

REPUBLIQUE DU SENEGAL



ECOLE POLYTECHNIQUE DE THIES

GENIE CIVIL

60235

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR DE CONCEPTION

**CONCEPTION D'UNE
TOITURE AUTOPOR-
TANTE EN BETON
ARME DESTINEE A
LA COUVERTURE
D'UN HALL OMNI-
SPORT.**

AUTEUR : E.I. ABD'ELKADER NDIAYE

DIRECTECTEUR: M^r S. BOULOS

CO-DIRECTEUR : M^r M. NDIAYE

DATE : JUIN 1986

" Le voile autoportant est le germe d'une révolution dont
on ne mesure pas encore l'étendue ".

René SARGET.

(Ingénieur Conseil)

A mes parents.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué sous la direction des Professeurs S. BOULOS et M. NDIAYE.

Je voudrais saisir cette occasion pour leur témoigner ma profonde gratitude pour leur encadrement constant qui m'a permis de mener à terme cette étude.

J'adresse mes sincères remerciements à tout le personnel de la S.O.N.E.D. pour leur assistance régulière et leur sympathique disponibilité.

J'exprime ma profonde reconnaissance à tout le personnel d'INTER-ARCHI, et particulièrement à Mr Papa Idrissa NDIAYE pour sa collaboration et l'attention particulière qu'il m'a apporté.

Enfin, je remercie très franchement Mlle M. BOYE pour le dévouement avec lequel elle a dactylographié ce texte.

S O M M A I R E

Au Sénégal, les couvertures de Hall de Sport ont toujours été réalisées suivant des modèles de structure et d'architecture traditionnelles.

Pour innover, je me propose, en collaboration avec la S.O.N.E.D. (Société Nouvelle des Etudes pour le Développement) et l'INTER-ARCHI (un Cabinet d'Architecture à Dakar), de faire, d'une part, une étude de forme, et d'autre part de procéder à l'analyse structurale et au dimensionnement de cette toiture.

La démarche envisagée comporte les étapes ci-après :

- Choix architectural,
- Analyse Structurale,
- Design,
- Evaluation économique et comparaison avec les modèles traditionnels.

TABLE DES MATIERES

<u>DESCRIPTION</u>	<u>PAGE</u>
Titre	
Remerciements	i
Sommaire	ii
Introduction	1 à 3
I - <u>CHOIX ARCHITECTURAL</u>	4
. Option parabole	7
. Option ellipse	8
II - <u>GENERALITES SUR LES METHODES DE CALCUL</u>	9 à 11
III - <u>ANALYSE STRUCTURALE</u>	11
3-1 - Hypothèse et définitions	11 à 12
3-2 - Conditions d'équilibre pour une coque	12 à 19
3-3 - Idéalisation de la structure	20
3-1 - Idéalisation de la voûte	20
3-2 - Idéalisation de l'arc	21
3-4 - Calcul des efforts dans la voûte	22
4-1 - Cas de la charge permanente	22 à 27
4-2 - Cas de la surcharge	28 à 31
3-5 - Calcul des efforts dans l'arc	31 à 41
. Commentaire des résultats pour l'arc elliptique	41
. Commentaire des résultats pour l'arc parabolique	42

. Calcul des efforts de poussée dans l'arc	42 à 43
IV - <u>DESIGN</u>	
4-1 - Dimensionnement des voûtes	43 à 50
4-1-1 - Calcul des contraintes principales	44 à 45
4-1-2 - Calcul de l'épaisseur des voûtes	46 à 49
4-1-3 - Calcul de l'armature minimale	49 à 50
4-2 - Dimensionnement de l'arc	50
4-2-1 - Calculs des sections de l'arc	51 à 52
4-2-2 - Calcul de l'armature minimum	52 à 53
4-3 - Dimensionnement de l'élément de butée	53
4-3-1 - Tirants	56 à 59
4-3-2 - Poteau	60 à 62
4-3-3 - La fondation	63 à 70
1 - Dimension de la semelle	63 à 64
2 - Dimensionnement pour les forces de cisaillement	64 à 67
2-1 - Cisaillement unidirectionnel	64 à 65
2-2 - Cisaillement bidirectionnel	65 à 67
3 - Dimensionnement en flexion	67 à 68
4 - Transmission des contraintes à la base	68 à 69
V - <u>EVALUATION ECONOMIQUE</u>	71 à 73

VI - <u>DISCUSSIONS ET RECOMMANDATIONS</u>	74
A - Discussions	74 à 76
B - Recommendations	76 à 79
<u>CONCLUSION</u>	80
<u>ANNEXES</u>	81 à 83
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	84 à 86

LISTE DES ANNEXES

APPENDICE A

Justification de la minceur des voûtes.

APPENDICE B

- . Justification de l'annulation des moments de flexion et de torsion (M_x , M_y , M_{xy} , et M_{yx}).
- . Justification de l'annulation des efforts transversaux de cisaillement (Q_x , Q_y).
- . Justification de l'égalité des efforts tranchants (N_{xy} et N_{yx}).

LISTE DES TABLEAUX

- Tableaux n° 1 et 2 : présentent les hauteurs pour la voûte n° 1 et n° 2 dans le cas de l'option parabolique.
- Tableaux n° 3 et 4 : présentent les hauteurs pour la voûte n° 1 et n° 2 dans le cas de l'option elliptique.
- Tableaux n° 5 et 6 : présentent les hauteurs pour la voûte n° 1 et n° 2 dans le cas de l'option elliptique pour les valeurs de $a = 18$ m, $b = 23$ m et $c_2 = 11$ m.
- Tableaux n° 7 et 8 : présentent les valeurs de N_x , N_y , et N_{xy} pour les voûtes n° 1 et n° 2 dans le cas de la charge permanente.
- Tableaux n° 9 et 10 : présentent les valeurs de N_x , N_y et N_{xy} pour les voûtes n° 1 et n° 2 dans le cas de la surcharge.
- Tableau n° 11 : présente les valeurs de N_x , N_y et N_{xy} .
- Tableau n° 12 : présente les valeurs de \bar{N}'_x , \bar{N}'_y , et \bar{N}'_{xy} .
- Tableau n° 13 : présente les valeurs de $(\bar{N}_x + \bar{N}'_x)$;
 $(\bar{N}_y + \bar{N}'_y)$; $(\bar{N}_{xy} + \bar{N}'_{xy})$
- Tableau n° 14 : présente les valeurs de F_h , F_2 et $\tan \beta$ en fonction du rapport s/d (cas de l'ellipse).
- Tableau n° 15 : présente les valeurs de F_h , F_z et $\tan \beta$ en fonction du rapport s/d (cas de la parabole).

Tableau n° 16 : présente les forces de poussée.

Tableau n° 17 et 18 : présentent les efforts principaux N_1 , N_2 et leur orientation (α) respectivement pour les voûtes n° 1 et n° 2.

Tableau n° 19 : présente les valeurs de β , T et C en fonction du rapport s/d.

Tableau n° 20 : présentent les valeurs de P_u et X en fonction de s/d.

Tableau n° 21 : présente les valeurs de X, A_g , A_s , l et le nombre des sections en fonction de s/d.

Tableau n° 22 : Devis estimatif détaillé de l'ouvrage concernant les terrassements et le Gros oeuvre.

LISTE DES FIGURES

- Figure 1 : Inventaire de toutes les forces internes de la coque.
- Figure 2 : Equilibre des forces membranes.
- Figure 3 : Idéalisaton de la voûte.
- Figure 4 : Toiture : vue en plan.
- Figure 5 : Idéalisaton de l'arc trirotulé.
- Figure 6 : Forces membranes de l'arc.
- Figure 7 : Arc elliptique trirotulé.
- Figure 8 : Arc parabolique trirotulé.
- Figure 9 : Diagrammes des contraintes et des déformations dans une section de voûte.
- Figure 10 : Ferrailage d'une section de voûte.
- Figure 11 : Forces équivalentes dans une section de l'arc.
- Figure 12 : Elément de butée.
- Figure 13 : Les différentes composantes de l'élément de butée.
- Figure 14 : Tirant
- Figure 15 : Ferrailage du tirant.
- Figure 16 : Diagrammes des efforts tranchants et des moments de flexion pour une poutre biencastée.
- Figure 17 : Poteau
- Figure 18 : Section du poteau.
- Figure 19 : Ferrailage de la section 2-2 du poteau
- Figure 20 : ferrailage de la section 1-1 du poteau

Figure 21 : Ferrailage du poteau

Figure 23 : La fondation.

Figure 24 : Cisaillement unidirectionnel dans la semelle.

Figure 25 : Poinçonnement de la semelle.

Figure 26 : Flexion de la semelle.

Figure 27 : Ferrailage de la butée.

Figure 28 : Rotulation de l'arc.

INTRODUCTION

La solution classique et couramment utilisée pour couvrir un espace donné, consiste à utiliser une couverture plane qui repose sur des poutres et des poteaux. Avec cette option, il est important de distinguer les deux types d'éléments nettement différents qui sont employés, à savoir ceux qui couvrent et ceux qui portent.

L'avènement des voiles minces en béton armé a conduit à la naissance d'une autre formule plus originale - l'une des plus élaborées de la conception moderne des structures - les couvertures autoportantes. Celles-ci sont obtenues à partir de la fusion d'éléments couvrants et porteurs, et où les éléments structuraux sont d'une extraordinaire efficacité car leurs formes sont essentiellement dictées par des considérations structurales.

Cette innovation structurale présente aujourd'hui des avantages qui sont très appréciés par les constructeurs modernes, et ils méritent d'être mis en relief :

1 - Le principal avantage de ces structures réside dans leur légèreté. En effet, les éléments porteurs sont éliminés avec la forme particulière qui est donnée aux éléments couvrants, et celle-ci devra être adaptée aux charges qu'ils supportent.

2 - Leur légèreté entraîne automatiquement une économie qui n'est nullement négligeable au niveau des armatures, des supports et des fondations.

3 - Ces modèles de structures représentent souvent une solution idéale pour la couverture des salles de réunion

.../...

... et des centres de compétition sportive en ce sens qu'ils permettent de créer des espaces de très grandes dimensions sans appuis intermédiaires.

4 - Enfin, comme dernier avantage, il faut mentionner l'aspect élégant de ces structures, élément très favorable au point de vue de l'esthétique des constructions, et qui constitue en conséquence un moyen d'expression architecturale bien adapté à notre époque de grande production industrielle où les styles, les modes, et la recherche plastique sont utilisés comme moyen de vente.

Cependant, malgré tous ces avantages, il convient de souligner un certain nombre d'inconvénients qui peuvent parfois faire hésiter les constructeurs pour le choix de ces types de structures :

1 - En effet, l'handicap majeur des voiles minces en béton armé se situe surtout dans le coût des coffrages qui demeure en général la clef du prix de revient de ces ouvrages.

2 - D'autre part, le façonnage de gabarits courbes précis nécessite souvent une main d'oeuvre spécialisée qui peut donc être onéreuse dans les pays où celle-ci coûte chère.

3 - De plus, la réalisation de coffrages étanches nécessite un soin particulier pour les surfaces à double courbure.

4 - Enfin, la difficulté des calculs de résistance de la plupart des structures peut parfois faire hésiter les constructeurs, où même les conduire à avoir recours aux solutions classiques.

C'est pourquoi, pour surmonter tous ces inconvénients, il paraît utile, avant d'entamer l'étude de la résistance et de la stabilité des voiles minces en béton armé, de pouvoir choisir la forme adéquate, c'est à dire, une surface qui sera relativement facile à tracer, à façonner et à coffrer, et de surcroît, dont le coût du coffrage aura une incidence réduite sur le prix de revient.

D'ailleurs, c'est à cause de ce souci, que nous nous sommes attelés en premier lieu, dans les études du projet, au choix architectural, ensuite à l'analyse structurale, et enfin au dimensionnement suivi d'une évaluation économique.

I - CHOIX ARCHITECTURAL

Lors des études avant projet portant sur la construction du Centre National d'Education Populaire et Sportive (C.N.E.P.S.) de Thiès, la S.O.N.E.D avait retenu pour la couverture du Hall de Sport, un modèle de toiture de type classique (cf. plan n° 1), c'est à dire un système de couverture qui comportait un élément couvrant plan (" bac alu ") et des éléments porteurs (poutres en treillis métalliques reposant sur des poteaux). Cependant, il faut souligner que ce modèle, bien que fonctionnel, ne présentait aucun attrait esthétique, ni un relief qui laisserait pressentir l'ambiance d'un hall omnisport.

En conséquence, ce constat nous a conduit à réviser les dispositions architecturales et structurales, en vue de mieux améliorer l'esthétique et l'efficacité des éléments structuraux choisis.

Dans cette optique, nous avons retenu la coque, en béton armé qui est très indiquée pour couvrir économiquement des centres de compétitions sportives qui exigent des espaces bien dégagés (sans appuis intermédiaires).

Mais avant d'aborder les études de résistance et de stabilité, il nous a paru important de choisir la forme adéquate de la coque qui doit être principalement dictée par des considérations structurales.

En effet, les voiles minces sont des structures à résistance de forme suffisamment minces pour ne pas développer des contraintes de flexion appréciables, mais cependant assez épaisses pour pouvoir transmettre les charges par compression, traction et cisaillement.

C'est pourquoi, nous avons trouvé très utile la couverture arquée, car, d'une part, l'arc transmet les charges aux appuis par compression (solicitation à laquelle le béton résiste bien), d'autre part, avec l'arc nous avons la possibilité de franchir des portées importantes comme celles qui existent dans notre cas, et enfin, la forme arquée permet une réduction de l'épaisseur de la coque, ce qui compense dans certains cas le coût du coffrage.

Soulignons aussi que le type de coque à utiliser dépend essentiellement de la forme de la surface à couvrir et de l'emplacement des points d'appuis qui peuvent être prévus. Or, nous disposons d'une surface rectangulaire (36 × 46 m²), ce qui nous a conduit à avoir recours en premier lieu à la couverture cylindrique individuelle qui convient bien pour ce type de superficie. Cependant, avec le cylindre, nous nous sommes rendu compte qu'au point de vue architectural, son allure est timide et monotone et elle laisse plutôt l'image d'un entrepôt. Cette remarque, nous a obligé à opter, en second lieu, pour deux coques cylindriques entrecoupées à angle droit, qui conviennent également pour la couverture des surfaces rectangulaires, et qui ont surtout l'avantage d'être beaucoup plus élégantes que la coque cylindrique individuelle.

Nous tenons à remarquer que, quoique la coque soit dite cylindrique à cause de son apparence générale, la coupe pourrait prendre différentes formes (arcs circulaires, elliptique ou parabolique) selon les besoins architecturaux.

D'ailleurs, au départ de notre étude architecturale, nous avons d'abord opté pour la parabole (courbe idéale pour la transmission des contraintes de compression), mais ces retombées au niveau des extrémités ne nous fournissaient pas de bonnes hauteurs, ce qui compromettrait l'aspect fonctionnel de l'infrastructure.

Nous avons contourné cette difficulté en fixant d'abord toutes les hauteurs utiles pour les portes, les panneaux et les gradins, et ensuite en cherchant la courbe qui pouvait respecter le mieux ces élévations.

Après des calculs de hauteurs (voir pages 7, 8, 9) nous avons choisi l'arc elliptique.

Pour mieux comprendre ce choix, examinons les résultats des deux tableaux de la page 7. A partir de ceux-ci, nous constatons que l'arc parabolique passe en dessous de la courbe établie par l'architecte et qui nous fixe les hauteurs fonctionnelles. Ce qui signifie que l'arc parabolique ne nous donne pas partout une infrastructure opérationnelle.

Ce constat nous a conduit à opter pour l'arc elliptique (voir page 8), car ce dernier est plus proche de la courbe établie par l'architecte, étant donné qu'il nous fournit des écarts beaucoup moins importants, ce qui nous permet donc d'avoir des hauteurs acceptables.

Finalement, pour mieux améliorer nos hauteurs, nous avons en définitive choisi une hauteur $c_2 = 11\text{m}$ et les valeurs respectives de 23 m et 18 m pour b et a ; avec ces valeurs, nous obtenons les élévations figurant à la page 9.

Vérification de la géométrie :

1ère option : parabole

$$z = \frac{y^2}{h_2} - \frac{x^2}{h_1}$$

$$h_1 = \infty \rightarrow z = \frac{y^2}{h_2} = \frac{c_2}{b^2} y^2$$

a) Voûte n° 1 ($c_2 = 10,40\text{m}$ et $b = 23,40\text{m}$)

Tableau N° 1

y (m)	z calculé (m)	z mesuré (m)	z calculé - z mesuré (m)
0,00	0,000	0,000	+0,00
0,2b = 4,68	0,416	0,410	+0,01
0,4b = 9,36	1,664	1,200	+0,46
0,6b = 14,04	3,744	2,800	+0,94
0,8b = 18,72	6,656	5,000	+1,66
y = 21,70	8,900	7,200	+1,70
b = 23,40	10,400	10,400	0,00

b) Voûte n° 2 ($c_2 = 10,40\text{ m}$ et $a = 17,40\text{ m}$)

Tableau N° 2

y (m)	z calculé (m)	z mesuré (m)	z calculé - zmesuré
0,00	0,000	0,00	0,00
0,2b = 3,48	0,416	0,20	+0,22
0,4b = 6,96	1,664	0,90	+0,76
0,6b = 10,44	3,740	1,90	+1,84
0,8b = 13,92	6,656	3,50	+3,16
b = 17,40	10,40	10,40	0,00

. 2e option : l'ellipse

a) Voûte N° 1 :

$$1 = \frac{z^2}{c_2^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_2 = 11 \text{ m} \\ b = 23 \text{ m} \end{cases}$$

Tableau n° 3

y (m)	z calculé (m)	z mesuré (m)	z calculé (m) - z mesuré
0,00	0,000	0,00	0,00
0,2b = 4,68	0,210	0,41	-0,20
0,4b = 9,36	0,868	1,20	-0,33
0,6b = 14,04	2,080	2,80	-0,72
0,8b = 18,72	4,160	5,00	-0,84
y = 21,70	6,508	7,20	-0,69
b = 23,40	10,400	7,20	-0,00

b) Voûte n° 2 :

$$1 = \frac{z^2}{c_2^2} + \frac{y^2}{a^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_2 = 11 \text{ m} \\ a = 18 \text{ m} \end{cases}$$

Tableau N° 4

y (m)	z calculé (m)	z mesuré (m)	z calculé (m) - z mesuré
0,00	0,000	0,00	0,00
0,2a = 3,48	0,210	0,20	+0,01
0,4a = 6,96	0,868	0,90	-0,03
0,6a = 10,55	2,080	1,90	+0,18
0,8a = 13,92	4,160	3,50	+0,66
a = 17,40	10,400	10,40	0,00

Pour la voûte n° 1 : $c_2 = 11$ m et $b = 23$ m

Tableau n° 5

y (m)	0,00	0,2b	0,4b	0,6b	0,8b	y=21,7	23,0
z calculé (m)	0,00	0,00	0,92	2,20	4,40	7,35	11,00

Pour la voûte n° 2 : $c_2 = 11$ m et $a = 18$ m

Tableau n° 6 :

y (m)	0,00	0,2a	0,4a	0,6a	0,8a	a
z calculé (m)	0,00	3,60	7,20	10,80	14,40	18,00

II - GENERALITES SUR LES METHODES DE CALCUL :

La littérature technique est riche en publications relatives aux théories des résistances des divers types de coques.

