

REPUBLIQUE DU SENEGAL

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



GC 0525

ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE  
Centre de THIES

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

## PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR DE CONCEPTION

TITRE : ANALYSE STRUCTURALE DES QUAIS A PONTON FIXE OU  
MOBILE UTILISANT LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

### AUTEURS :

Khadime NIANG  
Cheikh Sidate THIAM

**DIRECTEUR** : Dr. Moustapha NDIAYE.

**CO-DIRECTEUR** : M. Séni TAMBA, Ing.

**DIRECTEUR EXTERNE** : M. Léon DIOUF, Ing.

Juillet 2008

## SOMMAIRE

Cette étude s'inscrit dans la construction d'infrastructures de débarquement et d'embarquement lancée par l'Etat du Sénégal pour améliorer la mobilité urbaine. Ces ouvrages se situent d'une part sur la côte atlantique sud de Dakar à Mbour en passant par Thiaroye, Rufisque et Saly et d'autre part sur la côte atlantique ouest de Dakar à Ngor en passant par le site de l'Hôpital Le Dantec, Soubédioun et Ouakam. Il est à noter que ces sites sont exposés à la houle de large qui vient déferler sur la côte sans aucun ouvrage de protection en amont.

Le but de ce projet est la détermination des efforts dus à la houle sur les ouvrages marins. Des applications vont porter sur le dimensionnement des quais.

Un outil de calcul numérique sera développé à ces effets. Ce dernier est basé sur la méthode de Trefftz qui permet la modélisation de l'effet des vagues au moyen d'éléments semi finis.

La méthode de Trefftz repose sur la résolution complète des équations aux dérivées partielles (EDP) qui régissent le problème. Les équations aux dérivées partielles utilisées se résument à l'équation de Helmholtz et de Poisson.

Les formulations directe et indirecte suivant le système complet et non singulier des fonctions de Trefftz seront mentionnées pour résoudre ces équations.

L'outil de calcul ROBOT Millennium permettra la détermination des efforts maximaux, des déplacements, des déformations et des contraintes extrêmes globaux.

**Mots clés:** quai, houle, marin, efforts, formulations directe et indirecte, méthode de Trefftz, système complet.

## DEDICACES

Nous remercions Dieu et dédions ce travail :

À nos parents, pour leurs soutiens incommensurables et leurs précieux conseils.

À nos frères, sœurs et amis.

À toute la promotion 2007-2008 de l'ESP Thiès.

À tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

À tous ceux qui ont participé de près ou de loin à notre cursus scolaire.

## REMERCIEMENTS

Nous exprimons nos sincères remerciements à toutes les personnes qui, de près ou de loin, de par leurs actes ou leurs conseils, ont contribué à la réalisation de ce projet.

Nous tenons à remercier en particulier :

- Notre Directeur interne, Dr. Moustapha NDIAYE, Professeur de structure au département génie civil de l'Ecole Polytechnique de Thiès pour sa grande disponibilité, ses conseils avisés ;
- Notre Co-directeur interne, M. Séni TAMBA, professeur à l'Ecole Polytechnique de Thiès;
- Notre Directeur externe M. Léon DIOUF Ing., Expert en aménagement portuaire ;
- Tout le corps professoral de l'Ecole Supérieure Polytechnique de Thiès ;
- Toutes les promotions de l'EPT et tous ceux qui nous ont soutenu, conseillé et encouragé tout au long de ce projet de fin d'études.

## TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE .....	I
DEDICACES .....	II
REMERCIEMENTS .....	III
TABLE DES MATIERES .....	IV
LISTE DES FIGURES .....	VII
LISTE DES UNITES ET SYMBOLES .....	VIII
INTRODUCTION.....	XIII
CHAPITRE 1 : .....	1
PRESENTATION DES TYPES D'OUVRAGES .....	1
1.1 ANALYSES FONCTIONNELLES .....	2
1.1.1 Rôles et fonctions.....	2
1.1.2 Les types de navires.....	3
1.1.3 Les types de structures.....	4
1.1.3.1 Quais en maçonnerie de pierres ou en blocs de béton de ciment.....	4
1.1.3.2 Quais et appontements utilisant des caissons.....	5
1.1.3.3 Ouvrages gabionnés en palplanches métalliques .....	6
1.1.3.4 Ouvrages utilisant des rideaux-plans de palplanches.....	6
1.1.3.5 Ouvrages en parois moulés dans le sol.....	7
1.1.3.6 Les ouvrages sur pieux.....	7
1.1.3.7 Les ouvrages sur piles .....	8
1.1.3.8 Les ducs d'Albe.....	9
1.1.3.9 Détermination des caractéristiques structurales .....	9
1.2 LES DIFFERENTS TYPES D'EFFORTS.....	10
1.2.1 Les efforts horizontaux .....	10
1.2.1 Les efforts verticaux.....	11
CHAPITRE 2: .....	12
PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	12
2.1 PROCEDURES GENERALES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	13
2.2 LE MODELE ELEMENTS FINIS CONVENTIONNEL BASE SUR LA METHODE DE RAYLEIGH- RITZ	14
2.3 LA METHODE DES ELEMENTS FINIS BASEE SUR LA CONSTRUCTION D'UN CHAMP DE TREFFTZ .....	18
2.3.1 La méthode dite hybride-Trefftz (H.T).....	18
2.3.1.1 La méthode basée sur les minimisations de la norme énergétique .....	19
2.3.1.2 La méthode basée sur la détermination du point stationnaire d'une fonctionnelle	22
2.3.2 La méthode des éléments de bord de Trefftz (M.E.B.T) .....	25

2.3.2.1	Formulation indirecte .....	25
2.3.2.2	Formulation par la méthode de collocation.....	26
2.3.2.3	Formulation par la méthode des moindres carrés.....	27
2.3.2.4	Formulation par la méthode de Galerkin.....	28
2.3.2.5	Formulation de Trefftz modifiée .....	29
2.3.2.6	Formulation directe .....	30
CHAPITRE 3 : .....		32
DETERMINATION DES CHARGES DUES A LA HOULE PAR METHODES SEMI-EMPIRIQUE.....		32
3.1	LES EQUATIONS FONDAMENTALES.....	33
3.1.1	Principe de continuité .....	33
3.1.2	Principe de la quantité de mouvement.....	35
3.1.3	Hypothèses et conditions aux limites [17].....	36
3.1.3.1	Hypothèses .....	36
3.1.3.2	Les conditions aux limites.....	36
3.2	Modélisation de la houle .....	37
3.2.1	Les paramètres caractéristiques .....	38
3.2.2	Les équations du mouvement.....	39
3.2.2.1	Equation de continuité.....	39
3.2.2.2	Equation de quantité de mouvement.....	39
3.2.2.3	Expression du potentiel $\Phi(x, z, t)$ .....	41
3.3	AUTRE APPROCHE DE DETERMINATION DU POTENTIEL DE VITESSE $\Phi$ .....	42
3.4	EXPRESSIONS DES EFFORTS SUR LES PILES .....	45
CHAPITRE 4: .....		50
DIFFRACTION SUR LES OUVRAGES EN MER.....		50
4.1	RAPPELS SUR LES EQUATIONS DE POISSON ET D'HELMHOLTZ.....	51
4.1.1	Spécialisation de l'équation de poisson .....	51
4.1.2	Spécialisation de l'équation d'Helmholtz.....	51
4.2	SOLUTION COMPLETE ET SYSTEME COMPLET .....	52
4.2.1	Equation de Poisson.....	52
4.2.2	Equation d'Helmholtz.....	53
4.3	FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME .....	54
4.3.3	Définition des paramètres physique du problème.....	56
4.3.4	Formulation de l'équation d'Helmholtz utilisant la méthode de Trefftz .....	57
4.3.4.1	La formulation indirecte.....	58
4.3.4.2	La formulation directe .....	59
4.4	APPLICATIONS .....	61
4.4.1	Sur un cylindre vertical.....	61
4.4.2	Sur un cylindre vertical infiniment long.....	64
4.4.3	Les fonctions Spéciales appliquées aux domaines anguleux et trou circulaire .....	65
4.4.3.1	Domaine anguleux avec l'équation de poisson.....	67
4.4.3.2	Domaine avec trou circulaire avec l'équation de poisson.....	68

4.4.3.3	Domaine anguleux avec l'équation d'Helmholtz.....	69
4.4.3.4	Domaine avec trou circulaire avec l'équation d'Helmholtz.....	71
CHAPITRE 5: .....		73
APPLICATION.....		73
5.1	EVALUATION DES EFFORTS DUS A LA HOULE .....	74
5.1.1	Selon M.S.E .....	75
5.1.2	Selon méthode numérique : .....	76
5.1.3	Les données du problème.....	74
5.1.4	Etude comparative des différentes formulations : .....	77
5.2	EVALUATION DES AUTRES EFFORTS SOLLICITANT L'OUVRAGE .....	78
5.2.1	Charges permanentes .....	78
5.2.2	Charges variables ou accidentelles: .....	79
5.3	PROCEDURE DE RESOLUTION DU PROBLEME : .....	84
5.3.1	Programme .....	84
5.3.2	Description.....	84
5.3.3	Les sous programmes intervenant : .....	85
5.3.4	Génération des nœuds : .....	85
5.3.5	Passage de l'élément de référence à l'élément réel : .....	86
5.3.6	Génération des éléments : .....	86
5.3.7	Introduction des charges : .....	87
5.3.8	Cylindre vertical : .....	87
5.3.9	Domaine anguleux .....	89
5.3.10	Domaine avec trou circulaire : .....	90
CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS: .....		92
BIBLIOGRAPHIE .....		93
ANNEXES .....		95

## LISTE DES FIGURES

Fig. 1: Quai en bloc .....	5
Fig. 2: Quai sur caisson .....	6
Fig. 3: Quai en rideau de palplanche .....	7
Fig. 4: Quai sur pieux .....	8
Fig. 5: Quai sur pile .....	8
Fig. 6: Quai sur duc d'able .....	9
Fig. 7: Structure de domaine quelconque .....	14
Fig. 8: Structure de domaine quelconque avant subdivision .....	15
Fig. 9: Structure de domaine quelconque après subdivision .....	16
Fig. 10: Point de collocation .....	29
Fig. 11: Représentation de $\eta(x,y)$ .....	38
Fig. 12: Impact de la houle sur une pile circulaire .....	45
Fig. 13: Diffraction autour d'une pile .....	61
Fig. 14: Domaine anguleux .....	66
Fig. 15: Domaine avec un trou .....	66
Fig. 16: Pression en fonction de la profondeur avec la méthode semi-empirique .....	76
Fig. 17: Pression en fonction de la profondeur avec la méthode numérique cas1 .....	76
Fig. 18: Pression en fonction de la profondeur avec la méthode numérique cas2. ....	77
Fig. 19: Schéma d'un bateau-taxi .....	81
Fig. 20: Élément maillé .....	85
Fig. 21: Passage de l'élément de référence à l'élément réel .....	86
Fig. 22: Présentation de Robot .....	90

