T S_A dT + \int_T^{T_0} S_B dT = \int_{T_0}^T (S_A - S_B) dT$$



La relation démontrée par l'effet Seebeck (1821) a une interdépendance avec les effets découverts ultérieurement: L'effet Peltier (1834) et l'effet Thomson (1854).

## b. Choix

Thermocouple de type K

## c. Les câbles d'extension

Les câbles d'extension permettent de prolonger les circuits de thermocouple jusqu'à l'appareil de mesure. Ils se présentent sous forme de câble électrique dont les conducteurs sont réalisés dans les mêmes matériaux que ceux de la sonde. Ils peuvent également être réalisés en matériaux complètement différents, mais de mêmes caractéristiques thermoélectriques dans une plage réduite de température (0 +80 °C). Dans ce cas, Ils sont appelés câbles de compensation.

Un exemple classique d'utilisation de câbles de compensation: Pour les thermocouples au platine dont le coût est élevé, il est nécessaire par souci d'économie, de prendre des câbles de compensation. Il faut cependant savoir que si on laisse la température du point de connexion augmenter, la mesure sera erronée. Autre exemple: les caractéristiques de sortie d'un thermocouple de type K peuvent être reproduites à basse température par l'association de conducteurs Cu et Cu-Ni. Etant donné que l'un des conducteurs est déjà en cuivre, le nombre des jonctions de référence est diminué de moitié, ce qui peut être un avantage dans le cas d'installations intégrant plusieurs thermocouples. De plus la résistance de boucle du câble de compensation est inférieure à celle de conducteurs de type K.

Faciles à mettre en place, même sur de longues distances, les câbles d'extension sont

disponibles sous plusieurs formes. Lorsque le point de connexion à la sonde se situe à une température élevée (supérieure à 80 C), on évitera des erreurs de mesure en préférant un câble d'extension à un câble de compensation.

## IV / Etude de la rentabilité économique et financière

Investir c'est consommer au cours d'un proche avenir des ressources rares ou tout au moins limitées (épargne locale, devises étrangères, main-d'oeuvre spécialisée, matériaux, équipement...) dans l'espoir d'obtenir en contrepartie pendant une période d'une certaine durée un avantage financier ou non (recettes résultant de la vente d'un produit, avantage social résultant de la disposition d'une école, d'un hôpital, de la baisse du chômage ou de l'amélioration des conditions de vie, l'amélioration de la balance des paiements...). La période pendant laquelle l'entreprise ou la collectivité bénéficiera de cet avantage devra être suffisamment, longue pour justifier la consommation initiale des ressources rares.

Avant tout investissement dans un projet, il faut d'abord s'assurer de la rentabilité et de la faisabilité du projet [27].

### 1. La valeur d'un bien

Comment, en terme monétaire, est déterminée la valeur d'un bien ? Cette la réponse à cette question a d'abord été donnée en 1938 par un économiste appelé J.B. Williams qui a écrit que la valeur de n'importe quel actif (physique ou financier) est donné par la valeur présente de tous les flux financiers espérés que cet actif générera. Les implications de ce que Williams a dit sont que la valeur d'un actif dépend non pas du coût d'acquisition antérieur de celui-ci ou encore des bénéfices qu'il a pu procurer dans le passé, mais plutôt de ces attributs monétaires futurs, autrement dit, des consommations futures générées par l'actif.

En effet, lorsqu'une personne acquiert un bien productif, elle prend une décision concernant sa propre consommation. Elle a une valeur monétaire disponible immédiatement qui lui permet de consommer un certain nombre de biens. En achetant le bien productif aujourd'hui, elle accepte de ne pas consommer sa valeur monétaire disponible aujourd'hui mais de la consommer plus tard. Cette consommation future se fera à partir de la production du bien acquis et à partir du produit de sa vente lorsqu'elle aura lieu. La question que doit se poser la personne achetant le bien est : ***la consommation future amenée par ce bien compensera-t-elle suffisamment la perte de consommation actuelle*** ? Une approche logique serait d'exiger que la consommation future soit au moins égale à celle dont elle se prive aujourd'hui et d'exiger en plus une prime pour avoir retardé cette consommation. Cette prime sera évidemment plus grande si la consommation est retardée plus loin dans le temps.