En général, celles-ci peuvent être classées en deux groupes :

- les théories des coques souvent dénommées théories de flexion des coques, qui sont "plus exactes" mais assez complexes, car elles tiennent compte de la variation des contraintes sur l'épaisseur de la coque, par conséquent, elles associent aux efforts de membrane, des moments de flexion et de torsion.

La théorie simplifiée des coques, qui porte aussi le nom de théorie des membranes car l'état des contraintes qui s'y présentent ressemble à celui des membranes.

Cette théorie néglige toutes les expressions des moments dans l'étude de l'équilibre d'une coque. Elle part du fait que l'épaisseur du voile est suffisamment faible pour que l'on puisse admettre que les contraintes ne varient pas sur cette épaisseur.

En conséquence, les résultantes des contraintes sont des efforts agissant dans la surface moyenne du voile (état bidimensionnel de contraintes). Sur cette base, le calcul pourrait être statiquement déterminé, et l'analyse pourrait se faire uniquement avec les équations d'équilibre des forces sans avoir besoin des relations de déformations.

Devant cette multitude de théories soit disant "exactes", il nous paraît quand même utile de souligner un certain nombre de remarques :

1 - Les théories "exactes" sont compliquées et elles conduisent à des calculs excessivement longs et souvent non pratiques pour un ingénieur, car dans la plupart des cas, il faut développer des états de charge particuliers en séries de fonctions, plus particulièrement en série de Fourier.

Donc, il faudra, suivant les cas, garder un nombre de termes d'autant plus élevé que la précision désirée est plus grande.

2 - Le béton armé n'est ni élastique, ni homogène, ni isotrope.

Les variations thermohygro-métriques, les déformations différées, les variations du béton sur l'étendue de la coque, les fissurations, mêmes capillaires, modifient considérablement la répartition et la grandeur des contraintes calculées. Il en résulte, donc, que la rigueur des méthodes dites "exactes" n'est que théorique et elle est souvent inutile pour les coques en béton armé.

3 - La grande majorité des coques utilisées dans la pratique pour des toitures sont des coques minces (c'est à dire des coques dont le produit de l'épaisseur par la courbure est petit devant l'unité ; de même que le produit de l'épaisseur par la torsion). Donc, nous pourrions admettre que les contraintes seront réparties uniformément sur toute leur épaisseur.

Ce qui conduit à une annulation des moments de flexion, des moments de torsion, et des efforts transversaux de cisaillement, ainsi que l'égalité des efforts tranchants horizontaux.

4 - Les charges appliquées à ces coques ne présentent pas de discontinuités (en général la sollicitation principale c'est le poids propre), la théorie des membranes fournit souvent une solution suffisamment précise.

C'est pourquoi, compte tenu de toutes ces remarques, nous avons opté, pour nos études, avec la théorie des membranes.

III - ANALYSE STRUCTURALE

3-1 - Hypothèses et définitions

a) Une coque mince est une surface courbe dont l'épaisseur h est relativement petite par rapport à ses autres dimensions et par rapport à ses rayons de courbure. (cf annexe A).

La surface qui passe au milieu de cette épaisseur est appelée surface moyenne. En spécifiant la forme de cette surface et l'épaisseur h à tout point, nous définissons complètement la géométrie de la coque.

b) Les déplacements de la coque sous une charge donnée sont suffisamment petits pour que les changements dans la géométrie de la coque puissent affecter l'équilibre statique du système.

c) Les hypothèses de LOWE basées sur l'élasticité classique, qui sont la transposition aux voiles des hypothèses de Bernouilli relatives aux poutres et de celles de Kirchhoff relatives aux plaques, demeurent valables :

* Les points situés sur une normale à la surface moyenne de la coque avant déformation restent sur une normale à la surface moyenne déformée.

* Les dilatations normales à la surface moyenne sont nulles.

* Les contraintes normales agissant sur des surfaces parallèles à la surface moyenne sont négligeables.

d) Le béton armé est supposé comme un matériau continu, homogène, isotrope et élastique.

3-2 - Conditions d'équilibre pour une coque

Considérons un élément différentiel extrait sur une coque et faisons un inventaire de toutes les forces internes (les forces membranes, les cisaillements transversaux, les moments de flexion et ceux de torsion voir figure 1).

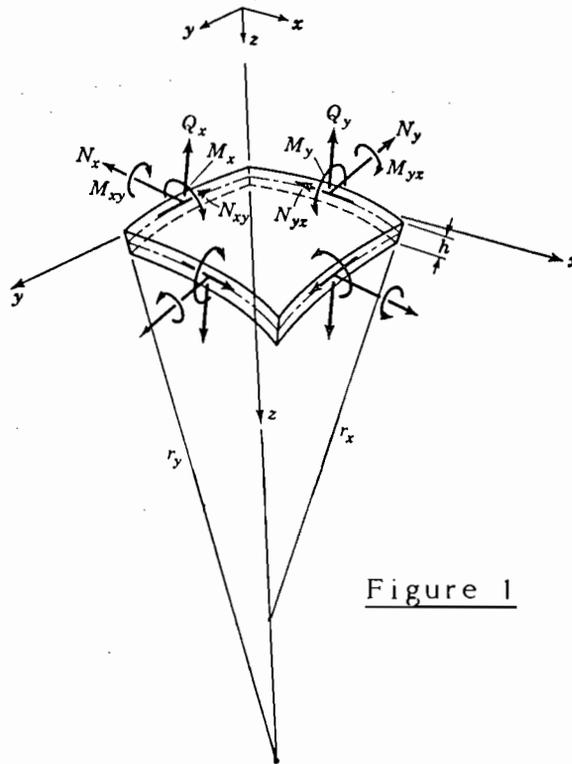


Figure 1

N_x, N_y = forces normales

N_{xy}, N_{yx} = forces de cisaillement dirigées suivant la tangente de la section.

Q_x, Q_y = forces transversales de cisaillement.

M_x, M_y = moments de flexion

M_{xy}, M_{yx} = moments de torsion.

Ce qui fait un total de 10 inconnues.

Cependant, en admettant l'hypothèse d'une égale répartition des efforts, nous obtenons une simplification extraordinaire de la théorie de coques ; car cela signifie une annulation des moments fléchissants et de torsion ($M_x = M_y = M_{xy} = M_{yx} = 0$), une annulation des efforts transversaux de cisaillement ($Q_x = Q_y = 0$) et une égalité des efforts tranchants ($N_{xy} = N_{yx}$) (cf annexe B). Cela entraîne une réduction du nombre d'inconnues qui passent de 10 à 3 (N_x, N_y et N_{xy}). Pour calculer ces 3 inconnues, nous ne disposons plus de six conditions d'équilibre du système des forces dans l'espace, mais seulement de 3 équations d'équilibre.

Celles-ci pourraient être directement tirées d'un élément différentiel courbé, mais elles seraient difficiles à utiliser.

C'est pourquoi nous avons jugé qu'il serait plus pratique de commencer l'étude de l'équilibre des forces membranes projetées sur un plan horizontal (voir figure 2).

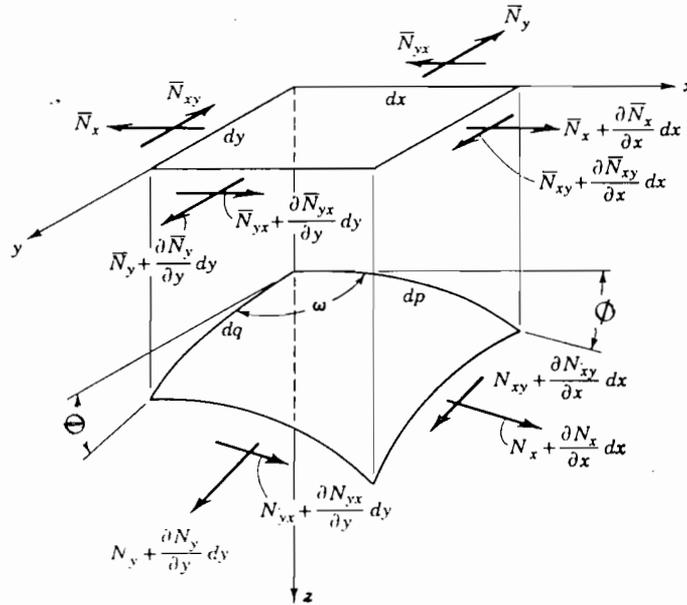


Figure 2

$$dx = dp \cos \phi \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\cos \phi}$$

$$dy = dq \cos \theta \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{dy} = \frac{1}{\cos \theta}$$

N_x, N_y = efforts normaux dans la coque

$N_{xy} = N_{yx}$ = efforts tranchants dans la coque

\bar{N}_x, \bar{N}_y = efforts normaux obtenus par projection des efforts normaux N_x, N_y dans le plan horizontal

$\bar{N}_{yx} = \bar{N}_{xy}$ = projection de l'effort tranchant N_{xy} (ou N_{yx}) dans le plan horizontal.

Après ces définitions, établissons les relations mathématiques entre les efforts N_x , N_y , N_{xy} et leur projection dans le plan horizontal.

$$* \bar{N}_x dy = N_x \cos \phi dq$$

$$\rightarrow \bar{N}_x = N_x \cos \phi \frac{dq}{dy}$$

$$\text{d'où : } \bar{N}_x = N_x \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \quad (1)$$

* De la même manière nous obtenons :

$$\bar{N}_y = N_y \frac{\cos \theta}{\cos \phi} \quad (2)$$

$$* \bar{N}_{xy} dy = N_{xy} \cos \theta dq$$

$$\rightarrow \bar{N}_{xy} = N_{xy} \times \cos \theta \times \frac{dq}{dy}$$

$$\rightarrow \bar{N}_{xy} = N_{xy} \times \cos \theta \times \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\text{d'où : } \bar{N}_{xy} = N_{xy} \quad (3)$$

A partir de la figure 2, exprimons l'équilibre dans le plan xy où agissent les charges \bar{p}_x et \bar{p}_y (projections des charges réelles agissant sur la coque).

$$* \sum F_x = -\bar{N}_x + \bar{N}_{yx} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} dy - \bar{N}_{yx} + \bar{N}_x + \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} dx + \bar{p}_x = 0$$

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx + \bar{p}_x = 0 \quad (4)$$

$$* \Sigma F_y = \bar{N}_y + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} dy - \bar{N}_y - \bar{N}_{xy} + \bar{N}_{xy} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} dx + \bar{p}_y = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy + \bar{p}_y = 0 \quad (5)$$

. La troisième équation est plus compliquée, elle décrit l'équilibre des forces en z. Mais pour établir l'équilibre, il est nécessaire d'obtenir les composantes des efforts dans la direction z.

$$N_x \sin \phi dq = \left(\bar{N}_x \frac{\cos \Theta}{\cos \phi} \right) \sin \phi \left(\frac{dy}{\cos \Theta} \right) = \bar{N}_x \tan \phi dy$$

Etant donné que les angles n'apparaissent que par leurs tangentes, nous les remplacerons par les dérivées en z. Ainsi :

$$\tan \Theta = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tan \phi = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\rightarrow N_x \sin \phi dq = \bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$* N_y \sin \Theta dp = \left(\bar{N}_y \frac{\cos \phi}{\cos \Theta} \right) \sin \Theta \left(\frac{dx}{\cos \phi} \right) = \bar{N}_y \tan \Theta dx$$

$$\rightarrow N_y \sin \Theta dp = \bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

$$* N_{xy} \sin \Theta \, dq = \bar{N}_{xy} \sin \Theta \times \frac{dy}{\cos \Theta} = N_{xy} \tan \Theta \, dy$$

$$\rightarrow N_{xy} \sin \Theta \, dq = N_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \, dy$$

$$* N_{yx} \sin \Phi \, dp = N_{yx} \times \sin \Phi \times \frac{dx}{\cos \Phi} = N_{yx} \tan \Theta \, dx$$

$$\rightarrow N_{yx} \sin \Phi \, dp = N_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} \, dx$$

$$\Sigma F_z = \left(-\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} \times dy + \left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} \, dy \right) dx \right) \right) +$$

$$+ \left(-\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \, dx + \left(\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \, dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \times dx \right) dy \right) \right) +$$

$$+ \left(-\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \, dy + \left(\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \, dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_{xy} \times \frac{\partial z}{\partial y} \times dy \right) dx \right) \right) +$$

$$+ \left(-\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} \, dx + \left(\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} \, dx \right) dy \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} \right) \, dx \, dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \, dx \, dy +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \, dx \, dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \, dx \, dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\text{or } \bar{N}_{yx} = \bar{N}_{xy}$$

$$\rightarrow \bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \bar{N}_y \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} \times \frac{\partial z}{\partial y} + \bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} \times \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} \times \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{N}_{xy} \times \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\rightarrow \bar{N}_x \times \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \bar{N}_y \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} \right) + \bar{p}_z = 0$$

\bar{p}_z = charge verticale agissant sur le plan horizontal.

Dans la dernière équation établie, nous retrouvons les équations (4) et (5) car :

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} = -\bar{p}_x \quad \text{d'après} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} = -\bar{p}_y \quad \text{d'après} \quad (5)$$

A partir de ces 2 remarques, nous obtenons :

$$\bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\bar{p}_z + \frac{\partial z}{\partial x} \bar{p}_x + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{p}_y \quad (6)$$

Avec ces développements, nous avons trois équations pour déterminer \bar{N}_x , \bar{N}_y , \bar{N}_{xy} . Connaissant ces efforts qui représentent les projections de N_x , N_y , N_{xy} , nous pourrions aussitôt calculer ces derniers avec les équations (1), (2), et (3).

Dans beaucoup de cas, les équations (4), (5), et (6) constituent un point de départ commode pour résoudre le problème. Mais il est souvent utile de les simplifier encore par l'introduction d'inconnues auxiliaires. Les équations (4) et (5) sont exactement les mêmes que pour une dalle plane dans le plan horizontal. Dans la théorie des dalles, il est démontré que ces équations sont identiquement remplies si nous exprimons les efforts \bar{N}_x , \bar{N}_y et \bar{N}_{xy} sous la forme de dérivées d'une nouvelle inconnue, la fonction contrainte $F(x, y)$.

La fonction contrainte, satisfaisant les expressions générales d'équilibre (4) et (5) est une fonction telle que :

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int \bar{p}_x dx \quad (7)$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int \bar{p}_y dy \quad (8)$$

$$\bar{N}_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

Introduisons les équations (7), (8), et (9) dans (6).

Nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \times \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = q \quad (10)$$

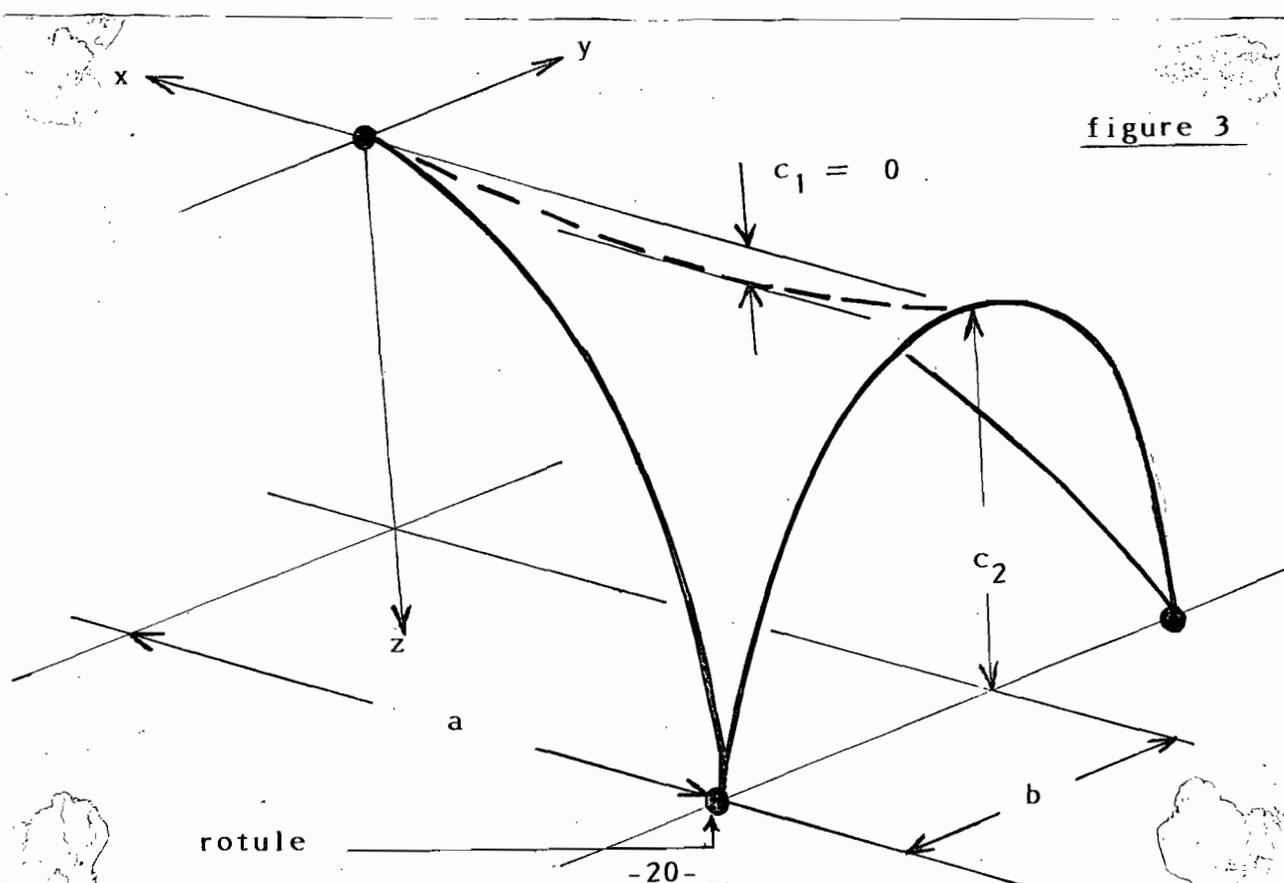
$$\text{avec : } q = \bar{p}_z + \bar{p}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{p}_y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int \bar{p}_x dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int \bar{p}_y dy \quad (11)$$

L'équation (10) est l'équation générale aux dérivées partielles gouvernant la fonction contrainte F.

3-3 - Idéalisation de la structure :

Dans notre choix architectural, nous avons opté pour les coques cylindriques entrecoupées à angle droit. Avec ce modèle, les charges seront portées par les voûtes grâce aux forces membranaires. A la croisée de 2 voûtes, les forces membranaires se joignent pour ensuite se traduire sous forme de charge s'exerçant sur un arc diagonal qui, à son tour, transfère cette charge à la fondation.