## LISTE DES UNITES ET SYMBOLES

Symbole	Définition	unité
Chapitre 2		
$v$	Déplacement généralisé	
$\bar{v}$	Déplacement au bord généralisé	
$t$	Traction généralisé	
$\bar{t}$	Traction au bord généralisé	
$\Omega$	Domaine	
$\Gamma$	Frontière du domaine	
$\Gamma_c$	Frontière appuyée	
$\Gamma_f$	Frontière chargé	
$u$	Champ déplacement	
$d$	Déplacements nodaux	
$N$	Matrice des fonctions d'interpolation	
$L$	Opérateur différentiel	
$B = LN$	Matrice reliant les déformations aux variables nodales	
$\epsilon$	Matrice des déformations	
$\epsilon_0$	Matrice déformations initiales	
$E$	Matrice d'élasticité	
$\sigma$	Matrice des contraintes	
$\sigma_0$	Matrice des contraintes initiales	
$k_e$	Matrice de rigidité élémentaire	

$N_e$	Matrice des fonctions d'interpolation élémentaires	
$m_e$	Matrice masse élémentaire	
$c_e$	Matrice d'amortissement élémentaire	
$f_{n_e}$	Vecteur force initiale élémentaire	
$r_e$	Vecteur réaction élémentaire	
$K$	Matrice de rigidité globale	
$R, R^0$	Vecteur force équivalente aux nœuds	
$A^T$	Désigne la transposé de A (matrice ou vecteur)	
$\alpha$	$L^T E L$	
$T_i$	Matrice d'interpolation des tractions généralisées $t_i$	
$V_i$	Matrice d'interpolation des déplacements généralisés $v_i$	
$\delta$	Opérateur différentiel	
Chapitre 3, 4,5		
$\rho$	masse volumique du fluide	$kg/m^3$
$\omega$	vitesse angulaire	
$\mu$	viscosité dynamique du fluide.	$m^2/s$
$\nu$	Viscosité dynamique	$Pa.s$
$\gamma$	Cambrure	
$\Phi$	fonction potentielle totale	
$\Phi^i$	Fonction potentielle incidente	
$\Phi^s$	Fonction potentielle diffractée	

$T$	Période de l'onde	s
$c$	Célérité de l'onde	m/s
$L$	Longueur d'onde	m
$L_0$	Longueur d'onde en eau profonde	m
$\eta$	Élévation de l'onde	m
$P$	Pression dynamique	Pa
$H$	Creux de l'onde	m
$g$	Constante de gravité	$m/s^2$
$V$	Vitesse	
$u, v, w$	Composantes de la vitesse	
$k$	Nombre d'onde	$m^{-1}$
$R$	Facteur de réponse à la pression	
$F$	Force	kN
$M$	Moment	kN.m
$\Omega$	Domaine	
$\Gamma$	Frontière du domaine	
$\nabla$	L'opérateur nabra	
$\Delta$	Laplacien	
$J_n$	Fonction de Bessel d'ordre n premier genre	
$Y_n$	Fonction de Bessel d'ordre n second genre	
$H_n$	Fonction de Hankel d'ordre n	

W	Fonction de pondération	
$\phi$	Potentiel indépendant de la profondeur	
$N_i$	Série de fonction d'interpolation	
K	Matrice	
$r_0$	Rayon de la pile ou du trou circulaire	m
d	Profondeur au pied de l'ouvrage	m
E	Module de Young	MPa
$\alpha$	Coefficient de dilatation thermique	$K^{-1}$

## ABREVIATION

EDP : Equation aux Dérivées Partielles

MSE : Méthode Semi-Empirique

DMN : Direction de la Météorologie Nationale

MEF : Méthode des Eléments Finis

H T : Hybride-Trefftz

T-systeme complet : système complet de Trefftz

M.E.B.T : Méthode des Eléments de Bord de Trefftz

## INTRODUCTION

Dans les problèmes relevant de la mécanique des structures, l'ingénieur recherche la répartition des contraintes qui régneront dans la structure à étudier. A l'occasion il peut être nécessaire de calculer les déplacements en quelques points particuliers afin de s'assurer que les spécifications des flèches sont bien respectées.

Pour un problème donné, la première étape dans la détermination du système des contraintes et des déplacements consiste à établir les équations régissant la solution et satisfaisant les conditions d'équilibre et de compatibilité. Ces équations qui décrivent le comportement des structures, pour les problèmes de nature bi ou tridimensionnelle, sont des équations aux dérivées partielles ; qui constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique.

Ces équations aux dérivées partielles intègrent les efforts agissant sur la structure à étudier. Dès lors il est nécessaire d'accorder une grande importance à la nature de ces efforts et le type d'ouvrage en question.

Les ouvrages maritimes, notamment les quais, sont souvent victimes de violents efforts. A cet effet il existe beaucoup de type de quais. Leur type ou forme dépend de leur rôle, de leur position géographique par rapport au rivage et plus rigoureusement à la bathymétrie du site qui les abrite. Nous allons passer en revue quelques types de quais.

Notre étude étant orientée à l'analyse structurale des quais ; sera axée tout d'abord à la description de la MEF, sous différentes approches, fournissant comme résultat les déformations, déplacements et contraintes subis par les ouvrages.

Deux approches sont utilisées dans ce travail:

Il s'agit d'une part du modèle dit conventionnel basé sur la méthode de RAYLEIGH-RITZ, qui utilise un champ de déplacement conforme vérifiant approximativement l'équilibre. Et pour reproduire le comportement de certains phénomènes dans nos structures, par exemples les effets locaux aux voisinages des points singuliers (trou circulaire, coin singulier), cette méthode dite conventionnelle s'adapte très mal car ne donne pas une représentation fidele des concentrations de contraintes. Et d'autre part le modèle basé sur la construction d'un champ de TREFFTZ qui utilise deux champs de déplacements : un champ interne qui vérifie a priori l'équation différentielle fondamentale du problème mais viole la continuité aux interfaces et un champ conforme mais défini uniquement sur la frontière. La méthode dite hybride-Trefftz (HT) permet

de s'adapter à plusieurs genres de problèmes puisqu'elle prend en compte dans l'expression du champ de déplacements internes, les singularités dues aux charges concentrées. Par conséquent le maillage et la précision de la solution deviennent pratiquement indépendants du chargement. Donc la méthode basée sur la formulation de TREFFTZ apparaît de manière très claire sur la méthodologie comme un complément et une extension de la méthode classique.

Mais l'un des problèmes les plus fastidieux de cette méthode est la construction d'un champ interne qui vérifie les équations aux dérivées partielles fondamentales, surtout si le problème étudié est un problème bi ou tridimensionnelle. Plusieurs auteurs ont fait des publications ce qui nous permet d'avoir les fonctions de TREFFTZ.

Les sollicitations sur notre ouvrage sont de nature diverse, variée et complexe. La plus complexe est celle due à la houle. Par conséquent deux méthodes de modélisation du comportement de la houle sont développées puis comparées : la méthode semi empirique et celle basée sur le T-système complet. Les résultats des modèles mathématiques des houles pourront être implémentés sur Fortran. Cette étude qui fait suite au projet bateau taxi est abordée en grande partie sous l'angle académique. Une application pratique est faite sur le logiciel pour le dimensionnement ROBOT Millennium des piles de l'appontement de Rufisque.



## Chapitre 1 :

# PRESENTATION DES TYPES D'OUVRAGES

Ces ouvrages entrent dans le cadre de la construction de débarquement et d'embarquement pour assurer la liaison maritime afin de faciliter la mobilité urbaine à Dakar. Les sites choisis sont exposés à la houle de large qui vient déferler sur la cote sans aucun ouvrage de protection en amont. Pour présenter ces ouvrages nous allons parler de leurs rôles et de leurs fonctions [15].

## **1.1 Analyses fonctionnelles**

L'analyse fonctionnelle consiste à déterminer le rôle, les fonctions, les limitations et le type de structure à utiliser pour répondre à un besoin spécifique. Dans cette étape, sont inclus le choix de la forme, des dimensions et de la localisation de la structure.

### **1.1.1 Rôles et fonctions**

Les ouvrages d'accostages ont pour but de fournir un appui aux navires qui stationnent dans un port pour procéder à des opérations de transbordement de marchandises ou de voyageurs, d'avitaillement, d'armement, de remisage ou de réparation à flot ou enfin pour attendre la libération d'un poste d'opération.

Ainsi ils peuvent remplir trois rôles :

- Fournir aux navires un dispositif d'appui et éventuellement permettre son amarrage ;
- Assurer la liaison entre le navire et la terre par le biais des terre-pleins des quais ou de la plateforme des appontements ; le dispositif de liaison supporte tout ou partie de l'outillage de manutention, des installations de service du navire, de la réception et du transport des marchandises ou des voyageurs, de la gare maritime, de la route, de la voie ferrée, de la canalisation de transport etc.
- Soutenir les terres à la limite du plan d'eau ;

Par définition :

Un quai est un ouvrage remplissant les trois fonctions d'accostage et d'amarrage, de liaison avec la terre et de soutien des terres.

Un appontement remplit les deux premières fonctions.

Un duc d'Albe remplit seulement la première de ces fonctions. Il faut au moins deux ducs d'Albe pour constituer un ouvrage d'accostage.

### 1.1.2 Les types de navires

Les types de navires retenus dans le projet de bateaux taxi sont le **catamaran** rapide et la **vedette monocoque** à deux ponts [16].

Pour le catamaran l'étude a donné les caractéristiques suivantes:

Longueur: 30 m ; largeur : 12 m ; Tirant d'eau : 1,2 m à 1.3 m ; capacité 200 à 250 passagers ; vitesse 20 nœuds.

Pour la vedette monocoque, les caractéristiques sont :

Longueur: 30 m ; largeur : 10 m ; Tirant d'eau : 2 m ; capacité ,250 passagers et plus de 30 tonnes de fret ; vitesse 20 nœuds.

Les deux types de navires du projet définis dans les termes de références de la présente étude sont le **catamaran** et le **bateau taxi**.

Ces informations sont importantes car elles permettent de calibrer les pontons qui vont être aménagés dans le cadre du projet, notamment la longueur des passerelles fixes, la longueur et la profondeur des ouvrages d'accostage.

Pour le catamaran les termes de références ont fixé les caractéristiques suivantes:

Longueur : 35 m ; largeur : 10 m ; Tirant d'eau : 2,5 m ; capacité 250 à 300 passagers ; vitesse 20 nœuds avec la possibilité de prendre une dizaine de véhicules.

L'évolution récente de la taille des navires catamaran révèle que ce navire est de type ancien avec un tirant d'eau de 2,50 m trop fort car il existe actuellement des navires plus modernes avec un tirant d'eau beaucoup plus faible de l'ordre de 1,20 m à 1,30m ayant les mêmes capacités

L'emport de véhicules n'est pas nécessaire car cela risque de générer des coûts d'infrastructures trop importants pour un besoin faible sur les futures lignes maritimes.

Par ailleurs il est souhaitable de ne pas multiplier les postes de réception et d'avoir les mêmes quais aussi bien pour les petites unités que pour les grands bateaux.

Compte tenu de ce qui précède, il a été retenu que le catamaran envisagé pour la liaison touristique Dakar Saly ne transporte pas de véhicules, mais seulement des passagers. Les caractéristiques de ce navire sont données ci-dessous :

Longueur : 35 m ; largeur : 12 m ; Tirant d'eau : 1,20 m ; capacité 250 passagers ; vitesse 20 nœuds ; déplacement 90 T

Les caractéristiques du bateau taxi en construction à Péniche sont données ci-dessous :

Longueur: 14,30 m ; largeur: 3,70 m ; Tirant d'eau maximal: 0,60 m ; capacité 58 passagers ; vitesse 20 nœuds ; déplacement 15 T

La vedette monocoque à deux ponts de tirant d'eau 2,00 m sera examinée en variante

### **1.1.3 Les types de structures**

Dans ce paragraphe nous présenterons les divers types d'ouvrages selon leurs types de construction et les matériaux utilisés.

