REPUBLIQUE DU SENEGAL

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP

ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

Centre de Thiès

Département Génie Civil

Projet de fin d'études

En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur de Conception

Titre : MODELISATION DES COQUES DE REVOLUTION A L'AIDE DES ELEMENTS FINIS .APPLICATION : CAS DES RESERVOIRS D'ASSAINISSEMENT

Auteur : Mamadou DIOP

Directeur interne : Dr Moustapha NDIAYE

Année : 2002 – 2003

DEDICACES

Je dédie ce projet à mon défunt père, à ma mère, à mes frères et sœurs, à mes amis, à toute la promotion et à tout ce qui me sont chérs.

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont à l 'endroit de tout ceux qui ont participé de prés ou de loin à la réussite de ce projet . Mais une mention spéciale est réservée à Monsieur Moustapha NDIAYE qui n'a ménagé aucun effort pour la réussite de ce travail. Car tout au long de l'étude il a montré une disponibilité sans faille et un enthousiasme sans commune mesure pour mener à bien ce projet .

SOMMAIRE

Dans le cadre de notre projet de Fin d'Etude intitulé modélisation des coques de révolution par éléments finis, nous avons eu à définir la méthode des éléments finis qui a été développée pour la première fois dans les années 60 .Nous avons aussi établi les relations géométriques d'une coque d 'épaisseur variable avant de le spécifier sur les coques axisymétriques, objet de notre étude. Les relations cinématiques et mécaniques basées sur les hypothèses de Reissner/Mindlin et de Kirchhoff pour les comportements axisymétriques ont été aussi présentés. Mais comme toute étude par la méthode des éléments finis doit comporter les conditions aux limites , c'est pourquoi elles ont été formulées ainsi que la formulation variationnelle .

Dans la deuxième partie nous avons étudié trois éléments dont les deux à savoir l'élément CAXI_K et CAXI_Q sont basés sur la théorie de Reissner/Mindlin et l'élément CAXI_L sur la théorie de Kirchhoff. Ainsi pour chaque élément on a isolé sa matrice de rigidité, de masse et les charges équivalentes aux nœuds.

Dans la dernière partie on a dimensionné un réservoir à l'aide du logiciel Microfe afin de mesurer la puissance de nos éléments par rapport à ce que nous offre le marché.

Table des matières

Listes des figures et tableaux

Liste des symboles et abréviations

$\int$ intégrale

$\{\ \}$ = matrice colonne

$[\ ]$ = matrice

$[M]^T$ = transposée de la matrice M

W, W_e formes intégrales globales et élémentaires

δ = symbole de calcul des variations

Π = fonctionnelle d'énergie

$[B]$ = matrice reliant les déformations aux variables nodales

$[H]$ = matrice de comportement élastique

$[H_m]$, $[H_{mf}]$ et $[H_f]$ matrices de comportement homogénéisées de membrane, flexion et couplage membrane-flexion .

H_c = rigidité de cisaillement

E, E_1 , E_2 = module de Young

CT = cisaillement transversal

$[J]$ = jacobienne de transformation

$[k]_{loc}$, $[k]_{glob}$ =matrices de rigidité globale élémentaire en repère local et global z, z' = coordonnée suivant n, suivant n_ζ

θ = vecteur rotation

ρ_m, ρ_f, ρ_{mf} = inerties homogénéisées de membrane, flexion et couplage membrane-flexion

M_s M_θ = moments de flexion

N_s N_θ = efforts de membrane

R, (R_s, R_θ) =rayon de courbure (d'un méridien, d'un parallèle)

Noms des principaux éléments utilisés.

CAXI_L élément de coque axisymétrique linéaire de type Mindlin

CAXI_K élément de coque axisymétrique de type Kirchhoff

CAXI_Q élément de coque axisymétrique quadratique de type Mindlin

Introduction

Lorsque correctement appuyée, une coque devient un élément structural de grande efficacité (considérant le rapport poids/portée) qui transmet les charges par action membranaire.

En effet, à l'exception des zones adjacentes aux discontinuités de géométrie ou de chargement (bordures, ouvertures, changement brusque d'épaisseur, charges concentrées ou sectorielles) , les effets flexionnels sont négligeables. Les propriétés structurales intéressantes des coques ont été mises à contribution depuis l'antiquité dans la construction navale.

De nos jours, les coques sont souvent utilisées en Génie civil dans la construction des voûtes cylindriques ou sphériques en maçonnerie. Avec l'avènement du béton armé, les formes et les applications se sont diversifiées vers la construction des barrages voûtes, des châteaux d'eau et réservoirs et des toitures de grandes portées. Les structures en forme de coque constituent les éléments structuraux de base dans la construction aéronautique et aérospatiale. Le comportement structural des plaques et coques est décrit par des équations aux dérivées partielles complexes. Des solutions de ces équations ne sont obtenues , de façon précise, que pour quelques rares cas, souvent d'ordre académique. Les difficultés rencontrées dans la résolution de tels cas de structures sont contournées avec l'usage de la méthode des éléments finis. Cette méthode donne une solution certes approximative, mais suffisamment précise pour des applications pratiques.

Bien qu'étant élaborée depuis le début des années soixante, la recherche est en cours encore aujourd'hui, les objectifs s'inscrivant dans l'amélioration des solutions obtenues.

On distingue deux catégories de coques : les coques de révolution et les coques à géométrie quelconque. Leur analyse repose sur la description de leur surface avec un système de coordonnées le plus approprié , la détermination des paramètres géométriques déterminants et l'écriture des équations aux dérivées partielles fondamentales qui décrivent leur comportement mécanique.

1 Théorie générale

1.1 Définition de la méthode des éléments finis

Dans cette partie où nous essayons de voir de façon générale la méthode des éléments finis, il s'avère important afin d'éviter toute mauvaise compréhension de définir les principes de base de la méthode des éléments finis

1.1.1 Qu'est que c'est la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique qui permet d'obtenir des solutions approchées dans une large variété de problèmes d'ingénieries .Tout au début cette méthode était développée pour étudier les structures complexes , mais par la suite elle a était étendue et appliquée dans le champs des mécaniques continues. Aujourd'hui on l'utilise de plus en plus pour la résolution de beaucoup de problèmes.

1.1.2 Comment cette méthode fonctionne

La procédure de discrétisation en éléments finis réduit le problème à un nombre finis d'inconnus en divisant la région de solution en éléments et en exprimant le champs variable d'inconnu par des fonctions d'approximation Les fonctions d'interpolation sont définies en termes de valeurs du champs de variable à des points spécifiques appelés nœuds . Les valeurs nodales du champs variable et les fonctions d'interpolation des divers éléments définissent de manière complète le comportement de ce champs.

La nature de la solution et le degré de d'approximation ne dépend pas de la taille et du nombre d'éléments utilisés mais plutôt des fonctions d'interpolation choisies

1.1.2.1 Discrétisation géométrique

La première étape consiste à diviser le continuum ou la région de solution en éléments . Une variété d'élément doit être utilisé et les différent d'éléments doivent être employés dans la même région de solution. Néanmoins lorsqu'on analyse une structure élastique composée de différents type d'éléments telles les poutres et plaques , il est non seulement souhaité, mais plutôt nécessaire d'utilisé différents éléments dans la même solution.

1.1.2.2 Construction des approximations nodales

L'étape suivante est l'affectation de nœuds à chaque éléments et de choisir les fonctions d'interpolation pour représenter la variation du champs variable à travers l'élément. Ce champs peut être un scalaire , un vecteur, ou un tenseur. Souvent les polynômes sont choisis comme fonction d'interpolation pour le champs variable à cause de sa facilité d'intégration et de différenciation . Le degré du polynôme choisi dépend du nombre de nœuds affecté à l'élément , la nature et le nombre d' inconnus à chaque nœuds, et à une certaine exigence de continuité au niveau des nœuds et le long des limites de l'élément.

1.1.2.3 Calcul des matrices élémentaires

Une fois le modèle d'élément fini établi , nous sommes prêt pour déterminer l'équation matricielle définissant les propriétés des divers éléments composant l'ensemble. Pour cela on utilise l'approche variationnelle.

1.1.3 Assemblage

Pour trouver les propriétés du système modélisé par un réseau d'éléments nous devons assembler tous les propriétés des éléments. En d'autres termes nous combinons les équations matricielles celles définissant les comportements de l'ensemble du système

1.1.4 Prises en compte des conditions aux limites

Avant que les systèmes d'équation soient prêts pour la solution ils doivent être modifiés en tenant compte des conditions aux frontières du problème . A ce stade on impose les valeurs nodales connues .

1.1.5 Evaluations des grandeurs élémentaires

La procédure d'assemblage donne un ensemble d'équation simultané que nous résolvons pour obtenir les valeurs nodales inconnues du problèmes.

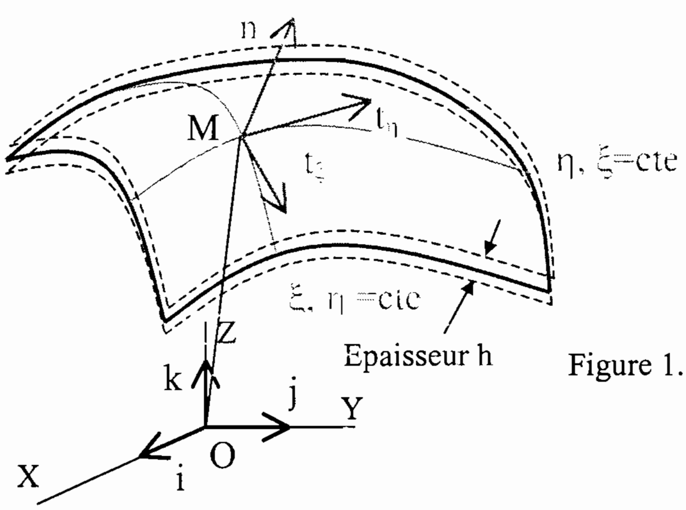
1.2 Description géométrique

1.2.1 Aspects généraux – Définitions

Une coque de révolution est définie géométriquement par une surface moyenne A et une épaisseur h =2t .La surface moyenne est obtenue par rotation d'une courbe plane ou méridien autour d'un axe de révolution Z.L'épaisseur h, supposée petite par rapport aux autres dimensions de la coque (longueur du méridien, circonférence) est définie suivant la direction z normale à la surface moyenne. Suivant l'ordre de grandeur de h par rapport aux autres aux autres dimensions on introduit parfois l'adjectif mince ou épais aux coques. Ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique mais sous –entend également un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (CT).

1.2.2 Géométrie de surface

On définit la géométrie de la coque d'épaisseur t en coordonnées paramétriques en exprimant les coordonnées cartésiennes du vecteur position $OM = X\,i + Y\,j + Z\,k$ de la surface moyenne comme :



$$\left|\begin{array}{l} X = f(\xi, \eta) \\ Y = g(\xi, \eta) \\ Z = h(\xi, \eta) \end{array}\right. \qquad (1.1)$$

Figure 1.1: Représentation paramétrique de la surface moyenne d'une coque

1.2.3 Vecteurs de base t_ξ, t_η et n relatif au trièdre fondamental

Les valeurs de ξ = constante et η = constante sont les courbes de surface C_ξ et C_η. Un point M de la surface moyenne peut toujours être défini à l'intersection d'une courbe C_ξ et d'une courbe C_η. On appelle trièdre fondamental relatif à cette surface, le trièdre formé par les trois vecteurs unitaires

t_ξ tangent à C_ξ dirigé vers les ξ croissants

t_η tangent à C_η dirigé vers les η croissants et

n normal à la surface moyenne et formant avec t_ξ et un t_η trièdre droit .

$$\mathbf{t}_\xi = \frac{\mathbf{OM}_\xi}{A}, \qquad \mathbf{t}_\eta = \frac{\mathbf{OM}_\eta}{B} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{OM}_\xi \otimes \mathbf{OM}_\eta}{H} \qquad (1.2\ a)$$

$$\mathbf{OM}_{\xi} = \left\langle X,_{\xi} \quad Y,_{\xi} \quad Z,_{\xi} \right\rangle \quad , \qquad \mathbf{OM}_{\eta} = \left\langle X,_{\eta} \quad Y,_{\eta} \quad Z,_{\eta} \right\rangle \tag{1.2 b}$$

$$\mathbf{OM}_{\xi} \otimes \mathbf{OM}_{\eta} = \left\langle Y,_{\xi} Z,_{\eta} - Z,_{\xi} Y,_{\eta} \quad Z,_{\xi} X,_{\eta} - X,_{\xi} Z,_{\eta} \quad X,_{\xi} Y,_{\eta} - Y,_{\xi} X,_{\eta} \right\rangle$$

avec

$$A = \left|\mathbf{OM},_{\xi}\right| \qquad B = \left|\mathbf{OM},_{\eta}\right| \qquad \text{et} \qquad H = \left|\mathbf{OM},_{\xi} \times \mathbf{OM},_{\eta}\right| \tag{1.2 c}$$

Comme montré à la figure suivante, en général les vecteurs $\mathbf{t}_{\xi}$ et $\mathbf{t}_{\eta}$ ne sont pas perpendiculaires. Ils font entre eux un angle ω tel que

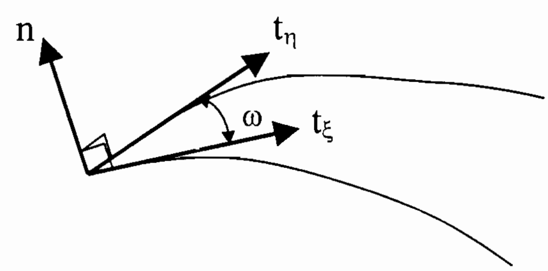


Figure 1.2: Angle ω entre les directions
t_ξ et t_η du repère local

$$\sin\omega = \left|\mathbf{t}_{\xi} \times \mathbf{t}_{\eta}\right| = \left|\mathbf{OM},_{\xi} \times \mathbf{OM},_{\eta}\right| / AB = H / AB$$