Une personne se privant, par exemple, d'une période de vacances de 10 jours pour acheter un bien productif quelconque espère bien pouvoir prendre plus de 10 jours de vacances l'an prochain avec le produit de la vente du bien. Si, après négociations, le produit de la vente du bien lui permet de prendre 11 jours l'an prochain plutôt que 10 jours cette année, on pourra dire qu'elle exige 10% de rendement sur son investissement, soit 1 jour de prime pour 10 jours. A l'inverse, on peut dire qu'un bien pouvant procurer des vacances de 11 jours l'an prochain a une valeur aujourd'hui égale à des vacances de 10 jours. C'est d'ailleurs de cette façon que l'évaluation d'un bien s'effectue. On se demande quelle est la consommation future que ce bien procurera et on détermine ensuite la consommation qui, aujourd'hui, équivaut à cette consommation future. Donc, *la valeur d'un bien est donnée par l'équivalence aujourd'hui, en termes de consommation, de toutes les consommations futures qu'il amènera.*

Pour évaluer ce bien il nous faut donc estimer les consommations futures qu'il générera, déterminer le moment où il les générera et finalement la prime à exiger pour retarder la consommation actuelle.

Nous pouvons, à partir de ces paramètres, formuler le concept de valeur qui est à la base de la théorie financière moderne comme suit :

$$valeur = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

où  $CF_t$  sont les entrées d'argent générées par l'actif de l'année 1 à n, communément appelées en langage financier "cash flow", où n correspond à la période où ces entrées d'argent surviennent, i est le taux de rendement exigé et le symbole  $\sum$  signifie la sommation.

La valeur trouvée par l'équation de la valeur est communément appelée la valeur intrinsèque ou théorique d'un actif. Tandis qu'on peut définir la valeur marchande comme un consensus sur le prix entre des vendeurs et des acheteurs marginalement satisfaits, ceci dans un marché libre et concurrentiel. Il est à noter qu'à un temps donné, il n'y a pas 5 ou 6 valeurs marchandes mais une seule.

Attardons-nous de nouveau à l'équation de la valeur et voyons plus précisément, ce que l'on entend par entrée d'argent ou "cash flow".

## 2. Concept de "cash flow"

Un élément fondamental de la valeur est qu'elle est énoncée en terme de "cash flow". Le concept de "cash flow" est simple : c'est uniquement la différence entre l'argent reçu et l'argent déboursé, ou encore, en terme de consommation, c'est la consommation générée par l'actif moins la consommation retardée par l'achat de l'actif.

## 3. Estimation de coût de l'appareil

MATIERE	RIX
Isolant	7000
Tôle en Acier inox	35000
Briques réfractaires	20000
Voltmètre	30000
Ampèremètre	30000
Cornières	10000
Fixations	5000
Profilés	15000
Galvanomètres (2)	50000
Fabrication	18000
<b>TOTAL</b>	<b>220.000 FCFA</b>

Tableau N°5 : Estimation de prix de l'appareil

# CONCLUSION

Les études sur la conductivité thermique en particulier et des paramètres thermophysiques des matériaux en générale se justifient aisément dans la mesure où la détermination de ces grandeurs physiques permet dans la pratique, la réalisation d'appareils et d'installations répondant mieux à des exigences spécifiques et qui permettent d'utiliser les ressources de manière optimale (par ex : minimisation des déperditions thermiques dans le bâtiment).

Dans le cas des transferts thermiques la maîtrise des déperditions qui sont source de pertes importantes dans les installations industriels de même que dans le bâtiment (Génie civil) est un impératif majeur dans la mesure où elle permet de réduire de façon considérable la puissance des installations ; d'où l'utilisation de matériaux ayant les paramètres physiques adéquates (conductivité thermique).

La portée pédagogique de cet appareil en découle naturellement puisqu'il pourra permettre aux étudiant de faire des travaux pratiques et des tests de thermique, et éventuellement à l'école de proposer des prestations aux industriels afin de valider leurs données techniques d'exploitation ou d'avoir des données fiables sur la conductibilité thermique de certains de leurs matériaux.

