

REPUBLIQUE DU SENEGAL
UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
Centre de THIES

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR DE CONCEPTION

**MODELE D'ELEMENTS FINS TYPE P
POUR L'ANALYSE DES DALLES EPAISSES**

Auteur : Alioune DIOP
Directeur interne : Dr Moustapha N'DIAYE

Année Académique : 2004 / 2005

Merci DIEU

A mes chers parents pour tous les sacrifices consentis.

A ma grand-mère Diakha DIOP.

A mes frères, sœurs, cousines et cousins.

J'espère, que ce travail pourra un jour, me permettre de rendre vos lendemains meilleurs.

SOMMAIRE

Le but de ce travail était d'élaborer un modèle de calcul des coques plissées par la méthode des éléments finis. Les coques plissées présentent deux types de comportement :

- ✓ Le comportement membrane correspondant à l'élasticité bidimensionnelle,
- ✓ Le comportement flexionnel.

Ce projet n'est axé que sur le comportement flexionnel, la solution membrane faisant l'objet d'un autre projet de fin d'études.

Les plaques sont le plus souvent utilisées dans le génie civil pour leur comportement en flexion. Avec la genèse du béton armé, les singularités géométriques font leur apparition, de même que certains efforts qui étaient très souvent négligés dans le calcul comme le cisaillement. Des études sur le cisaillement des plaques ont été faites par *Mindlin* et *Reissner* en 1945 et ont aboutit à l'établissement des équations aux dérivées partielles qui décrivent le comportement au cisaillement de ces plaques. Afin de résoudre ces équations, des méthodes de calcul comme la méthode par éléments finis ont vu le jour.

La méthode des éléments finis est aujourd'hui la méthode la plus utilisée dans le calcul des structures. Elle consiste à décomposer une structure en petits éléments structurels plus faciles à calculer. Les éléments les plus utilisés pour l'étude des plaques sont l'élément rectangulaire et l'élément triangulaire. Le principe de la méthode est d'interpoler un champ de déplacement des différents éléments, et d'appliquer à ce champ un principe variationnel de manière à construire une solution qui lorsqu'elle converge vérifie les équations aux dérivées partielles et les conditions limites du problème. Nous avons utilisé le modèle dit de type P ou polynomial, qui utilise les polynômes de *Legendre*, pour interpoler les déplacements, et avons adopté comme principe variationnel le principe du minimum de l'énergie potentiel, adapté à la méthode par éléments finis, pour résoudre nos équations.

Le type P montre une précision et une rapidité de convergence plus grande que le type H qui est actuellement le plus utilisé. La programmation des calculs sur Maple nous a permis d'apprécier les résultats obtenus. Cependant pour plus de rapidité dans les calculs, il faudrait envisager d'intégrer ces programmes dans un environnement plus convivial. Les modèles d'éléments utilisés ne nous ont pas permis d'étudier les singularités qui font l'objet de modèles d'éléments plus élaborés.

Mots-clés : TYPE P ; formulation variationnelle ; Interpolation ; Polynôme de Legendre ; cisaillement ; Matrice de rigidité ; formulation mixte ; Eléments finis.

REMERCIEMENTS

J'aimerais exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à la réalisation de ce travail.

Et plus particulièrement remercier :

- **Dr Moustapha NDIAYE** : professeur à l'ESP de Thiès, pour sa disponibilité, son aide. Il a été notre guide durant tout ce travail. Je le remercie également pour l'ensemble des connaissances qu'il a bien voulu nous offrir.
- **Mes camarades de Promotion : Fodé MANE et Boubacar KEITA** pour leur ouverture, leur disponibilité et les connaissances qu'on a pu échanger.
- A l'ensemble de la Direction de l'ESP de Thiès_ qui nous ont permis de pouvoir suivre cette formation qui à aboutit à ce travail.
- **Mr Youssou DIOP** : Directeur de l'Habitat, pour son soutien et son encouragement.

Je remercie l'ensemble des étudiants de l'ESP Thiès, pour leur solidarité et leur cordialité.

LISTE DES FIGURES

Figure 01 : Répartition des contraintes dans une plaque	04
Figure 02 : Efforts résultants dans une plaque	04
Figure 03 : Solide avec ses conditions d'appuis	11
Figure 04 : Elément linéique à 2 nœuds	19
Figure 05 : Elément linéique à 3 nœuds	20
Figure 06 : Elément linéique à 4 nœuds	21
Figure 07 : Elément triangulaire à 3 nœuds	22
Figure 08 : Elément triangulaire à 6 nœuds	23
Figure 09 : Elément triangulaire à 10 nœuds	24
Figure 10 : Elément rectangulaire à 4 nœuds	25
Figure 11 : Elément rectangulaire à 8 nœuds	26
Figure 12 : Elément rectangulaire à 9 nœuds	27
Figure 13 : Elément linéique standard TYPE P	29
Figure 14 : Elément rectangulaire standard TYPE P	29
Figure 15 : Elément triangulaire standard TYPE P	31
Figure 16 : Maillage d'une structure	49

LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS

$[]$	Matrice rectangulaire ou carré,
$\{ \}$	Vecteur Colonne,
$[]^{-1}$	Inverse Matrice,
$[]^T$	Matrice transposé,
$f_{,x}$	Dérivée partielles de f par rapport à x,
H , [H]	Matrice de rigidité Elastique.
$[H_f], [H_c]$	Rigidité homogénéisées de flexion et de cisaillement transversal
K , [K]	Matrice de rigidité de la structure,
k , [k]	Matrice de rigidité d' un élément,
J , [J]	Matrice Jacobienne.
Γ , [Γ]	Matrice Inverse de la matrice jacobienne,
R	Vecteur des forces équivalentes, vecteur sollicitations globales,
$\{f_s\}$, $\{m_s\}$	Vecteur des forces et moments sur le contour Γ_l
B , [B]	Matrice Déformation Déplacements.
D , [D]	Matrice Efforts résultants - contraintes.
d , {d}	Vecteurs des degré de liberté des nœuds d'un élément.
M , {M}	Vecteur des efforts résultants de flexion,
N , [N]	Matrice des fonctions d'interpolation.
Q , {Q}	Vecteur des efforts résultants de cisaillement,
$\bar{\mathbf{b}}$, F	Forces par unite de volume.
$\boldsymbol{\sigma}$, $\{\boldsymbol{\sigma}\}$, $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$	Vecteur contrainte, contrainte initiale,
$\boldsymbol{\beta}$, $\{\boldsymbol{\beta}\}$	Vecteur des rotations,
u , {u}	Vecteur des rotations,
$\boldsymbol{\gamma}$, $\{\boldsymbol{\gamma}\}$, γ_{xz} , γ_{yz}	Vecteur des déformations de cisaillement,
$\boldsymbol{\varepsilon}$, $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$, $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$	Vecteur déformation linéaire, déformation initiale,
e , {e}, $\boldsymbol{\chi}$, $\{\boldsymbol{\chi}\}$	Vecteur des déformations de membrane et des courbures
U	Energie interne de déformation,
W ^o	Travail des efforts,
M_x , M_y , M_{xy}	Moments de flexion,

u, v, w	Composants du déplacement,
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\beta}_x, \bar{\beta}_y$	déplacements et rotation imposées
x, y, z	Coordonnées cartésiennes,
Ω	Domaine délimitant une structure,
Γ_t	Bord d'une structure sujet à des efforts de tractions,
Γ_u	Bord d'une structure où les déplacements sont imposés ou connus,
ν	Coefficient de poisson.
\mathbf{t}	Vecteurs efforts de traction surfacique.
θ_x, θ_y	Rotations suivant les axes x, y .
η, ξ, w	Coordonnées paramétrique suivant x, y, z ,
f_v, f_s	Forces de volume, surfaciques
π_p	fonctionnelle de l'énergie potentiel,
β_x, β_y	Rotation de la normale dans les plans : xz, xy ,
E	Module de Young,
G	Module de Cisaillement,
N_i	fonction d'interpolation,
w	Déplacement transversal suivant z ,
t	Epaisseur,
d.d.l.	Degré de liberté.
EDP	Equations aux dérivés partielles
MEF	Méthode des éléments finis

TABLES DES MATIERES

Sommaire	I
Remerciements	II
Liste des Tableaux	III
Liste des symboles et abréviations	IV
INTRODUCTION	01
1- GENERALITES SUR LES PLAQUES	02
1.1- Définition géométrique et hypothèses cinématique d'une plaque	02
1.2- Equations cinématiques	02
1.3- Equations d'équilibre	04
1.4- Relations Contraintes Déformations	06
1.5- Les équations aux dérivées partielles	09
2- FORMULATION VARIATIONNELLE.	11
2.1-Formulation par le principe de l'Energie potentielle totale.	11
2.2- formulation par le principe de l'Energie potentielle complémentaire.	14
2.3- Formulation Mixte.	15
2.2.1- formulation mixte en $u-\sigma$.	16
2.2.2- formulation mixte en $u-\sigma-\varepsilon$.	17
3- FONCTIONS D'APPROXIMATION OU D'INTERPOLATION.	19
3-1- Fonctions d'interpolation de TYPE H.	19
3-1-1-Elément Linéique.	20
3-1-1-1- Interpolation Linéaire.	20
3-1-1-2 Interpolation Quadratique.	21
3-1-2-Elément Triangulaire.	23
3-1-3-Eléments Rectangulaires.	26
3-1-3-1- Interpolation Linéaire.	26
3-1-3-2- Interpolation Quadratique.	27
3-2- fonction d'interpolation de TYPE P.	29
3-2-1 Elément linéique.	29
3-2-2 Eléments Rectangulaires.	30
3-2-3 Eléments Triangulaires.	32

4-FORMULATION PAR ELEMENTS FINIS.	34
4-1- Matrice de Rigidité.	36
4-2- Vecteurs chargements et forces équivalentes aux nœuds.	39
5-INTEGRATION NUMERIQUE.	41
6- ASSEMBLAGE.	43
7- RESOLUTION DES EQUATIONS	44
8-APPLICATIONS	45
CONCLUSION	50
Bibliographie	51
Annexe A	54
Annexe B	56

Introduction

Les plaques sont des structures très répandues dans le génie civil. Elles sont le plus souvent utilisées pour leur efficacité à transmettre les charges surfaciques qui leurs sont appliquées. Suivant leur épaisseur, on peut les classer en plaque mince ou épaisse. Ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique mais également un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal.

Les dalles épaisses sont les plaques les plus utilisées pour leur comportement en flexion. Elles sont utilisées dans le bâtiment comme plancher, dans les routes comme chaussée. Avec la diversification des formes dans la construction due à la maniabilité du béton, les singularités géométriques prennent de plus en plus d'ampleur. Et de ce fait, augmente, dans certains cas, les déformations dues au cisaillement. L'analyse du comportement des plaques en flexion, en négligeant les effets membranaires, permet de mieux étudier cet effet du cisaillement.

L'étude du comportement des plaques en flexion, aboutit à des équations aux dérivées partielles. La résolution de telles équations est très difficile et parfois même impossible.

La méthode des éléments finis, qui a été découverte dans le cadre de l'analyse structure vers les années soixante, est une des méthodes utilisée pour résoudre ces équations. Elle est basée sur une approximation appliquée à un principe variationnel. Elle est utilisée aujourd'hui dans la plupart des domaines de l'ingénierie.

Un des avantages de la méthode des éléments finis est que la précision des solutions obtenues peut être augmentée en utilisant des polynômes d'ordre plus élevés comme fonctions de base pour interpoler les déplacements. Beaucoup de types de polynômes de base ont été établis parmi lesquelles les polynômes de *Legendre*, utilisés dans la méthode de type P.

Notre étude portera d'abord sur la détermination des équations aux dérivées partielles (EDP) régissant le comportement des plaques en flexion avec prise en compte des contraintes de cisaillement, ensuite nous présenterons les différentes formulations variationnelles applicables à la résolution de telles structures et enfin nous définirons les différentes étapes utilisées dans la méthode des éléments finis de type P pour aboutir à la solution approximative des systèmes obtenus.

1- GENERALITES SUR LES PLAQUES

1.1- Définition géométrique et hypothèses cinématique d'une plaque

Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles voisins d'équations $z = \pm \frac{1}{2} t$, où, $t(x,y)$ est l'épaisseur de la plaque. Le plan (Oxy) est appelé plan moyen (ou feuillet moyen) de la plaque et aussi plan de référence. Les plaques sont des structures en état plan de contraintes admettant des déplacements verticaux suivant l'axe z. Pour étudier l'effet flexionnel des plaques épaisses, nous utiliserons certaines hypothèses de base :

- Le milieu est homogène et isotrope.
- La déformation transversale ϵ_{zz} est nulle ($\epsilon_{zz} = 0$)
- La contrainte σ_{zz} est négligée par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes.
- La prise en compte de la variation du cisaillement transversal par l'introduction d'un coefficient correctif K sur les contraintes tangentielles.
- Les inconnues cinématiques utilisées seront : le déplacement transversale w et les rotations β_x et β_y des sections normales au plan moyen dans les plans Oxz et Oyz respectivement.
- Les efforts de membrane étant négligés on aura les moments de flexion M_x, M_y, M_{xy} et les efforts tranchants Q_x et Q_y produit par le chargement de la plaque sur son plan moyen.