(1.3 a)

$$\cos\omega = \mathbf{t}_{\xi} \bullet \mathbf{t}_{\eta} = (X,_{\xi} X,_{\eta} + Y,_{\xi} Y,_{\eta} + Z,_{\xi} Z,_{\eta}) / AB$$

Suite à une variation de $d\xi$ et $d\eta$, le vecteur position varie comme

$$d\mathbf{OM} = \mathbf{t}_{\xi}\, d\xi + \mathbf{t}_{\eta}\, d\eta \tag{1.3 b}$$

et le carré de la *longueur de l'arc* correspondant sur la surface moyenne est

$$ds^2 = d\mathbf{OM}.d\mathbf{OM} = A^2\, d\xi^2 + 2\,AB\cos\omega\; d\xi d\eta + B^2\, d\eta^2 = I \tag{1.4 a}$$

Si $\mathbf{t}_\xi$ et $\mathbf{t}_\eta$ sont orthogonaux H = 0 et $\omega = \pi/2$ comme dans le cas des coques à symétrie de révolution. *I est la première forme fondamentale de la surface.* Développer autrement,

$$I = \begin{bmatrix} d\xi & d\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^2 & AB\cos\omega \\ BA\cos\omega & B^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \tag{1.4 b}$$

Le tenseur métrique de la surface est

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} A^2 & AB\cos\omega \\ BA\cos\omega & B^2 \end{bmatrix} \tag{1.4 c}$$

La *matrice de transformation géométrique* $\boldsymbol{\lambda}$ (repère local $\rightarrow$ repère global) est construite à partir de la relation :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t}_\xi \\ \mathbf{t}_\eta \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X,_\xi/A & X,_\eta/B & a \\ Y,_\xi/A & Y,_\eta/B & b \\ Z,_\xi/A & Z,_\eta/B & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} \tag{1.5 a}$$

où

$a = (Y,_\xi Z,_\eta - Z,_\xi Y,_\eta)/H$, $b = (Z,_\xi X,_\eta - X,_\xi Z,_\eta)/H$, $c = (X,_\xi Y,_\eta - Y,_\xi X,_\eta)/H$ sont les composantes du vecteur $\mathbf{n}$ dans le repère global.

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} X,_\xi/A & X,_\eta/B & a \\ Y,_\xi/A & Y,_\eta/B & b \\ Z,_\xi/A & Z,_\eta/B & c \end{bmatrix} \tag{1.5 b}$$

Les vecteurs étant unitaires $|\,\boldsymbol{\lambda}\,| = \sin\omega$, l'aire du parallélogramme que forment $\mathbf{t}_\xi$ et $\mathbf{t}_\eta$.

1.2.4 Vecteurs de la base duale auxiliaire $\mathbf{p}_\xi$, $\mathbf{p}_\eta$ et n

Les vecteurs tangents $\mathbf{t}_\xi$ et $\mathbf{t}_\eta$ sont unitaires mais souvent non orthogonaux. Par commodité d'autres vecteurs tangents $\mathbf{p}_\xi$, $\mathbf{p}_\eta$ sont construites telle que $\mathbf{p}_\xi$ soit perpendiculaire à $\mathbf{t}_\eta$ et $\mathbf{p}_\eta$ à $\mathbf{t}_\xi$ (voir figure suivante)

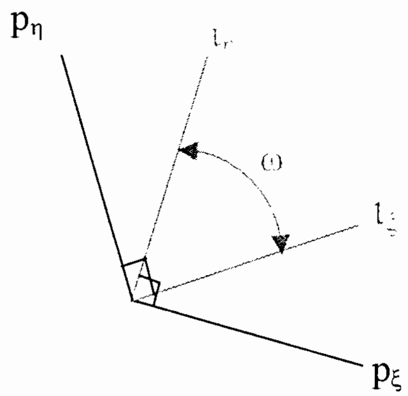


Figure 1.3: vecteurs de la base duale

Suivant la base ($\mathbf{t}_\xi$ $\mathbf{t}_\eta$) les vecteurs $\mathbf{p}_\xi$, $\mathbf{p}_\eta$ s'expriment comme

$$\mathbf{p}_\xi = p_{\xi\xi}\mathbf{t}_\xi + p_{\xi\eta}\mathbf{t}_\eta \tag{1.6 a}$$

$$\mathbf{p}_\eta = p_{\eta\xi}\mathbf{t}_\xi + p_{\eta\eta}\mathbf{t}_\eta \tag{1.6 b}$$

$$\mathbf{t}_\xi \bullet \mathbf{p}_\xi = (\mathbf{t}_\xi \mathbf{t}_\eta \mathbf{n}) = \sin\omega = p_{\xi\xi} + \cos\omega\, p_{\xi\eta}$$

$$\mathbf{t}_\eta \bullet \mathbf{p}_\xi = (\mathbf{t}_\eta \mathbf{t}_\eta \mathbf{n}) = \quad 0 \quad = p_{\xi\xi}\cos\omega + p_{\xi\eta}$$

(1.6 c)

$$\mathbf{t}_\xi \bullet \mathbf{p}_\eta = (\mathbf{t}_\xi \mathbf{t}_\xi \mathbf{n}) = \quad 0 \quad = p_{\eta\xi} + \cos\omega\, p_{\eta\eta}$$

$$\mathbf{t}_\eta \bullet \mathbf{p}_\eta = (\mathbf{t}_\eta \mathbf{t}_\xi \mathbf{n}) = \sin\omega = p_{\eta\xi}\cos\omega + p_{\eta\eta}$$

De (1.6 c) on tire

$$p_{\xi\xi} = p_{\eta\eta} = \frac{1}{\sin\omega}$$
$$p_{\xi\eta} = p_{\eta\xi} = -\cot\omega \qquad (1.6\ d)$$

Soit

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_\xi \\ \mathbf{p}_\eta \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin\omega} & -\cot\omega & 0 \\ -\cot\omega & \frac{1}{\sin\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_\xi \\ \mathbf{t}_\eta \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} \qquad (1.6\ e)$$

1.2.5 Courbure et torsion

La courbure K et la torsion T par définition, sont des variations de la direction du vecteur normal **n.** Pour une variation $d\xi$ et $d\eta$ le point M décrit une trajectoire **MM'**(fig. 1.4).

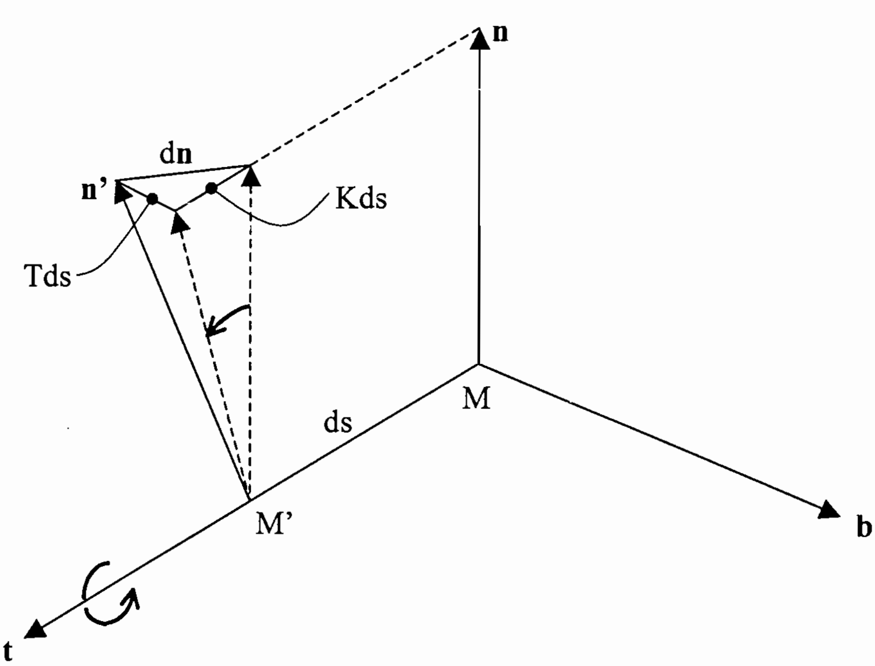


Figure 1.4: Changement de direction du vecteur normal

On suppose que **t** est le vecteur unitaire tangent à la surface dans la direction **MM'** et **b** est un vecteur unitaire $\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$ et tel que (**t**, **b**, **n**) forme un trièdre droit. On peut alors écrire que

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{dOM}}{|\mathbf{dOM}|} = \frac{\mathbf{dOM}}{\mathrm{ds}} \qquad \therefore \qquad \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{t} = \frac{1}{\mathrm{ds}}(\mathbf{n} \times \mathbf{dOM}) \qquad (1.7\text{ a, b})$$

De la figure 1.4 on déduit que

$$\mathrm{d}\mathbf{n} = \mathrm{K}\,\mathrm{ds}\,\mathbf{t} - \mathrm{T}\,\mathrm{ds}\,\mathbf{b} \qquad \therefore \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{ds}} = \mathrm{K}\,\mathbf{t} - \mathrm{T}\,\mathbf{b} \qquad (1.8\text{ a})$$

Les composantes de $\mathrm{d}\mathbf{n}$ / ds sont

$$\mathrm{K} = \mathbf{t} \bullet \frac{\mathbf{dn}}{\mathbf{ds}} = \frac{\mathbf{dOM} \bullet \mathbf{dn}}{\mathrm{ds}^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T} = -\,\mathbf{b} \bullet \frac{\mathbf{dn}}{\mathrm{ds}} = -\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{dOM}, \mathbf{dn})}{\mathrm{ds}^2} \qquad (1.8\text{ c, d})$$

$(\mathbf{n}, \mathrm{d}\mathbf{OM}, \mathrm{d}\mathbf{n})$ représente le produit mixe de trois vecteurs.

1.2.5.1 Evaluation de la courbure K

$$\mathbf{dOM} \bullet \mathbf{dn} = (\mathbf{OM},_{\xi}\mathrm{d}\xi + \mathbf{OM},_{\eta}\mathrm{d}\eta) \bullet (\mathbf{n},_{\xi}\mathrm{d}\xi + \mathbf{n},_{\eta}\mathrm{d}\eta) \qquad (1.9\text{ a})$$

$$\mathbf{dOM} \bullet \mathbf{dn} = (\mathbf{n},_{\xi} \bullet \mathbf{OM},_{\xi})\mathrm{d}\xi^2 + (\mathbf{n},_{\xi} \bullet \mathbf{OM},_{\eta} + \mathbf{n},_{\eta} \bullet \mathbf{OM},_{\xi})\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + (\mathbf{n},_{\eta} \bullet \mathbf{OM},_{\eta})\mathrm{d}\eta^2 \qquad (1.9\text{ b})$$

Se rappelant que, $\mathbf{n} \bullet \mathrm{d}\mathbf{OM} = \mathbf{n} \bullet (\mathrm{A}\,\mathbf{t}_{\xi}\,\mathrm{d}\xi + \mathrm{B}\,\mathbf{t}_{\eta}\,\mathrm{d}\eta) = \mathbf{0}$ alors,

$$\mathrm{d}(\mathbf{n} \bullet \mathbf{dOM}) = (\mathbf{n} \bullet \mathbf{dOM}),_{\xi}\mathrm{d}\xi + (\mathbf{n} \bullet \mathbf{dOM}),_{\eta}\mathrm{d}\eta = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}(\mathbf{n} \bullet \mathbf{dOM}) = (\mathbf{n},_{\xi} \bullet \mathbf{dOM} + \mathbf{n} \bullet \mathbf{dOM},_{\xi})\,\mathrm{d}\xi + (\mathbf{n},_{\eta} \bullet \mathbf{dOM} + \mathbf{n} \bullet \mathbf{dOM},_{\eta})\,\mathrm{d}\eta = \mathbf{0} \qquad (110\text{a,b})$$

$\therefore$

$$\mathbf{n},_{\xi} \bullet \mathbf{dOM} = -\,\mathbf{n} \bullet \mathbf{dOM},_{\xi}$$

$$\mathbf{n},_{\eta} \bullet \mathbf{dOM} = -\,\mathbf{n} \bullet \mathbf{dOM},_{\eta} \qquad (1\ 11\text{ a, b})$$

Le développement donne

$$\mathbf{n},_{\xi} \bullet (\mathbf{OM},_{\xi} d\xi + \mathbf{OM},_{\eta} d\eta) = -\mathbf{n} \bullet (\mathbf{OM},_{\xi\xi} d\xi + \mathbf{OM},_{\xi\eta} d\eta)$$

$$\mathbf{n},_{\xi} \bullet \mathbf{OM},_{\xi} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\xi\xi}$$

$$\mathbf{n},_{\xi} \bullet \mathbf{OM},_{\eta} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\xi\eta}$$

$$\mathbf{n},_{\eta} \bullet (\mathbf{OM},_{\xi} d\xi + \mathbf{OM},_{\eta} d\eta) = -\mathbf{n} \bullet (\mathbf{OM},_{\xi\eta} d\xi + \mathbf{OM},_{\eta\eta} d\eta)$$

$$\mathbf{n},_{\eta} \bullet \mathbf{OM},_{\xi} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\xi\eta}$$

$$\mathbf{n},_{\eta} \bullet \mathbf{OM},_{\eta} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\eta\eta}$$

$$\mathbf{n},_{\xi} \bullet A\, \mathbf{t}_{\xi} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\xi\xi} = L$$

$$\mathbf{n},_{\xi} \bullet B\, \mathbf{t}_{\eta} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\xi\eta} = M$$

$$\mathbf{n},_{\eta} \bullet A\, \mathbf{t}_{\xi} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\xi\eta} = M$$

$$\mathbf{n},_{\eta} \bullet B\, \mathbf{t}_{\eta} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\eta\eta} = N$$