3-1 - Idéalisation de la voûte :



* équation de la surface $z = \frac{y^2}{h_2} - \frac{x^2}{h_1}$

* $2a = 36 \text{ m}$ $a = 18 \text{ m}$

* $2b = 46 \text{ m}$ $b = 23 \text{ m}$

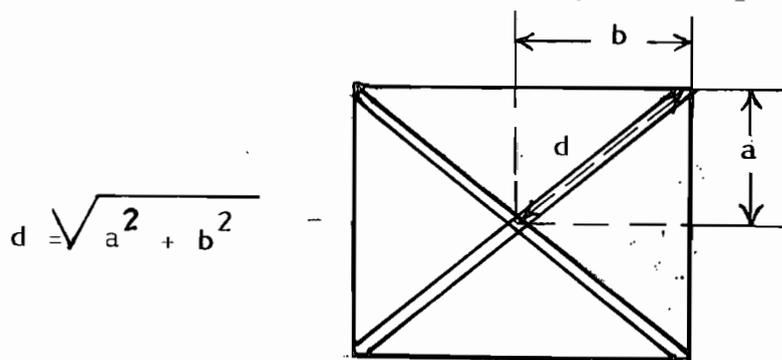
* $h_1 = \frac{a^2}{c_1}$ avec $c_1 = 0$ $h_1 = \infty$

* $h_2 = \frac{b^2}{c_2}$ avec $c_2 = 11 \text{ m}$

* $\phi = 0^\circ$

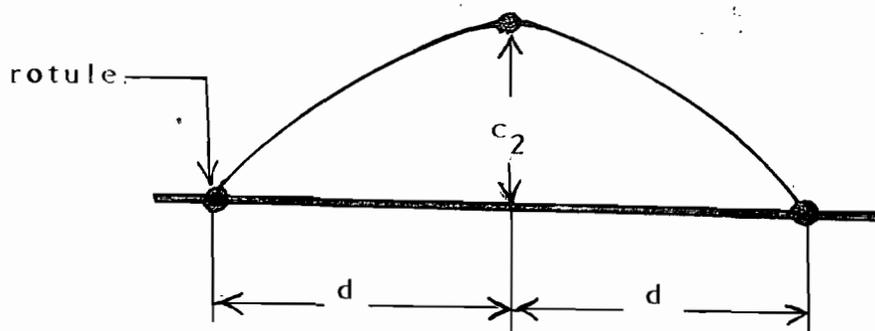
* $\Theta = \Theta$

3-2 - Idéalisisation de l'arc



toiture : vue en plan

figure 4



arc trirotulé

figure 5

Remarque : L'option de l'arc trirotulé se justifie par le souci d'éliminer la flexion tout au long de celui-ci.

3-4 - Calcul des efforts dans la voûte :

$$z = \frac{y^2}{h_2} - \frac{x^2}{h_1}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{h_1} ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{h_2} ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

L'équation (10) devient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{2}{h_2} \right) - 2(0) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(-\frac{2}{h_1} \right) = q$$

$h_1 = \infty \quad \text{car} \quad c_1 = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(-\frac{2}{h_2} \right) = q \quad (12)$$

Puisque nous avons une seule charge verticale, alors $\bar{p}_x = \bar{p}_y = 0$. Ceci implique, en nous basant sur l'équation (11) que $q = -\bar{p}_z$.

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(-\frac{2}{h_2} \right) = -\bar{p}_z$$

3-4-1 - Cas de la charge permanente (poids propre)

Nous soulignons que pour le cas de cette charge $\bar{p}_z \neq$ constant.

En effet, l'hypothèse d'une charge uniforme s'exerçant au niveau de la projection horizontale ne peut être considérée car l'aire de la coque projetée près des supports est beaucoup plus grande qu'au sommet. Donc nous ne pourrions pas supposer que la charge permanente sera uniformément distribuée dans le plan horizontal.

Compte tenu de cette remarque, nous avons choisi un chargement de type sinusoïdal, qui non seulement décrit bien le modèle, mais nous permet d'obtenir une simplification de la solution de l'équation (12).

$$q = -\bar{p}_{z0} \left(k_1 + \cos \frac{\pi y}{2b} \right) \quad (13)$$

avec \bar{p}_{z0} = charge de surface au sommet (kN/m²).

$$k_1 = \sqrt{1 + (2c_2/b^2)}$$

$$k_2 = 1 - k_1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \times \frac{2}{h_2} = \bar{p}_{z0} \left(k_1 + k_2 \cos \frac{\pi y}{2b} \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \bar{p}_{z0} h_2 \left(k_1 + k_2 \cos \frac{\pi y}{2b} \right)$$

En intégrant 2 fois par rapport à x, nous obtenons :

$$F = -\frac{1}{4} \bar{p}_{z0} \left[x^2 k_1 + (a-x)^2 k_2 \cos \frac{\pi y}{2b} \right] \quad (14)$$

Calculons maintenant \bar{N}_x , \bar{N}_y , et \bar{N}_{xy} sachant que $\bar{p}_x = \bar{p}_y = 0 \rightarrow$
d'après les équations (7), (8), (9) que :

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \quad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} ; \quad \bar{N}_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

En déterminant donc les dérivées secondes de F, nous obtiendrons les valeurs de \bar{N}_x , \bar{N}_y , \bar{N}_{xy} .

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\pi^2 \bar{p}_{z0} h_2}{16} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 k_2 \cos \frac{\pi y}{2b} \quad (15)$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\bar{p}_{z0} h_2}{2} k_1 \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \cos \frac{\pi y}{2b}\right) \quad (16)$$

$$\bar{N}_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\pi \bar{p}_{z0} h_2}{4} \left(\frac{a}{b}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right) k_2 \sin \frac{\pi y}{2b} \quad (17)$$

Remarque :

Nous constatons que si $x = a$ alors $N_x = 0$ et $N_{xy} = 0$; ce qui confirme que nous avons coque membrane parfaite, car c'est une telle coque qui assure simultanément ces 2 conditions sur ces rives : $N_x = 0$ et $N_{xy} = 0$

Connaissant \bar{N}_x , \bar{N}_y , \bar{N}_{xy} , nous pouvons facilement calculer N_x , N_y , N_{xy} à partir des équations (1), (2) et (3) :

$$\bar{N}_x = N_x \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \quad \rightarrow \quad N_x = \bar{N}_x \frac{\cos \theta}{\cos \phi}$$

$$\bar{N}_y = N_y \frac{\cos \theta}{\cos \phi} \quad \rightarrow \quad N_y = \bar{N}_y \frac{\cos \phi}{\cos \theta}$$

$$\bar{N}_{xy} = N_{xy}$$

Les données géométriques sont :

$$\phi = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos \phi = 1$$

et

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2y/h_2)^2}}$$

Application numérique :

* Pour la voûte n° 1 :

$$a = 18 \text{ m}$$

$$b = 23 \text{ m}$$

$$c_2 = 11 \text{ m}$$

$$\bar{p}_{z0} = 2,873 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{a}{b} = 0,78 \quad ; \quad h_2 = \frac{b^2}{c_2} = 48,091 \text{ m}$$

$$k_1 = \sqrt{1 + (2c_2/b)^2} = 1,384$$

$$k_2 = 1 - k_1 = -0,384$$

* Pour la voûte n° 2 :

$$a = 23 \text{ m}$$

$$b = 18 \text{ m}$$

$$c_2 = 11 \text{ m}$$

$$\bar{p}_{z0} = 2,873 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{a}{b} = 1,28 \quad ; \quad k_1 = 1,579 \quad ; \quad k_2 = 0,579 \quad ; \quad h_2 = 29,454 \text{ m}$$

Les efforts calculés dans les voûtes n° 1 et n° 2 sont respectivement consignés dans les tableaux n° 7 et n° 8.

Tableau N° 7 : présentant les valeurs de N_x , N_y , et N_{xy} pour la voûte n° 1 dans le cas de la charge permanente.

y/b	x/a					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

cos Θ						
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2		0,982	0,982	0,982	0,982	0,982
0,4			0,934	0,934	0,934	0,934
0,6				0,867	0,867	0,867
0,8					0,794	0,794
1,0						0,723

N_x (kN/m)						
0,0	-20,035	-12,822	-7,212	-3,206	-0,801	0,000
0,2		-11,978	-6,737	-2,994	-0,749	0,000
0,4			-5,450	-2,422	-0,606	0,000
0,6				-1,634	-0,408	0,000
0,8					-1,197	0,000
1,0						0,000

N_y (kN/m)						
0,0	-69,082	-69,082	-69,082	-69,082	-69,082	-69,082
0,2		-71,657	-71,657	-71,657	-71,657	-71,657
0,4			-79,388	-79,388	-79,388	-79,388
0,6				-92,253	-92,253	-92,253
0,8					-110,057	-110,057
1,0						-132,288

N_{xy} (kN/m)						
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2		-8,058	-6,043	-4,029	-2,014	0,000
0,4			-11,495	-7,633	-3,832	0,000
0,6				-10,548	-5,274	0,000
0,8					-6,120	0,000
1,0						0,000

Tableau n° 8 : présentant les valeurs de N_x , N_y et N_{xy} pour la voûte n° 2 dans le cas de la charge permanente.

y/b	x/a					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

cos Θ

0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2		0,971	0,971	0,971	0,971	0,971
0,4			0,898	0,898	0,898	0,898
0,6				0,806	0,806	0,806
0,8					0,715	0,715
1,0						0,693

N_x (kN/m)

0,0	-49,362	-31,592	-17,770	-7,898	-1,974	0,000
0,2		-29,186	-16,417	-7,297	-1,824	0,000
0,4			-12,916	-5,740	-1,435	0,000
0,6				-3,744	-0,934	0,000
0,8					-0,436	0,000
1,0						0,000

N_y (kN/m)

0,0	-42,311	-42,311	-42,311	-42,311	-42,311	-42,311
0,2		-44,792	-44,792	-44,792	-44,792	-44,792
0,4			-52,307	-52,307	-52,307	-52,307
0,6				-64,996	-64,996	-64,996
0,8					-82,859	-82,859
1,0						-105,517

N_{xy} (kN/m)

0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2		-12,160	-9,120	-6,080	-3,040	0,000
0,4			-17,347	-11,564	-5,782	0,000
0,6				-15,917	-7,959	0,000
0,8					-9,356	0,000
1,0						0,000

3-4-2 - Cas de la surcharge

Pour le cas de la surcharge, il est possible d'admettre une distribution uniforme de la surcharge sur la surface de projection horizontale. Ce qui implique pour l'équation (12) :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{2}{h_2} \right) = q = -\bar{p}_z = \text{constante}$$

Pour cette équation, il existe plus d'une valeur de F qui pourrait être admise comme solution, car tout dépend de notre choix de support (voir réf. (1), p.264-- 265).

Etant donné qu'avec notre modèle, la surcharge sera portée par les bandes de paraboles parallèles au plan vertical yz, et supportées à leur base $y = \pm b$, la valeur de F qui convient à ce choix de support est :

$$F = \frac{1}{4} \bar{p}_z h_2 x^2 \quad (\text{voir réf. (1), p. 264 - 265}).$$

Ainsi, d'après les équations (7), (8), (9), nous aurons pour les efforts :

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Rightarrow \bar{N}_x = 0$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \bar{p}_z h_2$$

$$\bar{N}_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\checkmark \text{ Si } \bar{N}_x = 0 \quad \text{alors} \quad N_x = N_x \frac{\cos\phi}{\cos\theta} = 0$$

$$\text{Si } \bar{N}_y = -\frac{1}{2} \bar{p}_z h_2 \quad \text{alors} \quad \bar{N}_y = \left(-\frac{1}{2} \bar{p}_z h_2 \right) \times \frac{\cos\phi}{\cos\theta} = \left(-\frac{1}{2} \bar{p}_z h_2 \right) \times \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\text{Si } \bar{N}_{xy} = 0 \quad \text{alors} \quad \bar{N}_{xy} = N_{xy} = 0$$

Application numérique : calcul de $N_y = (-\frac{1}{2} \bar{p}_z h_2) / \cos \Theta$

$\bar{p}_z = 1,7 \text{ kN/m}^2$. pour la voûte n° 1 : $h_2 = 48,091\text{m}$

. pour la voûte n° 2 : $h_2 = 29,454\text{m}$

Tableau n° 9 : présentant les valeurs de N_x , N_y , et N_{xy} pour la voûte n° 1 dans le cas de la surcharge.

y/b	x/a					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

cos Θ

0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2		0,982	0,982	0,982	0,982	0,982
0,4			0,934	0,934	0,934	0,934
0,6				0,867	0,867	0,867
0,8					0,794	0,794
1,0						0,723

N_x (kN/m)

$\forall y/b^*$	0,000
-----------------	-------

N_y (kN/m)

0,0	-40,877	-40,877	-40,877	-40,877	-40,877	-40,877
0,2		-41,627	-41,627	-41,627	-41,627	-41,627
0,4			-43,766	-43,766	-43,766	-43,766
0,6				-47,148	-47,148	-47,148
0,8					-51,483	-51,483
1,0						-56,538

N_{xy} (kN/m)

$\forall y/b$	0,000
---------------	-------

* Le symbole $\forall y/b$ signifie quelque soit y/b

Tableau N° 10 : présentant les valeurs de N_x , N_y et N_{xy} pour la voûte n° 2 dans le cas de la surcharge.

y/b	x/a					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,2

cos Θ

0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2		0,971	0,971	0,971	0,971	0,971
0,4			0,898	0,898	0,898	0,898
0,6				0,806	0,806	0,806
0,8					0,715	0,715
1,0						0,633

N_x (kN/m)

\forall y/b	0,000
---------------	-------

N_y (kN/m)

0,0	-25,036	-25,036	-25,036	-25,036	-25,036	-25,036
0,2		-25,784	-25,784	-25,784	-25,784	-25,784
0,4			-27,880	-27,880	-27,880	-27,880
0,6				-31,062	-31,062	-31,062
0,8					-35,015	-35,015
1,0						-39,551

N_{xy} (kN/m)

\forall y/b	0,000
---------------	-------

Remarque :

S'agissant des sollicitations agissant sur la toiture, nous n'avons pris en compte que le poids propre (sollicitation principale des structures en coques) et la surcharge.

Le vent n'a pas été considéré dans notre étude pour 2 raisons : d'une part au Sénégal, les vitesses de vent ne sont pas importantes en général, d'autre part, l'étude aurait demandé de supposer plusieurs cas qui auraient allongé le temps de notre étude qui est déjà très insuffisant.

Cependant, nous reconnaissons que pour une analyse plus exhaustive, nous devrions non seulement tenir en compte le vent, mais aussi, étudier certains effets inévitables, tels que le retrait, le fluage du béton et les variations de température.

3-5 - Calcul des efforts dans l'arc :

S'agissant de l'arc, nous partons de l'arc-plan tel qu'il est montré dans la figure 6. Afin de connaître les forces agissant dans le plan de l'arc, nous ramènerons les forces exprimés dans le système de vecteurs unitaires (\vec{t}_x, \vec{t}_y) à celui de (\vec{P}_x, \vec{P}_y) .

Pour cela :

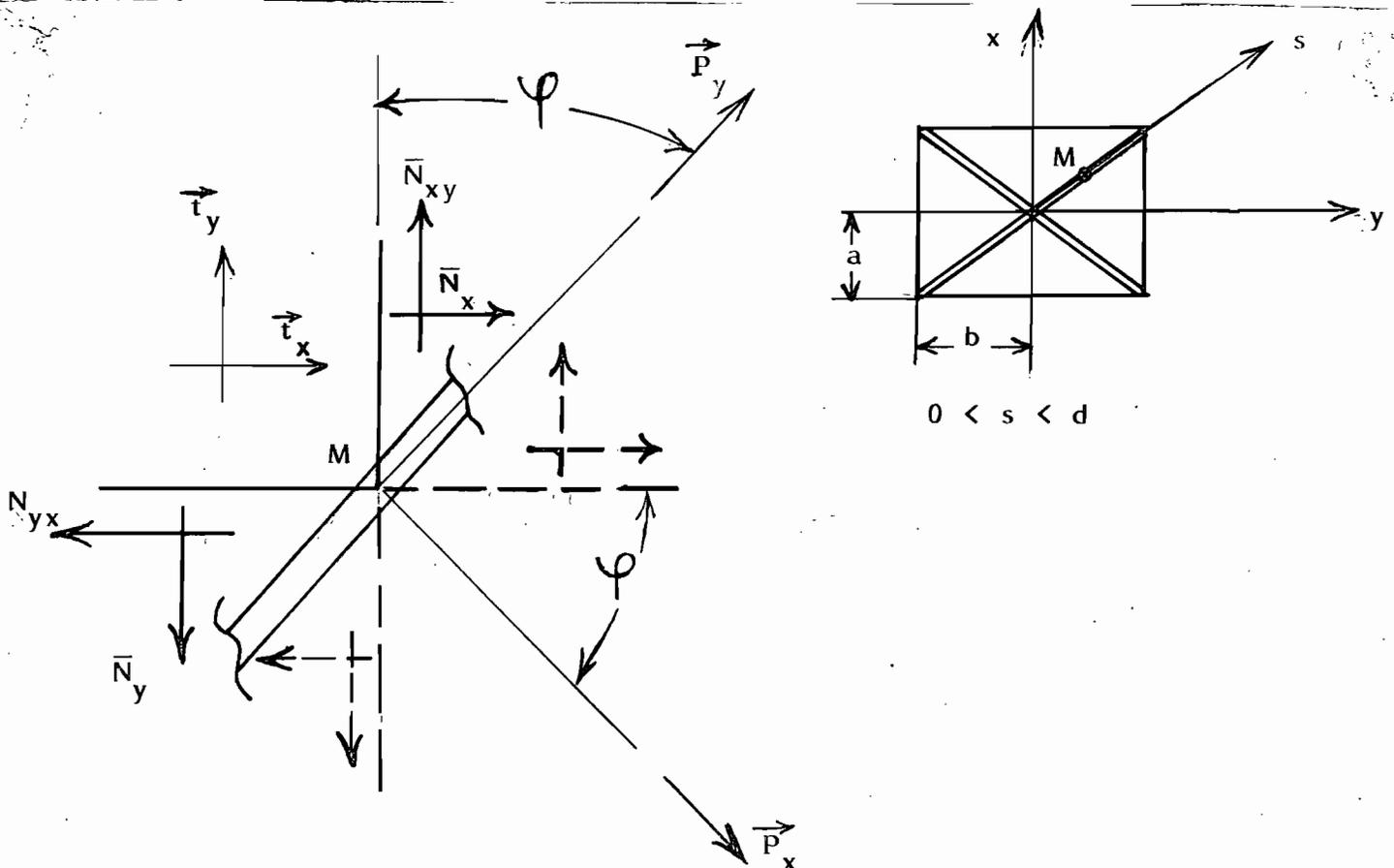


figure 6

Exprimons les efforts suivant les 2 systèmes de coordonnées choisis (\vec{t}_x, \vec{t}_y) et (\vec{P}_x, \vec{P}_y) .

$$\bar{N}_{xy} \vec{t}_y + \bar{N}_x \vec{t}_x = N_{xy} \vec{P}_y + N_x \vec{P}_x \quad (18)$$

$$\bar{N}_{yx} \vec{t}_x + \bar{N}_y \vec{t}_y = N_{yx} \vec{P}_x + N_y \vec{P}_y \quad (19)$$

Utilisons les propriétés du produit scalaire pour relier les vecteurs unitaires $\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{P}_x, \vec{P}_y$.

$$\vec{t}_x \cdot \vec{P}_x = \cos \varphi$$

$$\vec{t}_x \cdot \vec{P}_y = \sin \varphi$$

$$\vec{t}_y \cdot \vec{P}_x = -\sin \varphi$$

$$\vec{t}_y \cdot \vec{P}_y = \cos \varphi$$

En faisant le produit scalaire de \vec{P}_x avec l'équation (18), nous obtenons :

$$\bar{N}_{xy} (-\sin \varphi) + \bar{N}_x \cos \varphi + N_{xy} \times (0) + N_x \times (1)$$

$$\text{d'où : } N_x = \bar{N}_x \cos \varphi - \bar{N}_{xy} \sin \varphi \quad (20)$$

En faisant le produit scalaire de \vec{P}_y avec l'équation (18), nous obtenons :

$$\bar{N}_{xy} (\cos \varphi) + \bar{N}_x (\sin \varphi) = N_{xy} \times (1) + N_x \times (0)$$

$$\text{d'où : } N_{xy} = \bar{N}_x \sin \varphi + \bar{N}_{xy} \cos \varphi \quad (21)$$

En faisant le produit scalaire de \vec{P}_x avec l'équation (19), nous obtenons :

$$\bar{N}_{yx} (\cos \varphi) + \bar{N}_y (-\sin \varphi) = N_{xy} (1) + N_y (0)$$

$$\text{d'où : } N_{yx} = \bar{N}_{yx} \cos \varphi - \bar{N}_y \sin \varphi \quad (22)$$

En faisant le produit scalaire de \vec{P}_y avec l'équation (19), nous obtenons :

$$\bar{N}_{yx} (\sin \varphi) + \bar{N}_y (\cos \varphi) = N_{yx} (0) + N_y (1)$$

$$\text{d'où : } N_y = \bar{N}_{yx} \sin \varphi + \bar{N}_y \cos \varphi \quad (23)$$

Calculons les efforts résultants suivant \vec{P}_x et \vec{P}_y :

$$F_{\vec{P}_y} = N_{xy} + N_y = \bar{N}_x \sin \varphi + \bar{N}_{xy} \cos \varphi + \bar{N}_{yx} \sin \varphi + \bar{N}_y \cos \varphi$$

$$F_{\vec{P}_x} = N_x + N_{yx} = \bar{N}_x \cos \varphi = \bar{N}_{xy} \sin \varphi + \bar{N}_{yx} \cos \varphi - \bar{N}_y \sin \varphi$$

$$F_{\vec{P}_y} = \bar{N}_x \sin \varphi + \bar{N}_y \cos \varphi + \bar{N}_{xy} (\cos \varphi - \sin \varphi) \quad (24)$$

$$F_{\vec{P}_x} = \bar{N}_x \cos \varphi - \bar{N}_y \sin \varphi + \bar{N}_{xy} (\cos \varphi - \sin \varphi) \quad (25)$$

Il faut souligner que $F_{\vec{P}_x}$ et $F_{\vec{P}_y}$ qui ont été calculées représentent les résultantes des efforts provenant d'une seule voûte au point quelconque M.