1.2- Equations cinématiques

Ces hypothèses nous permettent d'établir que les déformations linéaires s'écrivent :

$$\boldsymbol{\epsilon} = e - z\boldsymbol{\chi} \quad (1.1)$$

avec $\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}] ;$

Déformations de membrane : $\mathbf{e}^T = [u_x \quad u_y \quad u_x + u_y] ;$

Courbures : $\chi^T = [\beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x}] ;$

Déformations de cisaillement transversal : $\gamma = [w_{,x} + \beta_x \quad w_{,y} + \beta_y]$

Pour l'effet flexionnel, le champ de déformation s'écrit :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \chi \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z\beta_{x,x} \\ -z\beta_{y,y} \\ -z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \\ w_{,y} + \beta_y \\ w_{,x} + \beta_x \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Sous forme matricielle :

$$\varepsilon = \mathbf{L} \times \mathbf{u} \quad (1.3)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \\ w_{,x} + \beta_x \\ w_{,y} + \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 1 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 1 & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ w \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \beta_x &= -\theta_y \\ \beta_y &= \theta_x \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{bmatrix} -\theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ (\theta_{x,x} - \theta_{y,y}) \\ w_x - \theta_y \\ w_x + \theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 1 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 1 & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta_y \\ \theta_x \\ w \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

1.3- Equations d'équilibre

Les sollicitations sur les plaques créent :

- des contraintes Normales : σ_x σ_y
- des contraintes de cisaillement : τ_{xy} τ_{yz} τ_{xz} (fig 1.2)

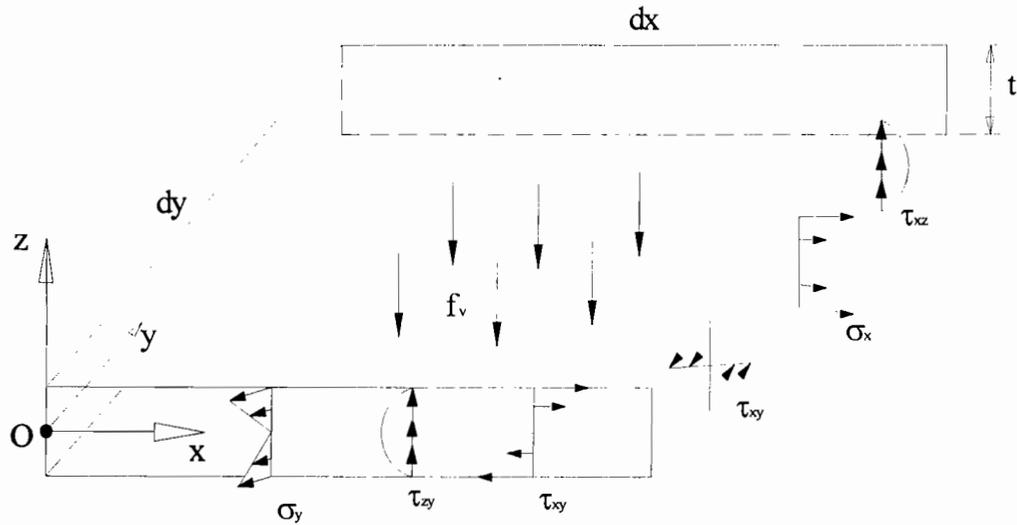


Figure 01: Répartition des contraintes dans une plaque

Cet état de contraintes engendre :

- les moments : M_x M_y M_{xy}
- les efforts de cisaillement ou efforts tranchants : Q_x et Q_y (figure 02)

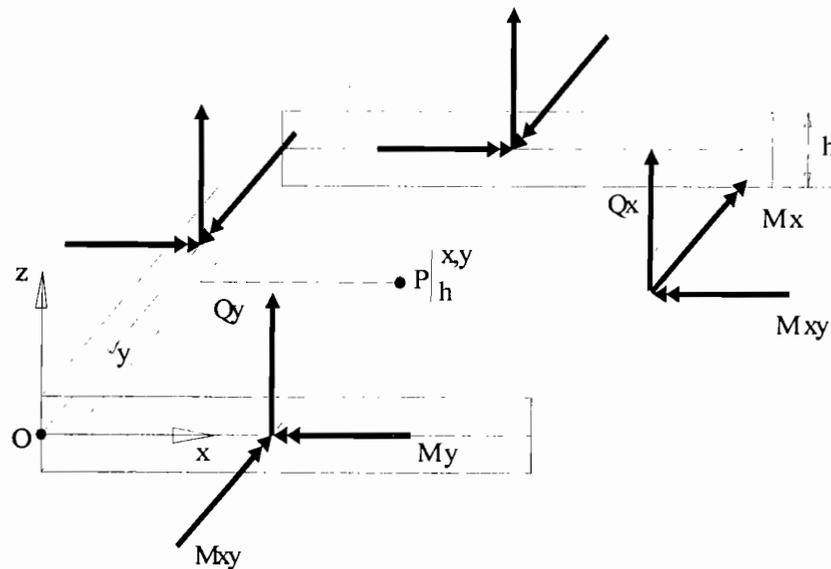


Figure 02 :Efforts résultants sur une plaque

Les équations d'équilibre en un point P(x,y,z) sont :

$$\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_{vx} = 0 \quad (1.7)$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + f_{vy} = 0 \quad (1.8)$$

$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_{vz} = 0 \quad (1.9)$$

f_{vz} , f_{vy} , f_{vx} sont des forces par unité de volume.

En faisant l'équilibre global sur l'épaisseur on obtient :

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + f_z = 0 \quad (1.10)$$

L'équilibre des moments par rapports aux axes x et y s'écrit :

$$M_{x,x} + M_{xy,y} + Q_x + m_x = 0$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} + Q_y + m_y = 0 \quad (1.11)$$

Avec :

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} f_{vx}(x, y, z) \\ f_{vy}(x, y, z) \\ f_{vz}(x, y, z) \end{Bmatrix} dz ;$$

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} f_{vx}(x, y, z) \\ f_{vy}(x, y, z) \end{Bmatrix} z dz$$

f_x , f_y , f_z , m_x , m_y sont des efforts par unité de surface moyenne

Les moments et efforts tranchants qui sont obtenus par intégration des contraintes :

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} z dz \quad (1.12)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zx} dz, \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zy} dz \quad (1.13)$$

M_x , M_y et M_{xy} : moments ou efforts résultants de flexion (N.m/m)

Q_x et Q_y : efforts résultants de cisaillement ou efforts tranchants (N/m)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz ; \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} dz \quad (1.14)$$

En un point situé sur le contour S, les efforts tranchants Q_n et moments M_{xn}, M_{yn} s'écrivent :

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_x n_x + Q_y n_y \\ M_{xn} &= M_x n_x + M_{xy} n_y \\ M_{yn} &= M_{xy} n_x + M_y n_y \end{aligned} \quad (1.15)$$

Où n_x et n_y représentent les cosinus directeurs de la normale en S. Sur un contour S_f partie du contour A où les efforts sont imposés, les Q_n, M_{xn}, M_{yn} représentent les efforts imposés notés F_z, M_x, M_y . Sur un contour S_u partie de A où les rotations et déplacements sont imposés les Q_n, M_{xn}, M_{yn} représentent les réactions d'appui. Ces relations d'équilibre écrites sous forme matricielle donne :

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} ; \quad (1.16)$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y & 1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1.17)$$

1.4- Relations Contraintes Déformations

Les relations contraintes déformations peuvent s'écrire suivant la loi de Hooke sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (1.18)$$

Avec $\{\boldsymbol{\sigma}_0\} = [\sigma_{x0} \quad \sigma_{y0} \quad \sigma_{xy0} \quad \tau_{xz0} \quad \tau_{yz0}]^T$ comme contraintes initiales.

Pour un matériau isotrope, la matrice de rigidité découplée donne :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_\tau \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$\text{Avec} \quad \mathbf{H}_\sigma = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\tau = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\text{Avec} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.21)$$

La relation globale devient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} = \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \tau_{xy0} \\ \tau_{xz0} \\ \tau_{yz0} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

En considérant les relations (1.11) et (1.16) on obtient :

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H}_\tau \boldsymbol{\chi} + \mathbf{M}_0 \quad (1.23)$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{H}_c \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Q}_0 \quad (1.24)$$

$$\text{Avec} \quad \mathbf{H}_\tau = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{H} \cdot z^2 dz = \mathbf{H} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz = \frac{t^3}{12} \mathbf{H} ; \quad (1.25)$$

$$\mathbf{H}_c = \frac{5}{6} t \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$M_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_0 z dz \quad ; \quad Q_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_0 dz \quad (1.27)$$

La matrice $[H_c]$ tient compte des composantes de $[H_\tau]$ et d'un coefficient $k = \frac{5}{6}$ dit facteur de correction de cisaillement transversal. Ce facteur est introduit pour ajuster l'hypothèse fautive que le cisaillement est constant sur l'épaisseur de la plaque.

Il existe un grand nombre de définitions pour k . On peut par exemple choisir k pour que la rigidité au cisaillement transversal du modèle de plaque corresponde le plus possible à celle définie par la théorie tridimensionnelle. Dans le cas de calculs en dynamique, on peut choisir k tel que les fréquences propres de la plaque soient égales à celles calculées en utilisant des calculs d'élasticité linéaire précis.

Typiquement, pour une plaque isotrope, on choisira $k = 5/6$.

Il vient alors que la matrice globale $[D]$ reliant toutes les efforts résultants et les contraintes est donné par :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{t^3 E}{12-12\nu^2} & \frac{t^3 \nu E}{12-12\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^3 E \nu}{12-12\nu^2} & \frac{t^3 E}{12-12\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3 E}{24+24\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5tE}{12(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5tE}{12(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Les efforts résultants sont établis en considérant les relations (1.23) et (1.24) :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{t^3 E}{12-12\nu^2} & \frac{t^3 \nu E}{12-12\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^3 E \nu}{12-12\nu^2} & \frac{t^3 E}{12-12\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3 E}{24+24\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5tE}{12(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5tE}{12(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \\ \beta_{,x} - w_{,x} \\ \beta_{,y} - w_{,y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oxy} \\ Q_{Ox} \\ Q_{Oy} \end{Bmatrix} \quad (1.29)$$

1.5- Les Equations aux Dérivées Partielles

Elles sont données par les relations cinématiques, les équations d'équilibre et la loi constitutive (Loi de Hooke).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (1.30)$$

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1.31)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (1.32)$$

La substitution de (1.30) dans (1.32) conduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}\mathbf{L}\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (1.33)$$

Introduisant ensuite (1.33) dans (1.31) on obtient finalement les équations aux dérivées partielles fondamentales (EDPF) qui s'écrivent comme :

$$\mathbf{L}^T \mathbf{H}\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1.34)$$

Le développement de (1.34) donne :

$$\frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{t^3 E}{24(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{5tE}{12(1+\nu)} \left(\beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{t^3 \nu E}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} + m_x = 0$$

$$\frac{t^3 \nu E}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + \frac{t^3 E}{24(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} \right) + \frac{5tE}{12(1+\nu)} \left(\beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + m_y = 0$$

$$\frac{5tE}{12(1+\nu)} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f_z = 0$$

La solution de ces équations doit aussi satisfaire les conditions limites imposées, soit sur les déplacements w / et sur les efforts aux bords de la plaque. Selon le type d'accrochage aux bords le tableau suivant donne les conditions limites théoriques possibles

Tableau 01 : Conditions aux limites d'une plaque

Bord	Conditions aux limites
Encastrement E1	$w = \beta_n = \beta_s = 0$
Encastrement E2	$w = \beta_n = M_{ss} = 0$
Appui simple AS1	$w = \beta_s = M_n = 0$
Appui simple AS1	$w = \beta_n = \beta_s = 0$
Bord libre	$Q_n = M_n = M_{ns} = 0$

2- FORMULATION VARIATIONNELLE

La résolution des équations aux dérivées partielles, qui représentent la formulation forte du problème, présente certaines difficultés. Pour rendre cette résolution plus facile on exprime ces équations sous diverses formulations équivalentes.

Un principe variationnel exige une fonctionnelle qui est une fonction de fonctions, présentées sous forme intégrale. Cette fonctionnelle contient de façon implicite les équations aux dérivées partielles de base et les conditions aux limites essentielles qu'on retrouve en lui appliquant la théorie des variations. La formulation équivalente la plus utilisée en structure, est la formulation basée sur la théorie des travaux virtuels, ainsi que le principe de stationnarité de l'énergie potentielle.

2.1-Formulation par le principe de l'Energie potentielle totale.

Soit le système constitué d'un solide occupant un secteur Ω délimité par un contour $\partial\Omega$ divisé en deux parties : une où les déplacements $\bar{\mathbf{u}}$ sont connus (Γ_u) et une autre où des efforts de surface $\bar{\mathbf{t}}$ sont exercés, notée (Γ_t).