Par substitution de (1.11) dans (1.9 b) on obtient la seconde forme fondamentale

$$II = d\mathbf{OM} \bullet d\mathbf{n} = L\, d\xi^2 + 2M\, d\xi d\eta + N\, d\eta^2 \qquad (1.12\text{ a})$$

avec

$$L = -(\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\xi\xi}) = -aX,_{\xi\xi} - bY,_{\xi\xi} - cZ,_{\xi\xi}$$

$$M = -(\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\xi\eta}) = -aX,_{\xi\eta} - bY,_{\xi\eta} - cZ,_{\xi\eta} \qquad (1.12\text{ b})$$

$$N = -(\mathbf{n} \bullet \mathbf{OM},_{\eta\eta}) = -aX,_{\eta\eta} - bY,_{\eta\eta} - cZ,_{\eta\eta}$$

$$II = \begin{bmatrix} d\xi & d\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \qquad (1.12\text{ c})$$

La courbure est

$$K = \frac{II}{I} = \frac{L\,d\xi^2 + 2M\,d\xi d\eta + N\,d\eta^2}{A^2\,d\xi^2 + 2AB\,d\xi d\eta + B^2\,d\eta^2} \tag{1.13}$$

On a aussi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n},_{\xi} \bullet \mathbf{t}_{\xi} & \mathbf{n},_{\xi} \bullet \mathbf{t}_{\eta} \\ \mathbf{n},_{\eta} \bullet \mathbf{t}_{\xi} & \mathbf{n},_{\eta} \bullet \mathbf{t}_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{A} & \frac{M}{B} \\ \frac{M}{A} & \frac{N}{B} \end{bmatrix}$$

Les courbures sont maximums ou minimums sur les courbes θ = constantes et ξ = constante. Le rayon de courbure R_S relatif à la courbe méridienne ($d\theta = 0$) et celui relatif à la courbe circonférentielle R_θ ($ds = 0$), lorsque l'épaisseur est constante sont représentés à la figure1.5 avec $\mathbf{t}_\eta = \mathbf{i}_\theta$ et $\mathbf{t}_\xi = \mathbf{t}$

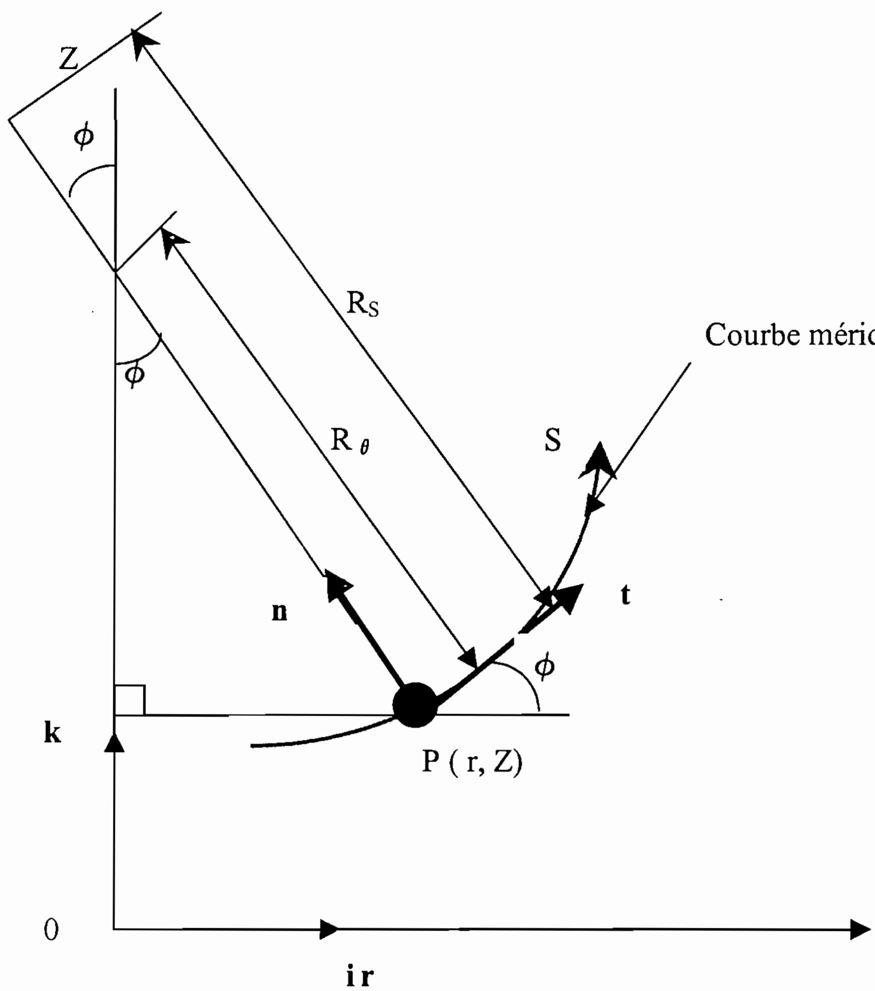


Figure 1.5 : Rayon de courbure R_S et R_Θ

1.2.5.2 Evaluation de la torsion T

L'expansion du produit mixte donne

$$(\mathbf{n}, d\mathbf{OM}, d\mathbf{n}) = (\mathbf{n} \times d\mathbf{OM}) \bullet d\mathbf{n} = [\mathbf{n} \times (\mathbf{OM},_\xi d\xi + \mathbf{OM},_\eta d\eta] \bullet d\mathbf{n} \quad (1.14\ a)$$

Avec les considérations géométriques de la figure 1.3

$$(\mathbf{n}, d\mathbf{OM}, d\mathbf{n}) = (A\,\mathbf{p}_\eta d\xi - B\,\mathbf{p}_\xi) \bullet d\mathbf{n} \quad (1.14\ b)$$

Observant (8.6 e)

$$(\mathbf{n}, d\mathbf{OM}, d\mathbf{n}) = [A(\frac{1}{\sin\omega}\mathbf{t}_\eta - \cot\omega\,\mathbf{t}_\xi)d\xi - B(\frac{1}{\sin\omega}\mathbf{t}_\xi - \cot\omega\,\mathbf{t}_\eta)d\eta] \bullet d\mathbf{n}$$

$$= \frac{1}{\sin\omega}[-L(\frac{B}{A}d\xi d\eta + \cos\omega\, d\xi^2) + M(\frac{A}{B}d\xi^2 - \frac{B}{A}d\eta^2) + N(\frac{A}{B}d\xi d\eta + \cos\omega\, d\eta^2)]$$

(1.14 c)

La torsion est alors

$$T = \frac{1}{\sin\omega}\frac{[-L(\frac{B}{A}d\xi d\eta + \cos\omega\, d\xi^2) + M(\frac{A}{B}d\xi^2 - \frac{B}{A}d\eta^2) + N(\frac{A}{B}d\xi d\eta + \cos\omega\, d\eta^2)]}{A^2\, d\xi^2 + 2\,AB\, d\xi d\eta + B^2\, d\eta^2}$$

(1.15)

1.2.6. Courbure et torsion dans les directions $\mathbf{t}_\xi$ et $\mathbf{t}_\eta$

Dans la direction $\mathbf{t}_\xi$ $(d\eta = 0)$

$$K_\xi = \frac{L}{A^2}$$

(1.16)

$$T_\xi = -\frac{M}{H} + \cot\omega\ K_\xi$$

Dans la direction $\mathbf{t}_\eta$ $(d\xi = 0)$

$$K_\eta = \frac{L}{B^2}$$

(1.17)

$$T_\eta = \frac{M}{H} + \cot\omega\ K_\eta$$

1.2.7 Spécialisation dans le cas d'une coque de révolution

Dans le cas d'une coque de révolution à épaisseur constante les vecteurs $\mathbf{t}_\xi$ et $\mathbf{t}_\eta$ correspondent respectivement à $\mathbf{i}_\theta$ et $\mathbf{t}$

Un repère cartésien est défini tel que l'axe Z coïncide avec l'axe de symétrie de révolution du solide ou de la coque. Le vecteur position d'un point quelconque est défini par ses coordonnées cartésiens X, Y, Z

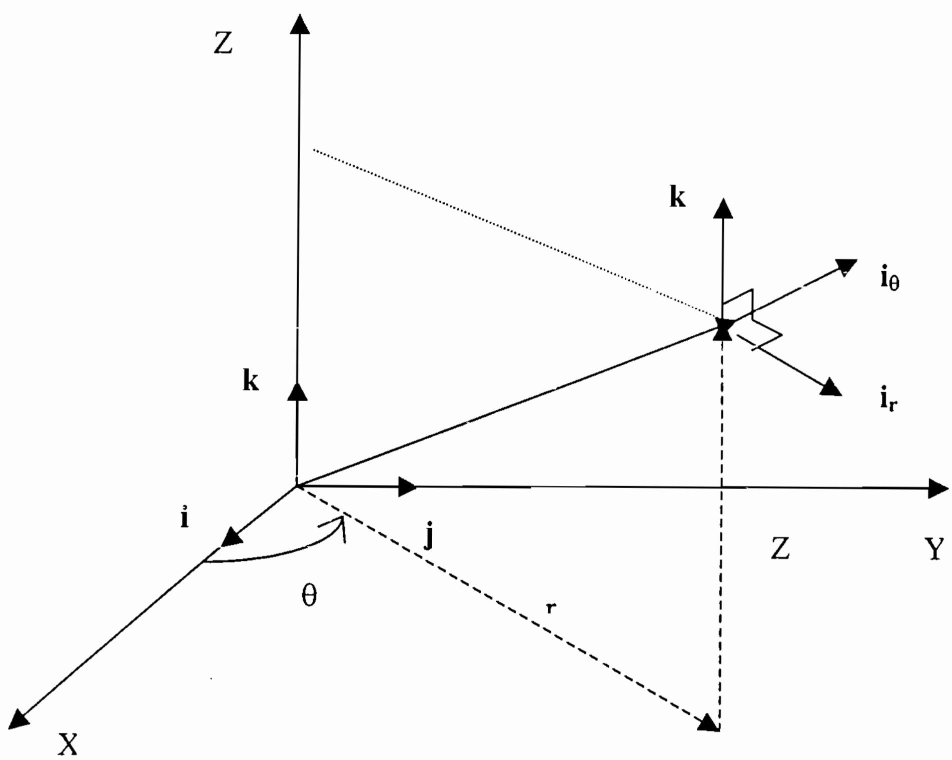


Figure 1.6 : Repère cylindrique et cartésien

Les composantes du vecteur x dans les bases cartésienne et cylindrique sont reliées par la matrice orthogonale $[Q_{xr}]$:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} \qquad (1.18)$$

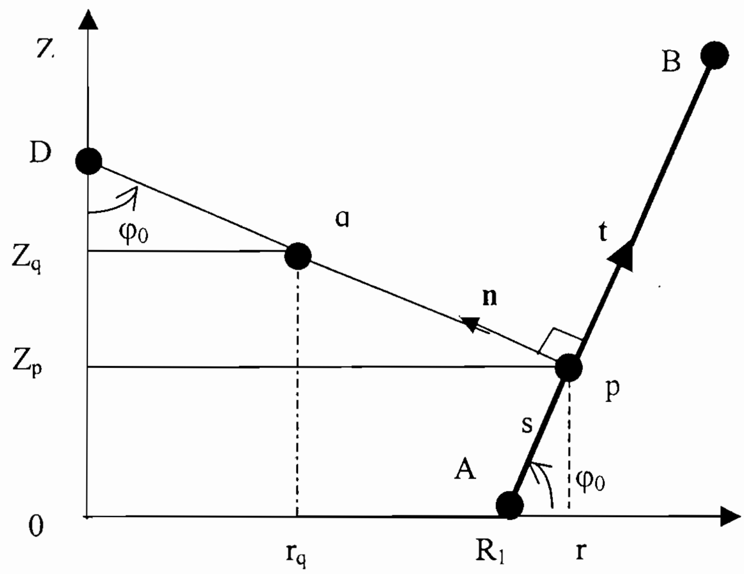


Figure 1.7 Tronc de cône

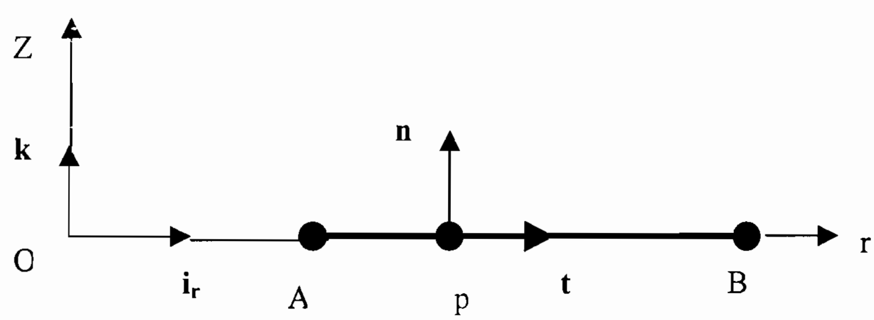


Figure 1.8 couronne circulaire $R_s = R_\theta = \infty$

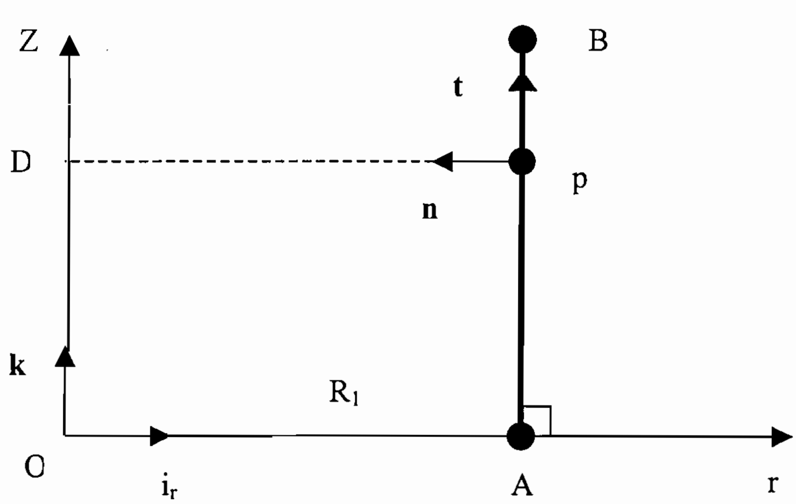


Figure1.9 cylindre Cylindre $R_s = \infty$ $R_\theta = R_l$

Lorsque l'épaisseur est variable , on introduit le paramétre ξ (Figure 1.10) suivant l'épaisseur tel que