En procédant de la même manière, nous pouvons aussi évaluer les efforts résultants provenant de la voûte adjacente (en pointillé) au même point M.

Désignons par \bar{N}'_x , \bar{N}'_y et \bar{N}'_{xy} les efforts de membrane de la 2e voûte qui sont obtenus par projection des efforts réels N'_x , N'_y et N'_{xy} dans le plan horizontal.

A partir des équations (20), (21), (22), (23), (24) et (25), nous pouvons écrire :

$$N'_x = \bar{N}'_x \cos \varphi - \bar{N}'_{xy} \sin \varphi$$

$$N'_{xy} = \bar{N}'_x \sin \varphi + \bar{N}'_{xy} \cos \varphi$$

$$N'_{yx} = -\bar{N}'_y \sin \varphi + \bar{N}'_{yx} \cos \varphi$$

$$N'_y = \bar{N}'_y \cos \varphi + \bar{N}'_{yx} \sin \varphi$$

$$F_{\vec{P}_y} = N'_{xy} + N'_y = \bar{N}'_x \sin \varphi + \bar{N}'_y \cos \varphi + \bar{N}'_{xy} (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

$$F_{\vec{P}_x} = N'_x + N'_{yx} = \bar{N}'_x \cos \varphi - \bar{N}'_y \sin \varphi + \bar{N}'_{xy} (\cos \varphi - \sin \varphi)$$

Finalement en tenant compte simultanément des efforts des 2 voûtes adjacentes à l'arc, nous aurons au total :

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F}_{\vec{P}_y} = \vec{F}_{\vec{P}_y} + \vec{F}'_{\vec{P}_y} = (\bar{N}_x + \bar{N}'_x) \sin \varphi + (\bar{N}_y + \bar{N}'_y) \cos \varphi + \\ + (\bar{N}_{xy} + \bar{N}'_{xy}) (\cos \varphi + \sin \varphi) \end{aligned} \quad (26)$$

S'agissant des forces dirigées suivant \vec{P}_x , leur équilibre exigera que les efforts provenant des 2 voûtes adjacentes se compensent mutuellement.

Connaissant les relations reliant \bar{N}_x et N_x , \bar{N}_y et N_y et \bar{N}_{xy} et N_{xy} (voir équations (1), (2) et (3)), nous pourrons donc connaître en chaque point les efforts réels qui règneront dans l'arc.

Remarque : pour simplifier l'écriture, nous remplacerons $\Sigma \vec{F}_{\vec{P}_y}$ par F_h .

F_h a été calculé suivant le cheminement ci-dessous :

- 1 - calcul de \bar{N}_x , \bar{N}_y et \bar{N}_{xy}
- 2 - calcul de \bar{N}'_x , \bar{N}'_y , et \bar{N}'_{xy}
- 3 - calcul de $(\bar{N}_x + \bar{N}'_x)$, $(\bar{N}_y + \bar{N}'_y)$ et de $(\bar{N}_{xy} + \bar{N}'_{xy})$
- 4 - calcul de F_h à l'aide de l'équation (26).

(Les résultats sont consignés aux tableaux n°s 11, 12, 13 et 14).

Application numérique :

1ère étape : calcul de \bar{N}_x , \bar{N}_y et \bar{N}_{xy} (voir tableau N° 11)

Tableau N° 11 : les valeurs de \bar{N}_x , \bar{N}_y et \bar{N}_{xy}

y/b	x/a					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

cos θ						
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2		0,982	0,982	0,982	0,982	0,982
0,4			0,934	0,934	0,934	0,934
0,6				0,867	0,867	0,867
0,8					0,794	0,794
1,0						0,723

\bar{N}_x (kN/m)						
0,0	-20,035	-12,822	-7,212	-3,206	-0,801	0,000
0,2		-12,195	-6,860	-3,048	-0,762	0,000
0,4			-5,835	-2,593	-0,648	0,000
0,6				-1,884	-0,593	0,000
0,8					-0,248	0,000
1,0						0,000

\bar{N}_y (kN/m)						
0,0	-109,959	-109,959	-109,959	-109,959	-109,959	-109,959
0,2		-111,245	-111,245	-111,245	-111,245	-111,245
0,4			-115,026	-115,026	-115,026	-115,026
0,6				-120,861	-120,861	-120,861
0,8					-128,263	-128,263
1,0						-136,521

\bar{N}_{xy} (kN/m)						
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2		-8,058	-6,043	-4,029	-2,014	0,000
0,4			-11,495	-7,663	-3,832	0,000
0,6				-10,548	-5,274	0,000
0,8					-6,120	0,000
1,0						0,000

2e étape : Calcul de \bar{N}'_x , \bar{N}'_y et \bar{N}'_{xy} (voir tableau N° 12)

Tableau n° 12 : les valeurs de \bar{N}'_x , \bar{N}'_y et \bar{N}'_{xy}

y/b	x/a					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

cos θ

0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2		0,971	0,971	0,971	0,971	0,971
0,4			0,898	0,898	0,898	0,898
0,6				0,806	0,806	0,806
0,8					0,715	0,715
1,0						0,623

\bar{N}'_x (kN/m)

0,0	-49,362	-31,592	-17,770	-7,898	-1,974	0,000
0,2		-30,046	-16,901	-7,511	-1,878	0,000
0,4			-14,377	-6,390	-1,597	0,000
0,6				-4,642	-1,161	0,000
0,8					-0,606	0,000
1,0						0,000

\bar{N}'_y (kN/m)

0,0	-67,347	-67,347	-67,347	-67,347	-67,347	-67,347
0,2		-68,529	-68,529	-68,529	-68,529	-68,529
0,4			-72,008	-72,00	-72,008	-72,008
0,6				-77,423	-77,423	-77,423
0,8					-84,280	-84,280
1,0						-91,828

\bar{N}'_{xy} (kN/m)

0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2		-12,160	-9,120	-6,080	-3,040	0,000
0,4			-17,347	-11,564	-5,782	0,000
0,6				-15,917	-7,959	0,000
0,8					-9,356	0,000
1,0						0,000

3e étape : calcul $(\bar{N}_x + \bar{N}'_x)$; $(\bar{N}_y + \bar{N}'_y)$; $(\bar{N}_{xy} + \bar{N}'_{xy})$

Tableau n° 13 :

$\frac{y}{b}$	s/d					
b	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

$(\bar{N}_x + \bar{N}'_x)$ (kN/m)

0,0	-69,397					
0,2		-42,241				
0,4			-20,212			
0,6				-6,526		
0,8					-9,849	
1,0						0,000

$(\bar{N}_y + \bar{N}'_y)$ (kN/m)

0,0	-177,306					
0,2		-179,774				
0,4			-187,034			
0,6				-198,284		
0,8					-212,543	
1,0						-228,349

$(\bar{N}_{xy} + \bar{N}'_{xy})$ (kN/m)

0,0	0					
0,2		-20,218				
0,4			-28,842			
0,6				-26,465		
0,8					-15,476	
1,0						0,000

4e étape :

Calcul de F_h à l'aide l'équation (26) :

$$* \tan \varphi = \frac{a}{b} \quad (27)$$

* Connaissant φ , nous pouvons calculer les valeurs de F_h qui sont les résultats des efforts horizontaux agissant sur l'arc.

* A partir de F_h et de l'équation de l'arc, nous pouvons évaluer à l'aide de l'équation de sa tangente, les efforts verticaux agissant sur l'arc de la manière suivante :

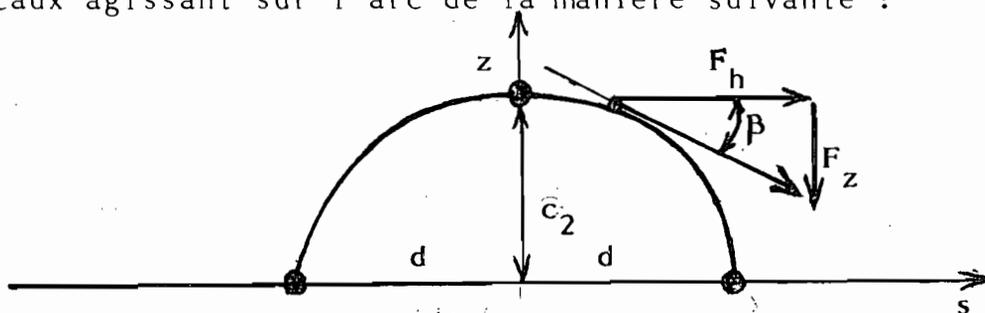


Figure 7 (arc elliptique)

$$\frac{z^2}{c_2^2} + \frac{s^2}{d^2} = 1$$

$$z = c_2 \left(1 - \frac{s^2}{d^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan \beta = \frac{dz}{ds} = c_2 \times \frac{1}{2} \times -\frac{2s}{d^2} \times \left(1 - \frac{s^2}{d^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan \beta = \frac{dz}{ds} = -\frac{c_2}{d^2} \times \frac{s}{1 - \frac{s^2}{d^2}} \quad (28)$$

$$\tan \beta = \frac{F_z}{F_h} \quad F_z = F_h \cdot \tan \beta \quad (29)$$

N.B :

soit $c = \text{constante}$

$$\text{si } \frac{x}{a} = c \quad \text{et} \quad \frac{y}{b} = c$$

$$\text{alors } s = x^2 + y^2 = c^2 a^2 + c^2 b^2 = c^2 d$$

$$\text{donc } s = c \cdot d \quad (30)$$

$$\text{ex : } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 0,2 \quad \text{alors } s = 0,2 d$$

Tableau n° 14 : présentant les valeurs de F_z , F_h , et $\tan \beta$ en fonction du rapport s/d .

$\frac{s}{d}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\tan \beta$	0	-0,0785	-0,1793	-0,3531	-0,8370	$-\infty$
$F_h(\text{kN/m})$	-182,399	-195,989	-200,236	-197,324	-189,627	-179,827
$F_z(\text{kN/m})$	0	15,385	35,902	69,675	158,718	$+\infty$

Rappels :

$$\bullet F_h = (\bar{N}_x + \bar{N}'_x) \sin \varphi + (\bar{N}_x + \bar{N}'_y) \cos \varphi + (\bar{N}_{xy} + \bar{N}'_{xy}) (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

$$\bullet \tan \varphi = \frac{a}{b} = \frac{18}{23} = 0,783 \Rightarrow \varphi = 38^\circ$$

$$\cdot \sin \varphi = 0,616$$

$$\cdot \cos \varphi = 0,788$$

$$\cdot \cos \varphi + \sin \varphi = 1,044$$

$$\cdot \cos \varphi - \sin \varphi = 0,171$$

$$\tan \beta = -\frac{c_2}{d^2} \times \frac{s}{1 - \frac{s^2}{d^2}}$$

$$\text{avec } c_2 = 11 \text{ m} ; ; d = \sqrt{18^2 + 23^2} = 29,206 \text{ m}$$

Commentaire des résultats du tableau n° 14 :

L'examen de ces résultats montre que l'arc elliptique présente des efforts verticaux infinis au niveau de sa base.

Ce qui signifie physiquement que les efforts seront trop grands aux rives.

En conséquence, il sera abandonné, bien qu'il satisfasse les exigences d'ordre architectural, qui sont moins déterminantes que celles de nature structurale.

Ainsi, nous avons repris l'étude de l'arc parabolique en essayant tout d'abord de respecter les contraintes architecturales (pour cela nous avons procédé à des modifications intérieures dans l'optique de rendre l'infrastructure plus fonctionnelle), pour ensuite suivre son comportement au point de vue structural (voir page 42).

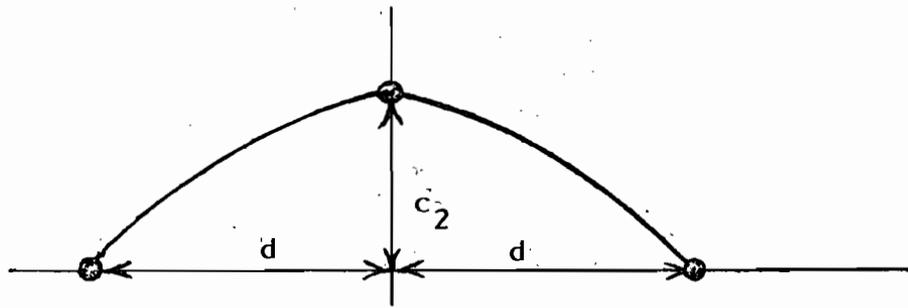


Figure 8 (arc parabolique)

$$z = -\frac{c_2}{d^2} s^2 + c_2$$

$$\tan \beta = \frac{dz}{ds} = -\frac{2c_2}{d^2} s$$

Tableau N° 15 : présentant les valeurs de F_h , F_z , et $\tan \beta$ en fonction du rapport s/d .

s/d	0,000	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\tan \beta$	0,000	-0,151	-0,301	-0,452	-0,603	-0,753
F_h (kN/m)	-182,399	-195,989	-200,236	-197,327	-189,627	-179,826
F_z (kN/m)	0,000	29,516	60,331	89,192	114,269	135,463

Commentaires des résultats du tableau N° 15 :

Les résultats du tableau n° 8 confirment que l'arc parabolique donne un comportement structural meilleur que celui elliptique. Ceci était prévisible car la parabole est la courbe idéale pour la transmission des contraintes de compression.

Calcul des forces de Poussée dans l'arc :

Les forces horizontales et verticales agissant dans le plan de l'arc sont déterminées par intégration de F_h et F_z le long de l'arc.

$$H = \int_0^S F_{.h} ds = \frac{q_{ab}}{d^2} S^2 \quad (31)$$

$$V = \int_0^S F_{.z} ds = \frac{q_{ab}}{2c_2} \cdot S \quad (32)$$

Avec H = force horizontale ; V = force verticale

et $0 \leq S \leq d$.

Remarque : Concernant les développements mathématiques relatifs au calcul de poussée, il faudra consulter la référence (1) à la page 30 .

Tableau n° 16 . présentant les valeurs de H et V en fonction du rapport S/d.

S/d	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
H	0	-611,830	-1199,440	-1762,830	-2302,010	-2816,970
V	0	92,174	361,399	796,732	1387,220	2121,930

IV - DESIGN :

4-1 - Dimensionnement des voûtes :

A partir des résultats de l'analyse structurale, nous remarquons que les efforts de compression sont prédominants dans les voûtes ; les efforts de cisaillements sont très faibles et les efforts de traction inexistants.

Partant de ce constat, le dimensionnement des voûtes se ramènera au design de sections comprimées.

Les calculs de résistance se font à partir des contraintes principales qui sont déterminées en grandeur et en direction.

Etant donné que les contraintes principales négatives vont être prédominantes, celles-ci devront être absorbées par la compression du béton.

Calculs :

4-1-1 - Calcul des contraintes principales (en grandeur et en direction).

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (33)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (34)$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (35)$$

Avec σ_1 = plus grande contrainte principale (kN/m²)

σ_2 = plus petite contrainte principale (kN/m²)

σ_x = la contrainte normale sur la facette perpendiculaire à l'axe x.

σ_y = la contrainte normale sur la facette perpendiculaire à l'axe y.

σ_{xy} = la contrainte tangentielle agissant sur chacune des facettes précédemment décrites.

α = angle entre la facette de référence Oy et la facette principale, il est compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre depuis la facette de référence vers la facette principale.

N.B. : pour l'établissement des équations (33), (34) et (35), consulter la référence (11), pages 9 et 10.