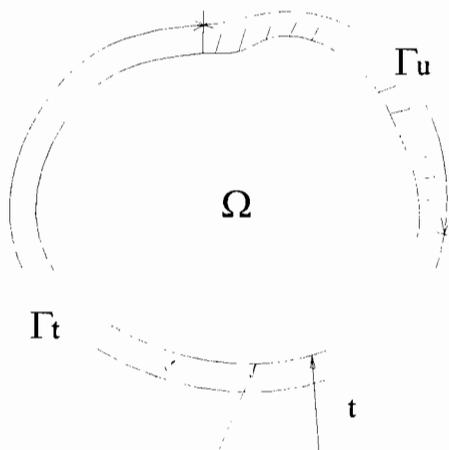


Figure 03: Solide avec ses conditions d'appuis

Considérons que le comportement du solide obéit aux lois suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (2.2)$$

Si nous appliquons le principe des travaux virtuels à ce système en nous munissant d'un ensemble de fonctions test \mathbf{v} , cela conduit à la recherche d'un champ de déplacement \mathbf{u} dans un espace fonctionnel suffisamment continu U tel que :

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in U_0 \subseteq U \quad (2.3)$$

Avec : $\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ qui représente le Travail des forces internes, $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ qui représente le Travail des forces externes. U , $\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ dépendent des conditions limites et initiales.

Il est alors possible de trouver une fonctionnelle quadratique appelée Energie potentielle Π_p et un espace de fonctions solution \mathbf{E} ou le minimum de l'énergie potentielle correspond à la solution exacte $\mathbf{u}_{ex} \in \mathbf{E}$. Ainsi le principe de l'énergie potentielle minimum s'énonce comme suit :

« Parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles celui qui rend l'énergie potentielle minimum correspond à la solution du problème ».

La fonctionnelle π_p s'écrit :

$$\pi_p = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (2.4)$$

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_t - \sum_1^p \mathbf{u}_i \mathbf{P}_i \quad (2.5)$$

Avec les conditions limites qui s'écrivent :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } (\Gamma_u) \quad \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } (\Gamma_t) \quad (2.6)$$

En appliquant ce principe à notre plaque, il s'agira donc de trouver un champ de déplacements $\{u\}$ respectant a priori les conditions aux bords et qui minimise la fonctionnelle π_p qui s'écrit :

Avec $\varepsilon_0 = 0$

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^t \mathbf{H} \varepsilon d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon^t \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{u}^t \mathbf{f} + \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{m}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\mathbf{u}^t \mathbf{f}_s + \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{m}_s) ds \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\chi^t \mathbf{H} \chi + \gamma^t \mathbf{H}_\tau \gamma) d\Omega + \int_{\Omega} (\chi^t \mathbf{M}_0 + \gamma^t \mathbf{Q}_0) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{w}^t \mathbf{f} + \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{m}) d\Omega - \int_{Sf} (\mathbf{w}^t \mathbf{f}_s + \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{m}_s) ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

Où \mathbf{m}_s et \mathbf{f}_s représentent respectivement les moments et efforts tranchants s'exerçant sur les bords du contour Γ_t .

$$\mathbf{f}_s = [Q_n] = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{m}_s = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

On peut alors définir le vecteur $\bar{\mathbf{t}}$ tel que :

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \\ n_x & 0 & n_y & 0 & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_n \\ M_{nx} \\ M_{ny} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{t}} = [\mathbf{A}] \boldsymbol{\sigma} \quad (2.10)$$

Avec $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ et $\boldsymbol{\beta} = \bar{\boldsymbol{\beta}}$ sur Γ_t et $\delta \mathbf{u} = 0$ et $\delta \boldsymbol{\beta} = 0$ sur Γ_u .

On voit que l'expression de π_p n'a pour inconnues que des variables cinématiques $\{u\}$ et $\{\beta\}$ d'où la dénomination : modèle déplacement. Le principe de l'énergie potentielle totale est équivalent au principe de l'équivalence des travaux virtuels. Dans la suite de notre exposé ce sera ce principe qui sera appliqué à notre plaque.

2.2- formulation par le principe de l'Energie potentielle complémentaire

L'état d'équilibre d'un corps peut être exprimé soit par des déplacements soit par des forces. L'énergie de déformation U est obtenue en faisant une intégration sur la différentielle totale

$dW = \sum_j F_j d\Delta_j$ qui donne :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} U_e d\Omega \quad (2.11)$$

L'existence de la différentielle totale dW montre que :

$$dW^* = \sum_j \Delta_j dF_j \quad (2.12)$$

est la différentielle totale d'une fonction W^* que l'on suppose nulle pour l'état naturel. En effet :

$$dW + dW^* = \sum_j d(\Delta_j F_j) \quad (2.13)$$

W et W^* sont donc reliées par :

$$W + W^* = \sum_j (\Delta_j F_j) \quad (2.14)$$

En faisant une intégration sur W^* on obtient :

$$U^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} W^* d\Omega \quad (2.15)$$

Qui représente l'énergie de déformation Complémentaire. La somme de l'énergie de déformation interne et de l'énergie complémentaire donne:

$$U + U^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (2.16)$$

Qui se ramène à l'égalité:

$$\Pi_p + \Pi_p^* = C \text{ (constante)} \quad (2.17)$$

Il apparaît alors clairement que la minimisation de la fonctionnelle Π_p revient à minimiser la fonctionnelle Π_p^* . Ainsi le principe de l'énergie potentielle complémentaire minimum s'énonce comme suit :

« Parmi tous les champs de contraintes cinématiquement admissibles celui qui rend l'énergie potentielle complémentaire minimum correspond à la solution du problème ».

La fonctionnelle π_p^* s'écrit :

$$\pi_p^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_0^t \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_t - \sum_i^p \mathbf{u}_i \mathbf{P}_i \quad (2.18)$$

Pour une plaque en flexion l'énergie complémentaire est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi_p^* = & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{M} - \mathbf{M}^r \boldsymbol{\chi}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^t \mathbf{H}_{\tau}^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^t \boldsymbol{\gamma}_0 \right) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_u} \left(\mathbf{Q}_n \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{M}_{xn} \bar{\boldsymbol{\beta}}_x + \mathbf{M}_{yn} \bar{\boldsymbol{\beta}}_y \right) d\Gamma_u \end{aligned} \quad (2.19)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{x,x} + \mathbf{M}_{xy,y} - \mathbf{Q}_x + \mathbf{m}_x &= 0 \\ \mathbf{Q}_{x,x} + \mathbf{Q}_{y,y} + \mathbf{f}_z &= 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \mathbf{M}_{xy,x} + \mathbf{M}_{y,y} - \mathbf{Q}_y + \mathbf{m}_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_x n_x + \mathbf{Q}_y n_y$$

$$\mathbf{M}_{xn} = \mathbf{M}_x n_x + \mathbf{M}_{xy} n_y \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (2.21)$$

$$\mathbf{M}_{yn} = \mathbf{M}_{xy} n_x + \mathbf{M}_y n_y$$

On remarque que les conditions cinématiques sur Γ_u sont représentées sous forme variationnelle. Par contre, les conditions mécaniques sur Γ_t sont satisfaites explicitement.

2.3- Formulation Mixte

Dans la formulation vu ci-dessus dite irréductible nous avons utilisé les déplacements et rotations comme inconnues principales à la solution du problème. Il est possible d'utiliser une formulation mixte utilisant soit les contraintes $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ ou les déplacements $\{\mathbf{u}\}$, ou les deux à la fois, approximés chacun d'une manière indépendante. Selon la combinaison des variables utilisés on distingue plusieurs modèles mixtes[3].

2.2.1- formulation mixte en u-σ

Reprenons le système vu ci-dessus. Nous admettrons que les équations d'équilibres restent valables, mais les contraintes sont approximées par (2.21) et vérifient approximativement la relation constitutive (2.2) qui devient (2.22) avec ε₀=0 et σ₀=0.

$$\hat{\sigma} = N_{\sigma} \bar{\sigma} \tag{2.21}$$

$$\sigma = HLu \tag{2.22}$$

si l'approximation des contraintes est bonne alors :

$$\int_{\Omega} \delta \sigma^T (\epsilon - \hat{\epsilon}) d\Omega = 0 \tag{2.23}$$

Qui s'écrit aussi :

$$\int_{\Omega} \delta \sigma^T (Lu - H^{-1}\sigma) d\Omega = 0 \tag{2.24}$$

où δσ est une fonction de pondérations.

Avec les conditions d'équilibre qui s'écrivent en appliquant le principe des travaux virtuel :

$$\int_{\Omega} \epsilon^t \sigma d\Omega - \int_{\Omega} u^T \bar{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} u^t \bar{t} d\Gamma_t = 0 \tag{2.25}$$

La solution du problème est équivalente à la stationnarité de la fonctionnelle Π_p défini par le principe variationnel de Hellinger-Reissner qui est :

$$\pi_{HR} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T H^{-1} \sigma d\Omega + \int_{\Omega} u^T (L^T \sigma + \bar{b}) - \int_{\Gamma_t} u^T (G \sigma - \bar{t}) d\Gamma \tag{2.26}$$

Ou $t \equiv G \sigma \quad u = \bar{u}$ (2.27)

Pour notre plaque cette fonctionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \pi_{HR} = & \frac{1}{2} \int_A \{\sigma\}' [H]^{-1} \{\sigma\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\sigma\}' [H]^{-1} \{\sigma_o\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\sigma\}' \{\epsilon_o\} \\ & - \int_A (\{u\}' \{f\} + \{\beta\}' \{m\}) dA - \int_{sf} (\{u\}' \{f_s\} + \{\beta\}' \{m_s\}) ds \end{aligned} \tag{2.28}$$

Avec les conditions suivantes : $\{\beta\} = \{\bar{\beta}\}$ sur Γ_u. La variation de la fonctionnelle donne :

$$\begin{aligned} \delta\pi_{HR} = & \frac{1}{2} \int_A \delta\{u\}^t [L][H]\{u\} dA - \int_A (\delta\{u\}^t \{f\} + \delta\{\beta\}^t \{m\}) dA \\ & - \int_{Sf} (\delta\{u\}^t \{f_s\} + \delta\{\beta\}^t \{m_s\}) ds \end{aligned} \quad (2.29)$$

La condition de stationnarité est :

$$\delta\pi_{HR} = \int_A \delta\sigma^t (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{H}^{-1}\sigma) = 0 \quad (2.30)$$

2.2.2- formulation mixte en u-σ-ε

Comme pour la formulation mixte à deux champs, il est possible de donner une approximation indépendante pour les trois variables. On peut alors écrire :

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon^T (\mathbf{H}\varepsilon - \sigma) d\Omega = 0 \quad \text{avec} \quad \varepsilon \cong \hat{\varepsilon} = \mathbf{N}_{\sigma} \bar{\varepsilon} \quad (2.31)$$

$$\int_{\Omega} \delta\sigma^T (\mathbf{L}\mathbf{u} - \varepsilon) d\Omega = 0 \quad \text{avec} \quad \sigma \cong \hat{\sigma} = \mathbf{N}_{\sigma} \bar{\sigma} \quad (2.32)$$

Et les équations d'équilibres $\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^t \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_t = 0$

La résolution du système (2.31 et 2.32) équivaut, comme dans la formulation à deux champs à la stationnarité de la fonctionnelle définie par Hu-Washizu qui s'écrit :

$$\pi_{HW} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^t \mathbf{H} \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma^t (\varepsilon - \mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.33)$$

Avec $\mathbf{u} \cong \bar{\mathbf{u}}$ sur Γ_u .

Pour notre plaque la fonctionnelle est:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\text{HW}} = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t [\mathbf{H}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \{\boldsymbol{\sigma}_0\}) dV - \int_A (\{\mathbf{u}\}^t \{\mathbf{f}\} + \{\boldsymbol{\beta}\}^t \{\mathbf{m}\}) dA \\
& - \int_A (M_x (\chi_x - \beta_{x,x}) + M_y (\chi_y - \beta_{y,y}) + M_{xy} (\gamma_{xy} - \beta_{xy} - \beta_{yx}) + Q_x (\gamma_x - \beta_x - w_{,x})) dA \\
& - \int_A Q_y (\gamma_y - \beta_y - w_{,y}) dA - \int_{S_f} (\{\mathbf{u}\}^t \{\mathbf{f}_s\} + \{\boldsymbol{\beta}\}^t \{\mathbf{m}_s\}) dS
\end{aligned} \quad (2.34)$$

Cette fonctionnelle s'écrit sans conditions. La condition de stationnarité est :

$$\delta \pi_{\text{HW}} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}^t (\mathbf{L} \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = 0 \quad (2.35)$$

3- FONCTIONS D'APPROXIMATION OU D'INTERPOLATION

Soit $u_{ex} = f(x)$ une fonction polynomiale continue sur un certain domaine il est toujours possible de trouver une fonction $u(x)$ qui l'approxime sur un sous domaine en fonction des valeurs discrètes de cette dernière c'est-à-dire des valeurs de $f(x_i)$ aux abscisses x_i . La fonction $u(x)$ peut alors s'écrire :

$$u(x) = N(x)d \quad (3.1)$$

Le vecteur d constitue un ensemble de valeurs de la fonction u_{ex} évaluées aux abscisses x_i .