#### **1.1.3.1 Quais en maçonnerie de pierres ou en blocs de béton de ciment**

Les quais en maçonnerie de pierres ou en blocs de béton de ciment sont des ouvrages massifs et lourds qui exigent une fondation offrant une portance élevée du sol sous la base du mur. Cependant ils permettent une bonne répartition des charges sur la fondation, et de ce fait, peuvent être utilisés en terrain de qualité médiocre à condition d'améliorer la portance du sol dans sa partie supérieure proche de la base.

On distingue trois variantes de ces types de quais :

- Quais taillés dans la roche
- Quais en maçonnerie de pierres ou en béton coulés sur place
- Quais en blocs de béton de ciment arrimés

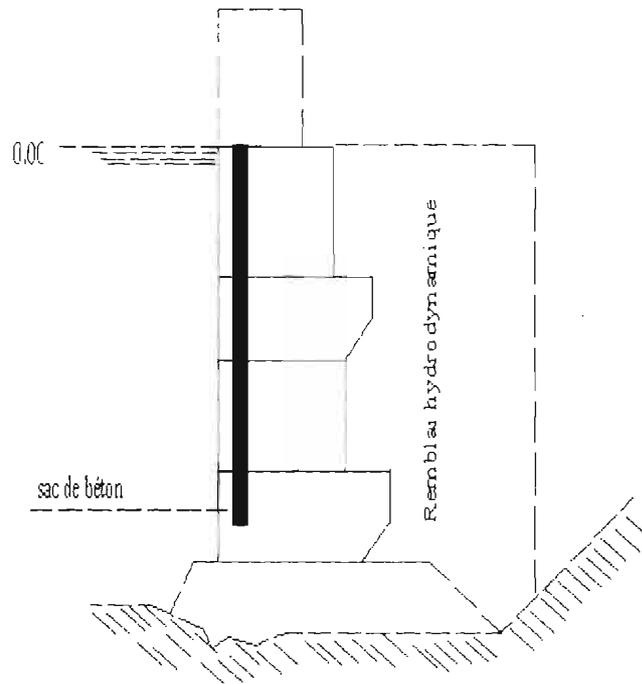


Fig. 1:Quai en bloc

### 1.1.3.2 Quais et appontements utilisant des caissons

Des caissons préfabriqués partiellement ou totalement peuvent être utilisés pour constituer des quais continus ou des ouvrages à appuis discontinus, dans le cas d'ouvrages continus ils peuvent assurer un rôle de soutien des terres.

On utilise des caissons métalliques ou plus généralement en béton armé ou précontraints de forme cylindrique ou parallélépipédique. A cette catégorie d'ouvrages nous rattachons les quais construits sous forme de mur en L en béton armé qui constituent des caissons incomplètement fermés.

On en distingue deux principales catégories :

- Ouvrages utilisant de véritables caissons
- Ouvrages constitués par des murs en L

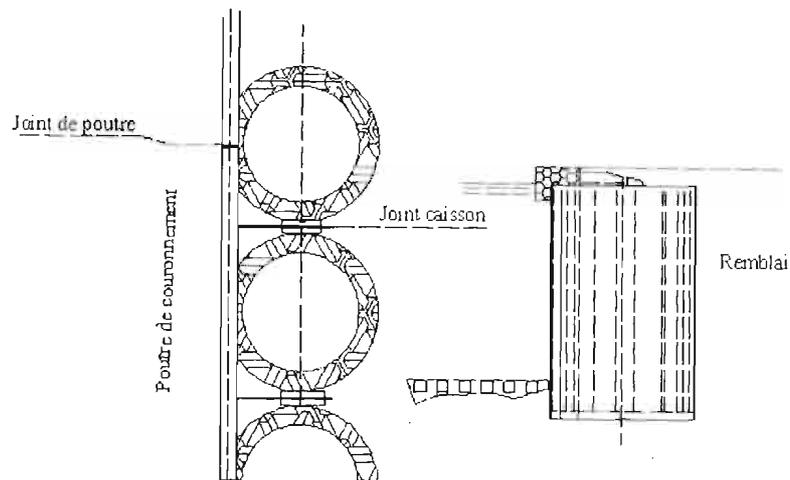


Fig. 2: Quai sur caisson

### 1.1.3.3 Ouvrages gabionnés en palplanches métalliques

Ils sont constitués par des palplanches métalliques plates, battues verticalement et assemblés sous forme de piles circulaires ou d'enceintes gabionnées.

Les ouvrages cellulaires peuvent comporter des cloisons planes. L'angle de raccordement des divers cloisons est en général  $120^\circ$ .

Les ouvrages gabionnés sont surmontés par une poutre de couronnement de la même manière que les quais en caissons circulaires. On doit éviter l'emploi des ouvrages en gabions lorsque les palplanches sont à battre sur une profondeur importante.

### 1.1.3.4 Ouvrages utilisant des rideaux-plans de palplanches

Les rideaux-plans de palplanches utilisent le plus souvent des palplanches métalliques ; quelquefois des palplanches en béton armé.

On peut citer :

- Les quais à tirant
- Les quais Danois

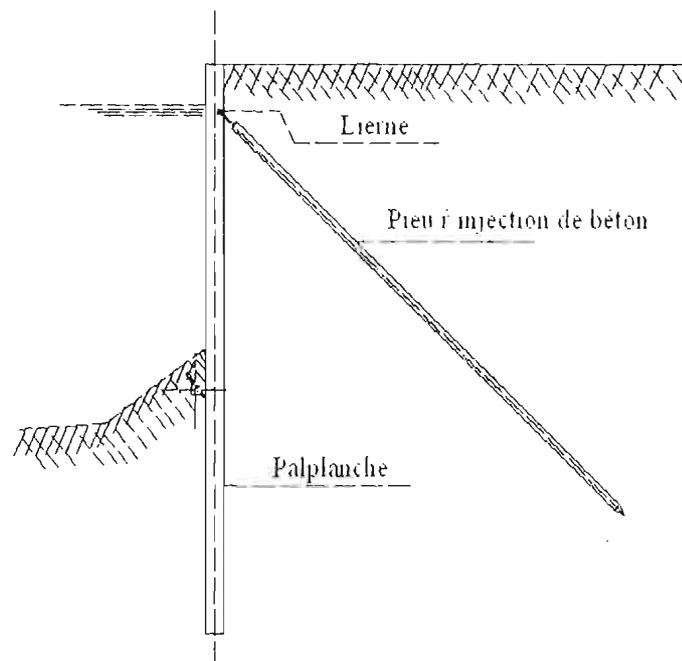


Fig. 3:Quai en rideau de palplanche

### 1.1.3.5 Ouvrages en parois moulés dans le sol

Ces ouvrages peuvent alors être constitués par des panneaux de 5 à 10 mètres de longueurs ancrés par des tirants. Ces ouvrages sont conçus et calculés comme des rideaux plans de palplanches ancrés.

### 1.1.3.6 Les ouvrages sur pieux

Ces ouvrages sont constitués par une plateforme généralement construite en béton armé ou en béton précontraint, supportée par des pieux en béton armé ou métalliques. Suivant leur conception ces ouvrages peuvent permettre l'amarrage des navires.

On distingue :

- Les ouvrages directement accostables
- Les ouvrages non accostables



Fig. 4: Quai sur pieux

#### 1.1.3.7 Les ouvrages sur piles

Les ouvrages fondés en général sur des piles sont constitués par une plateforme supportée par des piles verticales de section circulaire dont le diamètre varie de 0,5 m jusqu'à plusieurs mètres. Ces ouvrages sont souvent directement accostables.

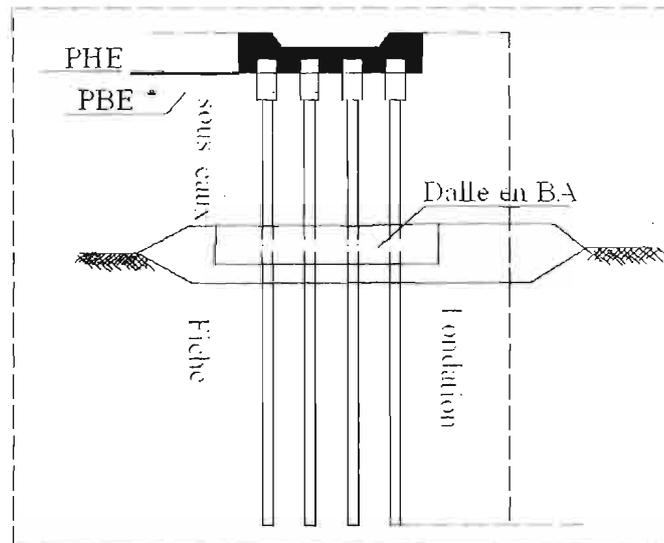


Fig. 5: Quai sur pile

Dans cette même catégorie, on peut citer quelques ouvrages sur piles ou sur pieux :

- Les ouvrages adossés à un terre plein

- Les ouvrages détachés de la rive
- Les ouvrages mixtes (piles et pieux)

### 1.1.3.8 Les ducs d'Albe

Les ducs d'Albe sont des appuis isolés servant à l'accostage et l'appui, ou à l'amarrage des navires.

On peut citer :

- Les ducs d'Albe souples
- Les ducs d'Albe rigides

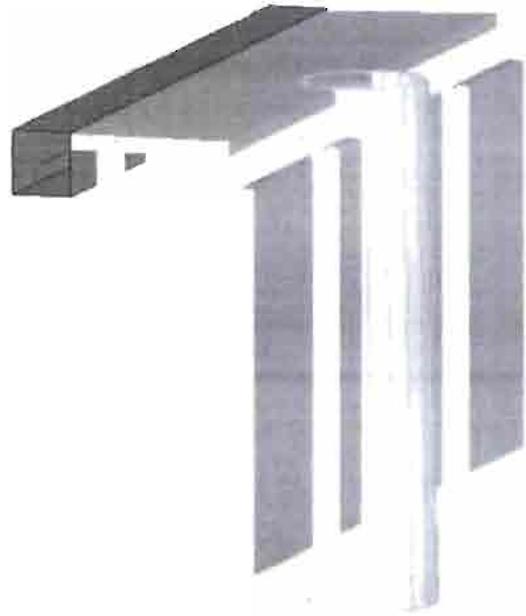


Fig. 6: Quai sur duc d'able

### 1.1.3.9 Détermination des caractéristiques structurales

Il s'agit dans cette étape, de choisir le type de structure approprié dans les conditions particulières données. Ce choix inclut les matériaux compte tenu de leur disponibilité, des méthodes de construction, des conditions de fondation et de leur exposition à la houle.

La solution retenue est celle de quai à passerelle mobile en mer composé :

- **D'une passerelle fixe**

Cette passerelle est en acier galvanisé et de préférence orientée dans la direction Nord-sud. Elle relie le rivage aux ducs d'Albe d'accostage; le platelage est en bois imputrescible et antidérapant. Elle constitue la plateforme de circulation des voyageurs. La passerelle a une largeur de 2,00 m et repose sur des pieux battus, renforcés à la base par des semelles de répartition en béton. Cette partie est équipée de deux poutres suivant sa longueur qui servent de garde corps.