En supposant une épaisseur (h) uniforme sur toute la voûte, nous aurons :

$$N_1 = \frac{\sigma_1}{h} = \frac{N_x + N_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} \quad (36)$$

$$N_2 = \frac{\sigma_2}{h} = \frac{N_x + N_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} \quad (37)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2N_{xy}}{N_x - N_y} \quad (38)$$

Avec $\sigma_x = \frac{N_x}{h}$; $\sigma_y = \frac{N_y}{h}$; $\sigma_{xy} = \frac{N_{xy}}{h}$

Application numérique : - voûte n° 1

Tableau n° 17 : présentant les valeurs des efforts principaux N_1 , N_2 et leur orientation (α).

y/b	N_x (kN/m)	N_y (kN/m)	N_{xy} (kN/m)	N_1 (kN/m)	N_2 (kN/m)	α (°)
0,0	-20,035	-109,959	0,000	-20,035	-109,959	0,0
0,2	-11,978		8,058	-11,341	-113,920	-4,5
0,4	-5,450	-123,154	-11,495	-4,338	-124,266	-5,5
0,6	-1,634	-139,401	-10,548	-0,831	-140,203	-4,4
0,8	-1,197	-161,540	6,120	-0,964	-161,773	-2,2
1,0	-0,000	-188,826	0,000	0,000	-188,826	0,0

- Voûte n° 2 :

Tableau n° 18 : présentant les valeurs des efforts principaux N_1 , N_2 , et leur orientation (α).

y/b	N_x (kN/m)	N_y (kN/m)	N_{xy} (kN/m)	N_1 (kN/m)	N_2 (kN/m)	(°)
0,0	-49,362	-67,347	0,000	-49,362	-68,347	0,0
0,2	-29,186	-70,576	-12,160	-25,878	-73,884	-15,2
0,4	-12,916	-80,187	-17,347	-8,706	-84,397	-13,6
0,6	-3,744	96,058	-15,917	-1,077	-98,725	-9,5
0,8	-0,436	-117,874	-9,356	+0,305	-118,614	-4,5
1,0	0,000	-145,068	0,000	0,000	-145,068	0,0

4-1-2 - Calcul de l'épaisseur des voûtes :

Les résultats des tableaux n° 10 et 11 montrent qu'au fur et à mesure que l'on se rapproche des rives, les efforts principaux deviennent de plus en plus importants.

Afin d'avoir une épaisseur uniforme, nous aurons à considérer les efforts principaux des rives comme efforts de design.

D'autre part, en matière de stabilité, nous savons qu'un mince élément structural, quel qu'il soit, peut flamber s'il est soumis à des contraintes de compression ; les voiles minces ne font pas exception à la règle, surtout les surfaces cylindriques.

Ce problème a fait l'objet de nombreuses études théoriques (voir réf. (7), chap. VIII) et empiriques (voir réf. (8) et (9)).

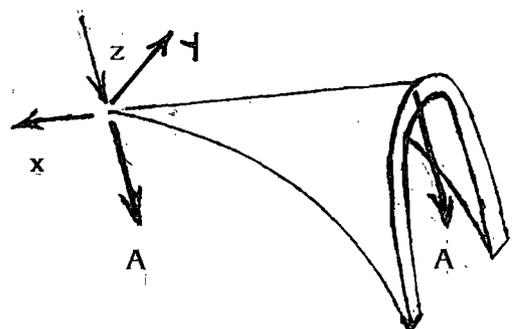
Mais d'une façon générale, s'agissant des voiles cylindriques, il est recommandé de prendre un coefficient de sécurité $\gamma = 3$, pour la prise en compte de ce phénomène (voir réf. (4), page 129 ; ou réf. (5), chap. VII).

Enfin, comme dernière remarque, nous rappelons que la norme ACNOR CAN3-A23.3-M77, dans son article 8.4.6. exige que les pièces soumises à un effort de compression soient calculées en fonction d'une excentricité minimale ($0,1 \times$ épaisseur).

Cependant la faiblesse de notre épaisseur nous a conduit à considérer une excentricité nulle.

Calculs :

Les considérations initiales :



- $N_u = N_{l_{max}}$ (N_u = effort ultime de compression).
- Nous travaillons avec une section transversale d'une largeur égale à 1 m (voir coupe AA).
- La ruine en compression correspondra à l'écrasement du béton ($\epsilon'_c = 0,003$)

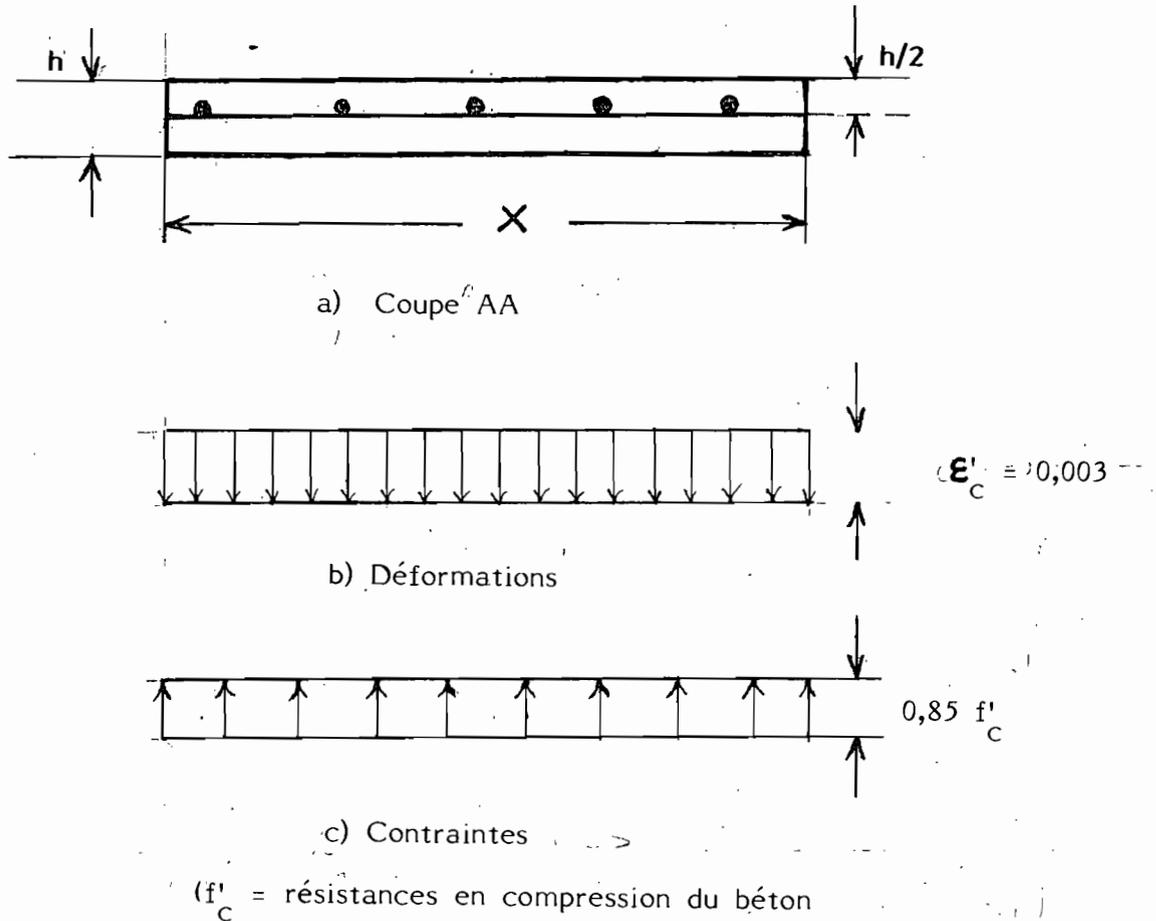


Figure 9

* ? l'épaisseur de la voûte n° 1 : ($N_u = -188,826$ kN/m)
 soit $P_u =$ charge ultime en compression (kN).

$$P_u = N_u \times 1 \rightarrow P_u = 188,826 \times 1 = 188,826 \text{ kN}$$

soit $R =$ la résistance admissible de la section (kN).

$$R = \frac{0,85 f'_c \times (B_l X) \times h}{Y}$$

$$\beta_1 = 0,85 \quad ; \quad f'_c = 30 \text{ MP}_a \quad ; \quad \gamma = 3$$

$$\rightarrow R = \frac{0,85 \times 30 \cdot 10^3 \times (0,85 \times 1) \times h}{3} = 7,225 \cdot 10^3 h$$

La résistance doit être suffisante pour reprendre la charge R :

$$\rightarrow P_u = R$$

$$188,826 = 7,225 \cdot 10^3 h \quad \rightarrow h = 2,62 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 26 \text{ mm}$$

$$\text{d'où} \quad h = 26 \text{ m}$$

* - ? l'épaisseur de la voûte n° 2 : $(N_u = -145,068 \text{ kN/m})$

$$P_u = N_u \times 1 = 145,068 \text{ kN}$$

$$R = 7,225 \cdot 10^3 h$$

$$P_u = R \rightarrow h = 145,068 / 7,225 \cdot 10^3 = 2,00 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 20 \text{ mm}$$

$$\rightarrow h = 20 \text{ mm}$$

Les épaisseurs ainsi obtenues sont petites mais il est utile de souligner que, souvent, l'épaisseur des coques n'est pas fixée uniquement par la résistance, mais ce sont surtout des considérations de construction, de stabilité, et d'enrobage des aciers qui déterminent celle-ci.

En général, l'épaisseur minimale requise pour loger les armatures et les protéger correctement contre la corrosion varie entre 60 mm et 75 mm selon respectivement les Normes AFNOR ou ACI (voir réf (13), page 473).

Ainsi, pour notre structure, nous choisirons une épaisseur $h = 60 \text{ mm}$ pour chaque voûte pour des raisons d'économie.

$$\rightarrow h = 60 \text{ mm} = 6 \text{ cm}$$

4-1-3 - Calcul de l'armature minimale :

Une quantité minimale d'acier est requise aux sections comprimées même si l'analyse structurale révèle que cela ne soit pas nécessaire. Le pourcentage minimal fixé par le Building Code (ACI 138) est de 0,4 % de la section brute (A_g).

soit $A_s =$ aire des armatures

$$A_g = b \cdot h \rightarrow A_g = 1000 \times 60 = 60\,000 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 0,4 \cdot 10^{-2} \times 60\,000 = 240 \text{ mm}^2 / \text{m} \rightarrow 3 \# 10 / \text{m}$$

Etant donné que l'épaisseur de la coque ne dépasse pas 80 mm, il est recommandé de placer une nappe unique d'armatures dans chaque sens. (voir réf. (6); page 23).

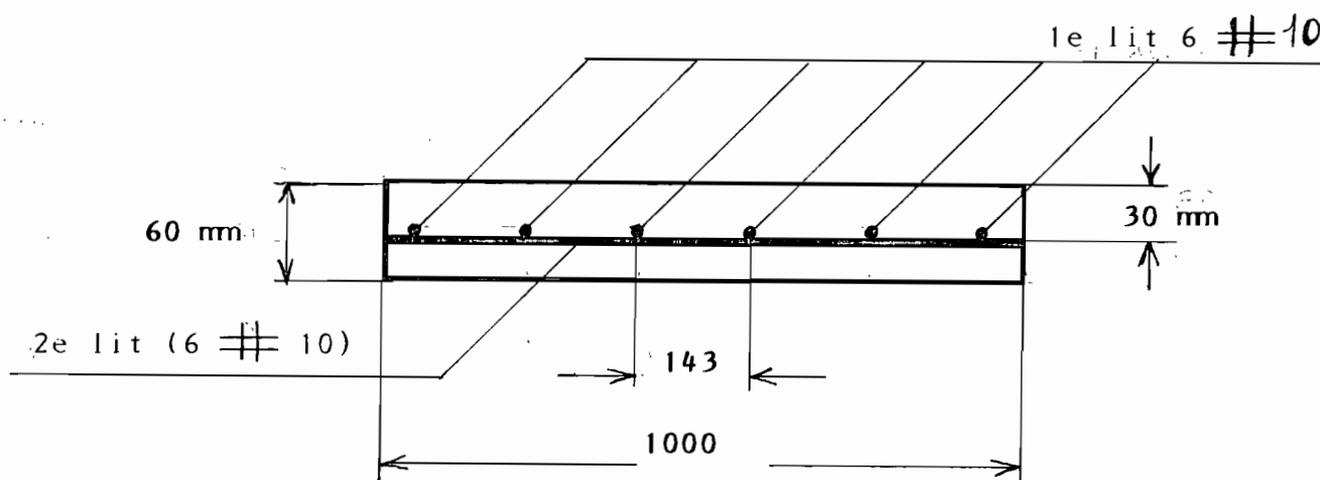


Figure 10

Remarque :

* S'agissant des surfaces développables (telles que celles cylindriques), le ferrailage est souvent réalisé avec des treillis soudés.

Dans cette situation, le diamètre des barres d'acier peut descendre jusqu'à 5 mm, car une telle armature est plus rigide.

En conséquence, nous choisirons le T 5/5 150 x 150.

Concernant le ferrailage des voûtes, il faudra se reporter à la figure n°10.

* Pour l'orientation des armatures, il serait recommandé idéalement de les placer parallèlement aux directions des contraintes principales. Mais la réalisation de cette recommandation exigerait plus de précision et de temps pour la construction.

Ce qui pourrait rendre dispendieux le projet. En plus de cette raison, la Norme ACNOR CAN3-A23.3-M77 dans son article 17.6.4, considère que l'armature est dirigée suivant la ligne de contrainte principale si l'angle entre les 2 directions ne dépasse pas 15°. Pour notre cas, l'angle maximal que nous avons est de 15° (voir tableaux n°s 10 et 11).

En conséquence, nous disposerons perpendiculairement nos armatures suivant les axes x et y.

4-2 - Dimensionnement de l'arc :

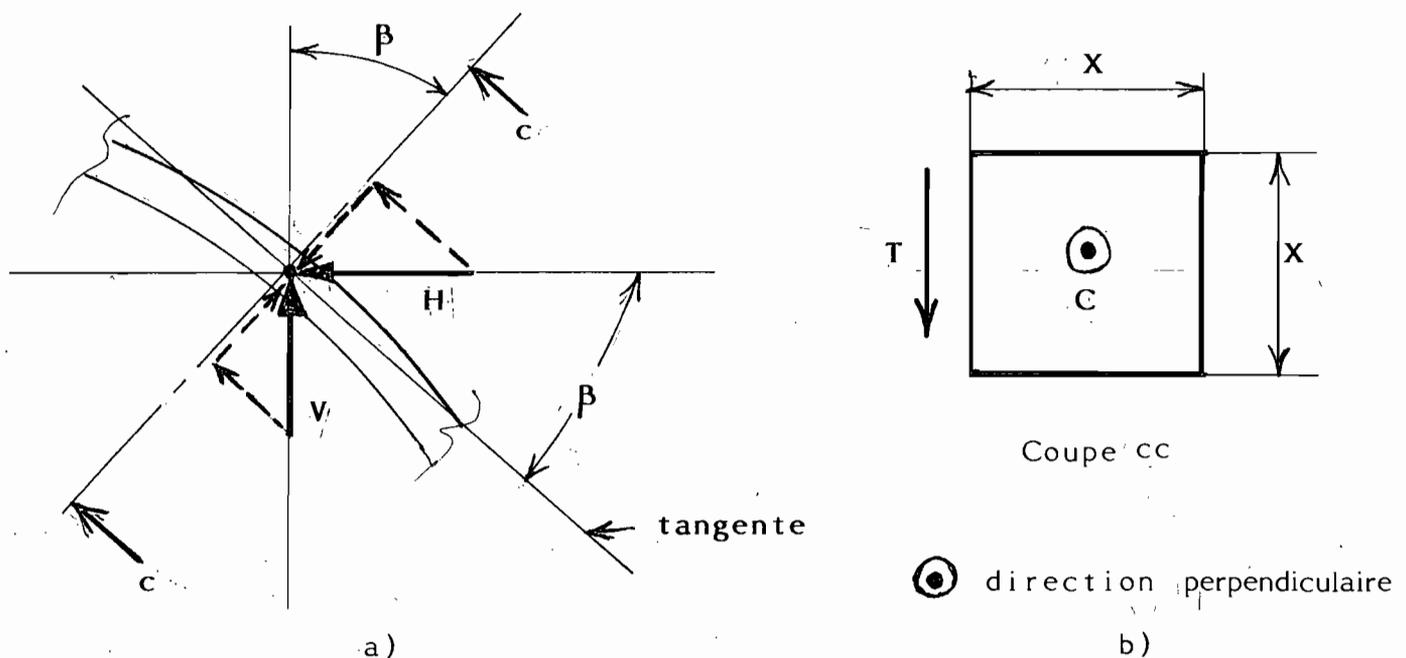


Figure 11

T = force tranchante ou force de cisaillement (kN).

C = force de compression (kN).

$$T = V \cos \beta - H \sin \beta \quad (39)$$

$$C = V \sin \beta + H \cos \beta \quad (40)$$

Calcul de T et C :

Tableau N° 19 : présentant les valeurs de β , T et C en fonction du rapport s/d.

s/d	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
β (°)	0	8,6	16,8	24,3	34,1	37,0
C (kN)	0,000	-618,734	-1252,703	-1934,516	-2687,681	-3526,782
T (kN)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,002

Remarque :

Le moment et l'effort tranchant sont nuls tout au long de l'arc à trois articulations. La sollicitation principale étant la compression, qui augmente du sommet à la base de l'arc, où elle est maximale.

En conséquence l'arc sera dimensionné pour ce type de sollicitation.

4-2-1 - Calculs des sections de l'arc :

Soit P_u = la force ultime (kN),

Soit C_c = la capacité en compression d'une section (kN).

$$P_u = C_c$$

$$P_u = 0,85 f'_c \times (\beta_1 X)$$

avec $f'_c = 30 \text{ MP}_a$ si $\beta_1 = 0,85$

$$\rightarrow P_u = X^2 f'_c (0,85)^2$$

$$\rightarrow X = \sqrt{\frac{P_u}{f'_c (0,85)^2}}$$

Application numérique :

Tableau n° 20 : présentant les valeurs de P_u et X en fonction de s/d .

s/d	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
P_u (kN)	0,000	618,734	1252,703	1934,516	2687,681	3526,742
X (mm)	0,000	169	240	299	352	403

N.B : Pour la dimension de la dernière section ($\frac{s}{d} = 1,0$), Scordelis recommande de choisir 8 fois l'épaisseur de la section pour des raisons d'ordre sécuritaire (voir réf (1), page 267).

Donc nous prendrons $X = 8 \times 60 = 480$ mm pour $\frac{s}{d} = 1,0$.

4-2-2 - Calcul de l'armature minimum :

Comme nous l'avons souligné lors du dimensionnement des voûtes, toute section comprimée devra avoir un taux minimum d'armature de 0,4 %. Cependant pour les sections de l'arc proches des appuis, nous les dimensionnerons avec une excentricité minimale afin de tenir compte de la faible flexion qui peut exister en ces lieux.

S'agissant du calcul des ligatures, nous choisirons un diamètre # 10 et un maximum d'espacement (E).

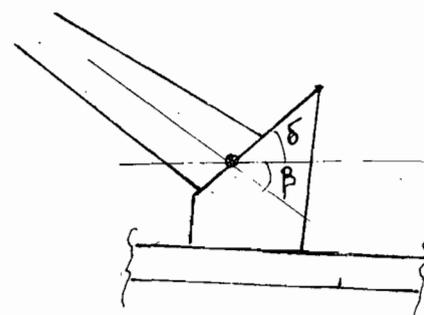
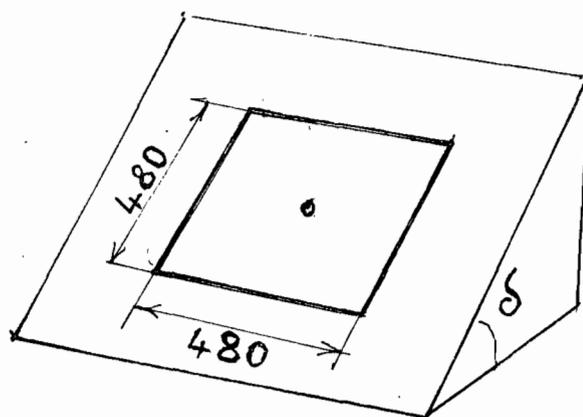
Calculs :

Tableau n° 21 : présentant les valeurs de X , A_g , A_s , ρ et le nombre de barres des sections en fonction de s/d .

s/d	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
X (mm)	100	169	240	299	352	480
A_g (mm ²)	10 000	28561	57600	89401	123904	230400
A_s (mm ²)	40	114,244	230,400	357,604	495,616	921,600
Nombre de barres	4 # 10	4 # 10	4 # 10	4 # 10	4 # 15	4 # 30
ρ (%)	4,0	1,4	0,7	0,5	0,6	1,2
E (mm)	480	480	480	480	480	480

4-3 - Dimensionnement de l'élément de butée :

Figure 12



Lorsque l'arc arrive au sol, il est repris par l'élément de butée dessiné ci-dessus. La forme de ce dernier se justifie par la volonté de suivre l'inclinaison de la section de retombée

.../...