Les $N(x)$ sont appelées fonctions d'approximation où fonctions d'interpolations.

Il existe plusieurs types de fonctions d'interpolations, mais elles doivent respecter certaines conditions :

- ✓ La fonctions N_i doivent avoir les valeurs de 1 à la $i^{\text{ème}}$ nœud et zéro aux autres nœuds.

3-1- Fonctions d'interpolation de TYPE H

Dans l'interpolation de type H on a les N_i qui sont données par la matrice :

$$[N]^T = [P][X]^{-1} \quad (3.2)$$

$[P]$ est une base polynomiale de x .

$[X]$ est une matrice de position des abscisses x_i .

La fonction $N(x)$ est reliée au choix de la position des bornes de l'intervalle choisi. Elles peuvent être de type linéaire ou quadratique. On définit alors comme noeuds les positions x_i et comme élément le sous intervalle auquel elles appartiennent. Les valeurs de $u(x_i)$ associées à un noeud sont les valeurs nodales.

En deux dimensions (x,y) l'interpolation des déplacements donne :

$$u(x, y) = [N(x, y)]^T d \quad (3.3)$$

Où la construction de la base $[P]$ de degré $n-1$ fait intervenir les produits :

$$x^i \cdot y^j \quad \text{pour } i=0, \dots, n-1, j=0, \dots, n$$

Jusqu'à épuisement de toutes les possibilités.

Les éléments dont les fonctions d'interpolations sont déterminées par cette méthode sont dits de type H. Les éléments les plus utilisés dans les éléments finis sont : l'élément linéique, l'élément rectangulaire et l'élément triangulaire.

3-1-1-Élément Linéique

3-1-1-1- Interpolation Linéaire

Si on considère l'approximation linéaire d'un élément réel situé entre deux nœuds.

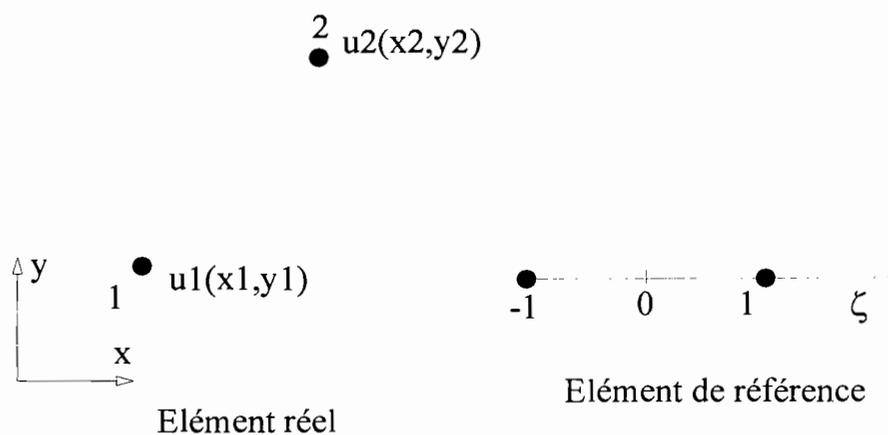


Figure 05: Élément linéique à 2 noeuds

On peut le remplacer par l'élément de référence d'une dimension et dont l'intervalle d'interpolation est $[-1 ; 1]$ montré ci-dessus. Les positions $x(\xi)$ et $y(\xi)$ peuvent s'écrire :

$$x(\xi) = [N]^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y(\xi) = [N]^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Avec $[N]^T = [N_1 \quad N_2]$ (3.5)

La base polynomiale choisie est : $[P] = [1 \quad \xi]$ (3.6)

Le vecteur position des nœuds est alors donné par : $[X] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (3.7)

D'où :
$$[N]^T = [N_1 \quad N_2] = [P][X]^T = \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \quad \frac{1}{2}(1+\xi) \right] \tag{3.8}$$

$$N_1 + N_2 = 1 \quad \forall \xi \in [-1 \quad 1] \tag{3.9}$$

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{3.10}$$

3-1-1-2 Interpolation Quadratique

L'interpolation quadratique implique l'ajout de nœuds intermédiaires au niveau des cotés de l'élément.

- **Eléments à 3 Nœuds**

Pour un élément à 3 nœuds, la base polynomiale est de degré 2. L'élément réel est représenté ci-dessous :

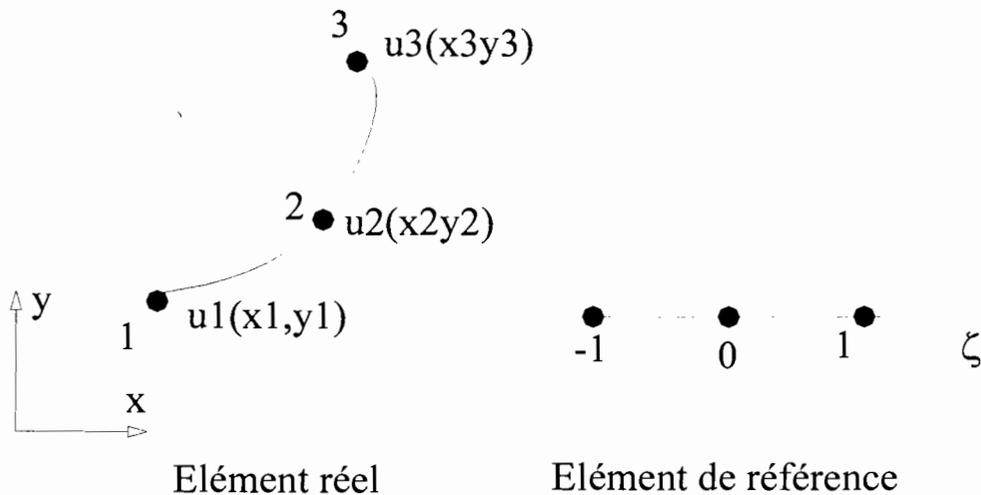


Figure 05: Elément linéique à 3 noeuds

avec :

$$[P] = [1 \quad \xi \quad \xi^2] \quad \text{et} \quad [X] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

On obtient :

$$[N]^T = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = [P][X]^T = \left[\frac{\xi}{2}(1-\xi) \quad 1-\xi^2 \quad \frac{1}{2}(1+\xi)\xi \right] \tag{3.12}$$

Avec $N_1 = \frac{\xi}{2}(1-\xi)$; $N_2 = 1-\xi^2$; $N_3 = \frac{1}{2}(1+\xi)\xi$

• **Eléments à 4 Nœuds**

Pour un élément à 4 Nœuds on a :

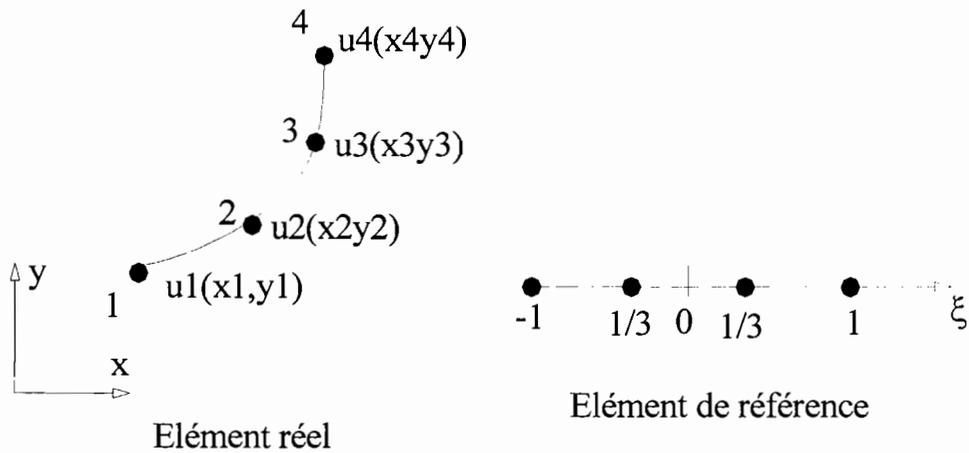


Figure 06:Elément linéique à 4 noeuds

$$[P] = [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3] \quad \text{et} \quad [X] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$[N]^T = \left[-\frac{1}{16}(1-\xi-9\xi^2+9\xi^3) \quad \frac{9}{16}(1-3\xi-\xi^2+\xi^3) \quad \frac{9}{16}(1+3\xi-\xi^2-3\xi^3) \quad -\frac{1}{16}(1+\xi-9\xi^2-9\xi^3) \right] \quad (3.14)$$

3-1-2-Élément Triangulaire

On est en présence d'un élément à deux dimensions. Il faut donc introduire une nouvelle variable dans la base polynomiale. Et les fonctions d'interpolation sont à deux variables.

- Élément à 3 Nœuds

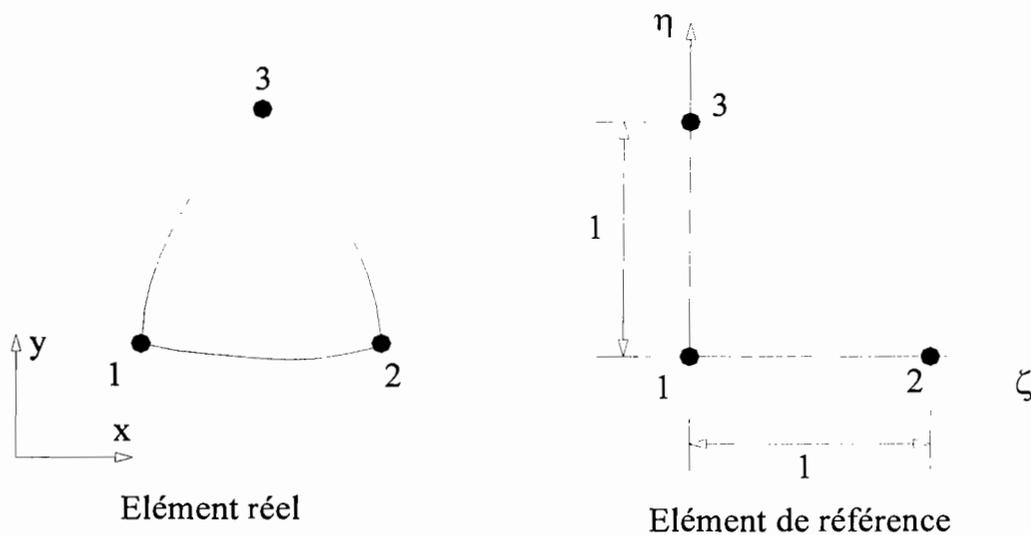


Figure 07: Élément triangulaire à 3 nœuds

$$[P] = [1 \quad \xi \quad \eta] \quad [X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$[N]^T = [1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta] \quad (3.16)$$

$$N_1 = 1 - \xi - \eta \quad N_2 = \xi \quad N_3 = \eta \quad (3.17)$$

• **Elément à 6 Nœuds**

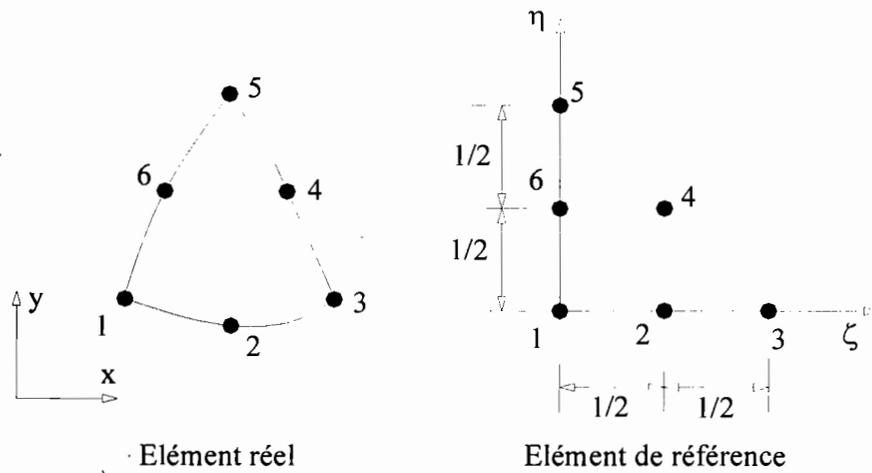


Figure 08:Elément triangulaire à 6 noeuds

$$[P] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2] \quad [X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$N_1 = 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2$$

$$N_3 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_5 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_2 = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \quad (3.19)$$