- **une passerelle mobile en mer**

Elle est en aluminium autour d'un pivot horizontal entre l'extrémité de la passerelle fixe et les ducs d'Albe. Son niveau est relativement fixe par rapport au niveau des eaux qui est variable à son tour. Elle suit alors la variation du plan d'eau. La variation de sa hauteur facilite l'embarquement et le débarquement. Elle est plus large et moins longue que la partie fixe. Cette configuration est adoptée en vue de mettre sur place de bonnes conditions de chargement et de déchargement. Elle est équipée d'une toiture pour mettre les usagers à l'abri du soleil et des pluies.

- **de ducs d'Albe d'accostage**

Ils supportent en partie la passerelle mobile. Quatre tubes d'accostage en forme de Ducs d'Albe constituent le front d'accostage et d'amarrage des bateaux.

## **1.2 Les différents types d'efforts**

### **1.2.1 Les efforts horizontaux**

- Les efforts d'accostages ou choc des bateaux

Un navire s'approche d'un quai avec une certaine vitesse qui lui confère une énergie cinétique. L'accostage s'effectue alors avec un choc qui induit des efforts aux ouvrages. La vitesse de dérive résulte de l'équilibre des forces motrices et de la résistance à l'avancement opposée par l'eau.

- Les efforts d'amarrage
- Les forces dues à la houle

Cette partie est le centre d'intérêt de notre projet. Par conséquent des chapitres entiers seront consacrés à cette partie.

- Les efforts dus aux vents

### 1.2.2 Les efforts verticaux

- Poids propre de l'ouvrage
- Les surcharges d'exploitation des piétons, des marchandises, des engins de levage etc.

A coté de ces types d'efforts selon la direction, on a la variation de la température qui suit toute les directions.

## Chapitre 2:

# PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La mécanique du milieu continu permet d'écrire le comportement des structures, grâce à des équations aux dérivées partielles et parmi les méthodes de résolution qui existent, la méthode des éléments finis est actuellement, de loin, la plus utilisée.

La méthode des éléments finis est, actuellement indéniablement le modèle de référence de calcul des structures. C'est une méthode numérique utilisée pour le calcul de solutions approchées de problèmes définis par des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites mais suffisamment précises pour les structures que l'on rencontre dans la pratique des constructions.

Il existe plusieurs types de modèles d'éléments finis parmi lesquels, on peut citer:

- Le modèle éléments finis conventionnel basé sur la méthode de RAYLEIGH-RITZ
- La méthode des éléments finis basée sur la construction d'un champ de TREFFTZ

## 2.1 Procédures générales de la méthode des éléments finis

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède par les étapes suivantes :

- ✓ On se pose un problème physique sous forme d'équation différentielle ou aux dérivées partielles à satisfaire en tout point du domaine  $\Omega$ , avec des conditions aux limites sur le bord  $\delta\Omega$ .
- ✓ On construit une formulation intégrale d'un système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation variationnelle ou la forme faible
- ✓ On divise le domaine en des sous domaines : c'est le maillage
- ✓ On choisit de façon unique la famille de champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les fonctions qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds et éventuellement les dérivées. La maille complétée par ces informations est alors appelée élément.
- ✓ On ramène le problème à un problème discret : c'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée. Le problème fondamental de la MEF peut se résumer en deux questions :
  - Comment choisir le problème discret dont la solution est proche de la solution exacte ?
  - Quelle signification doit-on donner au mot proche ?

- ✓ On résout le problème discret par des méthodes de résolution d'équations simultanées habituelles
- ✓ On peut construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs telles que les contraintes, les déformations : c'est le post traitement
- ✓ On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et juger si elle satisfait les critères du cahier des charges.

## 2.2 Le modèle éléments finis conventionnel basé sur la méthode de RAYLEIGH-RITZ

Considérons un solide ou une structure de domaine quelconque  $\Omega$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ .

L'équation qui régit le comportement d'un tel solide ou structure peut s'écrire comme suit :

$$\alpha \mathbf{u} = \bar{\mathbf{b}} \quad (2.1)$$

Avec les conditions de Dirichlet et de Neumann sont respectivement :

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{sur } \Gamma_v \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (2.2b)$$

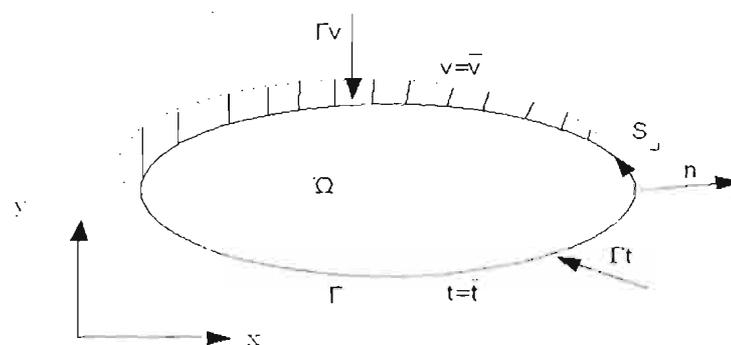


Fig. 7: Structure de domaine quelconque

Dans cette méthode on utilise un champ de déplacement  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  conforme qui vérifie approximativement l'équilibre et est interpolé par les déplacements nodaux  $\mathbf{d}$  des fonctions d'interpolation  $N$  par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \tag{2.3}$$

Les déplacements aux nœuds sont donc pris comme les inconnues principales du problème d'où le nom de la méthode de déplacements.

Ecrivons la fonctionnelle appropriée  $\Pi$ , d'après [1].

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{d} \Omega - \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \varepsilon_0 d\Omega + \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\rho} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{u}} d\Omega \\ & - \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \mathbf{d}^T \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Omega - \sum_{i=1}^p u_i p_i \end{aligned} \tag{2.4}$$

Subdivisons le domaine  $\Omega$  en un nombre  $m$  fini de sous-domaines  $\Omega_e (\Omega = \sum_1^m \Omega_e)$  comme dans

les figures suivantes :

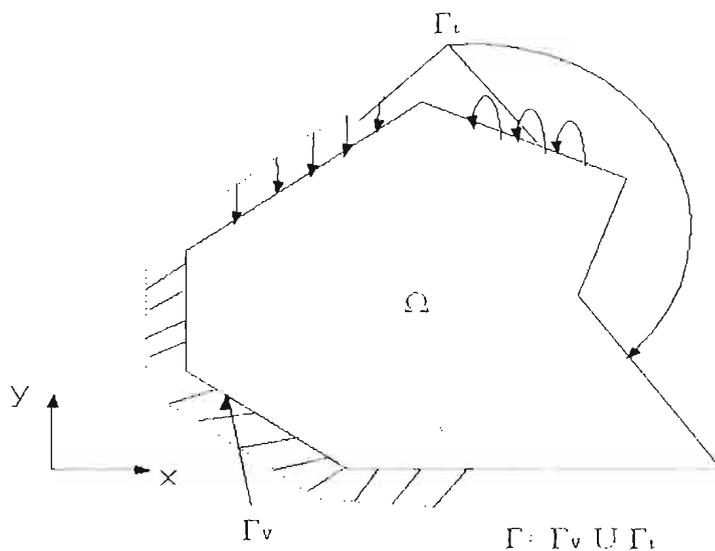


Fig. 8: Structure de domaine quelconque avant subdivision

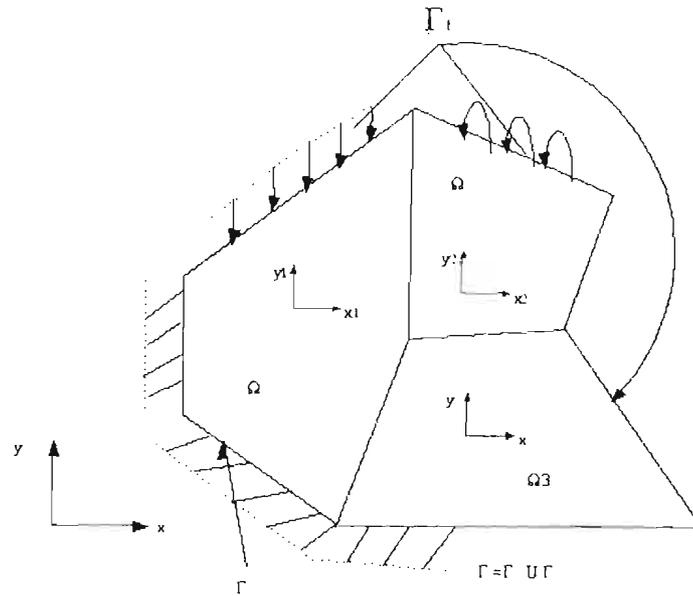


Fig. 9: Structure de domaine quelconque après subdivision

Ecrivons ainsi la fonctionnelle potentielle  $\Pi_e$  pour chaque élément :

$$\begin{aligned} \Pi_e = & \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e d\Omega \right) \mathbf{d}_e - \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \right) + \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega \right) + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \rho \mathbf{N}_e d\Omega \right) \ddot{\mathbf{d}}_e \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{c}_f \mathbf{N}_e d\Omega \right) \dot{\mathbf{d}}_e - \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega \right) - \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right) - \sum_{i=1}^p u_i p_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

Après dérivation on aura :

$$\begin{aligned} \delta \Pi_e = & \delta \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e d\Omega \right) \mathbf{d}_e - \delta \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \right) + \delta \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega \right) + \delta \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \rho \mathbf{N}_e d\Omega \right) \dot{\mathbf{d}}_e \\ & + \delta \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{c}_f \mathbf{N}_e d\Omega \right) \dot{\mathbf{d}}_e - \delta \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega \right) - \delta \mathbf{d}_e^T \left( \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right) - \sum_{i=1}^p \delta u_i p_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Or nous savons que tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles i.e. qui vérifient les conditions aux appuis, celui qui rend l'énergie potentielle totale minimum correspond donc à la solution du problème.

Nous pouvons dire que

$$\delta \Pi_e = 0 \quad (2.7)$$

Ce qui nous conduit à la relation forces-déplacements après simplification de l'équation (2.3) :

$$\delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{r}_e = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e + \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{d}}_e + \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{c}_e \dot{\mathbf{d}}_e + \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{f}_{0e} \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e + \mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{d}}_e + \mathbf{c}_e \dot{\mathbf{d}}_e + \mathbf{f}_{0e} \quad (2.8b)$$

Où les expressions de  $\mathbf{k}_e$ ,  $\mathbf{m}_e$ ,  $\mathbf{c}_e$ ,  $\mathbf{f}_{0e}$  sont données par

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \mathbf{B}_e d\Omega_e \quad (2.8c)$$

$$\mathbf{m}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \rho \mathbf{N}_e d\Omega_e \quad (2.8d)$$

$$\mathbf{c}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{c}_f \mathbf{N}_e d\Omega_e \quad (2.8e)$$

$$(2.8f)$$

$$\mathbf{f}_{0e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E} \varepsilon_0 d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega_e + \sum_{i=1}^p \mathbf{N}_i \mathbf{p}_i \quad (2.8g)$$

Après assemblage des matrices de rigidité élémentaires d'une part et les efforts élémentaires nous obtenons l'équilibre global de la structure :

$$\mathbf{K} = \sum_1^m \mathbf{k}_e \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{R} = \sum_1^m \mathbf{r}_e \quad (2.9b)$$

L'équilibre global donne la relation forces-déplacements globale qui s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{K}\mathbf{D}=\mathbf{R} \quad (2.10)$$

Mais ce modèle dit conventionnel basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz ne donne pas une représentation fidèle des concentrations de contraintes. Ainsi plusieurs stratégies ont été adoptées ; parmi celles-ci citons la méthode de TREFFTZ.