De plus le modèle utilisé est un modèle novateur car jusqu'à présent aucun des appareils existants sur le marché n'intègre la convection. Certes il est assez dommage qu'on ait pas pu arriver à la phase de réalisation, mais nous pensons que d'éventuels tests de validations montreront le domaine étendu des possibilités de ce modèle.

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

# Bibliographie

- [1] J. HLADIK – Métrologie des propriétés thermophysiques des matériaux, édition MASSON 1990.
- [2] WOODSIDE (W.). – Analysis of errors due to edge heat loss in guarded hot plates. ASTM, STP 217, p. 49-62 (1957).
- [3] QUIN (S.), VENUTI (G.) et BEILLE VERT (N.). – Metrological assessment of a guarded hot plate apparatus. Eurotherm Seminar no 44 on Advances in thermal insulation, Porto, Portugal (1995).
- [4] Techniques de l'ingénieur
- [5] DE PONTE (F.), LANGLAIS (C.), BOULANT (J.) et KLARSFELD (S.). –Reference guarded hot plate apparatus for the determination of steady-state thermal transmission properties in agreement with the new international standard ISO 8302. Thermal Conductivity 19, Ed. D.N. Yarbrough, Plenum Press (1988).
- [6] MAILLET (D.), ANDRÉ (S.), BATSALE (J.-C.), DEGIOVANNI (A.) et MOYNE (C.). – Thermal quadrupoles. Solving the heat equation through integral transforms. John Wiley & Sons Ltd, 2000.
- [7] WOODSIDE (W.) et WILSON (A.G.). – Imbalance errors in guarded hot plate measurements. ASTM, STP 217, p. 32-46 (1957).
- [8] LANG (D.L.). – A quick thermal conductivity test on insulating materials. ASTM Bulletin no 216, sept. 1956.
- [9] Building applications of heat flux transducers. ASTM STP 885 (1985).
- [10] THUREAU (P.). – Fluxmètres thermiques, R 2 900 Techniques de l'Ingénieur, Traité Mesures et Contrôle (1996).
- [11] DEGENNE (M.) et KLARSFELD (S.). – A new type of heat flow meter for application and study of insulation and systems. ASTM STP 885 (1985).

- [12] RAVALITERA (G.), CORNET (M.), DUTHOIT (B.) et THERY (P.). – Étude et description d'un nouveau thermofluxmètre permettant la mesure simultanée des flux thermiques et des variations de température. Rev. de Phys. Appl. Vol. 17, no 4, p. 177-185, avr. 1982.
- [13] DEGENNE (M.), BOULANT (J.) et KLARSFELD (S.). – Mesures de caractéristiques thermiques des isolants, à basses températures à l'aide d'une méthode fluxmétrique. IIF-IIR, Commission B1, 16e Congrès International du Froid, Paris (1983).
- [14] DE PONTE (F.) et MACCATO (W.). – The calibration of heat flow thermal insulation performance. ASTM STP 718, p. 231-254 (1980).
- [15] DEVISME (J.M.). – Conductivité et diffusivité thermiques simultanées par mesure de flux en régime non stationnaire. Thèse de doctorat, Paris (1973).
- [16] MARÉCHAL (J.C.) et DEVISME (J.M.). – Mesure rapide et simultanée de la conductivité et de la diffusivité thermique. Entropie, no 64, p. 27-34 (1975).
- [17] LANGLAIS et al. – Use of a two heat flow transducer apparatus for transient thermal measurements on porous insulating materials. ASTM Symposium, Bal Harbour, Florida, 6-9 déc. 1987.
- [18] SILBERSTEIN (A.) et ROUX (G.). – Méthode de mesure rapide de la résistance thermique d'une plaque plane : la méthode à deux fluxmètres. 23e Colloque CSTB-CFI, Paris le 12 oct. 1988.
- [19] DAVIS (W.R.). – Hot-wire method for the measurement of the thermal conductivity of refractory materials. Compendium of thermophysical property measurement methods, vol. 1, Ed. Maglic et al. Plenum Press, New York & Londres (1984).
- [20] JESCHKE (P.). – Thermal conductivity of refractories: working with the hot-wire method. ASTM, STP 660, p. 172-185 (1978).
- [21] JACKSON (A.J.) et al. – Thermal conductivity measurements on high-temperature fibrous insulations by the hot-wire method. ASTM, STP 660, p. 154-171 (1978).
- [22] FINE (H.A.). – Analysis of the applicability of the hot-wire technique for determination of the thermal conductivity of diathermanous materials. ASTM, STP 660, p. 147-153 (1978).