• **Elément à 10 Nœuds**

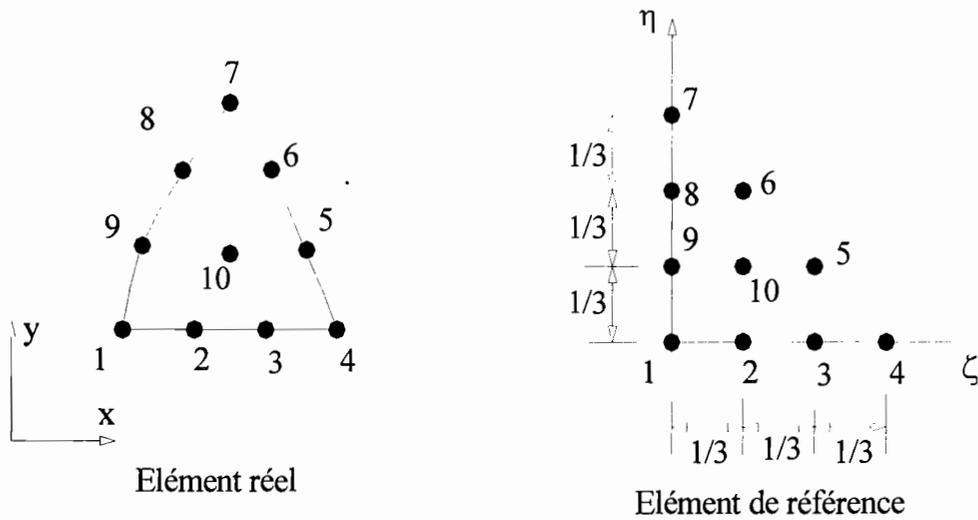


Figure 09:Elément triangulaire à 10 noeuds

$$[P] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi \eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \eta \xi^2 \quad \xi \eta^2 \quad \eta^3] \quad (3.20)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{27} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
 [N]^T = & \left[1 - \frac{11}{2} \xi - \frac{11}{2} \eta + 9 \xi^2 + 18 \xi \eta + 9 \eta^2 - \frac{9}{2} \xi^3 - \frac{27}{2} \eta \xi^2 - \frac{27}{2} \xi \eta^2 - \frac{9}{2} \eta^3, \right. \\
 & 9 \xi - \frac{45}{2} \xi^2 - \frac{45}{2} \xi \eta + \frac{27}{2} \xi^3 + 27 \eta \xi^2 + \frac{27}{2} \xi \eta^2, \\
 & -\frac{9}{2} \xi + 18 \xi^2 + \frac{9}{2} \xi \eta - \frac{27}{2} \xi^3 - \frac{27}{2} \eta \xi^2, \xi - \frac{9}{2} \xi^2 + \frac{9}{2} \xi^3, -\frac{9}{2} \xi \eta + \frac{27}{2} \eta \xi^2, \\
 & -\frac{9}{2} \xi \eta + \frac{27}{2} \xi \eta^2, \eta - \frac{9}{2} \eta^2 + \frac{9}{2} \eta^3, -\frac{9}{2} \eta + \frac{9}{2} \xi \eta + 18 \eta^2 - \frac{27}{2} \xi \eta^2 - \frac{27}{2} \eta^3, \\
 & \left. 9 \eta - \frac{45}{2} \xi \eta - \frac{45}{2} \eta^2 + \frac{27}{2} \eta \xi^2 + 27 \xi \eta^2 + \frac{27}{2} \eta^3, 27 \xi \eta - 27 \eta \xi^2 - 27 \xi \eta^2 \right] \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

3-1-3-Eléments Rectangulaires

3-1-3-1- Interpolation Linéaire

- Elément à 4 Nœuds

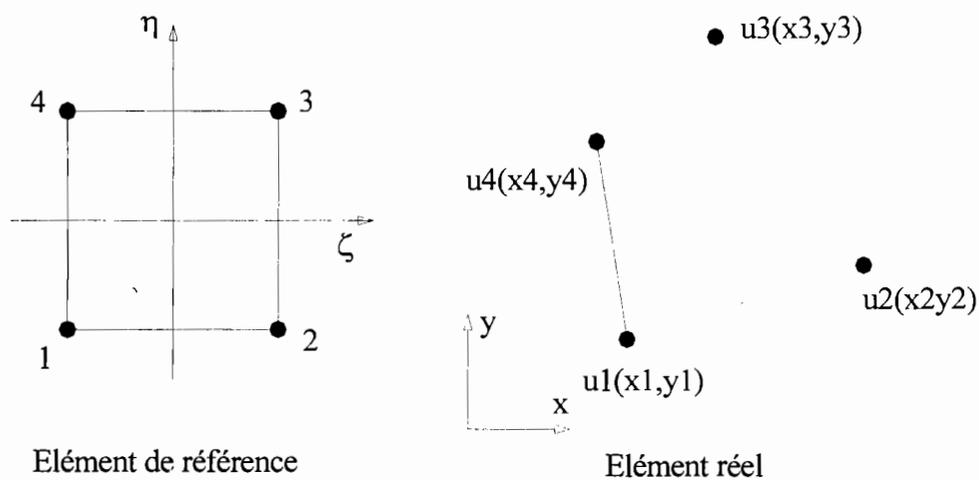


Figure 10:Elément rectangulaire à 4 noeuds

$$[P] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi \eta] \quad [X] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$[N]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4}\xi\eta, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{4}\xi\eta, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4}\xi\eta, \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{4}\xi\eta \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} N_1 &:= \frac{1}{4}(\eta - 1)(\xi - 1) & N_2 &:= -\frac{1}{4}(\eta - 1)(1 + \xi) \\ N_3 &:= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \xi) & N_4 &:= -\frac{1}{4}(1 + \eta)(\xi - 1) \end{aligned} \quad (3.25)$$

3-1-3-2- Interpolation Quadratique

• **Elément à 8 Nœuds**

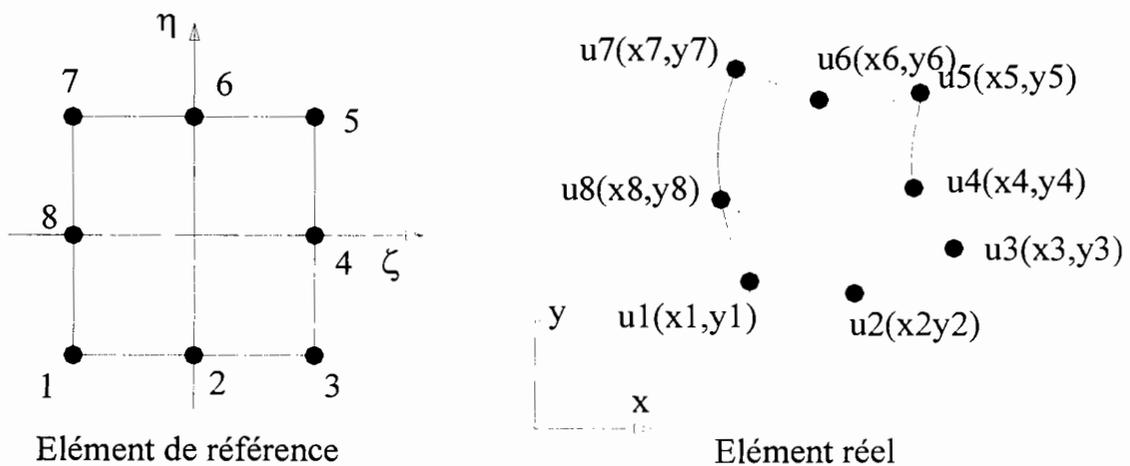


Figure 11: Elément rectangulaire à 8 noeuds

$$[P] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \eta\xi^2 \quad \xi\eta^2] \quad (3.26)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

• **Élément à 9 Nœuds**

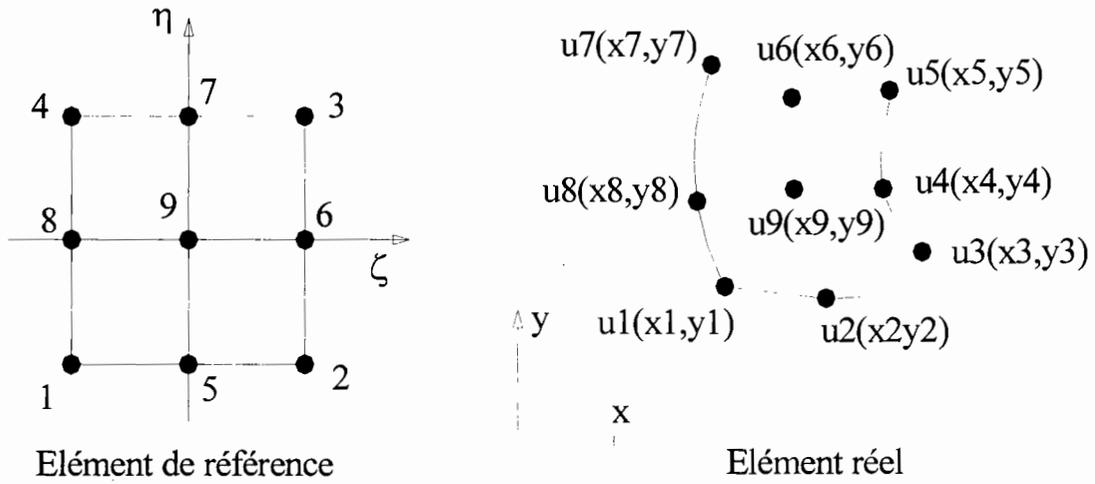


Figure 12: Élément rectangulaire à 9 noeuds

$$[P] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi \eta \quad \eta^2 \quad \eta \xi^2 \quad \xi \eta^2 \quad \xi^2 \eta^2] \quad (3.28)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Les fonctions N_i pour les éléments à 8 Nœuds et 9 nœuds sont données en annexe A.

3-2- fonction d'interpolation de TYPE P

Dans l'interpolation de type P les fonctions d'interpolations doivent être construites avec de simples fonctions polynomiales qui ont certaines propriétés d'orthogonalité. Elles doivent aussi être *hiérarchique* c'est-à-dire que les fonctions d'interpolation polynomiales de degré p doivent être contenues dans les fonctions d'interpolation polynomiales de degré $p+1$.

Les fonctions des nœuds externes gardent les mêmes valeurs que dans l'interpolation linéaire, mais les fonctions des nœuds de côtés et les fonctions des nœuds internes appelées *modes internes* où *modes bubble*, sont données en fonction de $\phi_j(\xi)$ qui est définie en fonction des *Polynômes de Legendre*. Le nombre de nœuds dépend alors du degré j du polynôme :

$$\phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} (P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)) \quad j=2,3,\dots \quad (3.30)$$

où j est le degré du polynôme. Les $P_j(\xi)$ sont les polynômes de Legendre qui sont donnés par la relation de récurrence :

Pour $n > 0$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (3.31)$$

Et dont l'équation différentielle est :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (3.32)$$

3-2-1 Élément linéique

L'élément linéique de type P est un élément à trois nœuds, cependant le nœud 3 ou nœud interne peut contenir plusieurs degrés de liberté.

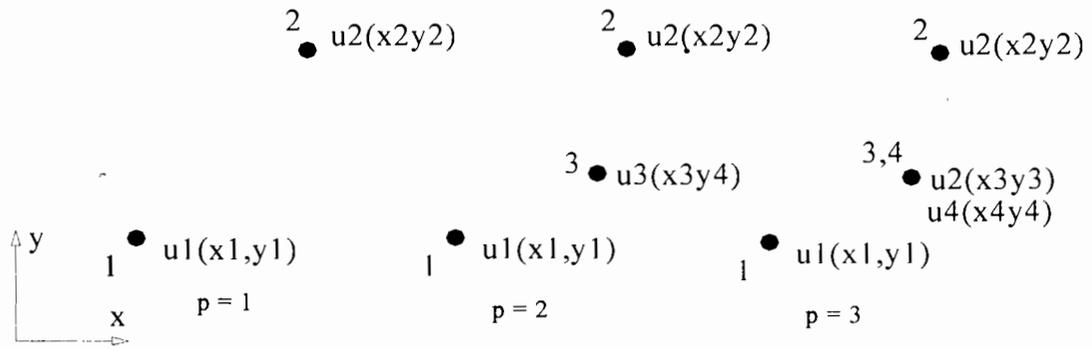


Figure 13: Elément linéique standard TYPE P

Les fonctions d'interpolation sont données par :

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \text{et} \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (3.33)$$

et pour $i = 3, 4, 5, \dots, p+1$
$$N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi) \quad (3.34)$$

Pour $i \geq 2$ les $N_i(\xi)$ sont hiérarchiques et orthogonales

3-2-2 Eléments Rectangulaires

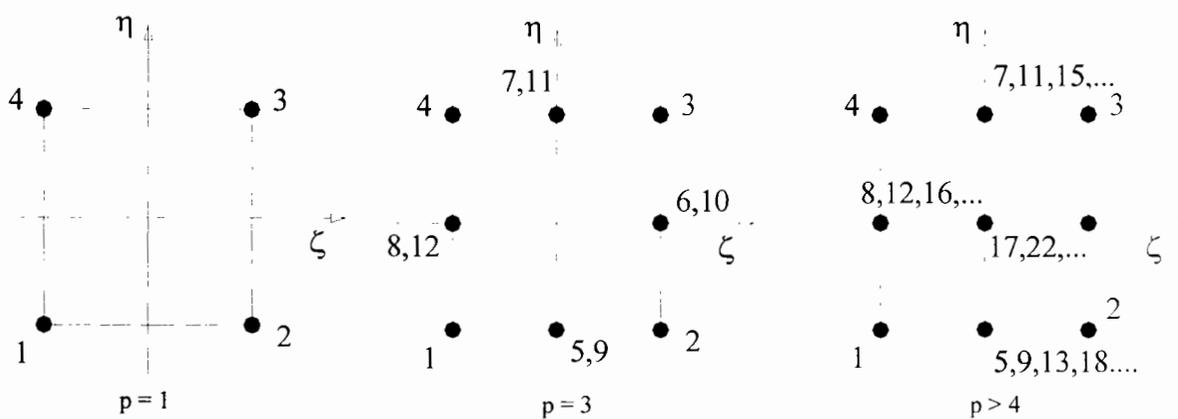


Figure 14: Elément rectangulaire standard TYPE P

Pour cet élément nous définirons trois catégories de fonctions : les fonctions aux nœuds externes, aux nœuds de coté et des fonctions au nœud interne.