## 2.3 La méthode des éléments finis basée sur la construction d'un champ de TREFFTZ

Le modèle d'éléments finis dit conventionnel est basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz. Il utilise un champ conforme qui vérifie approximativement l'équilibre. Contrairement à ce dernier les éléments de types Trefftz ou T-éléments sont des éléments finis dont le champ des variables internes satisfait les équations différentielles du problème ; mais pour lequel les conditions de bord et la continuité inter-éléments doivent être satisfaites d'après [2] et [5].

Depuis le début des années 80 la méthode de Trefftz a fait l'objet d'un grand nombre de publication. L'objectif de la majorité était de proposer des formulations fondées sur l'emploi des fonctions de Trefftz dans un système complet de Trefftz ou T- Système complet pour les problèmes linéaires et élastiques. Parmi ces formulations nous pouvons citer :

- La formulation basée sur la méthode dite Hybride-Trefftz (H.T)
- La formulation basée sur la Méthode des Eléments de Bord de Trefftz (M.E.B.T)

### 2.3.1 La méthode dite hybride-Trefftz (H.T)

Contrairement à la méthode des éléments finis conventionnelle, la méthode HT utilise deux champs de déplacements : un champ interne qui vérifie a priori l'équation différentielle fondamentale du problème mais viole la continuité aux interfaces et un champ conforme mais défini uniquement sur la frontière des éléments (champ de bord).

Considérons les équations définies dans (2.1), (2.2a), (2.2b).

Avec cette méthode, il y'a deux formulations:

- Une première basée sur les minimisations de la norme énergétique
- Une seconde basée sur la détermination du point stationnaire d'une fonctionnelle

Et établissons la formulation en supposant pour chaque élément les deux champs déplacements suivants :

- Un champ de Trefftz non-conforme

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^0 + \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j \mathbf{c}_j = \mathbf{u}_i^0 + \mathbf{N}_i \mathbf{c}_i \quad (2.11)$$

où les  $c_j$  sont des coefficients indéterminés,  $u_i^0$  et  $N_j$  sont respectivement la solution particulière et une série de solutions homogènes linéairement indépendantes vérifiant :

$$\alpha u_i^0 = \bar{b} \quad \text{et} \quad \alpha N_j = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_i \quad (2.12)$$

Pour  $m$  assez grand  $N_j$  est une série convergente de fonctions linéairement indépendantes qui vérifient les EDP fondamentales homogènes.

- Un champ auxiliaire de déplacements conformes

$$u_i^0 = \bar{N}_i d_i \quad (2.13)$$

défini en fonction des paramètres nodaux  $d_i$  comme dans le modèle classique des éléments finis.  $\bar{N}_i$  les fonctions d'interpolation.

### 2.3.1.1 La méthode basée sur les minimisations de la norme énergétique

La norme énergétique de la différence de  $u_i$  et  $u_i^0$  est minimale lorsqu'on impose la conformité du champ.

Ainsi d'après les travaux de [2] et [3]:

$$\|U(u_i - u_i^0)\| = \sqrt{\left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} (\epsilon_i - \epsilon_i^0)^T D (\epsilon_i - \epsilon_i^0) d\Omega \right]} = \min \quad (2.14)$$

Avec  $\epsilon_i$  et  $\epsilon_i^0$  les champs de déformation dérivant respectivement des champs de déplacements  $u_i$  et  $u_i^0$  sont définis par :

$$(\epsilon_i - \epsilon_i^0) = L^T (u_i - u_i^0) \quad (2.15a)$$

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}_i = \bar{B}_i d_i \\ \epsilon_i = \epsilon_i^0 + B_i c_i \end{cases} \quad (2.15b)$$

$$\begin{cases} \bar{B}_i = L \bar{N}_i \\ B_i = L N_i \end{cases} \quad (2.15c)$$

On obtient une équation permettant d'exprimer les coefficients indéterminés  $c_i$  du champ de Trefftz en fonction des déplacements  $d_i$  :

$$\delta \left\| U(u_i - \bar{u}_i^0) \right\| = \int_{\Omega_i} \delta \varepsilon_i^T D (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i^0) d\Omega = 0 \quad (2.16)$$

Par suite

$$\int_{\Omega_i} B_i^T D (\varepsilon_i^0 + B_i c_i - \bar{B}_i d_i) d\Omega = 0 \quad (2.17)$$

Donc

$$\int_{\Omega_i} B_i^T D \varepsilon_i^0 d\Omega + \int_{\Omega_i} B_i^T D B_i d\Omega c_i - \int_{\Omega_i} B_i^T D \bar{B}_i d\Omega d_i = 0 \quad (1.18)$$

D'où

$$c_i = -H_i^{-1} h_i + H_i^{-1} G_i d_i \quad (2.19a)$$

Avec

$$h_i = \int_{\Omega_i} B_i^T D \varepsilon_i^0 d\Omega \quad (2.19b)$$

$$H_i = \int_{\Omega_i} B_i^T D B_i d\Omega \quad (2.19c)$$

$$G_i = \int_{\Omega_i} B_i^T D \bar{B}_i d\Omega \quad (2.19d)$$

Pour une contrainte virtuelle  $\delta \sigma_i$ , la variation de l'énergie se traduit par :

$$\delta \left\| U(u_i - \bar{u}_i^0) \right\| = \int_{\Omega_i} \delta \sigma_i^T (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i^0) d\Omega = 0 \quad (2.19e)$$

En vertu du théorème de Clapeyron, cette variation est égale à celle de bord correspondante. Si l'on désigne les déplacements généralisés dérivant respectivement des champs  $u_i$  et  $\overset{0}{u}_i^0$  par :

$v_i$  et  $\overset{0}{v}_i$  et sont définis par :

$$\begin{cases} \tilde{v}_i = V_i d_i \\ v_i = \overset{0}{v}_i + V_i c_i \end{cases} \quad (2.20)$$

Les champs de tractions de bords généralisés issus du champ  $u_i$  :

$$t_i = \overset{0}{t}_i + T_i c_i \quad (2.21)$$

L'équation peut ainsi s'écrire comme suit :

$$\delta \left\| U(u_i, \overset{0}{u}_i^0) \right\|_i = \int_{\partial\Omega_i} \delta t_i^T (v_i - \overset{0}{v}_i) d\Gamma = 0 \quad (2.22)$$

Ainsi d'après l'équation (2.19e) et (2.17), on a :

$$\int_{\Omega_i} B_i^T D(\varepsilon_i + B_i c_i - \overset{0}{B}_i d_i) d\Omega = \int_{\partial\Omega_i} T_i^T (\overset{0}{v}_i + V_i c_i - \overset{0}{V}_i d_i) d\Gamma = 0 \quad (2.23)$$

Ce qui permet de tirer par analogie les relations:

$$H_i = \int_{\partial\Omega_i} T_i^T V_i d\Gamma \quad (2.23a)$$

$$h_i = \int_{\partial\Omega_i} T_i^T \overset{0}{v}_i d\Gamma \quad (2.23b)$$

$$G_i = \int_{\partial\Omega_i} T_i^T \overset{0}{V}_i d\Gamma \quad (2.23c)$$

Puisque l'intégration se fait sur le bord, une définition explicite de  $\overset{0}{u}_i^0$  dans le domaine n'est plus nécessaire. On peut alors se limiter à choisir directement le champ de déplacement :

$$\overset{0}{v}_i = \overset{0}{V}_i d_i \quad \text{sur } \partial\Omega_i \quad (2.24)$$

Cette démarche permet une grande liberté dans le choix de la géométrie de l'élément (élément à contour polygonal par exemple, avec un nombre de coté optionnel) et en particulier, la construction aisée des éléments pour des problèmes où la conformité  $C^1$  des fonctions d'interpolation  $\hat{V}_i$  est nécessaire.

Comme les contraintes dérivées du champ  $u_i$  vérifient l'équilibre interne et la conformité des déplacements est imposée par l'équation, il ne reste qu'à assurer la continuité de tractions à travers les interfaces et d'introduire l'effet des tractions aux bords libres  $(\partial\Omega_i \cap \Gamma_i)$ .

L'utilisation de l'équivalence des travaux virtuels entraîne que:

$$\delta d_i^T r_i = \int_{\partial\Omega_i} \delta \hat{v}_i^{\sigma T} t_i d\Gamma - \int_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_i)} \delta \hat{v}_i^{\sigma T} \bar{t} d\Gamma \quad (2.25)$$

Ce qui nous permet de tirer la relation forces déplacements habituelle

$$r_i = \overset{0}{r}_i + k_i d_i \quad (2.27a)$$

$$\overset{0}{r}_i = g_i - G_i^T H_i^{-1} h_i \quad (2.27b)$$

$$k_i = G_i^T H_i^{-1} G_i \quad (2.27c)$$

Où  $H_i, G_i, h_i$  sont donnés par les intégrales de contours et

$$g_i = \int_{\partial\Omega_i} \hat{V}_i^{\sigma T} t_i d\Gamma - \int_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_i)} \hat{V}_i^{\sigma T} \bar{t} d\Gamma \quad (2.27d)$$

Après assemblage des matrices de rigidité élémentaires d'une part et les efforts élémentaires, nous obtenons l'équilibre global de la structure et les équations déjà définies en (2.9a), (2.9b) et (2.10).