$$x_q(\xi,\theta,\zeta)=x_p(\xi,\theta)+z(\zeta)\,n(\xi,\theta)$$

$$z(\zeta)=\frac{h}{2}\zeta \qquad -1<\zeta<1$$

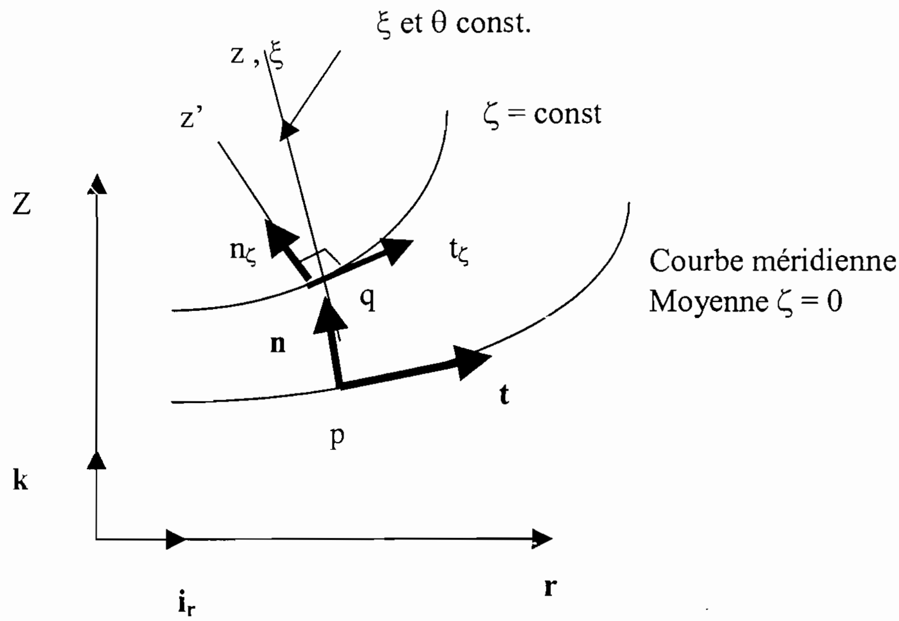


Figure 1.10 cas d'une coque à épaisseur variable

1.3 Relations cinématiques

1.3.1 *Hypothèse de Mindlin* (Hypothèse des sections droites)

L'hypothèse des sections droites permet d'exprimer les déplacements virtuels d'un point quelconque q en fonction des déplacements virtuels du point p situé sur la surface moyenne (ou de référence) et en fonction d'un accroissement de déplacements virtuels dû à la rotation de la section. Cette hypothèse nous a permis d'établir les déformations. dans le repère curviligne .

$$\begin{Bmatrix} e \\ \chi \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_s \\ e_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{1}{R_s} & 0 \\ \frac{\cos\phi}{r} & -\frac{\sin\phi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & 0 & \frac{\cos\phi}{r} \\ \frac{1}{R_s} & \frac{\partial}{\partial s} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \beta \end{Bmatrix} \qquad (1.3.1)$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}} = [u \quad w \quad \beta] \qquad (1.3.2)$$

$$\epsilon^{\mathrm{T}} = [e \quad \chi \quad \gamma] \qquad (1.3.3)$$

$$L' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\cos\phi}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{R_s} \\ -\frac{1}{R_s} & -\frac{\sin\phi}{r} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\cos\phi}{r} & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.3.4)$$

1.3.2 *Hypothèse de Kirchhoff* (Hypothèse de la conservation des normales)

La théorie des coques dites de Kirchhoff est basée sur l'hypothèse de la conservation des normales : « les points matériels situés sur une normale **n** à la surface moyenne A avant déformation restent sur une normale à la surface moyenne déformée .

Les déformations de membranes ainsi que les courbures ont été données dans le repère cylindrique. On admet que les déformations de CT sont négligeables. Ce qui implique que $\gamma=0$

$$\begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_s \\ e_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{1}{R_s} & 0 \\ \frac{\cos\phi}{r} & -\frac{\sin\phi}{r} & 0 \\ \frac{1}{R_s}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial R_s}{\partial s^2}\frac{1}{R_s^2} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ -\frac{\cos\varphi}{r R_s} & -\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial s} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \beta \end{Bmatrix} \qquad (1.3.5)$$

$$\mathbf{U}^{\mathbf{T}} = [u \quad w \quad \beta] \qquad (1.3.6)$$

$$\epsilon^{\mathbf{T}} = [e \quad \chi] \qquad (1.3.7)$$

$$L' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\cos\phi}{r} & \frac{1}{R_s}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial R_s}{\partial s^2}\frac{1}{R_s^2} & -\frac{\cos\varphi}{r R_s} \\ -\frac{1}{R_s} & -\frac{\sin\phi}{r} & 0 & -\frac{\cos\varphi}{R_s} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\cos\phi}{r} \end{bmatrix} \qquad (1.3.8)$$

1.4 Conditions d'équilibre

Les équations d'équilibre ont été établies à partir de l'expression des travaux virtuels (P.T.V.)

$W = W_{int} - W_{ext} = 0$ (1.4.1

$$\begin{cases} \frac{\partial (r N_s)}{\partial s} + \cos\varphi\, N_\theta + \frac{r T_s}{R_s} - r\left(f_s - \rho_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_{mf} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}\right) = 0 \\ \frac{r T_s}{R_s} - \sin\varphi\, N_\theta - \frac{\partial (r T_s)}{\partial s} - r\left(f_s - \rho_{mf} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0 \\ \frac{\partial (r M_s)}{\partial s} + \cos\varphi\, N_\theta + r T_s - r\left(m_s - \rho_{mf} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho f \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}\right) = 0 \end{cases} \qquad (1.42.)$$

Cette relation traduite sous forme matricielle donne

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial s}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s} & \frac{\cos\phi}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{R_s} \\ -\frac{1}{R_s} & -\frac{\sin\phi}{r} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial s}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\cos\phi}{r} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \\ T_s \end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix} r\,(f_s-\rho_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho_{mf}\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}) \\ r\,(f_s-\rho_{mf}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \\ r\,(m_s-\rho_{mf}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho_{-}\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.4.3}$$

avec

$$\sigma^T = \lfloor N_s \quad N_\theta \quad M_s \quad M_\theta \quad T_s \rfloor \tag{1.4.4}$$

$$b^T = \left[r\,(f_s-\rho_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho_{mf}\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad r\,(f_s-\rho_{mf}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \quad r\,(m_s-\rho_{mf}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho_f\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \right] \tag{1.4.5}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial s}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s} & \frac{\cos\phi}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{R_s} \\ -\frac{1}{R_s} & -\frac{\sin\phi}{r} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\cos\phi}{r} & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.6}$$

Habituellement on a $L' = L^T$ mais dans le cas présent tel n'est pas le cas dans :
l'hypothèse de Mindlin à cause du terme $-\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}$
l'hypothèse de Kirchhoff à cause de négligence de la déformation de CT

1.5 Loi constitutive

Nous allons considérer une coque constituée de matériaux élastiques subissant de petites déformations et de petits déplacements. Les relations contraintes – déformations sont établies avec l'hypothèse de contraintes planes et d'anisotropie plane. On suppose également que les propriétés élastiques sont axisymétriques. D'où les relations suivantes :

$$\sigma = [H]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \tag{1.5.1}$$

avec

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{sz'} \end{bmatrix} ; \langle \sigma \rangle = \langle \sigma_s \quad \sigma_\theta \quad \sigma_{sz'} \rangle ; \quad \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_s \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_{sz'} \rangle$$

(1.5.2 a, b, c)

z' est une direction d'orthotropie

En considérant une coque constituée d'un empilement de couches orthotropes, les axes d'orthotropie étant s et θ .En considérant les définitions des efforts résultants et en utilisant les relations contraintes–déformations (équation ci-dessous) et les relations cinématiques basées sur l'hypothèse de Mindlin (équation 1.3.1) on obtient :

$$N_s = \int_{-t}^{t} \alpha_2 \sigma_s \, dz \qquad N_\theta = \int_{-t}^{t} \alpha_1 \sigma_\theta \, dz \qquad (1.5.3 \text{ a, b})$$

$$M_s = \int_{-t}^{t} \alpha_2 \sigma_s \, z \, dz \qquad M_\theta = \int_{-t}^{t} \alpha_1 \sigma_\theta \, z \, dz \qquad (1.5.4 \text{ a, b})$$

on a

$$\{N\} = \lfloor H_m \rfloor \{e\} + \lfloor H_{mf} \rfloor \{\chi\} + \{N_0\}$$

$$\{M\} = \lfloor H_{mf} \rfloor \{e\} + \lfloor H_f \rfloor \{\chi\} + \{M_0\} \qquad (1.5.5)$$

$$T_s = H_c \gamma + T_0$$

Ces relations traduites sous forme matricielle donne :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ T_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} & 0 \\ H_{mf} & H_f & 0 \\ 0 & 0 & H_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \chi \\ \gamma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_0 \\ M_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} \qquad (1.5.6)$$

où $H_m = \int_{-t}^{t} [HA]\, dz$, $H_{mf} = \int_{-t}^{t} [HA]\, z\, dz$, $H_f = \int_{-t}^{t} [HA]\, z^2\, dz$ (1.5.7)
sont les rigidités homogénéisées avec

$$[\ HA\ ] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} H_{11} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_c = k \int_{-t}^{t} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} G_{sz}\, dz \qquad (1.5.8a,b)$$

1.5.1 cas anisotrope

Dans le cas anisotrope la matrice H est donnée par

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{sz'} \end{bmatrix} \qquad (1.5.9)$$

1.5.2 Cas orthotrope

Dans ce cas précis la matrice H est donné ci-dessous

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{sz} \end{bmatrix} \quad (1.5.10)$$

$$\langle \sigma_0 \rangle = \langle \Delta T \left[H_1 (\alpha_1^{th} + \alpha_2^{th} \nu_{21}) \quad H_1 (\alpha_1^{th} \nu_{12} + \alpha_2^{th}) \quad 0 \right] \quad (1.5.11)$$

est un vecteur de contraintes initiales d'origines thermiques où ΔT représente la variation de la température et α_1^{th} et α_2^{th} sont des coefficients de dilatation thermique dans les directions 1et 2

1.5.3 Cas isotrope

Dans le cas d'un matériau isotrope la matrice H est la suivante

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{sz} \end{bmatrix} \quad (1.5.12)$$

$$< \sigma_{0t} > = \frac{E\alpha^{th}\Delta T}{1-\upsilon} < 1 \quad 1 \quad 0 > \quad (1.5.13)$$

est un vecteur de contraintes initiales d'origines thermiques où ΔT représente la variation de la température et α_1^{th} et α_2^{th} sont des coefficients de dilatation thermique dans les directions 1et 2 .