- **Nœuds externes :** On a quatre fonctions pour les nœuds externes et elles ont les mêmes valeurs que ceux obtenus par le type H.

$$\begin{aligned} N_1 &:= \frac{1}{4} (\eta - 1) (\xi - 1) & N_2 &:= -\frac{1}{4} (\eta - 1) (1 + \xi) \\ N_3 &:= \frac{1}{4} (1 + \eta) (1 + \xi) & N_4 &:= -\frac{1}{4} (1 + \eta) (\xi - 1) \end{aligned} \quad (3.35)$$

- **Nœuds de cotés :** il y a $4(p-1)$ fonctions associées aux nœuds de cotés de cet élément fini avec ($p \geq 2$). Pour chaque coté les fonctions sont définies par :

$$\text{Côté 1 :} \quad N_i^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \eta) \phi_i(\xi) \quad i = 2, 3, \dots, p \quad (3.36)$$

$$\text{Côté 2 :} \quad N_i^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi) \phi_i(\eta) \quad i = 2, 3, \dots, p \quad (3.37)$$

$$\text{Côté 3 :} \quad N_i^{(3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \eta) \phi_i(\xi) \quad i = 2, 3, \dots, p \quad (3.38)$$

$$\text{Côté 4 :} \quad N_i^{(4)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi) \phi_i(\eta) \quad i = 2, 3, \dots, p \quad (3.39)$$

- **Nœuds internes :** il y a $(p-2)(p-3)/2$ fonctions associées au nœud interne de cet élément avec ($p \geq 4$). Elles s'écrivent :

$$N_1^{(0)} = \phi_2(\xi) \phi_2(\eta) \quad (3.40)$$

$$N_2^{(0)} = \phi_3(\xi) \phi_2(\eta) \quad (3.41)$$

$$N_3^{(0)} = \phi_2(\xi) \phi_3(\eta) \quad (3.42)$$

$$N_4^{(0)} = \phi_4(\xi) \phi_2(\eta) \quad (3.43)$$

$$N_5^{(0)} = \phi_3(\xi) \phi_3(\eta) \quad (3.44)$$

Une représentation graphique des fonctions hiérarchiques pour l'élément rectangulaire est donnée en annexe B, pour p variant de 1 à 8.

3-2-3 Éléments Triangulaires

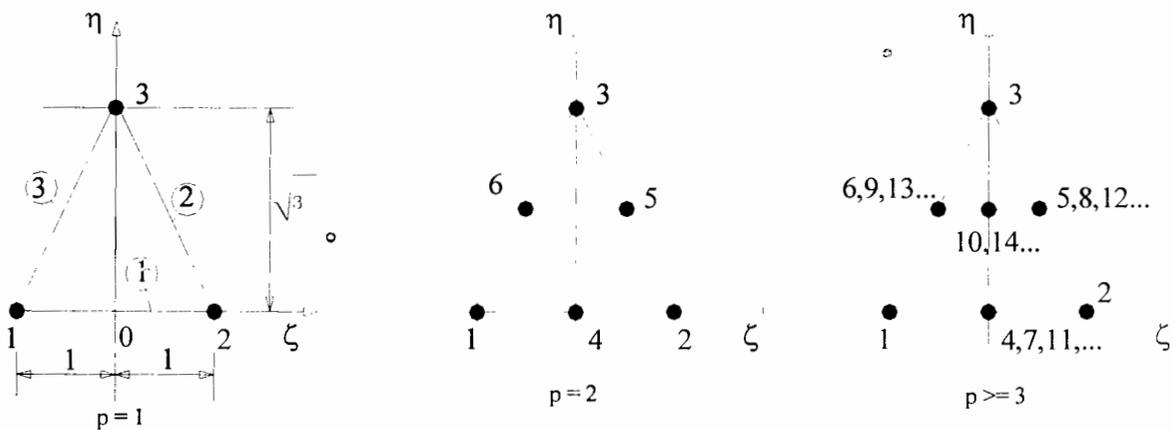


Figure 15: Elément Triangulaire standard TYPE P

Pour l'élément triangulaire on définit d'abord les fonctions suivantes :

$$L_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta) \quad L_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi - \eta) \quad L_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}} \quad (3.45)$$

Qui sont appelées fonctions barycentriques triangulaires ou de coordonnées d'aires. On remarque que :

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (3.46)$$

Les L_i valent 1 sur le nœud externe i et 0 sur le coté opposé au nœud i , avec $i=1,2,3$.

On effectue la même catégorisation que dans l'élément rectangulaire. On aura :

- **Nœuds externes :** On a trois fonctions pour les nœuds externes, qui sont identiques aux fonctions obtenues avec l'élément triangulaire dans l'interpolation de type H.

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi - \eta) \quad N_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}} \quad (3.46)$$

- **Nœuds de cotés :** il y a $3(p-1)$ fonctions associées aux nœuds de cotés de l'élément avec ($p \geq 2$). Elles sont construites en partant du fait qu'elles sont exactement les mêmes que celles obtenues aux nœuds de coté de l'élément rectangulaire, et qu'elles s'annulent sur les deux autres cotés. On définit pour cela $\varphi_j(\xi)$ tel que :

$$\varphi_j(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)\varphi_j(\xi), \quad j=2,3,\dots,p. \quad (3.48)$$

Exemples: $\varphi_2(\xi) = -\sqrt{6} \quad \varphi_3(\xi) = -\sqrt{10}\xi \quad \varphi_4(\xi) = -\sqrt{\frac{7}{8}}(5\xi^2 - 1)$ (3.49)

Pour chaque côté on a:

Côté 1 : $N_i^{(1)}(\xi, \eta) = L_1 L_2 \varphi_i(L_2 - L_1) \quad i=2,3,\dots,p$ (3.50)

Côté 2 : $N_i^{(2)}(\xi, \eta) = L_2 L_3 \varphi_i(L_3 - L_2) \quad i=2,3,\dots,p$ (3.51)

Côté 3 : $N_i^{(3)}(\xi, \eta) = L_3 L_1 \varphi_i(L_1 - L_3) \quad i=2,3,\dots,p$ (3.52)

Nœuds internes : il y a $(p-1)(p-2)/2$ fonctions associées aux nœuds internes de cet élément fini avec ($p \geq 4$). Elles s'écrivent :

La fonction associée au premier degré de liberté est donnée par :

$$N_1^{(0)}(\xi, \eta) = L_1 L_2 L_3 \quad (3.53)$$

Les autres fonctions de nœuds internes sont générées à partir de $N_1^{(0)}$ avec les polynômes de Legendre et les produits des polynômes de Legendre. Par exemple :

$$N_2^{(0)}(\xi, \eta) = L_1 L_2 L_3 P_1(L_2 - L_1) \quad (3.54)$$

$$N_3^{(0)}(\xi, \eta) = L_1 L_2 L_3 P_1(2L_3 - 1) \quad (3.40)$$

4- FORMULATION PAR ELEMENTS FINIS

Nous avons vu qu'il était possible d'approximer sur un domaine restreint une fonction continue par une fonction d'interpolation déterminant ainsi un processus de discrétisation. Nous pouvons alors remplacer dans l'équation différentielle de la plaque la fonction inconnue par la fonction d'interpolation. Cependant, ceci conduit à une expression qui est fonction d'un certain nombre de valeurs discrètes de \mathbf{u} . Le nombre d'inconnues étant supérieur au nombre d'équations, il est impossible de trouver une solution unique. Il nous faut donc écrire un certain nombre de critères (conditions aux limites) pour obtenir suffisamment d'équations et ainsi construire un système à solution unique.

En appliquant le principe de l'énergie potentiel minimum dont la fonctionnelle s'écrit :

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_t - \sum_i^p \mathbf{u}_i P_i \quad (4.1)$$

Avec les conditions limites :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } (\Gamma_u) \quad \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } (\Gamma_t) \quad (4.1.1)$$

L'interpolation des déplacements de notre plaque en fonction des variables nodales, donne :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (4.2)$$

Où $\mathbf{u} = [\beta_x \quad \beta_y \quad w]^T$

$$\mathbf{d} = [\beta_{x1} \quad \beta_{y1} \quad w_1 \quad \beta_{x2} \quad \beta_{y2} \quad w_2 \quad \dots \quad \beta_{xn} \quad \beta_{yn} \quad w_n]^T \quad (4.3)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

La relation déformations - déplacements devient :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{L} \mathbf{N} = \mathbf{B} \quad (4.6)$$

La matrice [B] est appelée matrice *déformations – déplacements*.

On obtient :

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{d}^T \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{u}^T = \mathbf{N}^T \delta \mathbf{d}^T \quad (4.7)$$

Introduisons l'expression (4.6) dans l'expression de l'énergie potentielle (4.1) :

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{d} \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{d} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{d} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{d} \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{d} \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{d} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma_t - \sum_i^p \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i \mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pour obtenir la solution approchée des équations aux dérivées partielles, il suffit de calculer la variation du potentiel Π_p . Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \delta \Pi_p = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta \mathbf{d} \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{d} \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{d} \mathbf{H} \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta \mathbf{d} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta \mathbf{d} \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \delta \mathbf{d} \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \delta \mathbf{d} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma_t - \sum_i^p \mathbf{N}_i \delta \mathbf{d}_i \mathbf{P}_i = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

En factorisant par $\delta \mathbf{d}$ la solution des EDPF est donné par :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{d} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma_t + \sum_i^p \mathbf{N}_i \mathbf{P}_i \quad (4.10)$$

Qui peut s'écrire sous forme condensée :

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{R} + \sum_i^p \mathbf{N}_i \mathbf{P}_i = \mathbf{R}_e \quad (4.11)$$

$$\text{Avec:} \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (4.12)$$

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma_t \quad (4.13)$$

$[\mathbf{K}]$ est appelée Matrice de rigidité de la structure.

\mathbf{R}_e représente le vecteur sollicitation de la structure.

Ce qui revient à écrire les différentes équations suivantes :

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{d}_i} = 0 \quad (4.14)$$

Ce qui correspond à la formulation en déplacement de la méthode de discrétisation de RITZ.

Divisons notre structure en n éléments, l'énergie potentielle totale de la structure est alors égale à la somme de l'énergie potentiel de chaque élément.

$$\pi_p = \frac{1}{2} \sum_1^n \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} - \sum_1^n \mathbf{d}^T \mathbf{r} - \mathbf{d}^T \mathbf{P} \quad (4.15)$$

La matrice de rigidité et le vecteurs chargement de l'ensemble de la structure qui sont donnés par :

$$\mathbf{K} = \sum_1^n \mathbf{k} \quad \mathbf{R}_e = \sum_1^n \mathbf{r} + \mathbf{P} \quad (4.16)$$

Ce qui se ramène à la résolution du système :

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{R}_e \quad (4.17)$$

4-1- Matrice de Rigidité

Appliquons cette méthode à notre plaque, le calcul de la matrice de rigidité \mathbf{K} exige alors de connaître la matrice \mathbf{B} . On a \mathbf{B} qui est donnée par :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 1 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 1 & \partial/\partial y \end{bmatrix} \mathbf{N} \quad (4.18)$$

Pour l'étude des structures planes, les éléments les plus utilisés sont les éléments rectangulaires et triangulaires. En utilisant les éléments iso paramétriques étudiés plus haut, le calcul de \mathbf{B} passe par différentes étapes.