[23] NAGASHIMA (A.) et TAKAHASHI (I.). – The effect of radiation in transient hot-wire measurements. High Temperature – High Pressures, vol. 19, p. 261-267 (1987).

[24] PARKER (W.) et al. – Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity. J. Appl. Phys. 32, no 9, p. 1679-1684 (1961).

[25] SACADURA J-F – Initiation aux transferts thermiques, 4eme triage 1993

[26] LATIF M. JIJI – Heat Conduction – begell house, Inc. New York. Wallingford, U.K.

[27] SARR Ngor – Gestion de la production (notes de cours)- 2003/2004

# ANNEXES

**ANNEXE 1 : Tableau récapitulatif des thermocouples**

THERMOCOUPLE	CONDUCTEUR +	CONDUCTEUR -	PLAGE DE T°	COULEUR CABLE DE COMPENSATION
K	NICKEL-CHROME 10%	NICKEL-ALUMINIUM 5% -SILICIUM	0/+1100 °C	Ext et - =VIOLET, + =JAUNE Ext et - =VERT, + =BLANC
V	CUIVRE	CUIVRE-NICKEL	0/+1100 °C	Ext et - =MARRON, + =JAUNE
T	CUIVRE	CUIVRE-NICKEL CONSTANTAN	-185/+300 °C	Ext et - =BLEU, + =JAUNE Ext et - =BRUN, + =BLANC
U	CUIVRE	CONSTANTAN	-185/+300 °C	Ext et - =BRUN, + =ROUGE
J	FER	CUIVRE-NICKEL CONSTANTAN	+20/+700 °C	Ext et - =NOIR, + =JAUNE Ext et - =NOIR, + =BLANC
E	NICKEL-CHROME 10%	CUIVRE-NICKEL CONSTANTAN	0/+800 °C	Ext et - =ORANGE, + =JAUNE Ext et - =VIOLET, + =BLANC
N	NICROSIL (NICKEL 84,4% - CHROME 14,2% - SILICIUM 1,4%)	NISIL (NICKEL 95,6% - SILICIUM 4,4%)	0/+1100 °C	Ext et - = ROSE, + = BLANC
R	PLATINE-RHODIE 13%	PLATINE	0/+1600 °C	Ext et - = ORANGE, + = BLANC
S	PLATINE-RHODIE 10%	PLATINE	0/+1550 °C	Ext et - = VERT, + = JAUNE Ext et - = ORANGE, + = BLANC
B	PLATINE-RHODIE 30%	PLATINE-RHODIE 6%	+100/+1600 °C	Ext et - = GRIS, + =JAUNE
W	TUNGSTENE	TUNGSTENE-RHENIUM 26%	+20/+2300 °C	Ext et - =?, + =?

**ANNEXE 2 : Tableau de la FEM en microvolts ; la jonction de référence étant à 0°C**

TABLE	COUPLE K	COUPLE T	COUPLE J	COUPLE E	COUPLE R	COUPLE S	COUPLE B
DES THERMOCOUPLES	COUPLE N	COUPLE U	COUPLE	COUPLE	COUPLE	COUPLE	COUPLE