1.6 Conditions au bords

Les différents types de conditions aux limites sont représentés dans le tableau suivant

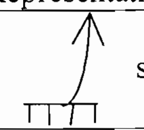
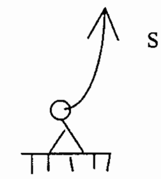
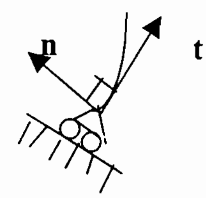
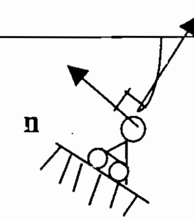
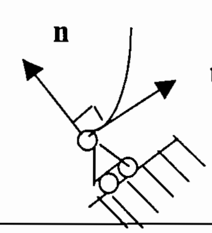
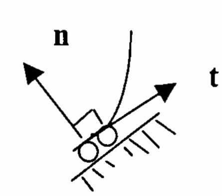
Type de conditions	Variables connues	Variables inconnues	Représentations
Encastrement S_u	$U_p=0 \quad \beta=0$	$N_s \ T_s \ M_s$	
Appui fixe (rotule) : S_u et S_f	$U_p \quad M=0$	$N_s \ T_s \ \beta$	
Appui roulant suivant **n** S_u et S_f	$U=0 \ \ f_z=0 \ \ M=0$	$N_s \ w \ \ M_s$	
Idem sans rotule : S_u et S_f	$U=0 \ \ f_z=0 \ \ \beta=0$	$N_s \ w \ \ M_s$	
Appui roulant suivant **t**: S_u et S_f	$F_s \ \ w=0 \ \ M=0$	$U \ T_s \ M_s$	
Idem sans rotule	$F_s \ \ w=0 \ \ \beta=0$	$U \ T_s \ M_s$	
Appui roulant	$U=0 \ \ F_z=M=0$ $F_r=W=M=0$	$F_r \ W \ \beta$ $U \ F_z \ \beta$	
Liaisons internes - rotules - joint au dilatation	$M_s=0 \ \ N_s=0$		
Symétrie	$W=u=0$ $T_s=0 \quad \beta=0$	$N_s \ w \ \ M_s$	

Tableau 1

1.7 Formulation variationnelle

Cette partie est relative aux aspects théoriques des coques de révolution dont le comportement est axisymétrique .les champs de déplacement virtuels ont été défini avec l'hypothèse des sections droites (modèle de Reissner/Mindlin), puis avec l'hypothèse d'un champs de déplacement indépendant de θ, on établit les expressions de déformations virtuelles en utilisant la description cylindrique ou curviligne. Nous donnons l'expression du principe des travaux virtuels dans le cas d'une épaisseur constante pour des sollicitations volumiques, surfaciques, statiques et dynamique

. Principe des travaux virtuels en axisymétrique

Le principe des travaux virtuels dans lc cas d'un problème axisymétrique s'écrit

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \qquad (1.7.1)$$

Lorsque l'épaisseur est constant on a

$$W_{int} = 2\pi \int_S \left(\langle e^* \rangle \{N\} + \langle \chi^* \rangle \{M\} + \gamma^* T_S \right) r \, ds \qquad (1.7.2)$$

avec $\langle e^* \rangle = \langle e^*_S \quad e^*_\theta \rangle \quad \langle N^* \rangle = \langle N^*_S \quad N^*_\theta \rangle \quad \langle M^* \rangle = \langle M^*_S \quad M^*_\theta \rangle \quad (1.7.3)$

Les efforts résultants de membrane suivant s et θ de flexion (moments)autour de i_θ et de t et l'effort tranchant sont représentés à la Figure 1.11

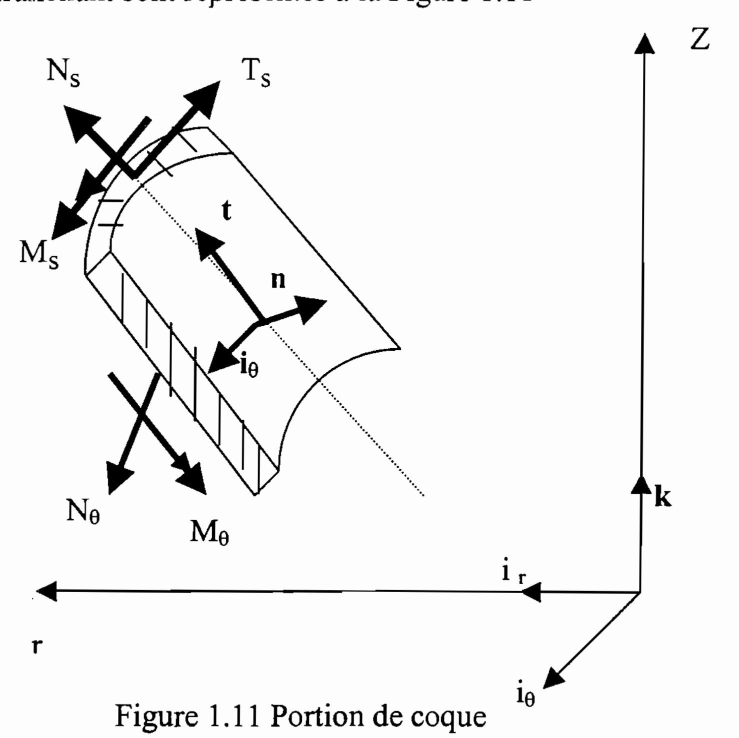
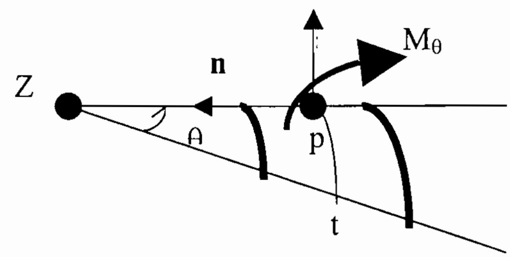
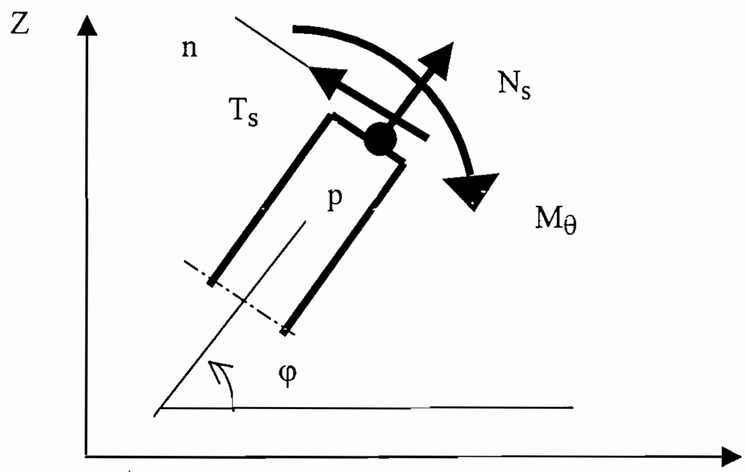


Figure 1.11 Portion de coque



b) Plan $\mathbf{i}_\theta$, **n**

Figure 1.12 Moment M_θ et effort résultant de membrane N_θ



a)Plan **t, n**

Figure 1.13 Moment M_S et effort résultant de membrane N_S et effort tranchant T_S

Le travail virtuel externe est la somme du travail virtuel externe des forces de volume et d'inertie .

$$W_{ext}(\text{inertie}) = 2\pi \int_S (u^* f_S + w^* f_z + \beta^* m_s)\, r\, ds$$

$$-2\pi \int_S u^*.(\rho_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_{mf} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} t \quad + \beta^*.(\rho_{mf} \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \rho f \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} t) + w^*.\rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$+ 2\pi (r\, u^* F_S + r\, w^* F_Z + r\, \beta^* M)\, s_f \qquad (1.7.4)$$

Avec $\rho_m = \int_{-t}^{t} \rho \, \alpha_1 \alpha_2 \, dz \qquad \rho_{mf} = \int_{-t}^{t} \rho \, \alpha_1 \alpha_2 \, z \, dz$ (1.7.5a, b)

$$\rho_f = \int_{-t}^{t} \rho \, \alpha_1 \alpha_2 \, z^2 \, dz \tag{1.7.6}$$

où $\alpha_1 = 1 - \frac{z}{R_s} \qquad \alpha_2 = 1 - \frac{z}{R_\theta}$ (1.7.7)

1.8 Fonctions d'interpolation

1.8.1 Elément tronconique sans contrainte transversale (CAXI_ K)

L'élément CAXI_ K est un élément tronconique mais il est basé sur la théorie de Kirchhoff avec approximations linéaires de la géométrie des déplacements tangentiels de la surface moyenne et une approximation cubique du déplacement transversal .Il a trois degrés de liberté par nœud

1.8.1.1 Matrice de Rigidité

La matrice de rigidité a été établi à l'aide du principe des travaux virtuels (P.T.V), des expressions des déformations de membranes et des courbures.

$-1 \leq \xi \leq 1$

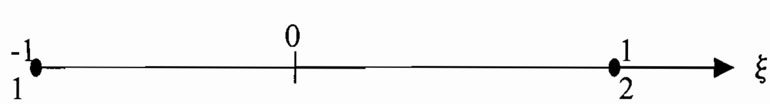


Figure 1.14 Elément de référence

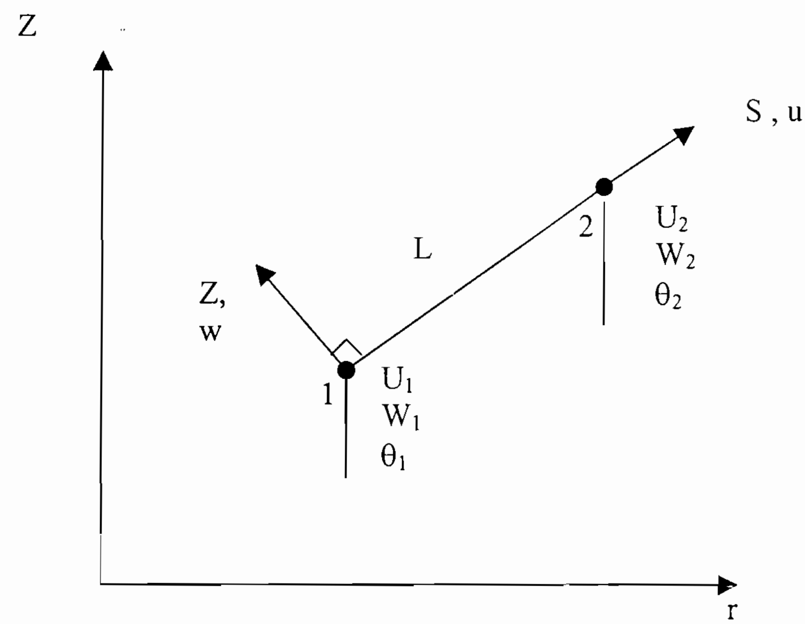


Figure 1.15 Elément tronconique CAXI_L

Approximation de u (ξ) $-1 \leq \xi \leq 1$

$$u(\xi) = N_1^L u_1 + N_2^L u_2 \quad ; \quad N_1^L = \frac{1-\xi}{2} \quad ; \quad N_2^L = \frac{1+\xi}{2} \qquad (1.8.1a, b, c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{2}{L}\frac{\partial u}{\partial \xi} \qquad (1.8.2a, b)$$

approximation de w (ξ):

$$w = \langle N \rangle \{w_n\} \quad ; \qquad \langle w_n \rangle = \langle w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \rangle \qquad (1.8.3a, b)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \qquad N_2 = -\frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi)$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \qquad N_4=-\frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi)$$

$$N_1,s=\frac{3}{2L}(-1+\xi^2) \qquad N_2,s=-\frac{1}{4}(-1-2\xi+3\xi^2)$$

$$N_3,s=\frac{3}{2L}(1-\xi^2) \qquad N_4,s=-\frac{1}{4}(-1+2\xi+3\xi^2) \qquad (1.8.4)$$

$$N_1,ss=\frac{6}{L^2}\xi \qquad N_2,ss=-\frac{1}{L}(-1+3\xi)$$

$$N_3,ss=-\frac{6}{L^2}\xi \qquad N_4,ss=-\frac{1}{L}(1+3\xi)$$

or les déformations de membrane sont donnés par

$$\{e\}=\begin{Bmatrix} e_s \\ e_\theta \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ \frac{C}{r} & \frac{S}{r} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \qquad (1.8.5)$$

$$\left.\begin{matrix} u=N_1^L u_1+N_2^L u_2 \\ w=N_1 w_1+N_3 w_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N_1^L & 0 & N_2^L & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \qquad (1.8.6a, b)$$

$$\text{d'où}\quad \{e\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial s} & 0 \\ \dfrac{C}{r} & -\dfrac{S}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^L & 0 & N_2^L & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^L}{\partial s} & 0 & \dfrac{\partial N_2^L}{\partial s} & 0 \\ C\dfrac{N_1^L}{r} & -\dfrac{N_1 S}{r} & \dfrac{CN_2^L}{r} & -\dfrac{N_3 S}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{L} & 0 & \dfrac{1}{L} & 0 \\ C\dfrac{N_1^L}{r} & -\dfrac{N_1 S}{r} & \dfrac{CN_2^L}{r} & -\dfrac{N_3 S}{r} \end{bmatrix} \quad (1.8.7)$$

donc dans le repère cylindrique la matrice B_m est donnée par

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & 0 & 0 & \dfrac{1}{L} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{r}N_1^L C & -\dfrac{1}{r}N_1 S & -\dfrac{1}{r}N_2 S & \dfrac{1}{r}N_2^L C & -\dfrac{1}{r}N_3 S & -\dfrac{1}{r}N_4 S \end{bmatrix} \quad (1.8.8)$$

$$[Bf] = \begin{bmatrix} 0 & -N_{1,ss} & -N_{2,ss} & 0 & -N_{3,ss} & -N_{4,ss} \\ 0 & -\dfrac{C}{r}N_{1,s} & -\dfrac{C}{r}N_{2,s} & 0 & -\dfrac{C}{r}N_{3,s} & -\dfrac{C}{r}N_{4,s} \end{bmatrix} \quad (1.8.9)$$

La matrice de rigidité est obtenue à partir de la relation suivante :

$$W_{int}^e = 2\pi \int_0^L \left(\langle e^* \rangle \left([H_m]\{e\} + [H_{mf}]\{\chi\} \right) + \langle \chi^* \rangle \left([H_{mf}]\{e\} + [H_f]\{\chi\} \right) \right) r\, ds \quad (1.8.10)$$

$$= \langle u^*_n \rangle_{loc} [k]_{loc} \{u_n\}_{loc} \quad (1.8.11)$$

$$[k]_{loc} = 2\pi \int_0^L \left[k_\xi \right] ds = 2\pi \int_{-1}^{1} \left[k_\xi \right] \frac{L}{2} d\xi \quad (1.8.12)$$

avec $$\left[k_\xi \right] = (\left[B_m \right]^T (\left[H_m \right] \left[B_m \right] + \left[H_{mf} \right] \left[B_f \right])$$

$$+ \left[B_f \right]^T (\left[H_{mf} \right] + \left[H_f \right] \left[B_f \right])) r \quad (1.8.13)$$