Les déplacements de notre élément sont donnés, en fonction des d.d.l. des nœuds de l'élément, par :

$$w = \sum N_i w_i, \quad \beta_{xii} = \sum N_i \beta_{xi} \quad \beta_y = \sum N_i \beta_{yi} \quad (4.19)$$

Les déplacements d'un point P de la plaque sont donnés par :

$$w \quad u = -z\beta_x \quad v = -z\beta_y \quad (4.20)$$

Les déformations peuvent s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Les déplacements des noeuds sont donnés en fonctions des coordonnées locales (ξ,η), pour les exprimer en fonction des coordonnées globales (x,y), on utilise la matrice Jacobienne qui est définie par :

Soit φ une fonction de x et y, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

J est appelé matrice Jacobienne est égale :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

L'inverse de la relation (4.22) donne :

$$\begin{bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \end{bmatrix} \quad \text{avec,} \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Dans le cas de la plaque épaisse en flexion, avec les fonctions d'interpolation choisies, le Jacobien est donné par :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & 0 \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

On définit également le déterminant du Jacobien :

$$J = \det \mathbf{J} = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} \quad (4.26)$$

Pour obtenir les dérivées des déplacements de l'élément, en fonctions des coordonnées globales, il faut multiplier les déplacements en coordonnées locales par l'inverse du jacobien.

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,z} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,z} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11} & J_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

En inversant la relation on obtient :

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,z} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,z} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,z} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Maintenant, exprimons les dérivées des déplacements en coordonnées locales, en fonctions des d.d.l. des nœuds de l'élément :

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,z} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,z} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,z} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} -zN_{i,\xi} & 0 & 0 \\ -zN_{i,\eta} & 0 & 0 \\ -N_i & 0 & 0 \\ 0 & -zN_{i,\xi} & 0 \\ 0 & -zN_{i,\eta} & 0 \\ 0 & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & 0 & N_{i,\eta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \\ w_i \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Les dimensions de la matrice trouvée en (4.29) varient en fonctions du nombre de d.d.l. que possède l'élément. Pour un élément rectangulaire à quatre (4) nœuds, elle est de dimension (9x12), pour huit (8) nœuds elle est de (9x24). La matrice [B] est alors obtenue en faisant le produit des trois matrices (4.21), (4.28) et (4.29). Sa dimension est de (5x12) pour l'élément rectangulaire à 4 nœuds et (5x24) pour l'élément à 8 nœuds.

La matrice de rigidité de l'élément est alors donnée par l'intégrale :

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} d\Omega = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{R} t dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} t J d\xi d\eta \quad (4.30)$$

Où la matrice [H] est donnée par les relations contraintes déformations de la plaque (voir paragraphe 1.4).

4-2-Vecteurs Chargements et forces équivalentes aux nœuds.

Nous n'étudierons ici que l'incidence les forces de volumes et d'un chargement de type surfacique uniformément réparti. Le vecteur forces équivalentes aux nœuds est donné par :

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \varepsilon_0 d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma_0 d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_t \quad (4.31)$$

$$\text{Où } \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_x = 0 \\ b_y = 0 \\ b_z \end{bmatrix} \text{ représente les forces de volume exprimé par unité de volume.} \quad (4.32)$$

$$\text{Et } \bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \text{ représente les efforts tractions sur la surface de la plaque.} \quad (4.33)$$

La contribution des forces de volume est donnée par :

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} t d\xi d\eta \quad (4.34)$$

La contribution des efforts de traction pour un chargement uniformément réparti, est donnée par l'intégrale:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (4.34)$$

5-INTEGRATION NUMERIQUE

La matrice de raideur et les forces équivalentes aux nœuds, sont obtenues par intégration. Avec MAPLE ou en FORTRAN, seule l'intégration numérique est possible.

L'intégration numérique ou quadrature est si on peut simplement la définir, l'évaluation de l'intégrale :

$$I = \int_b^a f(x) dx \quad (5.1)$$

$f(x)$ désigne de façon générale une fonction continue sur $[a,b]$ ($a < b$), à valeurs réelles.

On appelle formule de quadrature approchée à $n+1$ points toute formule de type :

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n w_k \cdot f(x_k) \quad (5.2)$$

Qui donne une valeur approchée de $\int_b^a f(x) dx$ et où les coefficients w_k sont des réels indépendants de f et où $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des points deux à deux distincts (et ordonnés) de $[a; b]$. La quadrature est dite exacte sur un sous-ensemble E de $C([a,b]; \mathbb{R})$ si :

$$I_n(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (5.3)$$

Suivant cette formulation, il existe plusieurs méthodes d'intégration numérique, mais la plus convenable répondant au type P, est l'intégration par la méthode de Gauss Legendre.

La méthode de Gauss consiste à utiliser n points x_i , répartie de façon régulière et symétriquement à 0, sur l'intervalle $]-1,1[$, avec des poids w_i et de déterminer la position et la valeur des poids pour avoir une intégration exacte dans certain cas et donc :

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n w_k \cdot f(x_k) \quad (5.4)$$

Il est montré que la méthode de Gauss permet d'intégrer exactement un polynôme d'ordre $2n-1$ avec n points. En deux dimensions on a l'intégrale qui s'écrit :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n W_j W_k f(x_j, y_k) \quad (5.5)$$

En trois dimensions on a l'intégrale qui s'écrit :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n W_j W_k W_l f(x_j, y_k, z_l) \quad (5.6)$$

Pour le calcul de l'intégrale de la matrice de rigidité [K] :

$$I = \mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} t dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} t J d\xi d\eta \quad (5.7)$$

Et $f(x, y) = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} t = f(\xi, \eta) = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} t J \quad (5.8)$

Pour le vecteur chargement :

$$\begin{aligned} I = \mathbf{R} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}}) dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}}) J d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} J d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.9)$$

6- ASSEMBLAGE

Après avoir établie le système à résoudre pour un élément donné, il reste à expliciter le système à définir pour l'ensemble de la structure. L'ensemble de tous les éléments constitue le maillage. Pour avoir la solution de l'ensemble de la structure, il faudra alors effectuer un assemblage. L'assemblage permet d'obtenir les matrices globales de la structure :

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{R}_e \quad (6.1)$$

à partir des matrices de rigidité et de chargement des n éléments qui constituent la structure :

$$\mathbf{k}^i \mathbf{d}^i = \mathbf{r}^i_e \quad (6.2)$$

Pour obtenir les éléments \mathbf{K}_{ij} de la matrice globale, on élargie d'abord, toutes les matrices de rigidité élémentaire aux dimensions de la matrice globale et on additionne les éléments \mathbf{k}_{Gij} des n éléments. Ils sont donnés par :

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_{nel=1}^n \mathbf{k}_{Gij}^n \quad (6.3)$$

Où les \mathbf{k}_{Gij}^n sont les éléments de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément n ramenée à la matrice de rigidité globale.

Pour le vecteur chargement global de la structure, il est construit en initialisant d'abord ces éléments par les efforts directement appliqués aux nœuds, ensuite on fait la somme des efforts aux nœuds des éléments après avoir ramené les vecteurs chargements de chaque élément aux dimensions du vecteur de chargement global. Ces éléments sont donnés par :

$$\mathbf{R}_{eij} = \sum_1^n \mathbf{r}_{Gij}^n + \mathbf{P} \quad (6.4)$$

\mathbf{P} représente les charges directement appliquées aux nœuds.

•

7- RESOLUTION DES EQUATIONS

Il existe plusieurs méthodes de résolutions des systèmes d'équations. La méthode d'élimination de Gauss est la plus utilisée, mais elle n'est pas applicable si la matrice K est singulière. D'autres méthodes tel que la méthode SVD, la méthode QRD, la méthode de décomposition de *Cholesky*.

Elles sont toutes basées sur des modifications (permutations, décompositions) de la matrice initiale K , qui est ramenée à une forme plus utilisable pour la programmation et les calculs. La matrice de rigidité globale de la structure obtenue après assemblage, est singulière donc non inversible. Pour contourner cette difficulté, on réécrit le système d'équations de manière à avoir d'un côté, les déplacements inconnus Δ_L aux degrés de liberté libres et de l'autre, les déplacements connus $\bar{\Delta}_R$ correspondant aux degrés de liberté retenus au niveau des appuis.

Le système s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LL} & \mathbf{K}_{LR} \\ \mathbf{K}_{RL} & \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_L \\ \bar{\mathbf{d}}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_L \\ \mathbf{R}_R \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Les vecteurs $\bar{\mathbf{R}}_L$ et $\bar{\mathbf{d}}_R$ sont connus et les inconnus sont \mathbf{R}_R et \mathbf{d}_L . On obtient après substitution, la solution qui est donnée par :

$$\Delta_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1} (\bar{\mathbf{F}}_L - \mathbf{K}_{LR} \bar{\Delta}_R) \quad (6.6)$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{K}_{RL} \Delta_L + \mathbf{K}_{RR} \bar{\Delta}_R \quad (6.7)$$

L'introduction des conditions limites permet enfin d'obtenir la solution finale du problème. Les conditions aux limites sont les mêmes que celles données par le tableau 01.

8-APPLICATIONS

Après avoir établi les lois régissant le comportement des plaques en flexion et les différentes étapes de résolution, on a essayé de faire des programmes sur MAPLE 6 un logiciel de calcul mathématique. Ces programmes nous ont donnés les résultats suivants, pour un élément rectangulaire à 4 noeuds:

Coordonnées des Noeuds

```
x [1]:=1:    y [1]:=1:
x [2]:=2:    y [2]:=1:
x [3]:=2:    y [3]:=2:
x [4]:=1:    y [4]:=2:
```

Caractéristiques de la plaque

Epaisseur de la plaque

```
t:=0.2:
```

Module d'Elasticité Linéaire

```
E:=200000:
```

Coefficient de Poisson

```
nu:=0.3:
```

Sollicitations

Forces de volume (KN/m3)

```
F[X]:=0;
F[Y]:=0;
F[Z]:=2500;
```

Chargements (Efforts de surface)(KN/m2)

```
Phi[X]:=0;
Phi[Y]:=0;
Phi[Z]:=1500;
```

Matrice de Rigidité élastique

```
H := Matrix ([[219780.2198, 65934.06593, 0, 0, 0], [65934.06593, 219780.2198, 0, 0, 0], [0, 0, 76923.07692, 0, 0], [0, 0, 0, 76923.07692, 0], [0, 0, 0, 0, 76923.07692]])
```

Fonctions d'Interpolations N_i

```
p := 1
```

$$N_1 := \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \quad N_2 := \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$N_3 := \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \quad N_4 := \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$

Matrice N

NN := "Matrix(3, 12, [[1/4*(1-xi)*(1-eta),0,0,1/4*(1+xi)*(1-eta),0,0,1/4*(1+xi)*(1+eta),0,0,1/4*(1-xi)*(1+eta),0,0],[0,1/4*(1-xi)*(1-eta),0,0,1/4*(1+xi)*(1-eta),0,0,1/4*(1+xi)*(1+eta),0,0,1/4*(1-xi)*(1+eta),0],[0,0,1/4*(1-xi)*(1-eta),0,0,1/4*(1+xi)*(1-eta),0,0,1/4*(1+xi)*(1+eta),0,0,1/4*(1-xi)*(1+eta)]])

Jacobien(J)- Déterminant(DET)-Inverse(G)

J := Matrix ([[1/2, 0, 0], [0, 1/2, 0], [0, 0, 1]])

DET := 1/4

Gamma := Matrix ([[2., 0., 0.], [0., 2., 0.], [0., 0., 1.]])

G := Matrix([[2., 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0., 2., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1., 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 2., 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 2., 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 2., 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 2., 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2., 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.]])

Transposé de N

N^T := "Matrix(12, 3, [[1/4*(1-xi)*(1-eta),0,0],[0,1/4*(1-xi)*(1-eta),0],[0,0,1/4*(1-xi)*(1+eta)],[1/4*(1+xi)*(1-eta),0,0],[0,1/4*(1+xi)*(1-eta),0],[0,0,1/4*(1+xi)*(1-eta)],[1/4*(1+xi)*(1+eta),0,0],[0,1/4*(1+xi)*(1+eta),0],[0,0,1/4*(1+xi)*(1+eta)],[1/4*(1-xi)*(1+eta),0,0],[0,1/4*(1-xi)*(1+eta),0],[0,0,1/4*(1-xi)*(1+eta)]]),

Vecteur Chargement F

Forces de volume

Fv := [0., 0., 125., 0., 0., 125., 0., 0., 125., 0., 0., 125.]