TEMPERATURE	COUPLE K	COUPLE T	COUPLE J	COUPLE E	COUPLE R	COUPLE S	COUPLE B
-270 °C	-6458 µV	-6258 µV	*****	-9835 µV	*****	*****	*****
-200 °C	-5891 µV	-5603 µV	-7890 µV	-8824 µV	*****	*****	*****
0 °C	0 µV						
+100 °C	4095 µV	4277 µV	5268 µV	6317 µV	0647 µV	0645 µV	0033 µV
+200 °C	8137 µV	9286 µV	10777 µV	13419 µV	1468 µV	1440 µV	0178 µV
+300 °C	12207 µV	14860 µV	16325 µV	21033 µV	2400 µV	2323 µV	0431 µV
+400 °C	16395 µV	20869 µV	21846 µV	28943 µV	3407 µV	3260 µV	0786 µV
+500 °C	20640 µV	*****	27388 µV	36999 µV	4471 µV	4234 µV	1241 µV
+600 °C	24902 µV	*****	33096 µV	45085 µV	5582 µV	5237 µV	1791 µV
+700 °C	29128 µV	*****	39130 µV	53110 µV	6741 µV	6274 µV	2430 µV
+800 °C	33277 µV	*****	45498 µV	61022 µV	7949 µV	7345 µV	3154 µV
+900 °C	37325 µV	*****	51875 µV	68783 µV	9203 µV	8448 µV	3957 µV
+1000 °C	41269 µV	*****	57942 µV	76358 µV	10503 µV	9585 µV	4833 µV
+1100 °C	45108 µV	*****	63777 µV	*****	11846 µV	10754 µV	5777 µV
+1200 °C	48828 µV	*****	69536 µV	*****	13224 µV	11947 µV	6783 µV
+1300 °C	52398 µV	*****	*****	*****	14624 µV	13155 µV	7845 µV
+1400 °C	*****	*****	*****	*****	16035 µV	14368 µV	8952 µV
+1700 °C	*****	*****	*****	*****	20215 µV	17942 µV	12426 µV

### ANNEXE 3 : Tableau des tolérances des thermocouples

COUPLE	CLASSE 1		CLASSE 2		CLASSE 3	
	PLAGE °C	TOLERANCE	PLAGE °C	TOLERANCE	PLAGE °C	TOLERANCE
T	-40 à + 125	± 0,5 °C	- 40 à + 136	± 1 °C	-67 à + 40	± 1 °C
	+ 125 à + 350	±0,4% t	+ 133 à + 350	±0,75 % t	-200 à - 67	± 1,5 % t
E	- 40 à + 375	±1,5 °C	- 40 à + 333	± 2,5 °C	-167 à + 40	±2,5 °C
	+ 375 à + 800	0,4% t	+ 333 à + 900	± 0,75 % t	-200 à - 167	±0,15 % t
J	- 40 à + 375	±1,5 °C	- 40 à + 333	± 2,5 °C	*****	*****
	+ 375 à + 750	0,4% t	+ 333 à + 750	±0,75 % t	*****	*****
K ET N	- 40 à + 375	±1,5 °C	- 40 à + 333	± 2,5 °C	-167 à + 40	± 2,5 °C
	+ 375 à + 1000	0,4% t	+ 333 à + 1200	±0,75 % t	-200 à - 167	±0,15 % t
R ET S	0 à + 1100	±1 °C	0 à + 600	± 1,5 °C	*****	*****
	+ 1100 à + 1600	±[1+0,003(t-1100)]	+ 600 à + 1600	± 0,25 % t	*****	*****
B	*****	*****	+ 600 à + 1700	±,1,5 °C	+ 600 à + 1700	±,4 °C
	*****	*****	+ 600 à + 1700	±0,25 % t	+ 800 à + 1700	±0,5 % t