1.8.1.2 Matrice de masse

La matrice de masse est obtenue, elle à partir de la relation suivante :

$$W^e_{int} = 2\pi \int_0^L (u^* \rho_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + w^* \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \theta^* \rho_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + u^* \rho_{mf} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \theta^* \rho_{mf} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) \, r \, ds$$
(1.8.14)

$$= \langle u^*_n \rangle_{loc} [m]_{loc} \left\{ \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right\}_{loc} \quad (1.8.15)$$

avec $$\theta^* = - w^*,s \quad ; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (1.8.16)$$

d'où

$$[m]_{loc} = 2\pi \int_0^L \left[m_\xi \right] ds = 2\pi \int_{-1}^{1} \left[m_\xi \right] \frac{L}{2} d\xi \quad (1.8.17)$$

$$[m\,\xi] = (\left\{ N^L \right\} \rho_m \langle N^L \rangle + \left\{ N^C \right\} \rho_m \langle N^C \rangle$$

$$+\{N^C_{,s}\}\rho_f\langle N^C_{,s}\rangle-\{N^L\}\rho_{mf}\langle N^C_{L,s}\rangle-\{N^C_{L,s}\}\rho_m\langle N^L\rangle)r \qquad (1.8.18)$$

$$\langle N^L\rangle=\langle N^L_1 \quad 0 \quad 0 \quad N^L_2 \quad 0 \quad 0\rangle$$

$$\langle N^C_L\rangle=\langle 0 \quad N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4\rangle \qquad (1.8.19)$$

$$\langle N^C_{,S}\rangle=\langle 0 \quad N_{1,s} \quad N_{2,s} \quad 0 \quad N_{3,s} \quad N_{4,s}\rangle$$

1.8.1.3 Forces équivalentes aux nœuds

Le vecteur des forces équivalentes aux nœuds est :

$$\left\{f_n\right\}=2\pi\int_{-1}^{1}\left\{f_\xi\right\}r\frac{L}{2}d\xi \qquad (1.8.20)$$

$$\left\{f_\xi\right\}=\{N^L\}f_s+\{N^C\}f_z+\left\{N^C_{,s}\right\}m_s \qquad (1.8.21)$$

Les matrices $\{N^L\}$ $\{N^C\}$ $\{N^C_{,s}\}$ sont définies en (1.8.19)

1.8.2 Elément tronconique linéaire (caxi_L)

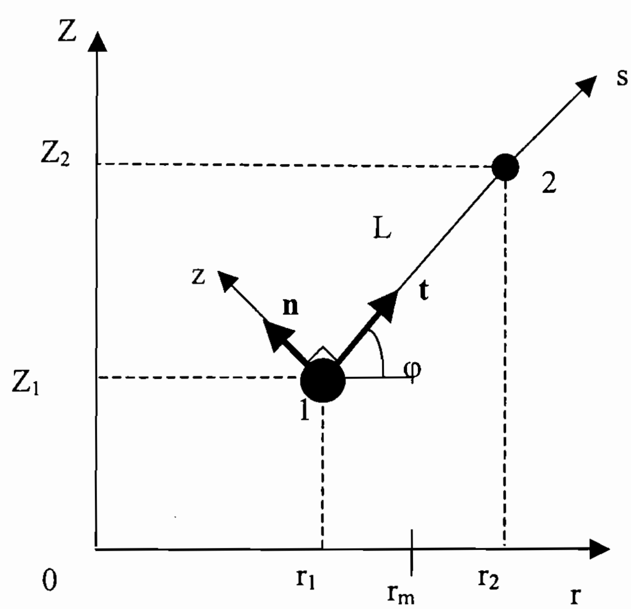


Figure 1.16 Géométrie d'un élément génératrice d'un tronc de cône

L' élément CAXI_ L est un élément tronconique mixte à deux nœuds avec approximations linéaires de la géométrie (coordonnées r et Z), des déplacements et rotations et des approximations constantes des efforts tranchants .L' élément CAXI_L a trois degrés de liberté par nœuds .

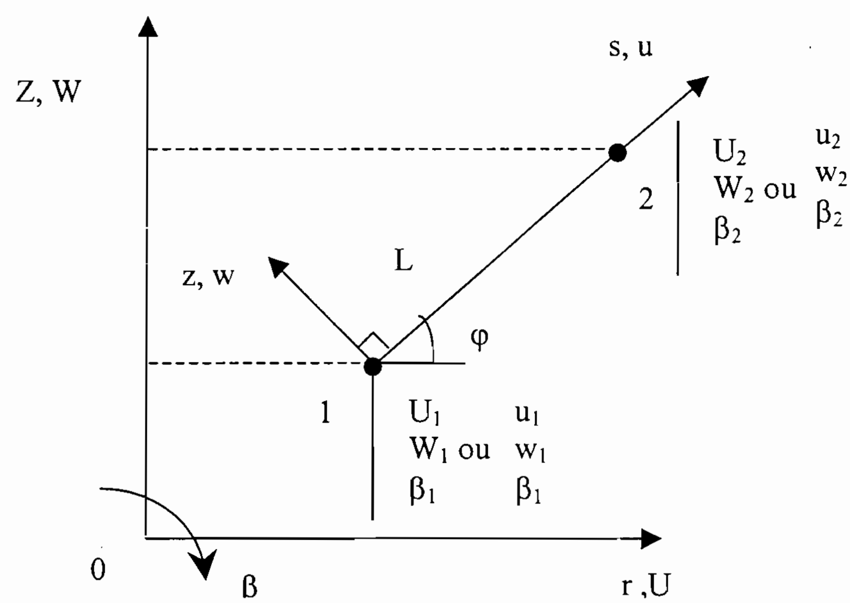


Figure 1.17 Elément tronconique linéaire CAXI_L

On pose $C = \cos \varphi$

$S = \sin\varphi$

La relation liant le repère global au repère local est la suivante :

$$\begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \tag{1.8.22}$$

$$\left.\begin{matrix} U = N_1 U_1 + N_2 U_2 \\ W = N_1 W_1 + N_2 W_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} \tag{1.8.23}$$

or les déformations de membrane sont donnés par

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_s \\ e_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C\frac{\partial}{\partial s} & S\frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} \tag{1.8.24}$$

d'où $$\{e\} = \begin{bmatrix} C\frac{\partial}{\partial s} & S\frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} \tag{1.8.25}$$

$$=\begin{bmatrix} C\frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & C\frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_1}{r} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-C}{L} & 0 & \frac{-C}{L} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_1}{r} & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.8.26)$$

donc dans le repère cylindrique la matrice B_m est donnée par :

$$\left[B_m\right]=\begin{bmatrix} -\frac{C}{L} & -\frac{S}{L} & 0 & \frac{C}{L} & \frac{S}{L} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.8.27)$$

$$\langle u_n\rangle = \langle U_1 \quad W_1 \quad \beta_1 \quad U_2 \quad W_2 \quad \beta_2 \rangle \qquad (1.8.28)$$

les courbures sont données par :

$$\{\chi\}=\begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial s} \\ \frac{C}{r}\beta \end{Bmatrix} \quad \text{or } \beta=\beta_1 N_1+\beta_2 N_2 \Rightarrow \{\chi\}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{L}\beta_1 -\frac{1}{L}\beta_2 \\ \frac{C}{r}\beta_1 N_1 +\frac{C}{r}\beta_2 N_2 \end{Bmatrix} \qquad (1.8.29)$$

donc dans le repère cylindrique la matrice B_f est donnée par

$$\left[B_f\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{N_1 C}{r} & 0 & 0 & \frac{N_2 C}{r} \end{bmatrix} \qquad (1.8.30)$$

les déformations de contraintes transversal (CT) sont données par :

$$\gamma=\beta+\psi=\beta - S\frac{\partial U}{\partial s}+C\frac{\partial W}{\partial s} \quad \text{or } \beta=\beta_1 N_1+\beta_2 N_2 \text{ , } U=N_1 U_1+N_2 U_2 \text{ , } W=N_1 W_1+N_2 W \qquad (1.8.31)$$

donc dans le repère cylindrique la matrice B_c est donnée par

$$\langle B_c \rangle = \langle \frac{S}{L} \quad -\frac{C}{L} \quad N_1 \quad -\frac{S}{L} \quad \frac{C}{L} \quad N_2 \rangle \tag{1.8.32}$$

1.8.2.1 Matrice de Rigidité

$$W_{int}^e = 2\pi \int_0^L (\langle e^* \rangle ([H_m]\{e\} + [H_{mf}]\{\chi\}) + \langle \chi^* \rangle ([H_{mf}]\{e\} + [H_f]\{\chi\}))$$

$$+\gamma^* T_s + T_s^* (\gamma - H_{-1}^c T_s)) \, r \, ds \tag{1.8..33}$$

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \; : \; T_s^* \rangle \begin{bmatrix} [k_{mf}] & [k_{mft}] \\ \langle k_{mft} \rangle & -k_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ T_s \end{Bmatrix} \tag{1.8.34}$$

avec $[k_{mf}] = 2\pi \int_0^L ([B_m]^T ([H_m][B_m] + [H_{mf}][B_f])$

$$+ [B_f]^T ([H_{mf}] + [H_f][B_f])) \, rds \tag{1.8.35}$$

$$k_{mft} = 2\pi \int_0^L \{B_c\} r \, ds \qquad k_T = 2\pi \int_0^L \frac{r}{H_c} ds \tag{1.8.36}$$

1.8.2.2 Matrice de masse

la matrice de masse est obtenu à partir de l'équation suivante

$$W_{int}^e = 2\pi \int_0^L (u_p^* (\rho_m \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \rho_{mf} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} t) + \beta^* t (\rho_{mf} \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \rho_f t)) \, r \, ds \tag{1.8.37}$$

Dans le cas d'un matériau homogène , elle se présente sous la forme suivante

$$[m]=2\pi\rho h\frac{L}{6}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & -2bC & r_m & 0 & -bC \\ & a_1 & -2bS & 0 & r_m & -bS \\ & & \frac{h^2}{12}a_1 & -bC & -bS & \frac{h^2}{12}r_m \\ & & & a_2 & 0 & -2bC \\ & & & & a_2 & -2bS \\ & \text{SYM} & & & & \frac{h^2}{12}a_2 \end{bmatrix} \quad (1.8.38)$$

avec $a_1 = r_1 + r_m$; $a_2 = r_2 + r_m$; $b=\frac{h^2}{12}S$ (1.8.39)

1.8.2.3 Forces équivalentes aux nœuds

On distingue 4 types de sollicitations :

Les sollicitations surfaciques, volumiques, linéaires et celles qui sont dues à la température.

- Sollicitations volumiques

Il s'agit principalement des forces de gravité et des forces découlant des pressions moyennes exercées sur la surface moyenne dont leurs expressions sont les suivantes :

- forces de gravité

$$f_{nv} = -2\pi\rho g h\frac{L}{6}\langle 0 \quad (2r_1 + r_2) \quad -(\frac{hS}{2})^2 \quad 0 \quad (2r_2 + r_2) \quad -(\frac{hS}{2})^2 \rangle \quad (1.8.40)$$

- Si la surface moyenne est soumise à une pression uniforme on a

$$f_{nv} = -2\pi p\frac{L}{6}\langle -Sa_1 \quad Ca_1 \quad 0 \quad -Sa_2 \quad Ca_2 \quad 0\rangle \quad (1.8.41)$$

- Sollicitations linéiques au nœud 2 :

$$f_{ns} = -2\pi\langle 0 \quad 0 \quad 0 \quad F_{r2} \quad F_{z2} \quad M_2\rangle \quad (1.842)$$

- Sollicitations dues à la température :

$$f_\sigma = \frac{E\alpha^{th} h\, r_m\, L T_0}{1-\nu} \left(\left[B_m\right]^T \begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} - \frac{S h^2}{12 r_m} \left[B_f\right]^T \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \right)$$

(1.8.43)

1.8.3 Elément isoparamétrique quadratique (CAXI_Q)

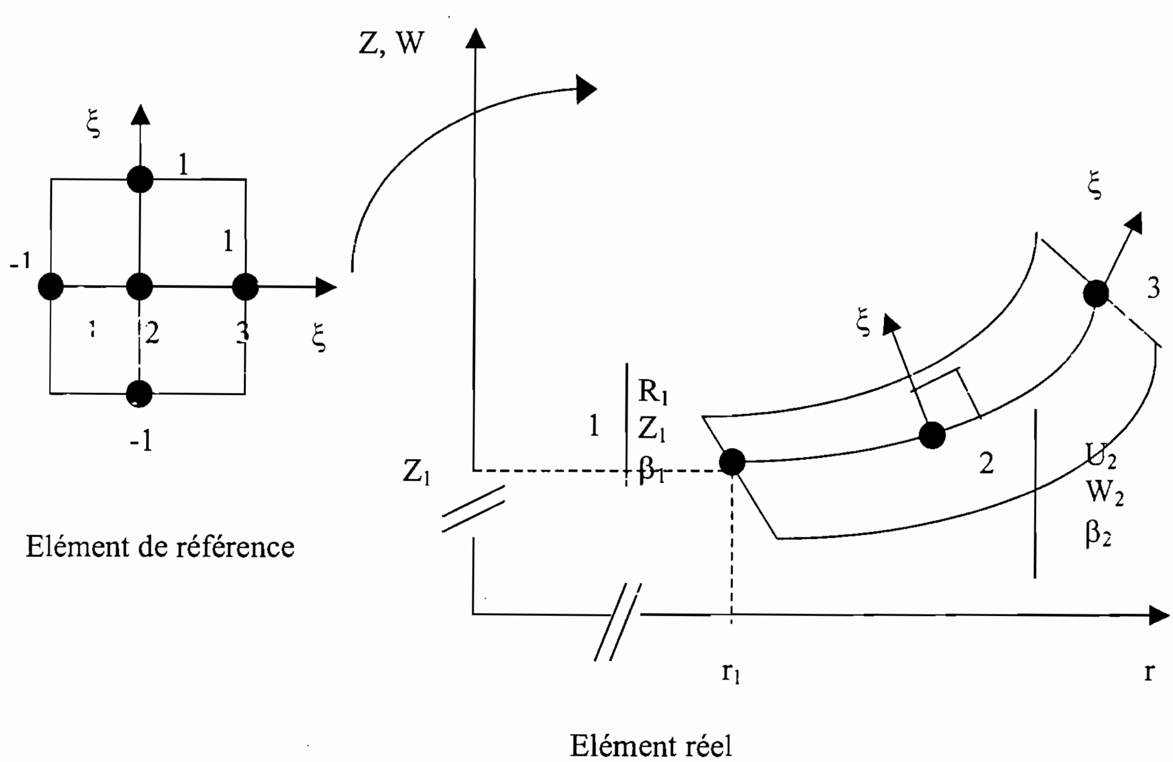


Figure 1.18 Elément quadratique CAXI_Q

1.8.3.1 Matrice de rigidité

La forme intégrale élémentaire W_{int} est

$$W^e_{int} = \langle u^*_n \rangle \left[k\right] \left\{u_n\right\} \tag{1.8.44}$$

$$k = 2\pi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k_\xi \, d\zeta\, d\xi \tag{1.8.45}$$

avec $$\left[k_{\xi}(\xi,\zeta)\right] = [B]^{T}[H][B]\,J \qquad (1.8.46)$$

B est la matrice qui lie le vecteur des déformation réelles au vecteur u_n
et J est le Jacobien . H est la matrice définie en (1.5.2a)