... de l'arc qui fait un angle de δ avec l'horizontale.

L'équilibre de l'organe de butée exige les conditions ci-après :

- 1 - Le moment de renversement autour du point A soit nul.
- 2 - La pression admissible du sol ne doive pas être dépassée.
- 3 - Le glissement entre la fondation et le sol ne soit pas permis.

Commençons par vérifier la dernière condition afin de nous fixer sur la nécessité d'un tirant. Pour qu'il n'y ait pas de glissement, le rapport $= \frac{\text{force horizontale (H)}}{\text{force verticale (V)}}$ doit être inférieur au coefficient de friction du béton sur la terre (dans notre contexte la terre est constituée par du sable $\Rightarrow f = 0,4$).

$$? \frac{H}{V} < f = 0,4$$

$$\frac{2816,970}{2121,930} = 1,3 > f \Rightarrow \text{il y'aura glissement.}$$

Donc un tirant sera nécessaire pour palier au glissement provoqué par la force horizontale $H = 2816,970 \text{ kN}$

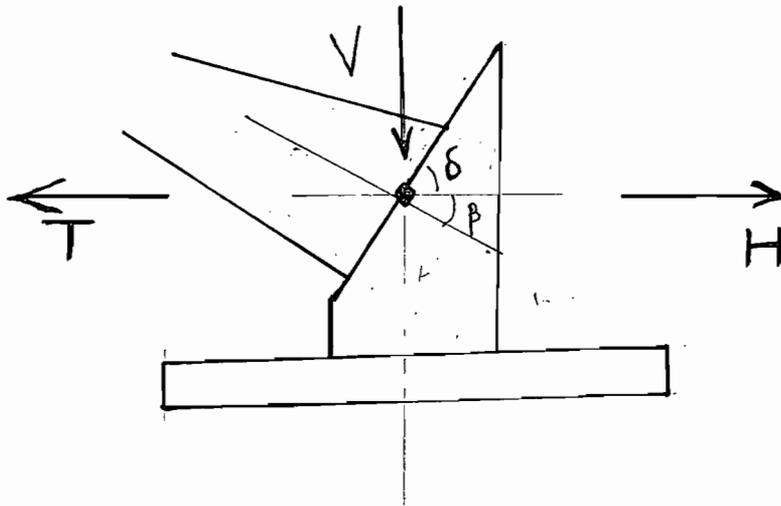


Figure 13

En observant la figure ci-dessus, nous pouvons souligner certaines remarques afin de faciliter la compréhension de notre démarche :

- la force verticale V détermine les dimensions de la fondation ;
- la force horizontale H fixe la section du tirant ;

* Tirant

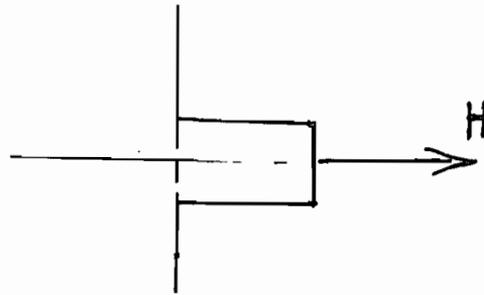


Figure 14

Le tirant est une pièce soumise à la traction simple.

Sachant que dans les calculs la section du béton tendu est négligée, il en résulte que les armatures longitudinales devront équilibrer la force H.

Soit A_s = aire des armatures (mm²)

alors $A_s = \frac{H}{\sigma}$
avec $\sigma = \rightarrow$ contrainte dans les armatures.

Cette relation montre que l'aire des contraintes est inversement proportionnelle à la contrainte correspondant à l'allongement maximal. Ce qui implique que pour des raisons d'économie, nous avons intérêt à choisir σ aussi grand que possible.

Etant donné que la Norme ACNOR nous autorise de prendre jusqu'à 400 MPa pour la limite élastique de l'armature non précontrainte (voir réf. (17), article 7.5), nous choisirons

$$\sigma = 400 \text{ MPa} .$$

Application numérique :

$$H = 2816,930 \text{ kN}$$

$$\sigma = f_y = \text{limite élastique des armatures} = 400 \text{ MPa}$$

$$A_s = \frac{2816,970 \cdot 10^{-3}}{400} = 7042 \text{ mm}^2 \quad 8 \# 35$$

Les armatures ainsi calculées peuvent théoriquement s'allier avec n'importe quelle section de béton. Cependant pour éviter que la pièce ne soit fragile, la section de béton devra vérifier la relation :

$$A_g = \frac{A_s f_y}{f_{ct28}} \quad (\text{voir réf (21)}, \text{ page 167})$$

f_{ct28} = résistance à la rupture en traction moyenne du béton.

$$f_{ct28} = 0,60 \sqrt{f'_c} = 3,29 \text{ MPa}$$

$$\frac{A_s f_y}{f_{ct28}} = \frac{5122 \times 400}{3,29} = 857164 \text{ mm}^2$$

Prenons $A_g = 400 \times 400 = 160\,000 \text{ mm}^2 < 857164 \text{ mm}^2$ (OK)

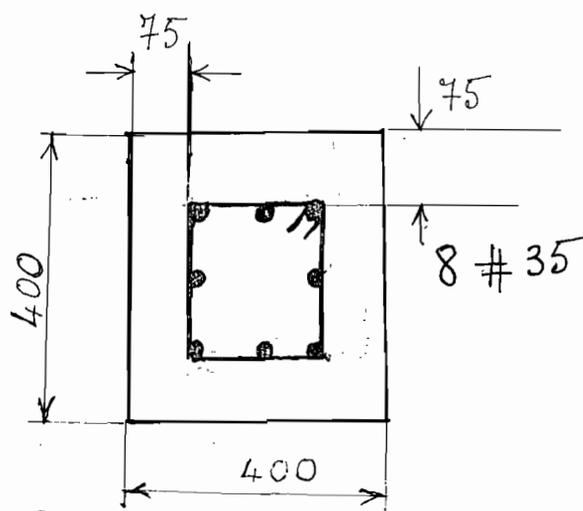


Figure 15

Espacement (E) des Etriers ?

Pour l'obtenir, il faut prendre la plus grande valeur des quantités ci-après :

. $16 \times \text{diamètre maximum} = 16 \times 30 = 480 \text{ mm}$

. $48 \times \text{diamètre ligature} = 48 \times 10 = 480 \text{ mm}$

. dimension latérale = 400 mm

E = 480 mm

Remarque :

Bien que le tirant soit principalement sollicité en traction, il aura également tendance à fléchir sous l'effet de son propre poids.

Pour étudier la flexion, admettons que le tirant soit encasté entre ses deux extrémités :

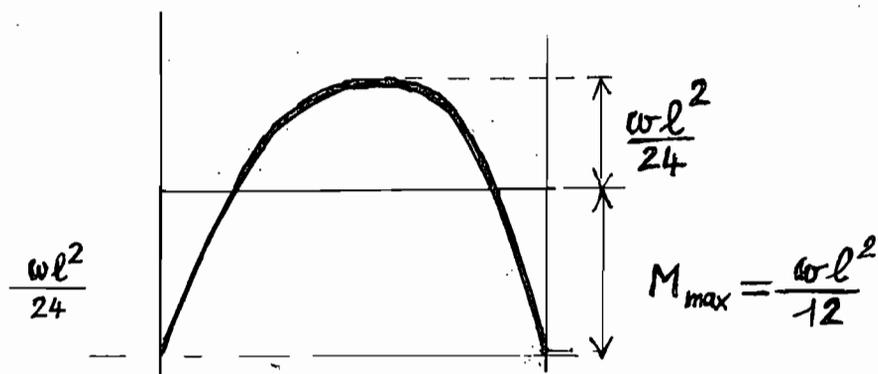
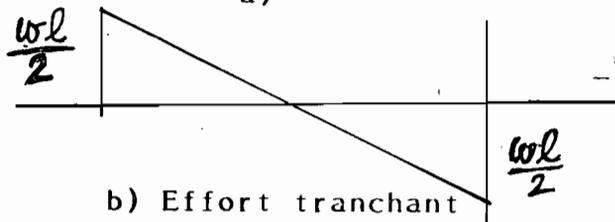
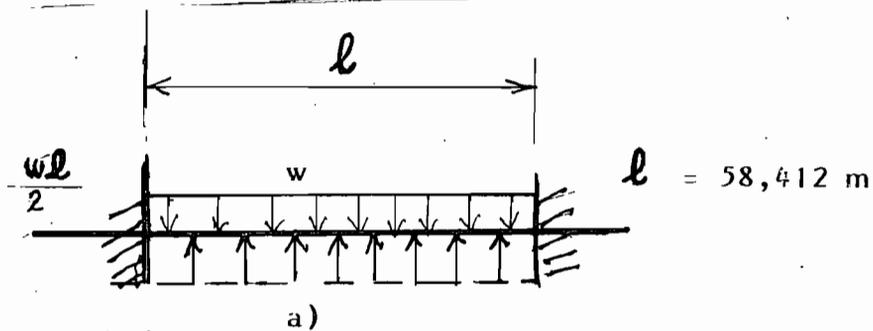


Figure 16

w = charge par unité de longueur sur le tirant (kN/m).

w'' = charge propre du sol + charge du sol au dessous du tirant.

Les diagrammes des moments et des efforts tranchants ainsi obtenus sont valables si une abstraction est faite sur la pression du sol. En effet, cherchons si la pression générée par le tirant et le sol qui se trouve à sa partie supérieure est inférieure à la contrainte admissible du sol :

Soient : γ_s = poids volumique du sable = 16 kN/m³

γ_b = poids volumique du béton = 25 kN/m³

p = la pression générée par le poids du tirant et celui du sol situé dans sa partie supérieure (kN/m²).

Considérons que la profondeur d'encastrement soit de 0,8 m (hauteur habituelle employée pour les bons sols dans la région). Nous aurons donc :

$$\ddot{p} = 0,8 \times \gamma_s + 0,5 \gamma_b$$

$$p = 0,8 \times 16 + 0,4 \times 25 = 22,8 \text{ MPa}$$

Or la contrainte admissible du sol (sable) = 300 MPa.

Donc nous pouvons dire que le sol supportera aisément le tirant.

En conséquence, nous pouvons nous dispenser du dimensionnement en flexion.

4-3-2 - Poteau

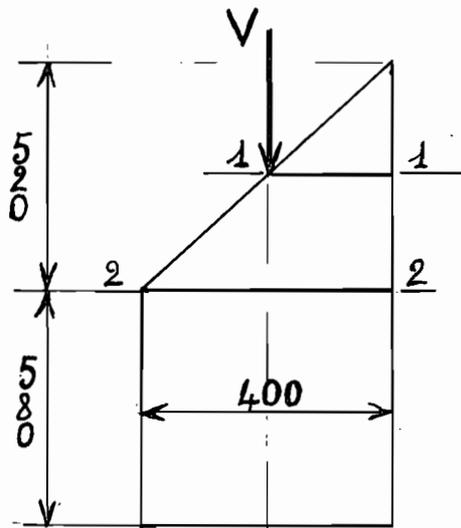
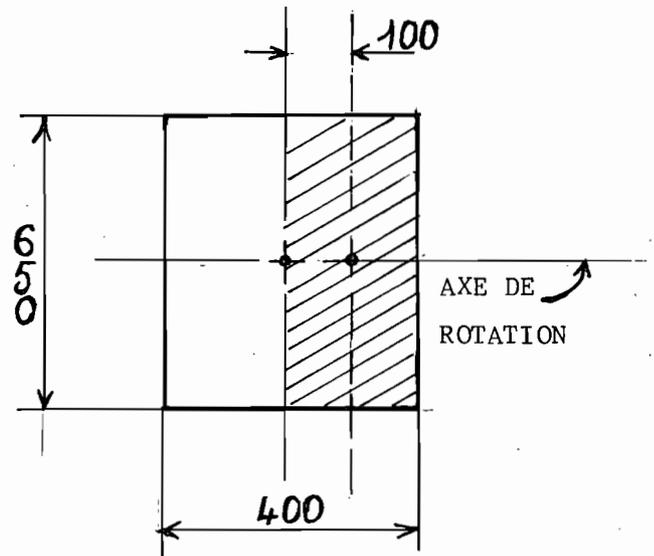


Figure 17



Section 2-2 : $A_g = 400 \times 650$

Section 1-1 : $A_g = 200 \times 650$

Figure 18

Le poteau ainsi représenté est à inertie variable. Suivant les sections considérées l'excentricité de la force V change. En effet, observons la figure 17 :

- Si nous considérons la section 2-2, nous remarquons que la force V passe par le milieu de la section. Pour ce cas, l'excentricité minimale est à considérer.
- Par contre, si nous prenons la section 1-1, nous constatons que la force devient complètement excentrée. ($e \approx 100 \text{ mm}$).

En conséquence, pour fixer la résistance du poteau, nous aurons à dimensionner les sections 1-1 et 2-2 qui sont les plus déterminantes :

design de la section 2-2

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{V}{A_g} \quad \frac{P_u}{A_g} = \frac{2121,93 \times 10^3}{400 \times 650} = 8,16 \text{ MPa}$$

$$e_{\min} = 0,1 \times 400 = 40 \text{ mm}$$

$$\frac{M_u}{A_g h} = \frac{2121,930 \times 10^3 \times 40}{(400 \times 650) \times 400} = 0,816 \text{ MPa}$$

$$1_g = 1\% \quad (\text{voir ref (14)})$$

$$A_s = 0,01 \times 400 \times 650 = 2600 \text{ mm}^2 \Rightarrow 6 \# 25$$

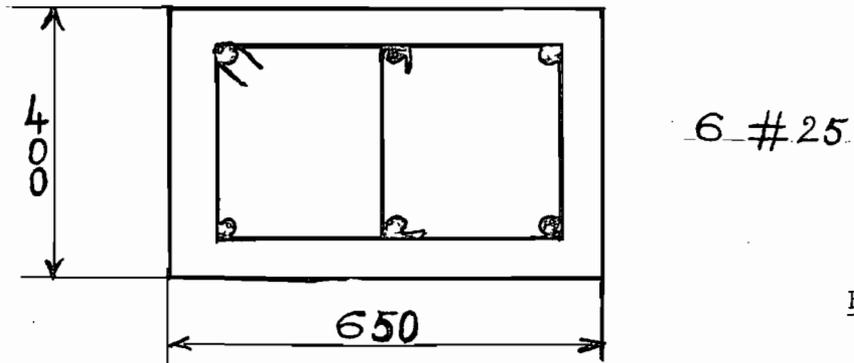


Figure 19

Design de la section 1-1

$$e = 100 \text{ mm} \quad ; \quad A_g = 200 \times 650$$

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{2121,93 \times 10^3}{(200 \times 650)} = 16,3 \text{ MPa}$$

$$\frac{M_u}{A_g h} = \frac{2121,93 \times 10 \times 100}{(200 \times 650) \times 200} = 2,04 \text{ MPa}$$

$$1_g = 1,5\% \quad (\text{voir ref. (14)})$$

$$A_s = 0,015 \times 200 \times 650 = 1950 \text{ mm}^2 \Rightarrow 8 \# 20$$

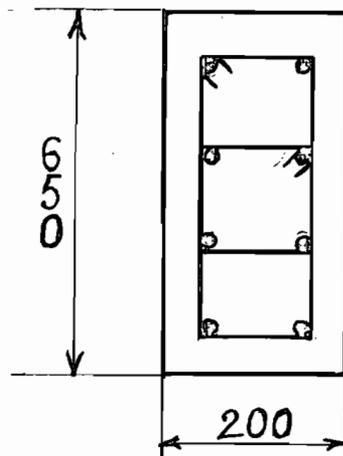


Figure 20

Calcul de l'espacement (E) des étriers :

- pour la section 2-2 :

max de : * $16 \times \text{diamètre maximum} = 16 \times 25 = 400 \text{ mm}$

* $16 \times \text{diamètre ligature} = 16 \times 10 = 160 \text{ mm}$

* dimension latérale 650 mm

$E = 650 \text{ mm}$

Cependant compte tenu de la distance verticale disponible (qui est égale à 580),

nous prendrons $E = 400 \text{ mm}$

- pour la section 1-1 :

max de : * $16 \times d_{\text{max}} = 16 \times 20 = 320 \text{ mm}$

* $16 \times 10 = 160 \text{ mm}$

* dimension latérale (650 mm).

Pour la même raison précédente, nous limiterons E à 160 mm.