### 2.3.1.2 La méthode basée sur la détermination du point stationnaire d'une fonctionnelle

Soit la fonctionnelle :

$$H(u, \overset{0}{v}) = \Pi(\overset{0}{u}) - \sum_i U_i(\varepsilon_i - \overset{0}{\varepsilon}_i) = \text{stationnaire} \quad (2.28)$$

Avec

$$\bar{u}_i \rightarrow \bar{v}_i^0 = \bar{V}_i d_i \quad (2.29)$$

$U_i(\epsilon_i - \bar{\epsilon}_i)$  l'énergie de déformation de l'élément due aux champs de déformation  $\epsilon_i$  et  $\bar{\epsilon}_i$  qui dérivent des champs de déplacements  $u_i$  et  $\bar{u}_i^0$  respectivement,

$\sum_i$  la contribution de tous les éléments après assemblage,

$\Pi(\bar{u}^0)$  l'énergie de potentielle totale due au champ de déplacement conforme  $\bar{u}^0$  et,

$$\Pi(\bar{u}^0) = U(\bar{\epsilon}) + V(\bar{u}^0, \bar{v}^0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\epsilon}^T D \bar{\epsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{u}^0 b d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{v}^0 t d\Gamma \quad (2.30)$$

D'après les travaux de [2] et [5], la variation de  $H(u, \bar{v}^0)$  par rapport à  $u$  s'annule pour chaque élément :

$$\delta_u H(u, \bar{v}^0) = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \delta \sigma_i^T (\epsilon_i - \bar{\epsilon}_i) d\Omega = \int_{\Gamma_i} \delta \sigma_i^T (v_i - \bar{v}_i) d\Gamma = 0 \quad (2.31)$$

Alors

$$\int_{\Gamma_i} T_i^T (v_i + V_i c_i - \bar{V}_i d_i) d\Gamma = 0 \quad (2.32)$$

Cette équation se traduit comme dans (2.19a), par une relation qui exprime les paramètres indéterminés  $c_i$  en fonction des déplacements  $d_i$ .

$$c_i = -H_i^{-1} h_i + H_i^{-1} G_i d_i \quad (2.33a)$$

avec

$$H_i = \int_{\Gamma_i} T_i^T V_i d\Gamma \quad (2.33b)$$

$$h_i = \int_{\Gamma_i} T_i^T v_i d\Gamma \quad (2.33c)$$

$$G_i = \int_{\Gamma_i} T_i^T \hat{V}_i d\Gamma \quad (2.33d)$$

Quant à la matrice de rigidité  $K$  et les forces équivalentes aux nœuds  $\overset{0}{R}$ , nous allons utiliser la variation de  $H(u, \overset{0}{V})$  par rapport à  $\overset{0}{V}$  :

$$\delta_{\overset{0}{V}} H(u, \overset{0}{V}) = \sum_i \left[ \int_{\Gamma_i} \delta \overset{0}{v}_i^{\circ T} t_i d\Gamma - \int_{(\Gamma_i \cap \Gamma_j)} \delta \overset{0}{v}_i^{\circ T} t d\Gamma \right] = 0 \quad (3.34)$$

avec

$$\delta \overset{0}{v}_i^{\circ} = \hat{V}_i \delta d_i \text{ et } t_i = t_i^{\circ} + T_i c_i \quad (2.35)$$

L'équation nous conduit à la relation forces-déplacements exprimés dans le repère global :

$$\delta_{\overset{0}{V}} H(u, \overset{0}{V}) = \delta d^T (Kd + \overset{0}{R}) = 0 \quad (2.36a)$$

et

$$Kd = -\overset{0}{R} \quad (2.36b)$$

En même temps

$$\delta_{\overset{0}{V}} H(u, \overset{0}{V}) = \sum_i \delta_{\overset{0}{V}} H(u_i, \overset{0}{v}_i^{\circ}) = 0 \quad (2.36c)$$

La contribution  $\delta_{\overset{0}{V}} H(u_i, \overset{0}{v}_i^{\circ}) \neq 0$  de l'élément  $i$  à  $\delta_{\overset{0}{V}} H(u, \overset{0}{V})$  est :

$$\delta_{\overset{0}{V}} H(u_i, \overset{0}{v}_i^{\circ}) = \int_{\Gamma_i} \delta \overset{0}{v}_i^{\circ T} t_i d\Gamma - \int_{(\Gamma_i \cap \Gamma_j)} \delta \overset{0}{v}_i^{\circ T} t d\Gamma \quad (2.37)$$

ou encore en substituant les équations (2.33b - d) dans l'équation (2.37), on obtient :

$$\delta_{\overset{0}{V}} H(u_i, \overset{0}{v}_i^{\circ}) = \delta d_i^T (G_i^T H_i^{-1} G_i d_i + g_i - G_i^T H_i^{-1} h_i) \quad (2.38)$$

Où  $H_i, G_i, h_i$  sont donnés par les intégrales de contours  $\Gamma_i$ , et

$$g_i = \int_{\Gamma_i} \hat{V}_i^T t_i^{\circ} d\Gamma - \int_{(\Gamma_i \cap \Gamma_j)} \hat{V}_i^T t d\Gamma \quad (2.39)$$

Des lors s'obtiennent  $K$  et  $\overset{0}{R}$  par le processus standard d'assemblage de la méthode des éléments finis :

$$\sum_i \delta_{v_i} H(u_i, \overset{0}{v}_i) = \sum_i \delta d_i^T (k_i d_i + \overset{0}{r}_i) = \delta d^T (Kd + \overset{0}{R}) \quad (2.40)$$

Avec

$$k_i = G_i^T H_i^{-1} G_i \quad (2.41a)$$

$$\overset{0}{r}_i = g_i - G_i^T H_i^{-1} h_i \quad (2.41b)$$

$$K = \sum_i k_i, \quad \overset{0}{R} = \sum_i \overset{0}{r}_i \quad (2.41c)$$

$K$  et  $\overset{0}{R}$  sont la matrice de raideur et le vecteur de forces équivalentes aux nœuds de l'élément exprimés dans le repère global.

### 2.3.2 La méthode des éléments de bord de Trefftz (M.E.B.T)

Les techniques utilisées pour l'élaboration de la méthode HT peuvent être rappliquées à la méthode des éléments de bord de Trefftz d'après [3].

Avec ces derniers, deux types de formulations peuvent être utilisées pour un problème donné :

- La formulation indirecte
- La formulation directe

#### 2.3.2.1 Formulation indirecte

Considérons l'équation (2.1) qui régit le comportement d'un solide ou d'une structure de domaine quelconque  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Avec des conditions aux limites définies par les équations (2.2a) et (2.2b).

La formulation indirecte de la M.E.B.T est obtenue lorsque la solution  $u$  est approximée par une série de fonctions de Trefftz dans le T-système complet. Dans ce cas le problème réel est remplacé par un problème approximatif défini comme suit :

$$\int_{\Gamma_u} (v - \bar{v}) W_u d\Gamma + \int_{\Gamma_t} (t - \bar{t}) W_t d\Gamma = 0 \quad (2.42)$$

où  $W_u$  et  $W_t$  sont des fonctions de pondération.

Dans l'approche indirecte, le champ de déplacement est approximé par le champ non-conforme défini par l'équation (2.11), dans laquelle seuls quelques termes ( $m$ ) sont retenus en fonction de la précision.

Ainsi, à un point donné  $P$ , les fonctions  $v$  et  $t$  sont données respectivement par :

$$v(P) \cong N_i(P)c_i = N(P)c \quad (2.42a)$$

et

$$t(P) \cong T_i(P)c_i = T(P)c \quad (2.42b)$$

où les coefficients indéterminés  $c_i$  et les fonctions d'interpolation  $N_i$  sont définis antérieurement.

Les fonctions de pondération  $W_u$  et  $W_t$  peuvent être choisies arbitrairement, ce qui conduit à l'utilisation de différentes techniques, dont il est question de les présenter dans les paragraphes qui suivent.

### 2.3.2.2 Formulation par la méthode de collocation

Ici les fonctions poids sont les fonctions delta de DIRAC et définies comme suit :

$$W_u = W_t = \delta(P - P_i) \quad (2.43)$$

où  $P_i$  est le point de collocation et  $\delta$  un opérateur variationnel.

Ainsi en substituant les équations (2.42a), (2.42b) et (2.43) dans l'équation (2.42) nous aurons :

$$v(P_i) = N_i(P)c_i = \bar{v}(P_i), \quad (P_i \in \Gamma_u, i = 1, 2, 3, \dots, M_1) \quad (2.43a)$$

$$t(P_i) = T_i(P)c_i = \bar{t}(P_i), \quad (P_i \in \Gamma_i, i = 1, 2, 3, \dots, M_2) \quad (2.43b)$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont les nombres de points de collocation placés respectivement sur  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_t$

En notation matricielle, ces équations peuvent s'écrire comme suit :

$$K_{ij}c_j = f_i \quad \text{ou} \quad Kc = f \quad (2.43c)$$

où  $c_j$  sont les composantes du vecteur  $c$

$K_{ij}$  sont les composantes de la matrice  $K$  et définis par :

$$K_{ij} = \begin{cases} N_i(P_j) & \text{si } P_i \in \Gamma_u \\ T_j(P_i) & \text{si } P_i \in \Gamma_t \end{cases} \quad (2.43d)$$

$f_i$  composantes du vecteur  $f$  et définis par :

$$f_i = \begin{cases} \bar{v}(P_i) & \text{si } P_i \in \Gamma_u \\ \bar{t}(P_i) & \text{si } P_i \in \Gamma_t \end{cases} \quad (2.43e)$$

### 2.3.2.3 Formulation par la méthode des moindres carrés

Pour cette technique, on utilise la fonction résiduelle,

$$R(c) = \int_{\Gamma_u} (Nc - \bar{v})^2 d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_t} (Tc - \bar{t})^2 d\Gamma \quad (2.44)$$

Où  $\alpha$  est un paramètre de pondération qui préserve l'équivalence numérique entre les deux termes à droite de l'équation ci-dessus.

Le principe de la méthode des moindres carrée veut que, la variation de la fonction résiduelle par rapport à  $c$  soit nulle :

Ainsi

$$\delta R(c) = \int_{\Gamma_u} N^T (Nc - \bar{v}) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_t} T^T (Tc - \bar{t}) d\Gamma = 0 \quad (2.44a)$$

D'où la relation

$$\left[ \int_{\Gamma_u} N^T N d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_t} T^T T d\Gamma \right] c = \int_{\Gamma_u} N^T \bar{v} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_t} T^T \bar{t} d\Gamma \quad (2.44b)$$

Sous forme matricielle :

$$K_{ij} c_j = f_i \quad \text{ou} \quad Kc = f \quad (2.44c)$$

$c_i$  des coefficients indéterminés qui sont les composantes du vecteur  $c$

$K_{ij}$  sont les composantes de la matrice  $K$  et définis par :

$$K_{ij} = \int_{\Gamma_u} N_i N_j d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_t} T_i T_j d\Gamma \quad (2.45a)$$

$f_i$  composantes du vecteur  $f$  et définis par :

$$f_i = \int_{\Gamma_u} N_i \bar{v} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_t} T_i \bar{t} d\Gamma \quad (2.45b)$$

Dans cette formulation, il est important de choisir la valeur propre de  $\alpha$ . Généralement pour un problème sa valeur optimale est donnée par des mesures expérimentales.

### 2.3.2.4 Formulation par la méthode de Galerkin

Dans la méthode de Galerkin [7], les fonctions de pondérations sont choisies comme suit :

$$W_u = \delta t = T \delta c \quad (2.46a)$$

et

$$W_t = -\delta u = -N \delta c \quad (2.46b)$$

Dans ce cas l'équation (2.42) s'écrit :

$$\delta c^T \left[ \int_{\Gamma_u} T^T (Nc - \bar{v})^2 d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_t} N^T (Tc - \bar{t})^2 d\Gamma \right] = 0 \quad (2.47)$$

Ou encore :

$$\left[ \int_{\Gamma_u} T^T N d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_t} N^T T d\Gamma \right] c = \int_{\Gamma_u} T^T \bar{v} d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_t} N^T \bar{t} d\Gamma \quad (2.48)$$

Sous une écriture matricielle donne les composantes respectives de la matrice K et du vecteur f :

$K_{ij}$  définis par :

$$K_{ij} = \int_{\Gamma_u} T_i N_j d\Gamma - \int_{\Gamma_t} T_i T_j d\Gamma \quad (2.49a)$$

$f_i$  définis par :

$$f_i = \int_{\Gamma_u} T_i \bar{v} d\Gamma - \int_{\Gamma_t} N_i \bar{t} d\Gamma \quad (2.49b)$$

Nous observons que la matrice K est symétrique i.e.  $K_{ij} = K_{ji}$

### 2.3.2.5 Formulation de Trefftz modifiée

Dans cette approche [3], les solutions approximatives sont exprimées en fonction d'une combinaison linéaire de solutions singulières fondamentales et ensuite les paramètres inconnus sont fixés de sorte qu'en utilisant la méthode de collocation, la solution approximative satisfait les conditions aux limites.