1.8.3.2 Matrice de masse

Pour définir la matrice de masse cohérente , on considère

$$W^{e}_{m} = \langle u^{*}_{n} \rangle [m] \{\ddot{u}_{n}\} \qquad (1.8.47)$$

avec $$\frac{\partial_2 u^{*}_{n}}{\partial t_2} = \langle \dots \; \frac{\partial_2 U_i}{\partial t_2} \quad \frac{\partial_2 W_i}{\partial t_2} \quad \frac{\partial_2 \beta_i}{\partial t_2} \; \dots \rangle \qquad (1.8.48)$$

$$[m] = 2\pi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [N]_{T}\, \rho\, [N]\, J\, d\xi\, d\zeta \qquad (1.8.49)$$

1.8.3.3 Forces équivalentes aux nœuds

Pour les sollicitations volumiques les charges équivalentes sont données par :

$$\{f_{nv}\} = 2\pi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [N]^{T} \{f_{v}\} J\, d\xi\; d\zeta \qquad (1.8.50)$$

2 Application Pratique

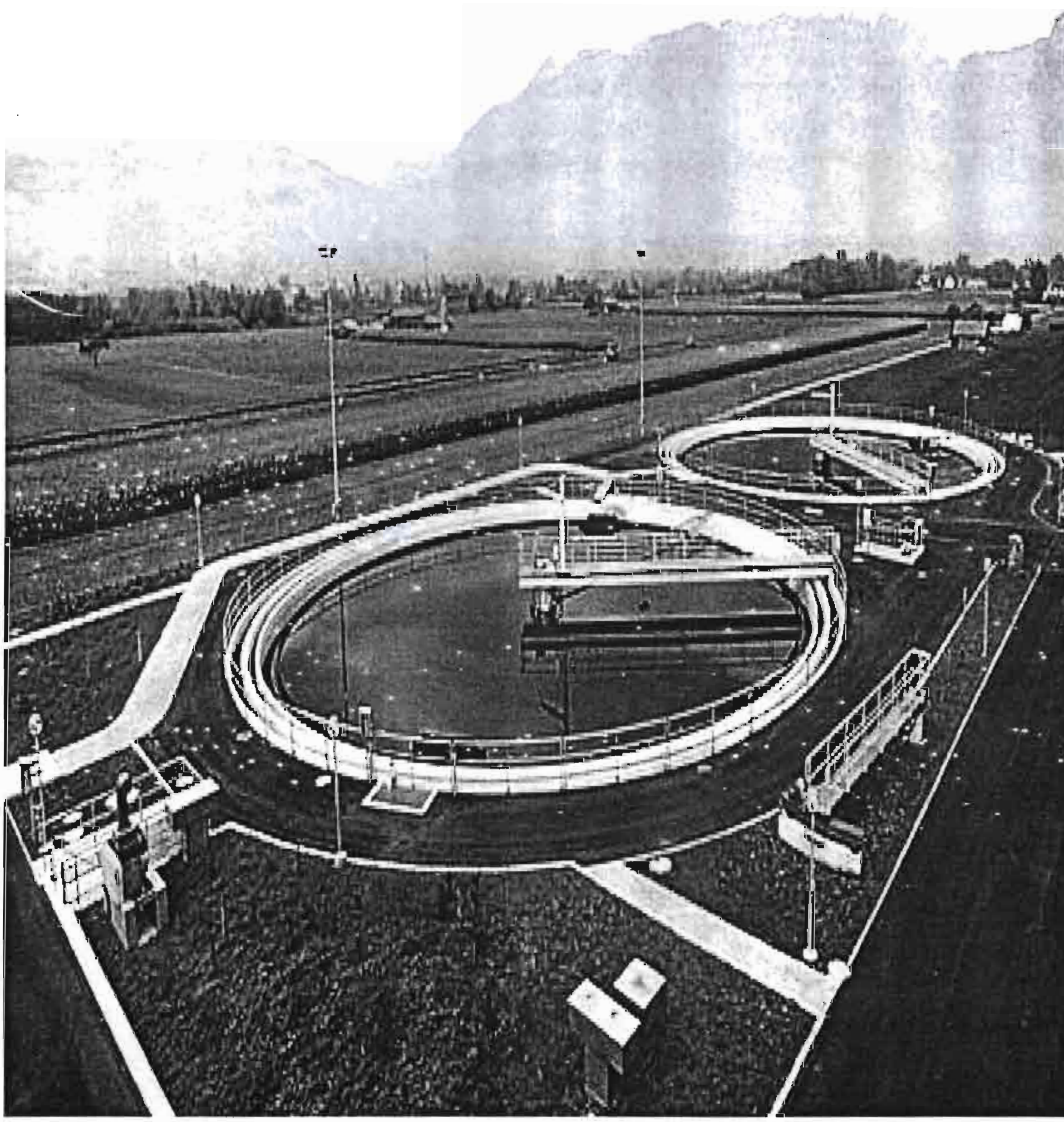


Figure 1.19 : Photo d'un bassin de décantation

A l'aide du logiciel Microfe on a dimensionné un réservoir de type cylindrique comme montré ci-dessus . Ainsi les efforts internes , le mémoire disque et le temps de calcul sont évalués. Le nombre d'éléments, de nœuds et d'équation utilisé est considérable

ANALYSE STATIQUE DU RESERVOIR

(proFE-80999/20699)

--Contrôler le traitement des sous-structures: 0 sec

--Valeurs système globales

Éléments	Noeuds	Équations	Contraintes	Espace disque
1580	1525	9150	4477881	34 Mbyte

Cas de charge : 3

--Valeurs système Sous-/Superstructure

Sous Structure/Superstructure			Principale-		Interne	
Elément		Espace mémoire	Nœud	Equation	Nœud	Equation
1	42876	334 Kbyte	24	144	48	288
2	1350942	10 Mbyte	108	648	396	2376
3	18666	145 Kbyte	24	144	12	72
4	65901	514 Kbyte	36	216	41	246
5	3178812	24 Mbyte	120	720	872	5232
DECANT	334836	2615 Kbyte	0	0	156	936

--Espace disque nécessaire

Mémoire	nécessaire	disponible
Calculatrice d'équation	26 Mbyte	oui

Espace disque	nécessaire	disponible	Répertoire:\
Résultats	4333 Kbyte	8510 Mbyte	'C:\MB\PROJEKTE\P...'

Bloc 42 Mbyte 8510 Mbyte 'C:\MB\MicroFe\BL...'

--Résolution de la fonction statique

Sous-struc./ Temps calcul

Superstructure sec

Sous-struc.	
1	1
2	25
3	1
4	1
5	39
DECANT	8

--Charge totale / Réaction d'appui totale

Cas	Px / Ax [Kn]	Py / Ay [Kn]	Pz / Az [Kn]
1	-0.00 / 0.00	-7.07 / 7.07	-14420.82 / 14420.82
2	-24.88 / 24.88	-45.20 / 45.20	-25116.46 / 25116.46
3	0.00 / -0.00	0.00 / -0.00	-1674.43 / 1674.43

--Résultats

pour la Sous structure : 3 sec

--Fin de l'analyse statique

Temps de calcul : 103 sec

*** Calcul correct ***

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Afin de modéliser la coque de révolution plusieurs éléments sont utilisés : l'élément CAXI_L, CAXI_K pour les coques à épaisseur constante et l'élément CAXI_Q pour les coques à épaisseur variable. Pour chaque élément on a déterminé la matrice de rigidité , de masse et les forces équivalentes aux nœuds .Ces trois facteurs une fois connu permettent d'évaluer les déplacements aux niveaux des nœuds, les efforts internes qui comparés aux valeurs de référence nous donne une idée sur la fiabilité de chaque l'élément. Des patchs – tests auraient pu être faits pour évaluer les performances et la précision des modèles. Après de telles vérifications, une comparaison entre le logiciel Microfe et les résultats découlant des éléments testés nous édifiera plus amplement sur la validité du modèle.
Enfin nous pensons que le travail qui a été fait sera poursuivi dans le cadre des projets de fin d'étude pour déboucher sur une plate forme qui exploitée donnerait de bons résultats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jean –Louis BATOZ and Gouri DATT. Modélisation des structures par éléments finis. Vol 3. Mars 1992. 564 p.

[2] Kenneth H. HUEBNER , Earl A. THORHTON and Ted G. BYROM. The finite element method .Third edition . 1995. 627 p

[3] O.C ZIENKIEWICZ , FRS and R . L TAYLOR .The finite element method . Fourth edition . Vol 1. 1988. 648 p

[4] Thomas J.R. HUGHES . The finite element method.1987.803 p

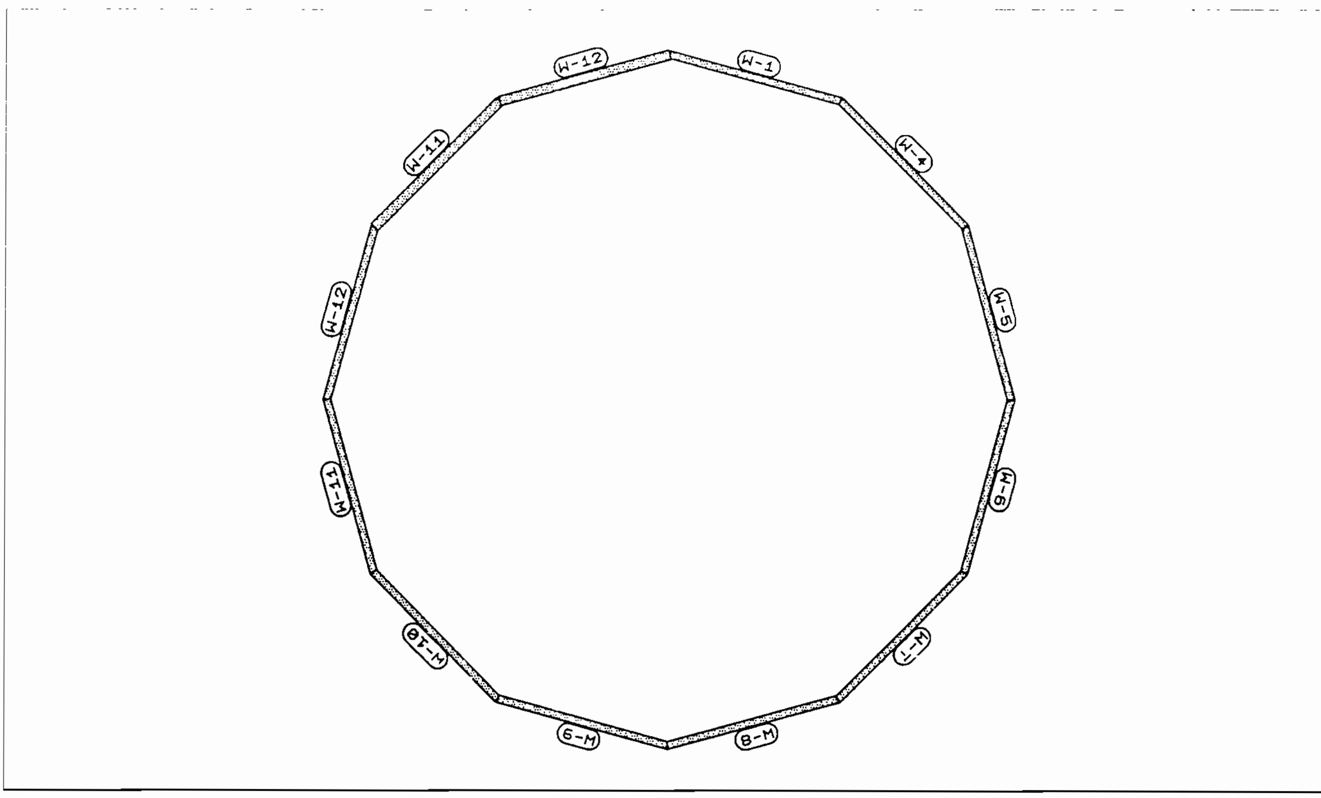
[5] Jean –Louis BATOZ and Gouri DATT. Modélisation des structures par éléments finis. Vol 2. septembre1995. 483 p.

[6] Jean –Louis BATOZ and Gouri DATT. Modélisation des structures par éléments finis. Vol 1. Mars 1992. 564 p.