Matrice B=LN

HH := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0]])

BB := "Matrix(5, 12, [[.1000000000-.1000000000*eta,0.,0.,-.1000000000+.1000000000*eta,0.,0.,-.1000000000-.1000000000*eta,0.,0.,.1000000000+.1000000000*eta,0.,0.],[0...1000000000-

.1000000000*xi,0,0.,1000000000+.1000000000*xi,0,0.,-1000000000-
.1000000000*xi,0,0.,-1000000000+.1000000000*xi,0,],[.1000000000-
.1000000000*xi,1000000000-.1000000000*eta,0.,1000000000+.1000000000*xi,-
.1000000000+.1000000000*eta,0.,-1000000000-.1000000000*xi,-1000000000-
.1000000000*eta,0.,-
.1000000000+.1000000000*xi,1000000000+.1000000000*eta,0,],[.2500000000*(1-xi)*(1-
eta),0.,-.5000000000+.5000000000*eta,.2500000000*(1+xi)*(1-eta),0.,5000000000-
.5000000000*eta,.2500000000*(1+xi)*(1+eta),0.,.5000000000+.5000000000*eta,.2500000000
0*(1-xi)*(1+eta),0.,-.5000000000-.5000000000*eta],[0.,-.2500000000*(1-xi)*(1-eta),-
.5000000000+.5000000000*xi,0.,-.2500000000*(1+xi)*(1-eta),-.5000000000-
.5000000000*xi,0.,-.2500000000*(1+xi)*(1+eta),.5000000000+.5000000000*xi,0.,-
.2500000000*(1-xi)*(1+eta),.5000000000-.5000000000*xi]]),

Matrice de Rigidité k

R4 := "Matrix(12, 12, [[12503.05250,1428.571429,-12820.51282,1855.921856,-
109.8901099,12820.51282,158.7301588,-
1428.571429,6410.256411,4713.064714,109.8901099,-
6410.256411],[1428.571429,12503.05250,12820.51282,109.8901099,4713.064714,6410.256
411,-1428.571429,158.7301588,-6410.256411,-109.8901099,1855.921856,-12820.51282],[
12820.51282,12820.51282,51282.05128,-12820.51282,6410.256410,-12820.51282,-
6410.256410,6410.256410,-25641.02564,-6410.256410,12820.51282,-
12820.51282],[1855.921856,109.8901099,-12820.51282,12503.05250,-
1428.571429,12820.51282,4713.064714,-
109.8901099,6410.256411,158.7301588,1428.571429,-6410.256411],[
109.8901099,4713.064714,6410.256411,-
1428.571429,12503.05250,12820.51282,109.8901099,1855.921856,-
12820.51282,1428.571429,158.7301588,-6410.256411],[12820.51282,6410.256410,-
12820.51282,12820.51282,12820.51282,51282.05128,6410.256410,12820.51282,-
12820.51282,6410.256410,6410.256410,-25641.02564],[158.7301588,-1428.571429,-
6410.256411,4713.064714,109.8901099,6410.256411,12503.05250,1428.571429,12820.5128
2,1855.921856,-109.8901099,-12820.51282],[-1428.571429,158.7301588,6410.256411,-
109.8901099,1855.921856,12820.51282,1428.571429,12503.05250,-
12820.51282,109.8901099,4713.064714,-6410.256411],[6410.256410,-6410.256410,-
25641.02564,6410.256410,-12820.51282,-12820.51282,12820.51282,-

```
12820.51282,51282.05128,12820.51282,-6410.256410,-12820.51282],[4713.064714,-
109.8901099,-
6410.256411,158.7301588,1428.571429,6410.256411,1855.921856,109.8901099,12820.5128
2,12503.05250,-1428.571429,-
12820.51282],[109.8901099,1855.921856,12820.51282,1428.571429,158.7301588,6410.256
411,-109.8901099,4713.064714,-6410.256411,-1428.571429,12503.05250,-12820.51282],[-
6410.256410,-12820.51282,-12820.51282,-6410.256410,-6410.256410,-25641.02564,-
12820.51282,-6410.256410,-12820.51282,-12820.51282,-12820.51282,51282.05128]]).
```

Ces résultats sont identiques à ceux obtenus avec le type H.

Pour un degré de polynôme égal à 2 ($p=2$), les résultats donnent la matrice B, mais le calcul des doubles intégrales prend beaucoup de temps. D'où l'intérêt de développer des programmes en C++ qui est, un environnement plus apte aux calculs. Il est possible de ramener les programmes établis sur Maple en C++. Il suffit juste d'utiliser le *codegen* qui est déjà intégré dans maple.

On a eu également à faire un programme d'adressage des différents éléments d'une structure, pour pouvoir générer le programme d'assemblage de cette dernière.

Exemple : Soit la structure donnée ci-dessous, composé de 6 éléments rectangulaire à 8 nœuds. Le programme d'adressage donne pour chaque élément sa position dans la matrice de rigidité globale du système. On a pour chaque élément:

```
iad1 := array(1 .. 24, [ ])
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19, 20, 21, 31, 32, 33, 28, 29, 30, 25, 26, 27, 16, 17, 18]
iad2 := array(1 .. 24, [ ])
[7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 37, 38, 39, 34, 35, 36, 31, 32, 33, 19, 20, 21]
iad3 := array(1 .. 24, [ ])
[25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 43, 44, 45, 55, 56, 57, 52, 53, 54, 49, 50, 51, 40, 41, 42
]
iad4 := array(1 .. 24, [ ])
[31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 46, 47, 48, 61, 62, 63, 58, 59, 60, 55, 56, 57, 43, 44, 45
]
iad5 := array(1 .. 24, [ ])
```

[49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 67, 68, 69, 79, 80, 81, 76, 77, 78, 73, 74, 75, 64, 65, 66
]

$iad_6 := \text{array}(1 .. 24, [\])$

[55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 70, 71, 72, 85, 86, 87, 82, 83, 84, 79, 80, 81, 67, 68, 69
]



Figure 16: Maillage d'une structure

CONCLUSION

Ce travail ne porte que sur l'étude d'une plaque isotrope, dans le cas d'une plaque composée de plusieurs matériaux, le comportement de cette dernière est décrit par d'autres équations qui ont été déjà établies dans la littérature. D'autres hypothèses simplificatrices telle que, la non prise en compte des effets dynamiques, l'introduction d'un facteur de cisaillement, ont été prises pour mieux faciliter la programmation. Ceci pour montrer qu'il ne touche qu'une partie infime de l'étude des plaques. Cependant il constitue un début pour la programmation de la méthode dans un langage informatique accessible.

Les résultats obtenus au niveau des fonctions d'interpolations ont montrés, que la précision des fonctions type H était identique au type P pour des polynômes de degré égal à 1. Cependant on note que la précision de ces dernières était meilleure dès que le degré du polynôme était supérieur à 1. De même la précision de la solution peut être augmentée dans le type P, sans changer de maillage. La rapidité de convergence du modèle et sa maniabilité pour l'informatique lui donne une bonne place pour l'intégration dans des logiciels de calculs de structure.

La résolution des systèmes d'équations est essentielle pour mieux apprécier la précision de la méthode, et ceci peut faire l'objet de sujet de recherche au même titre que l'assemblage de la structure.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Barna SZABO & Ivo BABUSKA, *finite element Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
- [2] Robert D. Cook, *Concepts and applications of finite element analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons, 1974, 1981, pp 9-16, 113-131, 244-266.
- [3] O.C. ZIENKIEWICZ, FRS & R.L. TAYLOR, *The finite element: basic formulation and linear Problem*, Fourth edition, volume 1, 1983.
- [4] J.L. Batoz et G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 2, poutres et plaques, Edition Hermès, Paris, 1990, pp 223-302.
- [5] William H. Press & William T. Vetterling & Saul A. Teukolsky & Brian P. Flannery, *NUMERICAL RECIPES IN C: THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING*, Second Edition, 1988-1992 by Cambridge University Press. Programs Copyright (C) 1988.
- [6] Jean-François Remacle, *Mécanique des Structures*, Université catholique de Louvain, Faculté des Sciences Appliquées, Unité de Génie Civil et Environnemental, Novembre 2002.

Sites Internet

<http://www-ipst.u-strasbg.fr/loic/el-finis/>

ANNEXES

ANNEXE A

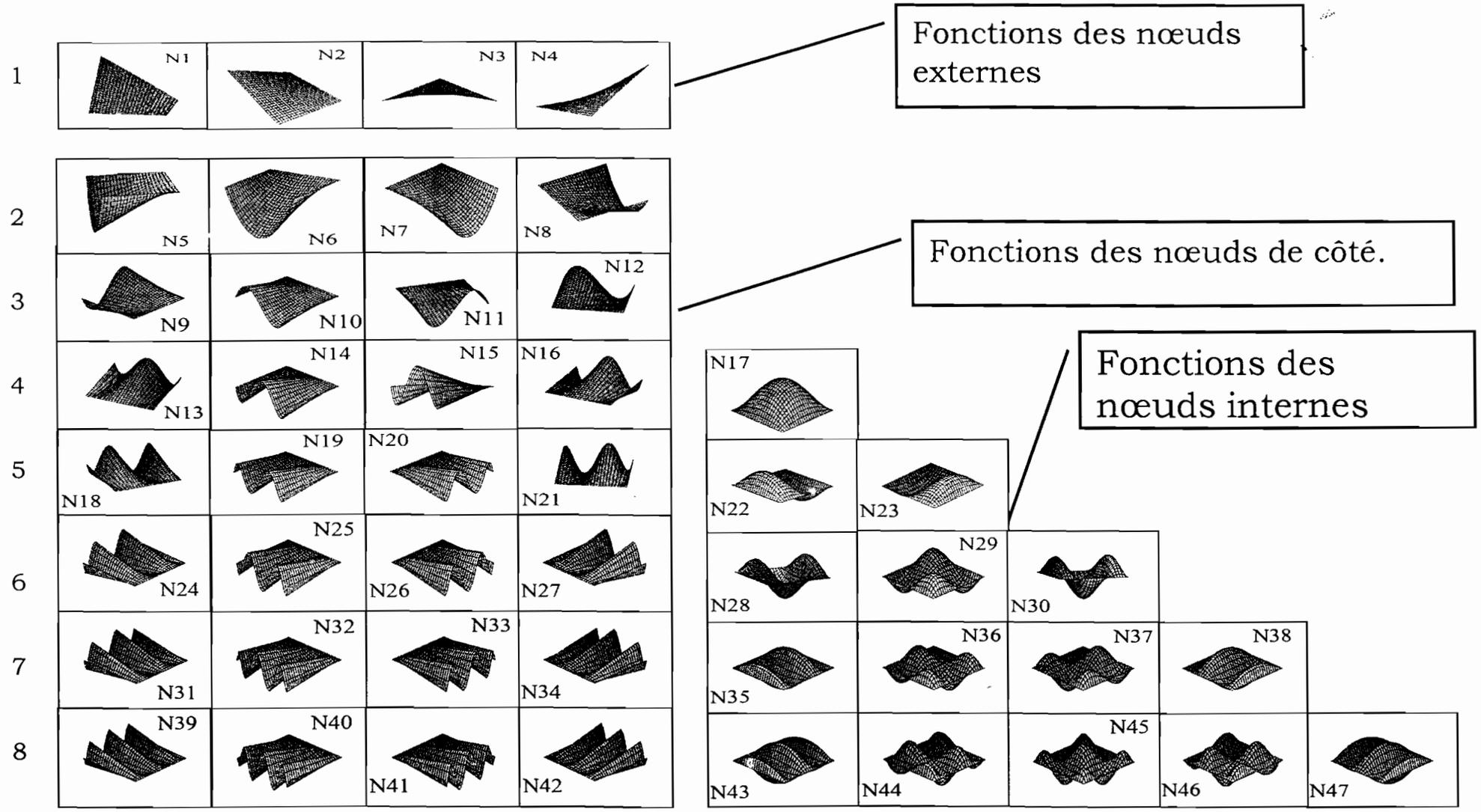
Les fonctions N_i pour l'élément rectangulaire à 8 nœuds du type H, sont données par :

$$\begin{aligned}
 N_1 &:= -\frac{1}{4}(\eta(\xi - 1) - 1)(\xi + \eta + 1) & N_2 &:= \frac{1}{2}(\xi - 1)(1 + \xi)(\eta - 1) \\
 N_3 &:= -\frac{1}{4}(\eta - 1)(1 + \xi)(\xi - \eta - 1) & N_4 &:= -\frac{1}{2}(\eta - 1)(1 + \eta)(1 + \xi) \\
 N_5 &:= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \xi)(\xi - 1 + \eta) & N_6 &:= -\frac{1}{2}(\xi - 1)(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_7 &:= \frac{1}{4}(1 + \eta)(\xi - 1)(\xi + 1 - \eta) & N_8 &:= \frac{1}{2}(\eta - 1)(1 + \eta)(\xi - 1)
 \end{aligned}$$

Les fonctions N_i pour l'élément rectangulaire à 9 nœuds du type H, sont données par :

$$\begin{aligned}
 N_1 &:= \frac{1}{4}\xi\eta(\eta - 1)(\xi - 1) & N_2 &:= -\frac{1}{2}\eta(\xi - 1)(1 + \xi)(\eta - 1) \\
 N_3 &:= \frac{1}{4}\xi\eta(\eta - 1)(1 + \xi) & N_4 &:= -\frac{1}{2}\xi(\eta - 1)(1 + \eta)(1 + \xi) \\
 N_5 &:= \frac{1}{4}\xi\eta(\eta - 1)(1 + \xi) & N_6 &:= -\frac{1}{2}\eta(\xi - 1)(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_7 &:= \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \eta)(\xi - 1) & N_8 &:= -\frac{1}{2}\xi(\eta - 1)(1 + \eta)(\xi - 1) \\
 N_9 &:= (\eta - 1)(1 + \eta)(\xi - 1)(1 + \xi)
 \end{aligned}$$

ANNEXE B



Représentation graphique des Fonctions hiérarchiques TYPE P pour un élément rectangulaire