**ANNEXE 4 : Caractéristiques thermophysiques des métaux et alliages**

Métaux et alliages	Pt de fusion °C	à 20 °C				$\lambda$ (W/m)	
		$\lambda$ W/m k	c J/kg K	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$\alpha \times 10^6$ m <sup>2</sup> /s	à 300 °C	à 600 °C
Aluminium pur	660	236	902	2710	97.1	234	
Duralumin (96 Al, 4 Cu)		169	881	2790	68.8	193	
Argent	962	427	234	10500	173.8	407	
Cuivre pur	1085	398	386	8930	115.5	384	
bronze (95 Cu, 5 Al)		83	410	8666	23.4		
bronze (75 Cu, 25 Sn)		26	343	8666	8.7		
laiton rouge (9 Sn, 6 Zn)		61	385	8714	18.2		
laiton (70 Cu, 30 Zn)	915	111	385	8522	33.8		
constantan (55 Cu, 45 Ni)	1220	23	384	8920	6.7		
Fer et alliages pur	1537	80.2	447	7870	22.7	56.5	
acier (1 C)		43.2	470	7790	11.8	41.5	
acier (1.5 C)		36.7	470	7750	10.1	35.7	
acier ou chrome (17 Cr)		22.1	460	7710	6.2	22.6	
acier ou chrome-nickel (18 Cr, 8 Ni)		14.3	460	7820	4.0	19.4	
acier doux (0.5 C)		54	465	7830	14.8	45.1	
fonte (0.4 C)		51	420	7270	16.7	—	
Nickel, pur	1455	90.7	444	8900	23.0	65.6	
alumel (95 Ni, 2 Al, 2 Mn, 1 Si)		29.8	523.4	8600	6.6		
chromel (90 Ni, 10 Cr)		19.2	448	8730	4.9	22.8	
nickrome (80 Ni, 20 Cr)	1399	12.7	440	8310	3.5	17.1	
Or	1063	317	129	19300	127.3	298	
Platine, pur	1769	71.5	133	21450	25.1	73.0	
platine rhodié (13 Rh)		36.9	—	19610	—	—	
platine rhodié (10 Rh)		37.7	—	19970	—	—	
Plomb	328	35.3	129	11340	24.1	31.4	
Titane	1680	21.9	522	4500	9.3	19.5	
Tungstène	3660	176	132	19345	68.9	140.1	
Uranium	1133	27.6	116	19070	12.5	33.4	
Zinc	693	115	388	7140	41.5	105	

**ANNEXE 5 : Composés et solides non métalliques**

Les valeurs sont valables pour la température de 20 °C, sauf quand une autre température est indiquée

Composés/solides	$\lambda$ W/m K	c J/kg K	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$\alpha \times 10^6$ m <sup>2</sup> /s
Aliments pomme	0.51	3600	825	
banane	0.48	3340	975	
Amiante en panneau (ciment)	0.6-0.7			
en feutre	0.06-0.08	815		
ondulé	0.085			
Argile (50% d'humidité)	1.25	875	1545	
Asphalte	0.7		2120	
Bakélite	0.23	1590	1270	
Béton type Portland (100 °C)	1.7		2300	
autres types:	0.8-1.4	880	1900 à 2300	
Bois (perpendiculaire aux fibres)				
chêne	0.17-0.3	2390	610-800	
pruche, pin, sapin	0.11-0.15	2720	410-600	
cèdre	0.11	—	480	
sciure sèche	0.05		130	
"                    "	0.07		220	
contre-plaqué	0.11		590	
Brique ordinaire	0.69	840	1600	
"                    "	0.4-0.5	840	1800	
chamotte (500 °C)	1.04	960	2000	
magnésie (200 °C)	3.81	1130	2000	
silice (1 900 °C)	1.07	—	1900	
carborandum (1 400 °C)	11.0	—	2200	
Caoutchouc buna	0.46		1200	
spongieux	0.06		230	
Charbon anthracite	0.238	1260	1370	0.14
Ciment - mortier sec	1.1-1.3	835	2300	
- de Portland, sec	0.3	750	3100	0.13
Coton	0.06	1300	80	
Glace (eau solide, 0 °C)	2.22	2050	915	1.18
Granite	1.7-4.0	820	2640	0.8-1.8
Grès	1.8	710	2200	1.15
Laine de verre	0.037		50	
	0.036		100	
	0.040	670	200	0.30
	0.040		10-50	
Liège en plaques	0.041	1880	150	0.15
Magnésie (à 85%), 20 °C	0.05		185	
200 °C	0.07		185	
Marbre	2.1-2.9	800	2600	1.2
Mica	0.52		2900	
Neige (0 °C)	0.05		110	
	0.19		500	
Papier	0.01	1350	920	