Considérons  $u^*(r_{PQ})$  la solution fondamentale de l'équation(2.1), une fonction de  $r_{PQ}$ , qui est singulière lorsque  $P = Q$ .

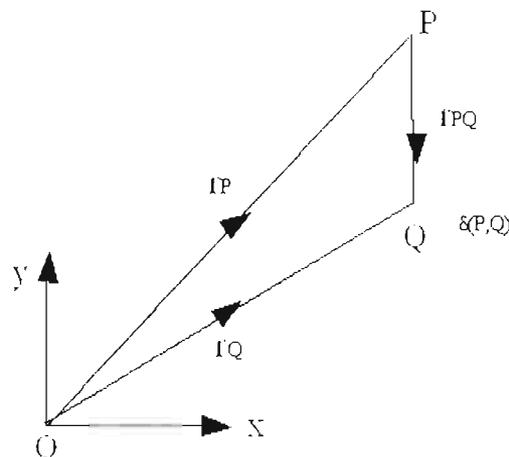


Fig. 10: Point de collocation

Avec P et Q qui sont les points d'observation et source.

Par exemple d'après les travaux [6], [7] et [8] on a :

$$u^*(r_{PQ}) = \frac{1}{2\pi} \text{Ln} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) \text{ pour l'équation de Laplace.}$$

Ainsi pour éviter cette singularité, les points sources doivent être placés sur une frontière imaginaire qui entoure la frontière réelle.

Dans ce cas les fonctions seront estimées comme suit :

$$u(P) \cong \overset{0}{\varphi}(P) = \sum_{i=1}^N c_i u^*(r_{PQ_i}) = c^T u^*(P) \quad (2.50a)$$

$$t(P) \cong \overset{0}{\psi}(P) = \sum_{i=1}^N c_i t^*(r_{PQ_i}) = c^T t^*(P) \quad (2.50b)$$

Où N est le nombre total des points sources et,

$$r_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_{Q_i})^2 + (y_P - y_{Q_i})^2} \quad (2.51)$$

avec (x, y) coordonnées cartésiennes des points P et Q<sub>i</sub>.

L'utilisation de la méthode de collocation nous mène aux équations :

$$v(P_i) = u^{*T}(P_i)c = \bar{v}(P_i), \quad (P_i \in \Gamma_u, i = 1, 2, 3, \dots, M_1) \quad (2.52a)$$

$$t(P_i) = t^{*T}(P_i)c = \bar{t}(P_i), \quad (P_i \in \Gamma_t, i = 1, 2, 3, \dots, M_2) \quad (2.52b)$$

En forme matricielle on a :

$$Kc = f \quad (2.53)$$

Dans cette approche, il est important de faire une sélection des points Q<sub>i</sub> (i=1, 2, ..., N).

### 2.3.2.6 Formulation directe

Dans cette formulation nous choisissons la fonction de pondération dans le système de solutions complètes de Trefftz vérifiant l'équation (2.11) avec  $u = 0$  i.e.,

$$W = Nc \quad (2.54)$$

Ainsi l'équation devient :

$$\int_{\Gamma} u T c d\Gamma - \int_{\Gamma} t N c d\Gamma = 0 \quad (2.55)$$

Avec  $v = \bar{v}$  sur  $\Gamma_0$  et  $t = \bar{t}$  sur  $\Gamma_1$ .

Par conséquent nous avons :

$$\int_{\Gamma} u T d\Gamma - \int_{\Gamma} t N d\Gamma = 0 \quad (2.56)$$

Où  $c$  le vecteur des coefficients indéterminés. Les champs de bord  $v$  et  $t$  sont approximés comme suit :

$$v = \bar{N} \bar{v} \quad (2.57a)$$

$$t = \bar{N} \bar{t} \quad (2.57b)$$

Avec  $\bar{N}$  un développement polynomial de  $u$  et  $t$  définis uniquement sur le bord  $\Gamma$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{t}$  les paramètres nodaux.

Ainsi l'équation (2.42) peut s'écrire sous la forme :

$$H \bar{u} = G \bar{t} \quad (2.58)$$

Où

$$H = \int_{\Gamma} T^T \bar{N} d\Gamma \quad \text{et} \quad G = \int_{\Gamma} N^T \bar{N} d\Gamma \quad (2.59)$$

Lorsqu'on introduit les conditions aux limites dans l'équation (2.58), on obtient un système d'équation qui après résolution nous donne les vecteurs  $\bar{v}$  et  $\bar{t}$ .

Dans le chapitre qui suit fera l'objet d'application de ces différentes techniques et méthodes.

## Chapitre 3 :

# DETERMINATION DES CHARGES DUES A LA HOULE PAR METHODES SEMI-EMPIRIQUE

La houle est un phénomène physique produit par l'action du vent à la surface de l'eau. Lors d'un coup de vent, le plan d'eau est agité et se couvre de rides (déformation de la surface d'eau). Plus l'intensité du vent est forte plus les déformations sont importantes se manifestant sous forme d'ondulations d'aspects désordonnés. Si le vent persiste, les vagues se forment et progressent suivant la direction où souffle le vent.

Les vagues de vent qui ont le caractère d'oscillations forcées provoquent à leur tour un ébranlement de la surface de l'eau qui produit des ondes libres se propageant depuis le lieu de formation de la tempête. Ces ondulations plus régulières et plus accentuées que les précédentes constituent la houle.

Cette houle dynamique provoque des efforts au droit des structures maritimes. D'où l'objet de l'accorder une importance non moins négligeable lors du dimensionnement.

### **3.1 Les équations fondamentales**

Il existe deux approches de résolution des problèmes de l'hydrodynamique. Il est possible d'explicitier le mouvement des particules liquides ou déterminer le mouvement en un point de l'espace.

La première approche est due à LAGRANGE, une particule liquide est caractérisée par ses coordonnées initiales  $a$  et  $b$ . Le problème consiste à exprimer en fonction de  $a$ ,  $b$  et du temps  $t$  les équations du problème et à les résoudre. Dans le cas de la houle, les inconnues sont les coordonnées de la particule au temps  $t$  et la pression qui s'exerce sur elle.

La seconde approche est due à EULER, en un point fixe de coordonnées  $(x, y, z)$ , on cherche les valeurs des inconnues qui sont, la vitesse  $\mathbf{V}(u, v, w)$  des particules et la pression  $p$  au temps  $t$ .

Dans notre étude l'approche utilisée est celle d'EULER.

#### **3.1.1 Principe de continuité**

Elle exprime la conservation de la masse du liquide. Ce qui signifie qu'aucun fluide ne peut ni être créé, ni disparaître dans le volume considéré.

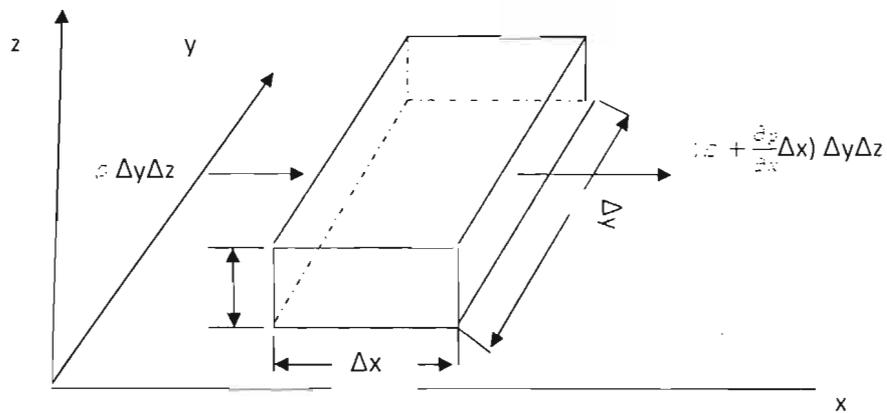


Fig.3.1 Conservation de la masse du liquide

En faisant le bilan des masses dans chaque direction ; Durant l'intervalle de temps  $\Delta t$ .

On aura :

Suivant la direction X :

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (3.1a)$$

Suivant la direction Y :

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (3.1b)$$

Suivant la direction Z :

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (3.1c)$$

avec  $\rho$  : masse volumique du liquide ;

En vertu du principe de la conservation de la matière, ce changement total doit être égal à la variation de masse globale du système, on aura :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1d)$$

En d'autres termes :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.1e).$$

C'est l'équation de conservation de la matière.

### 3.1.2 Principe de la quantité de mouvement

Il est communément appelé équation fondamentale de la dynamique. D'après le troisième théorème de Newton, le produit de l'accélération d'un corps ou d'une particule par sa masse est égal à la somme des forces extérieures [13].

$$\sum \bar{F} = M \times \frac{dV}{dt} \quad (3.2)$$

Avec :

$\bar{F}$  : Ensemble des efforts agissant sur la houle ;

M : masse de l'élément de liquide emprisonné ;

V : vitesse de propagation de la houle ;

En remplaçant  $\frac{dV}{dt}$  suivant les trois directions par :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \quad (3.3a)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \quad (3.3b)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \quad (3.3c)$$

Pour un fluide réel, on doit tenir compte des forces de viscosité, ce qui nous donne l'équation de NAVIER-STOCKES :

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = -\overline{\text{grad}P} - \mu \cdot \Delta V - \rho (\overline{\text{rot} V}) \cdot V \quad (3.4)$$

avec,

$\mu$ : Coefficient de viscosité dynamique du fluide.

Pour trouver des solutions à cette équation nommée équation de NAVIER-STOCKES, il est nécessaire de faire des hypothèses soit sur la nature du fluide ou du mouvement.

En appliquant l'équation (3.2) suivant toutes les directions avec l'hypothèse d'un fluide parfait et irrotationnel, on obtient :

$$-\frac{\partial(P)}{\partial x} = \rho \frac{du}{dt} \quad (3.4a)$$

$$-\frac{\partial(P)}{\partial y} = \rho \frac{dv}{dt} \quad (3.4b)$$

$$-\frac{\partial(P)}{\partial z} = \rho \frac{dw}{dt} \quad (3.4c)$$

Avec P la pression qui agit sur la houle.

L'équation (3.4) devient :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\overline{\text{grad}P} \quad (3.4d)$$

### 3.1.3 Hypothèses et conditions aux limites [17]

#### 3.1.3.1 Hypothèses

1. le fluide est homogène et incompressible : la densité  $\rho =$  constante

2. la seule force intervenant est la gravité, ceci indique que :

- La tension superficielle est négligée, contrairement aux ondes de capillaire ;
- Le fluide est supposé parfait, viscosité supposée nulle ;
- Les forces de Coriolis sont négligées contrairement aux marées.

3. le mouvement est considéré comme cylindrique, de génératrice orthogonale à la direction de propagation : on se ramène à un écoulement bidimensionnel pour les quels la vitesse latérale  $v$  est très petite devant  $u$  ( $v \ll u$ ) donc  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(u, 0, w)$

4. sur la surface libre du l'eau la houle se propage comme une onde progressive périodique.