ANNEXES

Résultats du dimensionnement du réservoir à l'aide du logiciel Microfe

Plan de repérage



Elé D-2 Plancher

Structure x = -2.04 -3.54 -4.09 -3.54 -2.04 0.00 2.04 m

y = -3.54 -2.04 0.00 2.04 3.54 4.09 3.54 m

z = 1.74 1.74 1.74 1.74 1.74 1.74 1.74 m

x = 3.54 4.09 3.54 2.04 0.00 -2.04 m

y = 2.04 0.00 -2.04 -3.54 -4.09 -3.54 m

z = 1.74 1.74 1.74 1.74 1.74 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 50.18 m^2

Volume = 7.53 m^3

Etage 3.Etage

Elé D-1 **Plancher**

Structure x = -14.53 -8.39 0.00 8.39 14.53 16.77 14.53 m

y = 8.39 14.53 16.77 14.53 8.39 0.00 -8.39 m

z = 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 m

x = 8.39 0.00 -8.39 -14.53 -16.77 -14.53 m

y = -14.53 -16.77 -14.53 -8.39 0.00 8.39 m

z = 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 45.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 837.22 m^2

Volume = 376.75 m^3

Etage Fondation

Elé W-25 **Mur**

Structure x = -3.54 -4.09 m

y = -2.04 0.00 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé W-12 Mur

Structure x = -16.48 -14.27 m

y = 0.00 8.24 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-11 Mur

Structure x = -14.27 -16.48 m

y = -8.24 0.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-10 Mur

Structure x = -8.24 -14.27 m

y = -14.27 -8.24 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-9 Mur

Structure x = 0.00 -8.24 m

y = -16.48 -14.27 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-8 Mur

Structure x = 8.24 0.00 m

y = -14.27 -16.48 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

M Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-7 Mur

Structure x = 14.27 8.24 m

y = -8.24 -14.27 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-6 Mur

Structure x = 16.48 14.27 m

y = 0.00 -8.24 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-5 Mur

Structure x = 14.27 16.48 m

y = 8.24 0.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-4 Mur

Structure x = 8.24 14.27 m

y = 14.27 8.24 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-2 Mur

Structure x = -4.09 -3.54 m

y = 0.00 2.04 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé W-1 Mur

Structure x = 0.00 8.24 m

y = 16.48 14.27 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 35.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 10.52 m^3

Etage Murs

Elé W-13 Mur

Structure x = -0.75 -1.30 m

y = 1.30 0.75 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-14 Mur

Structure x = -1.30 -1.50 m

y = 0.75 0.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-15 Mur

Structure x = -1.50 -1.30 m

y = 0.00 -0.75 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-16 Mur

Structure x = -1.30 -0.75 m

y = -0.75 -1.30 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-17 Mur

Structure x = -0.75 0.00 m

y = -1.30 -1.50 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-18 Mur

Structure x = 0.00 0.75 m

y = -1.50 -1.30 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-19 Mur

Structure x = 0.75 1.30 m

y = -1.30 -0.75 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-20 Mur

Structure x = 1.30 1.50 m

y = -0.75 0.00 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-21 Mur

Structure x = 1.50 1.30 m

y = 0.00 0.75 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-22 Mur

Structure x = 1.30 0.75 m

y = 0.75 1.30 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-23 Mur

Structure x = 0.75 0.00 m

y = 1.30 1.50 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé W-24 Mur

Structure x = 0.00 -0.75 m

y = 1.50 1.30 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 1.74 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 20.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 1.35 m^2

Volume = 0.27 m^3

Etage cylindre_inf

Elé w-1 Mur

Structure x = -3.54 -2.04 m

y = 2.04 3.54 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé w-2 Mur

Structure x = -2.04 0.00 m

y = 3.54 4.09 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé w-3 Mur

Structure x = 0.00 2.04 m

y = 4.09 3.54 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé w-4 Mur

Structure x = 2.04 3.54 m

y = 3.54 2.04 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé w-5 Mur

Structure x = 3.54 4.09 m

y = 2.04 0.00 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Ètage Déversoir

Elé w-6 Mur

Structure x = 4.09 3.54 m

y = 0.00 -2.04 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé w-7 Mur

Structure x = 3.54 2.04 m

y = -2.04 -3.54 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé w-8 Mur

Structure x = 2.04 0.00 m

y = -3.54 -4.09 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé w-9 Mur

Structure x = 0.00 -2.04 m

y = -4.09 -3.54 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé w-10 Mur

Structure x = -2.04 -3.54 m

y = -3.54 -2.04 m

Niveau inf. = 1.73 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 15.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 3.79 m^2

Volume = 0.57 m^3

Etage Déversoir

Elé w-11 Mur

Structure x = -14.27 -8.24 m

y = 8.24 14.27 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 45.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 13.53 m^3

Etage Murs

Elé w-12 Mur

Structure x = -8.24 0.00 m

y = 14.27 16.48 m

Niveau inf. = 0.00 m, Niveau sup. = 3.52 m

Matériau Coque isotrope

Epais = 45.0 cm

Poids = 25.00 kN/m3

Mod E = 3.00e+007 kN/m2

Nu = 0.20

Surface = 30.06 m^2

Volume = 13.53 m^3

Etage Murs

Elé F-1 App surfacique

Structure x = 14.53 16.77 14.53 8.39 0.00 -8.39 -14.53 m

y = -8.39 0.00 8.39 14.53 16.77 14.53 8.39 m

x = -16.77 -14.53 -8.39 0.00 8.39 14.53 m

y = 0.00 -8.39 -14.53 -16.77 -14.53 -8.39 m

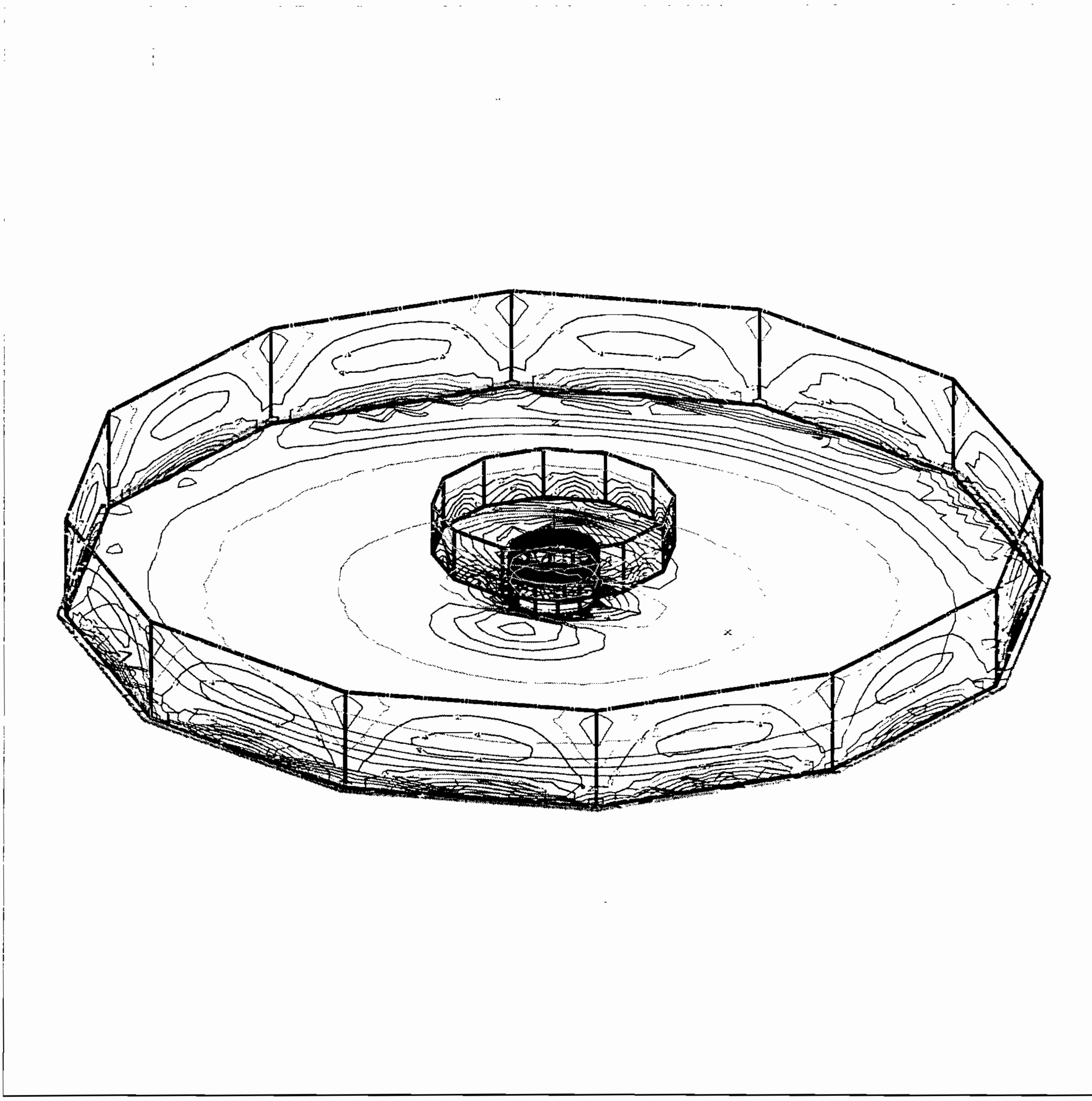
Niveau = 0.0 m

Appui Appui Compr/Trac Trans suivant axe x = 2.00e+005 kN/m3

Appui Compr/Trac Trans suivant axe y = 2.00e+005 kN/m3

Appui Compr Trans suivant axe z = 2.00e+005 kN/m3

Ètage Fondation



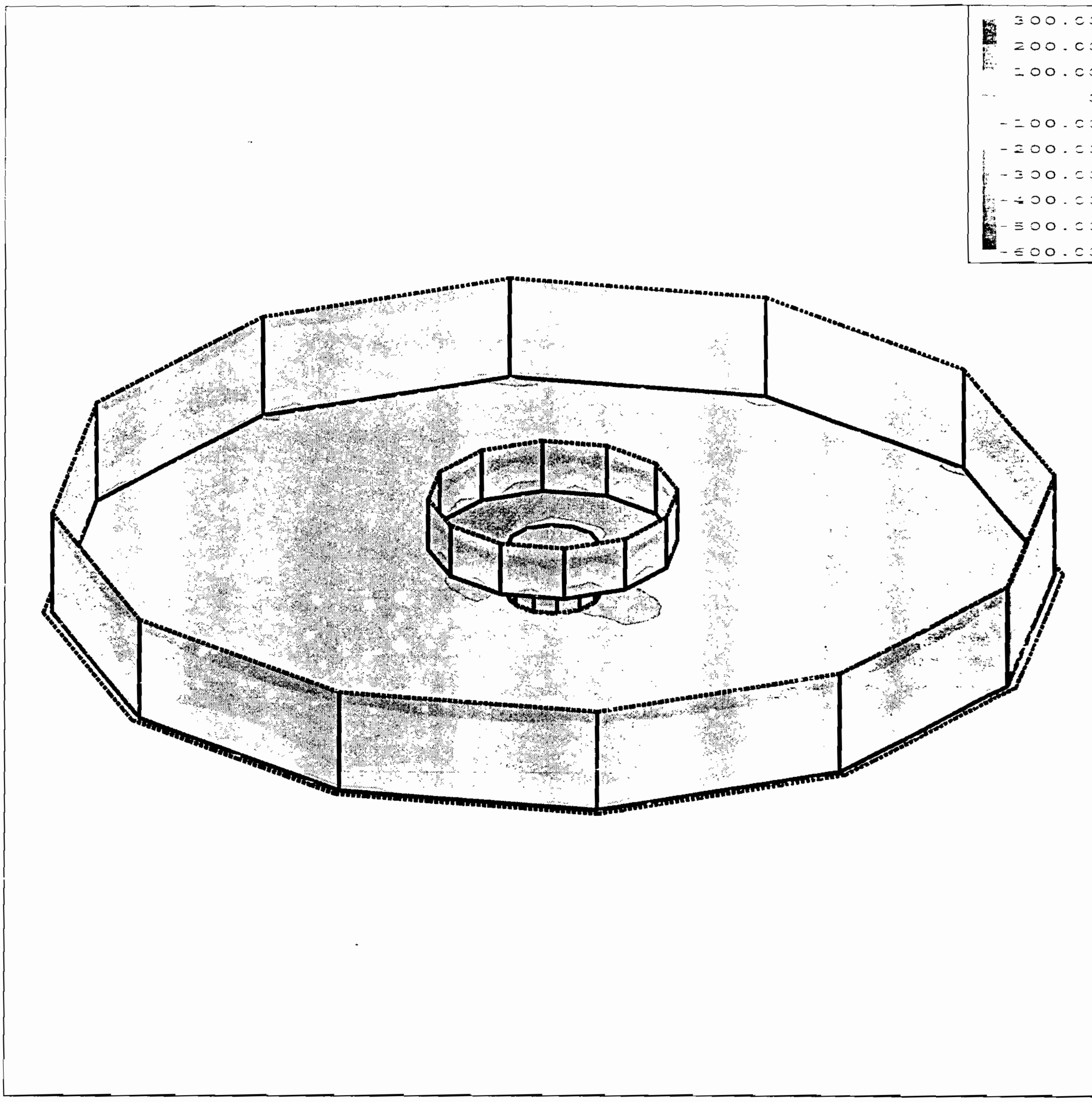
Moments ms, toutes les surfaces

Cas 1 Min = -16.64kNm/m

Max = 25.82kNm/m

Pas = 2.00kNm/m

Moments M_S



Cont Normale sr , toutes les surfaces

Cas 1 Min = -590.10kN/m^2

Max = 293.71kN/m^2

Pas = 100.00kN/m^2

<u>Contrainte normale sr</u>