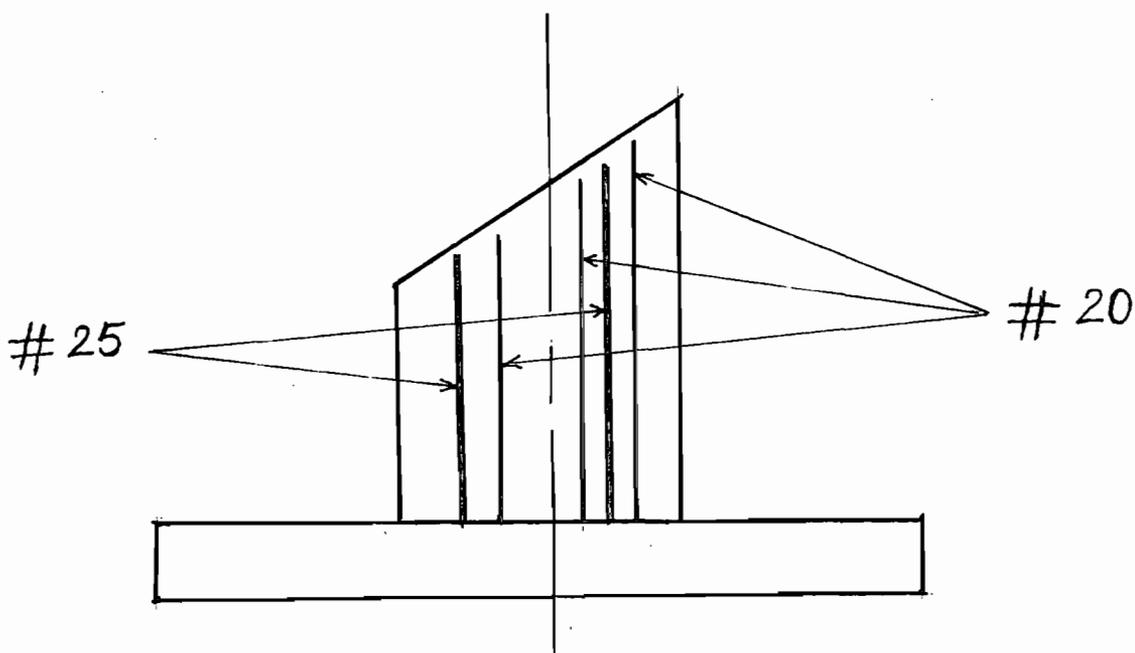


Figure 21

4-3-3 - La fondation :

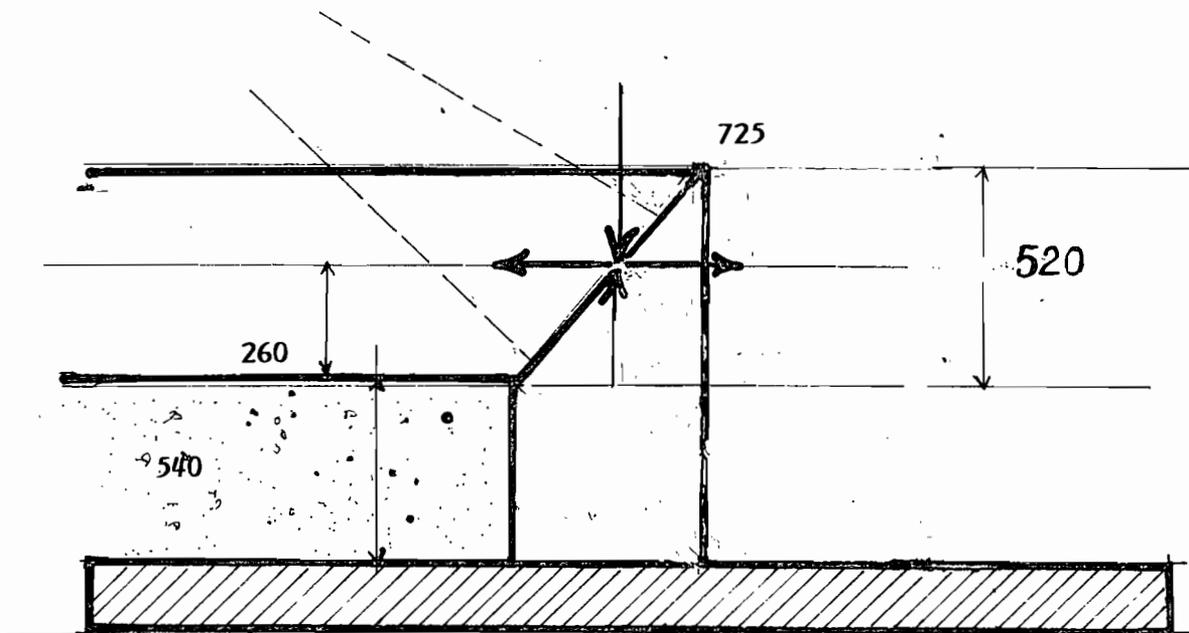


Figure 23

Afin d'avoir une répartition uniforme de pression sous la semelle, nous devons chercher à avoir la coïncidence entre le centre de gravité du système et la ligne d'action de la résultante. Pour atteindre cet objectif, il faut que la force V passe par le milieu de la fondation.

Calculs :

1 - Dimensions de la semelle :

- Nous supposons une épaisseur de semelle de 750 mm,
- la pression admissible du sol à 800 mm au dessous du niveau du sol avant 300 kN/m².

- $\gamma_{\text{béton}} = 25 \text{ kN/m}^3$

$$q_a = 300 - 0,75 \times 25 - (0,520 + 0,540) \times 25 = 254,75 \text{ kN/m}^2$$

Soit A = l'aire nécessaire pour la semelle :

$$A = \frac{V}{q_a} \Rightarrow A = \frac{2121,930}{254,75} = 8,33 \text{ m}^2$$

Choisissons une semelle carrée. Ainsi le coté minimum l du carré sera :

$$l = \sqrt{A} = \sqrt{8,33} = 2,89 \simeq 3,0 \text{ m}$$

2 - Dimensionnement pour les forces de cisaillement :

Pour cela, il faut évaluer le cisaillement car c'est la sollicitation qui détermine l'épaisseur de la semelle.

. Calcul de la pression du sol q_u (kN/m²)

$$q_u = \frac{2121,930}{3 \times 3} = 235,77 \text{ kN/m}^2 = 0,236 \text{ N/mm}^2$$

2-1 - Poutre linéaire : la section critique pour les contraintes de cisaillement (v_u) se trouve à une distance d = profondeur de la semelle :

(voir référence: (17), Art. 9.10.4.).

Soit V_u = la force tranchante (N)

$$V_u = q_u \left(\frac{l}{2} - d - 200 \right) \times l$$

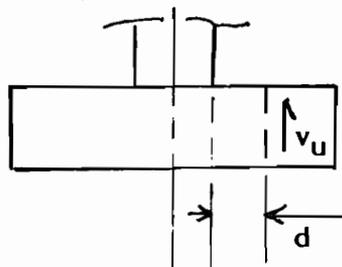


Figure 24

$$V_u = 0,236 \left(\frac{3000}{2} - d - 200 \right) \times 3000 = 708 (1300 - d)$$

La contrainte de cisaillement du béton ne doit pas dépasser $v_c = 0,17 f'_c$ (voir réf. (17), art. 9.10.2 et 9.10.3).

$$\frac{V_u}{0,85 bd} < 0,17 \sqrt{f'_c}$$

$f'_c = 20 \text{ MPa}$ pour les fondations

$$\frac{708 (1300 - d)}{0,85 \times 3000 \times d} < 0,76 \times 0,85 \times 3000 \times d$$

$$708 (1300 - d) < 0,76 \times 0,85 \times 3000 \times d$$

$$708 \times 1300 - 708 d < 1938 d$$

$$920400 < 2646 d$$

$$d > 348 \text{ mm}$$

2-2 - Problème de poinçonnement : la section critique se situe à une distance égale à la moitié de la profondeur utile de la fondation :

(voir référence (17), Article 9.10.2).

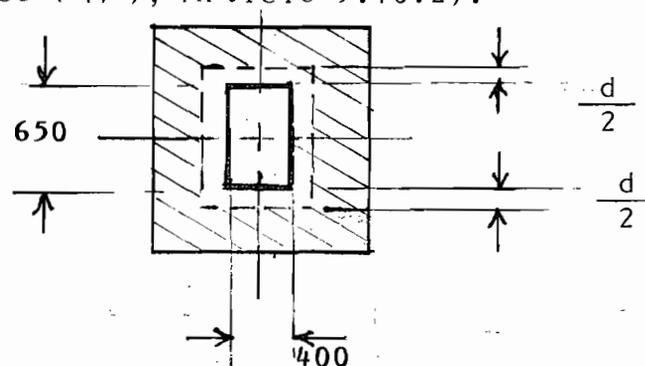


Figure 25

$$V_u = q_u \left[l^2 - 4\left(200 + \frac{d}{2}\right) \left(325 + \frac{d}{2}\right) \right]$$

La contrainte de cisaillement ne doit pas dépasser $0,33 f'_c$

$$V_u = 0,236 \left[3000^2 - (0,25 d^2 + 262 d + 65000) \right]$$

$$V_u = 2.108660 - 61,95 d - 0,059 d^2$$

$$v_u = \frac{V_u}{0,85 b d} = \frac{-0,059 d^2 - 61,95 d + 2.108.660}{0,85 \times [2 \times (400 + d) + 2(650+d)]d}$$

$$v_u = \frac{2.086.240 - 188,8 d - 0,236 d^2}{1445 d + 3,4 d^2}$$

Dans le cas où la semelle agit dans les 2 sens, la contrainte nominale admissible du béton vaut $0,33\sqrt{f'_c}$ (voir référence (17), art. 9.11.4).

$$v_c = 0,33\sqrt{f'_c} = 1,48 \text{ MPa}$$

$$\frac{-0,059 d^2 - 61,95 d + 2.108.660}{1445 d + 3,4 d^2} < 1,48$$

$$d > 463 \text{ mm}$$

Considérons un recouvrement de 75 mm pour la protection des armatures (voir réf. (26), art. 12.11.2.1).

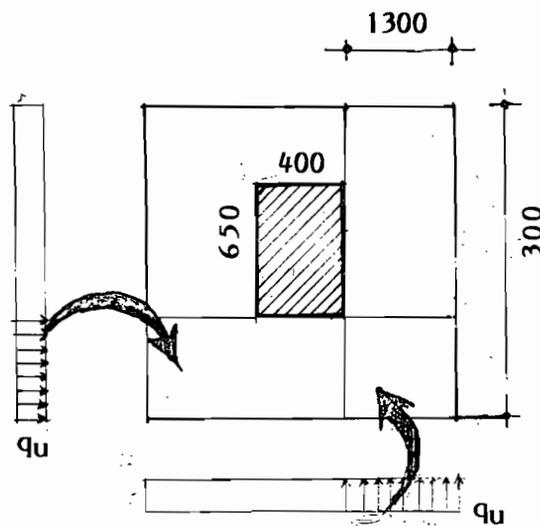
En prenant des armatures de $\#$ de 20, nous aurons comme épaisseur de la semelle :

$$h = 463 + 75 + 20 = 558 \Rightarrow h = 600 \text{ mm}$$

$$d_{\text{moy}} = 6000 - 75 - 20 = 505 \text{ mm}$$

3 - La flexion :

La semelle est dimensionnée comme une poutre :



$$q_u = 236 \text{ kN/m}^2$$

Figure 26

$$M_u = 236 \times 3,0 \times \frac{1,3^2}{2} = 598,26 \text{ kNm}$$

$$M_u = K_u b d^2 \times 10^{-6}$$

$$K_u = \frac{M_u \cdot 10^6}{b d^2}$$

$$K_u = \frac{598,26 \times 10^6}{3000 \times (505)^2} = 0,782 \text{ MPa}$$

Or $K_{u_{\min}} = 1,21 \text{ MPa}$ pour $f'_c = 20 \text{ MPa}$ (voir réf. (20), page 99).

$$\rho = \rho_{\min} = 0,0035$$

$$A_s = \rho \times A_g$$

$A_s = 0,0035 \times 3000 \times 505 = 5302 \text{ mm}^2 \Rightarrow 18 \# 20$ dans les 2 sens avec un espacement de 168 mm.

Soit l_d = la longueur de développement de l'armature tendue

l_d : requise pour un diamètre 20 avec $f'_c = \text{MPa}$ et $f_y = 400 \text{ MPa}$ vaut 510 mm (voir réf (20), page 243). or cette longueur est inférieure à la longueur disponible = 1300 mm.

4 - Transmission des contraintes à la base :

Soit f_b = la contrainte dans le béton à l'interface.

$$f_b = \frac{2121,930}{400 \times 650} = 8,16 \text{ MPa}$$

Soit $f_{b,adm}$ = la contrainte admissible dans le béton.

$$f_{b,adm} = 0,85 \times 0,70 \times f'_c \times \sqrt{A_2/A_1}$$

(voir référence (17), Art. 8.15).

Pour le béton du poteau ($f'_c = 30 \text{ MPa}$; 2 types de béton différents)

$$\sqrt{A_2/A_1} = 1$$

$$f_{b,adm} = 0,85 \times 0,70 \times 1 = 17,85 \text{ MPa} > 8,16 \text{ MPa} \quad (\text{satisfaisant})$$

Pour la semelle ($f'_c = 20 \text{ MPa}$)

$$\sqrt{A_2/A_1} = \sqrt{3000^2 / 400 \times 650} = 5,9$$

mais $\sqrt{A_2/A_1} < 2$ (voir référence (17), art. 8.15.3)

$$f_{b,adm} = 0,85 \times 0,7 \times 20 \times 2 = 23,8 \text{ MPa} > 13,26 \text{ MPa} \quad (\text{satisfaisant})$$

Donc nous pouvons dire que notre béton est adéquat.

Mais considérons en conséquence un taux d'armature minimum de 0,5 % pour l'interface poteau - semelle (voir réf. (20), page 567).

$$A_s = 0,005 \times 650 \times 400 = 1300 \text{ mm}^2 \quad 6 \nabla\# 20.$$

Soit l'_d = la longueur de développement en compression

$$l'_d = 0,24 f_y d_b / \sqrt{f'_c} < 0,044 f_y d_b$$

$$0,24 f_y d_b / \sqrt{f'_c} = \frac{0,24 \times 400 \times 20}{\sqrt{20}} = 429 \text{ mm}$$

$$0,44 f_y d_b = 0,44 \times 400 \times 20 = 352 \text{ mm}$$

$$\text{La longueur verticale disponible} = d_{\text{moy}} - d_b = 505 - 20 = 485 \text{ mm}$$

$$(d_{\text{moy}} - d_b) > 352 \text{ mm} \quad (\text{satisfaisant})$$

Les détails de ferrailage de la semelle sont montrés à la figure 27.

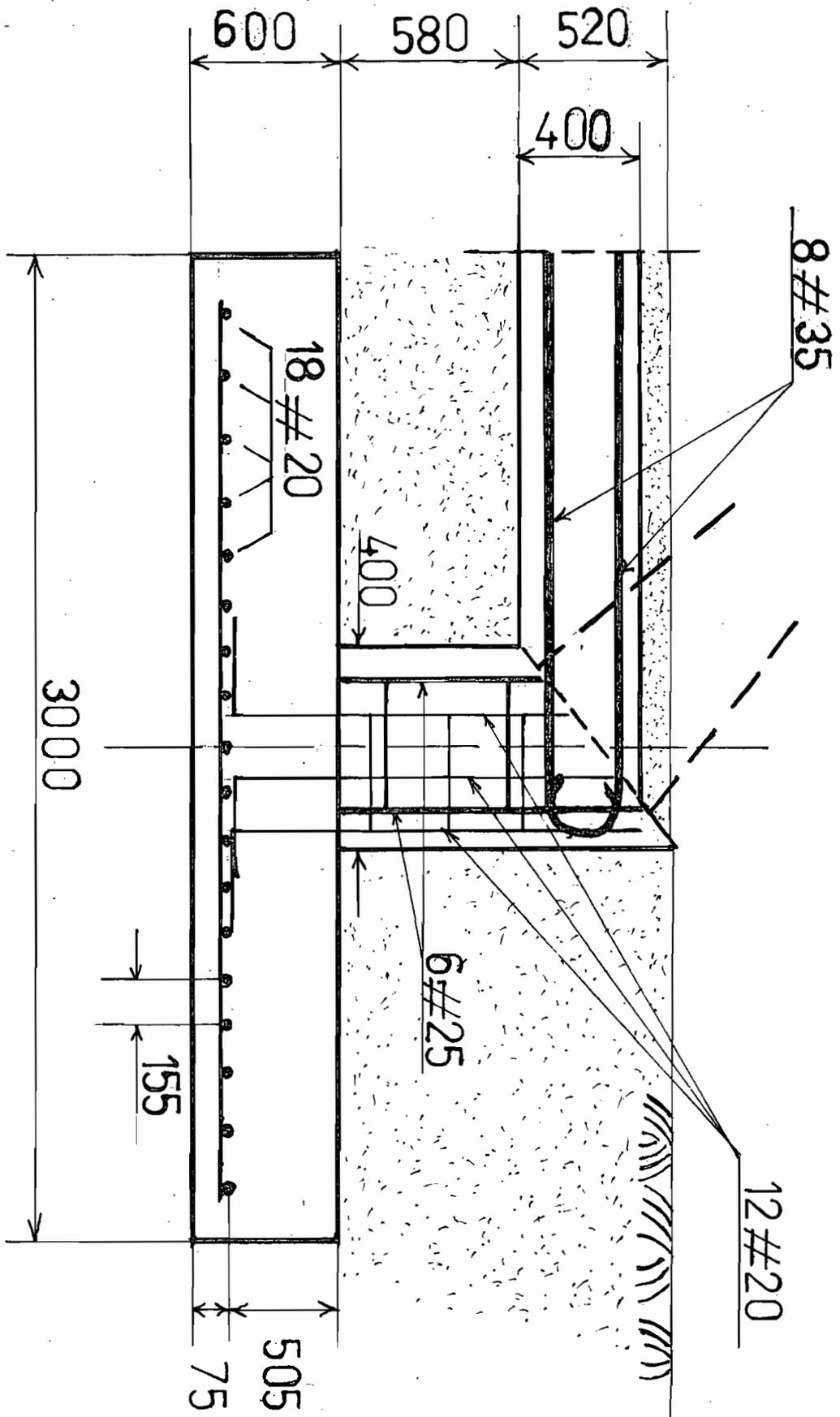


FIGURE 27

V - EVALUATION ECONOMIQUE

L'évaluation économique de la couverture aurait été beaucoup plus exhaustive si nous avions disposé du devis estimatif de la couverture en modèle traditionnel.

Mais, malheureusement, le document n'a pu être retrouvé dans le dossier du projet qui nous a été remis.

Cependant, nous laisserons le soin au professionnel de la S.O.N.E.D. de faire une étude comparative sur les coûts pour les deux modèles de couverture.

En ce qui nous concerne, nous avons établi un devis estimatif détaillé de l'ouvrage concernant le terrassement et le Gros-oeuvre, dans l'optique de fournir une idée du volume des travaux à exécuter et des quantités de matériaux susceptibles d'être employées (voir tableau n° 22).

Tableau N° 22 : Devis estimatif détaillé de l'ouvrage concernant les terrassements et le Gros-oeuvre.

Ref.	Description des ouvrages	Q	U	P. Unit.	P. Tot.
	<u>I - TERRASSEMENTS</u>				
1 -	- Préparation du terrain (plat, sans arbre, sans souche) travaux de désherbage et mise en place de la plate forme	1739	m ²	250	434.750
2 -	- Fouille pour semelles isolées -	16,18	m ³	1200	19.416
3 -	- Remblais pour dito	6	m ³	810	4.860
4 -	- Fouilles pour tirants	37,25	m ³	1200	44.700
5 -	- Remblais de dune pour dito	4,66	m ³	610	2.843
6 -	- Evacuation de déblais excédentaires	7	m ³	1400	9.800

Suite du tableau n° 15 :

Réf	Description des ouvrages	Q	U	P. Unit.	Prix total
	<u>II - GROS OEUVRE</u>				
4 -	- Béton de propreté pour semelles dosé à 150 kg	1,44	m³	44.000	63.360
5 -	- Béton de propreté pour tirants dosé à 150 kg	1,8	m³	44.000	79.200
6 -	- Béton en fondation pour semelles dosé à 350 kg	24,43	m³	49.500	1.209.285
7 -	- Coffrages pour dito	45,4	m²	2.850	129.390
8 -	- Armatures pour dito	1083	kg	360	389.880
9 -	- Béton en fondation pour tirants	18,68	m³	49.500	924.660
10 -	- Coffrage pour dito	46,56	m²	2.850	132.696
11 -	- Armatures pour dito	5848	kg	360	2.105.280
12 -	- Béton en élévation dosé à 350 kg	33,5	m³	46.500	1.557.750
13 -	- Coffrages pour dito	186	m²	2.850	530.100
14 -	- Armatures pour dito	3682	kg	360	1.325.520
15 -	- Béton pour les voûtes de couverture	77,5	m³	52.000	4.030.000
16 -	- Coffrage métallique coulissant, prétraité finition soignée sur surface courbe.	1388	m²	4.500	6.246.000
17 -	- Traitement du béton brut de décoffrage pour un aspect soigné	1388	m²	1.200	1.665.000

REF	DÉSIGNATION DES OUVRAGES	QUANT	UNIT.	P. UNIT.	PRIX TOTAL
-	- Armatures en treillis soudé pour sol du hall	500	kg	640	320.000
	- Béton de forme pour dallage dosé à 300 kg	27	m2	44.500	1.201.500
	- <u>MACONNERIE</u> (Maçonnerie l'évacuation sur- reté simplement à la maçonnerie de la superstructure : c'est à dire la maçonnerie en fondation	82	m2	1.200	98.400
	- Fouilles en périmètre pour maçonnerie				
	- Maçonnerie d'agglos de	164	m2	6.200	1.016.800
	- Claustres préfabriqués en béton				
	- Pavé de verre pour éclairage zenithal	6	m2	32.000	192.000
	- Canalisation pour évacuation EV-EP.	--	--	P.M.	--
	- Regard de visite de 60 x 60	8	U	41.500	332.000
	<u>TOTAL</u>				
	TERRASSEMENTS				1.022.938
	GROS OEUVRE				21.972.981
	MACONNERIE				1.639.200
	<u>TOTAL</u>				<u>24.635.119</u>

VI - DISCUSSIONS ET RECOMMANDATIONS :

A - Discussions :

A l'issue de notre étude, il nous paraît quand même, utile de souligner un certain nombre de remarques :

- S'agissant du choix du matériau de construction (béton armé), nous signalons que ce sont surtout des considérations de coût qui nous ont guidés. Cependant, il faut dire que les matériaux utilisables pour la construction des voiles sont très divers (lamellés collés, l'acier, l'aluminium, ...).

- Concernant la forme des voûtes, il existe également d'autres alternatives, qui pourraient d'ailleurs être meilleures que celle qui a été retenue lors de notre étude.

Cependant, nous n'avons pas voulu être ambitieux dans notre choix architectural car ces formes exigent une technologie de construction assez moderne.

Or, celle-ci fait défaut dans notre pays.

- Notre option d'arc trirotulé peut être remplacée par d'autres types d'arc (arc encastré ou arc birotulé).

Cependant, elle nous a permis de travailler avec un système isostatique (d'où allègement de nos calculs), et aussi d'avoir un modèle moins sensible aux contraintes dues aux variations de température et aux tassements différentiels.

Ce qui convient bien à notre contexte de climat et aux conditions de notre sol (sable).

: - A propos du tirant, nous signalons qu'en général, lorsqu'il est enrobé, il est visuellement de section rectangulaire plus haute que large. Mais cette habitude n'a rien d'absolu, il peut être plat ou carré.

D'autre part, nous n'avons pas voulu mettre le tirant au pied de la fondation à cause des raisons suivantes :

. la règle d'équilibre des fondations exige que les forces agissant sur celles-ci soient concourantes.

Or, la position du tirant au pied de la fondation nous aurait donné un équilibre horizontal, par contre elle aurait généré un couple qui aurait tendance à déterrer la fondation.

. Cela aurait été moins économique à cause des fouilles et des remblais supplémentaires.

- Nous n'avons pas pris en compte le vent, mais en revanche, nous avons pris des dispositions au niveau des ouvertures de l'infrastructure qui favorisent une bonne circulation du vent.

- Pour le tracé des voûtes devrait s'effectuer suivant la courbe funiculaire des charges réelles réparties selon l'arc (chaînette). Mais en pratique, les constructeurs tracent la courbe funiculaire des charges permanentes réparties selon la corde de l'arc (parabole du 2^e degré) du fait que les toitures usuelles sont étalées et que les différences de tracé entre les 2 courbes sont minimales.

- Enfin, comme dernière remarque, nous avons constaté qu'aux rives, les voûtes remplissent simultanément les deux conditions : $N_x = 0$ et $N_{xy} = 0$.

Ceci correspond théoriquement au comportement d'une coque membrane parfaite. En conséquence, nous pouvons admettre que nos résultats sont cohérents avec nos hypothèses.

B - Recommandations :

1 - Bien que la théorie membranaire fournisse des résultats avec une précision acceptable, nous recommanderons à ceux qui voudraient s'en tenir à une plus grande rigueur de développer les équations cinématiques et constitutives, ou d'employer un programme d'Eléments Finis.

2 - Tenir compte des effets secondaires tels que le vent, le fluage et le retrait du béton, les variations de température, ... qui peuvent engendrer des contraintes supplémentaires et ainsi provoquer des fissures qui pourraient compromettre l'étanchéité et la durabilité de l'infrastructure.

3 - Faire une étude comparative de coûts plus exhaustive afin de mieux situer les points que nous pourrions améliorer dans notre design.

De toutes les façons, vu l'importance de la surface à couvrir, nous sommes déjà persuadés que le constructeur sera confronté à des problèmes de coût de coffrage et de technologie.

Cependant nous proposerons s'agissant des coffrages, l'utilisation :

Soit des coffrages métalliques coulissants, soit un emploi répété (3 à 4 fois) de coffrages en contre plaqué.

Les coffrages continus sont d'emblée exclus car ils seront dispendieux. Le prix de revient de l'ouvrage dépendra en grande partie de cette composante.

4 - L'étanchéité d'un élément en béton ayant une faible épaisseur n'est pas toujours assurée. Cependant, certaines constructions de coques en béton armé, réalisées sans revêtement d'étanchéité, ont pu donner une totale satisfaction dans des conditions bien précises (voir réf. (6), page 20 ; et réf. (16), page 143). Nous conseillerons celle-ci pour notre cas :

- choisir une bonne composition granulométrique du béton ;
- mélanger le béton avec un hydrofuge ;
- faire soigneusement la mise en oeuvre avec une bonne humidité ;

5 - Laisser au niveau des voûtes des réservations destinées aux briques de verre pour l'éclairage zénithal (voir plan 001).

6 - Au point de vue acoustique, il n'y a pas de craintes en jeu car les centres de courbures des voûtes ne se situent pas au voisinage du plancher.

7 - Les articulations (rotules) devront être réalisées suivant le système A. MESNAGER (voir réf. (23), page 6).

Cependant, il faut d'abord vérifier la transmission des contraintes à l'articulation, ensuite évaluer la contrainte dans les aciers générée par l'effort normal et enfin déterminer la composante horizontale de l'effort normal introduite par le croisement des armatures :

Calcul :

a)- ? contrainte admissible du béton ($f_{b,adm}$)

$$f_{b,adm} = 0,85 \times 0,7 \times 30 = 17,85 \text{ MPa}$$

b)- ? contrainte dans la section de béton (f_b).

. mettons du néoprène dans l'articulation afin de rendre celle-ci plus souple.

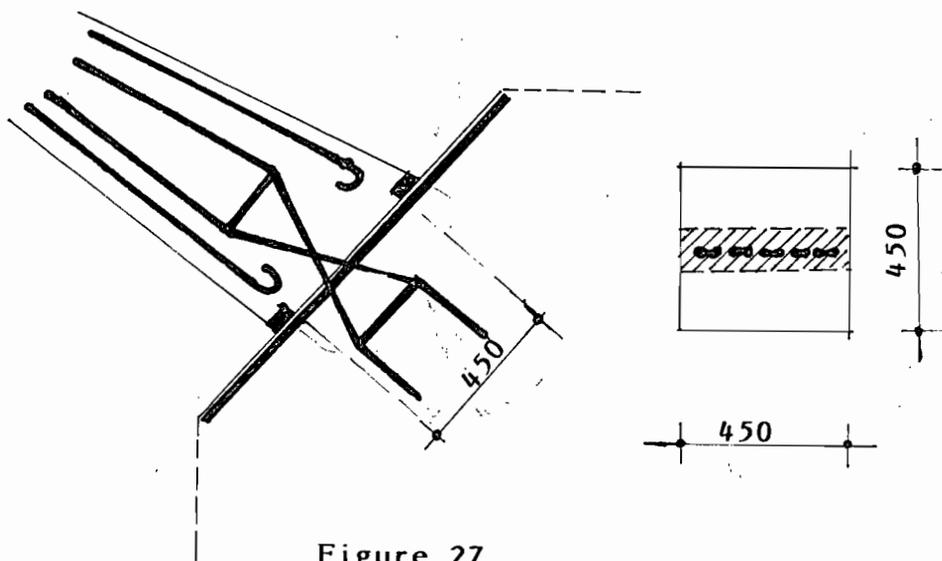


Figure 27

$$f_b = \frac{3526}{450 \times 450} = 17,41 \text{ MPa} < 17,85 \text{ MPa} \quad (\text{satisfaisant})$$

c)- ? La quantité d'armature à l'articulation (A_s).

Avec le système MESNAGER, les armatures équilibrent seules l'effort normal.

Donc la contrainte dans les armatures ne doit pas dépasser $f_y = 400$ MPa.

$$\frac{3,526}{A_s} < 400 \Rightarrow A_s > \frac{3,526}{400}$$

$$A_s = 8815 \text{ mm}^2 \Rightarrow (5 \times 2) \# 35$$

d)- ? Composante horizontale (F).

L'inclinaison (η) armatures introduit une force horizontale (F) au droit du coude des armatures croisées.

Considérons $\eta = 10^\circ$:

$$F = 3526 \times \tan 10 = 622 \text{ kN}$$

Calculons la section (A_s) d'acier pour reprendre cette force (F) :

$$f_y = 400 \text{ MPa}$$

$$A_s = \frac{F}{f_y} \Rightarrow A_s = \frac{622}{400} = 1554 \text{ mm}^2 \Rightarrow 5 \# 20$$

8 - Pour le bétonnage, le diamètre maximum sera de 22 mm.

CONCLUSION :

De nos jours, les voiles minces présentent un grand intérêt grâce aux nouvelles perspectives qu'ils offrent aux constructeurs. Cela se justifie surtout par le fait que ces nouveaux modèles de structure intègrent aussi bien les soucis des architectes que ceux des ingénieurs.

En effet, pour les premiers, la préférence s'oriente vers le volume, les formes, les couleurs, la beauté. Pour les autres l'option se tourne principalement vers la performance structurale, et l'optimisation des quantités de matériaux à employer.

Ainsi, au sein d'un projet, une bonne harmonisation de ces compétences permettra d'aboutir à la construction d'un ouvrage d'une qualité supérieure, tant au point de vue esthétique que structural.

D'autre part, malgré la multitude de théories, qui existent dans le domaine des coques, en général, avec les voiles minces en béton armé, la théorie membranaire est suffisante en ce sens qu'elle fournit des résultats d'une précision acceptable.

Enfin, avec les coques, il faudra une étude approfondie de la technique de coffrage à employer car généralement c'est le paramètre qui fait monter le coût de construction de ces projets.

En conséquence, avant l'exécution, ce problème devra être bien examiné.

Appendice A

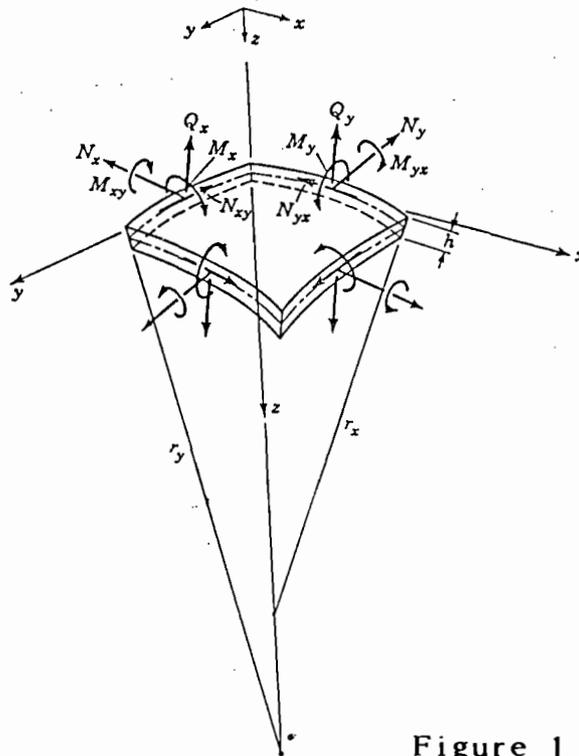


Figure 1

Données sur les dimensions des voûtes :

• Voûte n° 1

$$h = 0,06 \text{ m} \quad ; \quad r_x = h_1 = \infty \quad ; \quad r_y = \frac{b}{c_2} = 48,091 \text{ m}$$

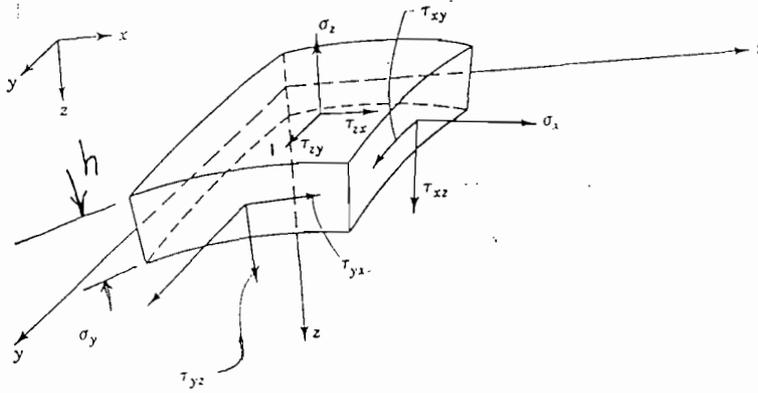
• Voûte n° 2 :

$$h = 0,06 \quad ; \quad r_x = h_1 = \infty \quad ; \quad r_y = \frac{a^2}{c_2} = 29,454 \text{ m}$$

Comme nous le constatons $\frac{h}{r} \ll 1$. Donc nous avons

une coque mince (voir réf. (3)). Pour ces types de voiles la rigidité flexionnelle sera supposée nulle car h est très faible. De plus, compte tenu de la faiblesse de l'épaisseur, les deux surfaces extérieures limitant le voile seront assimilées en une seule, en l'occurrence à sa surface moyenne.

APPENDICE B



Considérons un élément différentiel extrait de la voûte (voir schéma ci-dessus). Puisque nous avons un voile mince, nous pouvons admettre que $\frac{h}{r_x}$ et $\frac{h}{r_y}$ peuvent être négligés. Or, les expressions mathématiques des forces internes dans une coque dépendent tous de ces rapports. Pour mieux comprendre cela, rappelons ces expressions mathématiques (voir réf. (7), p. 19 et 20).

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 M_{xy} &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & M_{yx} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz
 \end{aligned}$$

Avec : $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$

nous savons : $\frac{z}{r_x}$ et $\frac{z}{r_y} \rightarrow 0$

D'autre part, si la coque est mince, nous pouvons admettre que les contraintes ne varieront pas le long de l'épaisseur.

En conséquence, l'expression des intégrales vont se ramener à 2 types :

- des intégrales $\int_{-h/2}^{+h/2} dz = h$

- des intégrales $\int_{-h/2}^{+h/2} z dz = 0 \Rightarrow$ tous les moments

de flexion et de torsion vont s'annuler. Ainsi, il ne restera plus que N_x , N_y , N_{xy} , N_{yx} , Q_x et Q_y .

Ainsi : $N_x = \sigma_x \times h$; $N_y = \sigma_y \times h$;

$N_{xy} = \tau_{xy} \times h$

$N_{yx} = \tau_{yx} \cdot h$; $Q_x = \tau_{xz} \cdot h$; $Q_y = \tau_{yz} \cdot h$

Etant donné que pour les coques minces les déformations dues au cisaillement sont négligées par la théorie élastique, nous pouvons établir que :

$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \Rightarrow$ $Q_x = Q_y = 0$

Enfin, il a été établi en cours de résistance des matériaux que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (voir réf. (11)).

En conséquence :

$N_{xy} = N_{yx}$

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - D. P. BILLINGTON, "Thin Shell Concrete Structures",
Mac Graw-Hill, 1982.
- 2 - E. H. BAKER - L. KOVALEVSKI - F. L. RISH, "Structural
Analysis of Shells", Mac Graw-Hill, 1972.
- 3 - E. GHARGHOURY, "Analyse des Coques Elastiques",
Ecole Polytechnique de Montreal, Mai 1978.
- 4 - ANDRE COIN, "Cours de Voiles Minces", Editions Eyrolles, 1971.
- 5 - L. HANN, "Voiles Minces Régliées : voiles cylindriques, coniques
conoïdes et conoïdaux", Editions Eyrolles, 1966.
- 6 - A. PADUART, "Les Voiles Minces en Béton Armé", Presses
Universitaires de Bruxelles, 1969.
- 7 - W. FLÜGGE, "Statique et Dynamique des Coques", Editions
Eyrolles, 1960.
- 8 - H. LUNDGREN, "Cylindrical Shells", The Danish Technical Press,
1951.
- 9 - S. TIMOSHENKO / M. GERE, "Theory of Elastic Stability",
Mac Graw - Hill, 1961.
- 10 - M. SALVADORI, "Structure in Architecture", Mac Graw-Hill, 1975.
- 11 - Ch. MASSONNET - S. CESCOTTO, "Mécanique des Matériaux",
Sciences et Lettres - Liège, 1982.

- 12 - F. P. BEER / E. R. JOHNSON, Jr., "Mécanique à l'usage des Ingénieurs - Statique", Mac Graw - Hill, 1981.
- 13 - M. FINTEL, "Handbook of Concrete Engineering", Van Nostrand Reinhold, 1974.
- 14 - C.P.C.A., "Metric Design Handbook for Reinforced Concrete Elements", Murat Saatcioglu, 1978.
- 15 - R. N. WHITE / P. GERGELY / R. G. SEXSMITH", "Structural Engineering - Combined edition", John Wiley & Sons, 1972.
- 16 - A. GUERRIN, "Traité de Béton Armé - tome 5 ; Toitures - voûtes - coupoles", Dunod, 1975.
- 17 - C.S.A., "Règles de Calcul des Ouvrages en béton dans le Bâtiment", ACNOR, 1980.
- 18 - P. CONIL, "Le Voile autoportant - Conception, tracé, construction", Editions Eyrolles, 1967.
- 19 - "Design of Barrel Shell Roofs", C.P.C.A., C.P.C.A., 1954.
- 20 - S. U. PILLAI- D. W. KIRK, "Reinforced Concrete Design Design in Canada", Mac Graw-Hill, 1983.
- 21 - P. CHARON, "Calcul des Ouvrages en Béton Armé suivant les règles B.A.E.L. 83 - théorie et Applications", Editions Eyrolles, 1983.

- 22 - M. NDIAYE, "Analyse de toiture en ferro-ciment",
Mémoire de Maîtrise es Sciences Appliquées, Structures,
Ecole Polytechnique de Montréal, 1982.
- 23 - "The International Journal Of Mechanical Engineering,
Education", Volume 13, Number 2, April 1985.
- 24 - "Techniques & Architecture", n° 321, Octobre 1978.
- 25 - A. GUERRIN, "Traité de Béton Armé - Tome 4 ; Ossatures
d'Immeubles et d'Usines - Planchers - Escaliers - Encor-
bellements - Ouvrages Divers du Bâtiment", Dunod, 1977.
- 26 - C.S.A, "Béton - Constituants et Exécution des travaux -
Essais concernant le béton", ACNOR 1977.