#### 3.1.3.2 Les conditions aux limites

1. la pression sur la surface libre est uniforme et constante égale à la pression atmosphérique.
2. le fond est horizontal et imperméable ce qui implique :
  - Une vitesse des particules horizontale sur le fond lorsque la profondeur est finie ;
  - Une vitesse des particules nulle sur le fond pour des profondeurs infinies;

L'hypothèse de fond horizontal est valable pour une pente inférieure à 10%

3. on travaille avec des houles irrotationnelles; le rotationnel du mouvement est nul. Les particules ne tournent pas autour d'elles-mêmes.

Avec l'hypothèse 3 et la condition aux limites 3, les composantes du vecteur rotationnel suivant les plans  $y - z$  et  $x - y$ ,  $w_y$  et  $w_x$  sont nulles.

Dans ce cas :

$$\overline{\text{Rot} \vec{V}} = \vec{0} \Rightarrow \omega_y = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.5)$$

### 3.2 Modélisation de la houle

Nous allons aborder dans cette partie les équations qui gouvernent l'écoulement des fluides avant de venir aux efforts dynamiques de la houle sur les ouvrages qui font l'objet de notre étude [13] et [14].

L'étude théorique de la houle consiste à chercher une solution des équations générales de l'hydrodynamique, satisfaisant à certaines conditions avec les hypothèses prédéfinies.

Il existe peu de théorie qui donnent avec exactitude les grandeurs cherchées ( $p$ ,  $u$ ,  $w$ ) ou ( $p$ ,  $x$ ,  $z$ ). Dans ce projet on se limite aux petits mouvements. Pour ce faire on développe les expressions donnant les caractéristiques du phénomène en fonction de la cambrure  $\gamma$  (qui sera définie plus tard) infiniment petit. Ainsi toute grandeur cherchée est donnée comme un développement de Taylor de  $\gamma$ .

$$f = f_0 + \gamma f_1 + \gamma^2 f_2 + \gamma^3 f_3 + \gamma^4 f_4 + \gamma^5 f_5 + \gamma^6 f_6 + \dots \quad (3.6)$$

où les  $f_n$  ne dépendent plus de  $\gamma$ .

L'hypothèse à fixer consiste à supposer que les puissances de  $\gamma$  supérieures à  $n$  sont négligeables.

Ainsi, on travaille avec la théorie d'Airy du premier ordre.

Des lors une fonction  $\Phi$  existe et est solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta\Phi = 0 \tag{3.7}$$

La houle étant un phénomène naturel, elle est caractérisée par un certain nombre de paramètres que l'on désignera par les termes de grandeurs caractéristiques.

### 3.2.1 Les paramètres caractéristiques

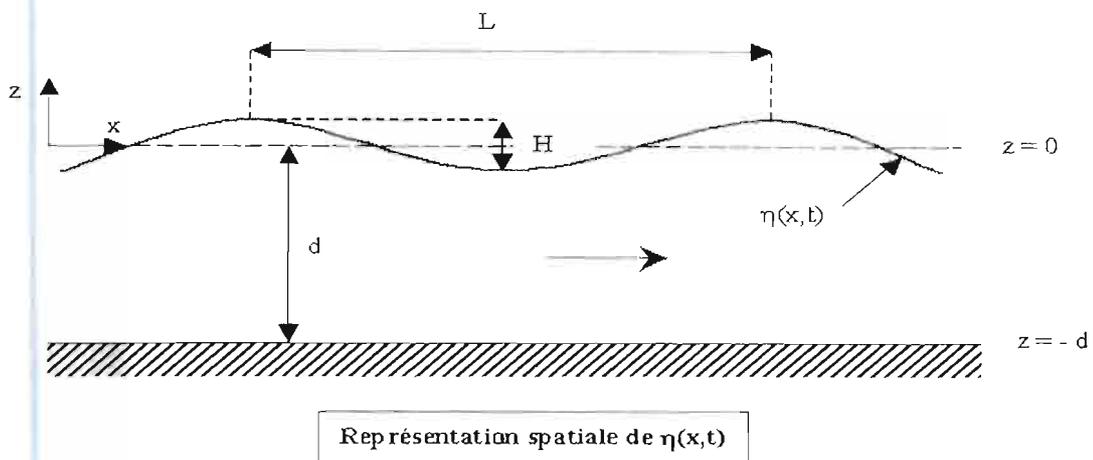


Fig. 11: Représentation de  $\eta(x,y)$

La houle est assimilable à une masse de matière qui se déplace suivant un mouvement sinusoïdal qui se passe à la surface libre du plan d'eau. Parlant de mouvement sinusoïdal on va définir certaines de ses caractéristiques :

Le creux H est la dénivellation maximale entre une crête et un creux successif ou hauteur d'onde.

L'amplitude  $a = \frac{H}{2}$  est le demi-creux.

La longueur d'onde L à la profondeur d, qui est la distance qui sépare deux crêtes successives.

On exprime le nombre k tel que  $k = \frac{2\pi}{L}$

La cambrure  $\gamma = \frac{H}{L}$  est le rapport du creux par la longueur d'onde ;

La période  $T$  qui est l'intervalle de temps qui sépare le passage de deux crêtes successives en un point. On pose  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

La célérité de l'onde  $c = \frac{L}{T}$ , on peut l'exprimer aussi  $c = \frac{\omega}{k}$

La cote de la surface libre par rapport au niveau de repos :  $\eta(x, y, t)$

La vitesse des particules au point  $(x, y)$  à l'instant  $t$  :  $\begin{cases} u(x, y, t) \text{ sur } Ox \\ v(x, y, t) \text{ sur } Oy \end{cases}$

### 3.2.2 Les équations du mouvement

Nous allons réécrire les formules en tenant compte des hypothèses et des conditions aux limites ; afin de faire la description mathématique du mouvement.

#### 3.2.2.1 Equation de continuité

L'hypothèse de fluide homogène et incompressible combiné avec mouvement bidimensionnel et l'équation (3.1d) donne la nouvelle formule de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

car  $\rho$  est constante.  $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$

#### 3.2.2.2 Equation de quantité de mouvement

L'hypothèse de mouvement plan, de fluide incompressible et de viscosité nulle et l'absence de forces extérieures autre que la pesanteur  $g$  montre que l'équation (3.4) devient :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + W \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.10a)$$

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + W \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.10b)$$

Un mouvement irrotationnel indique que le vecteur vitesse dérive d'un potentiel scalaire  $\phi$  ; ceci implique qu'il existe un potentiel de vitesse, c'est-à-dire une fonction  $\Phi(x, z, t)$  telle que :

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \text{ et } w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (3.11)$$

Remplaçons les valeurs de  $u$  et  $w$  dans les équations (3.10a) et (3.10b), avec  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}$ .

Avec la théorie d'Airy du premier ordre, qu'on s'est fixé, ces équations deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz \right] = 0 \quad (3.13)$$

Après intégration de ces équations, on trouve les équations :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = F_1(z, t) \quad (3.14)$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = F_2(x, t) \quad (3.15)$$

Les deux équations (3.14) et (3.15) se résument en une seule :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = F(t) \quad (3.16)$$

Pour un écoulement permanent on a :

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho} + gz - F(t) = \text{constante} \quad (3.17)$$

Pour un écoulement non permanent,  $(t)$  sera introduit dans  $\Phi(x, z, t)$  on fait :

$$\frac{\partial\Phi(x, z, t)}{\partial t} - F(t) \Rightarrow \frac{\partial\Phi(x, z, t)}{\partial t} \quad (3.18)$$

Ce qui donne :

$$-\frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} - \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (3.19)$$

C'est cette équation qui nous permettra de résoudre le problème de la houle.

### 3.2.2.3 Expression du potentiel $\Phi(x, z, t)$

On considère l'équation (3.19) à la surface libre du fluide où  $z = 0$  est approximé par  $z = \eta$

On obtient ainsi :

$$-\frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (3.20a)$$

D'où le profil de l'onde est donnée par :

$$\eta = \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} \right|_{z=0} \quad (3.20b)$$

Le potentiel dépend de trois variables distinctes, pour trouver son expression on applique la méthode de la séparation de variables.

$$\Phi(x, z, t) = X(x)Z(z)T(t) \quad (3.21)$$

On obtient en substituant ceci dans l'équation de Laplace (3.7) :

$$X''ZT + XZ''T = 0 \quad (3.22)$$

En séparant les variables, on aura :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} \quad (3.23)$$

On obtient une équation qui rend égale une fonction  $X$  seulement à une fonction de  $Z$  seulement. Ceci n'est possible que si les deux membres sont égaux à une constante qui doit être négative afin d'obtenir une solution non triviale :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} = k^2 \quad (3.24)$$

On en déduit que :

$$X'' + k^2 X = 0 \quad (3.25)$$

$$Z'' - k^2 Z = 0 \quad (3.26)$$

Dont les solutions sont de la forme :

$$X = A \cos kx + B \sin kx \quad (3.27)$$

$$Z = C e^{kz} + D e^{-kz} \quad (3.28)$$

Pour déterminer la fonction  $T$ , on utilise la condition aux limites :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ à } z = 0 \quad (3.29)$$

Donc on peut en tirer la relation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \text{ pour } z = 0 \quad (3.30)$$

D'où 
$$\frac{T''}{T} = -g \frac{Z''}{Z} = \omega^2 \quad (3.30)$$

On obtient ainsi la fonction  $T$  :

$$T(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t) \quad (3.31)$$

Par suite la fonction est donnée par :

$$\Phi(x, z, t) = [E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t)] [A \cos kx + B \sin kx] [C e^{kz} + D e^{-kz}] \quad (3.32)$$

La fonction potentielle de vitesse est obtenue avec une onde progressive voyageant dans la direction positive des  $x$ , il s'agit de la fonction :

$$\Phi = g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(d+z)}{\omega \cosh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (3.33)$$

### 3.3 Autre approche de détermination du potentiel de vitesse $\Phi$

Pour avoir un potentiel de vitesse d'une onde progressive voyageant dans la direction positive des  $x$ , on peut exprimer  $\Phi$  sous la forme :

$$\Phi = \phi(z) \cos(kx - \omega t) \quad (3.34)$$

Il reste alors à trouver la fonction  $\phi(z)$

D'après l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.35)$$

$$-k^2 \phi(z) \cos(kx - \omega t) + \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} \cos(kx - \omega t) = 0 \quad (3.36)$$

$$\left[ -k^2 \phi(z) + \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} \right] \cos(kx - \omega t) = 0 \quad (3.37)$$

$$-k^2 \phi(z) + \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.38)$$

Les solutions possibles de l'équation de continuité sont sous la forme :

$$\phi(z) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz) \quad (3.39)$$

La condition de non-pénétration au fond  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0$  donne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \cos(kx - \omega t) = 0 \quad (3.40)$$

La relation (3.30) nous donne la relation de Poisson :

$$-\frac{\omega^2}{g} \phi(z) + \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = 0 \quad (3.42)$$

En appliquant la condition de non-pénétration au fond et celle de Poisson sur la formule de  $\phi(z)$  de l'équation (3.39), on obtient :

$$\begin{cases} -Ak \sinh(kd) + Bk \cosh(kd) = 0 \\ -\omega^2 A + gkB = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Pour que ce système admette une solution, il faut que son déterminant soit nul. La relation qui en découle est appelée relation de dispersion: elle relie la longueur d'onde de la houle à la période et à la profondeur.

$$\begin{vmatrix} -\sinh(kd) & \cosh(kd) \\ -\omega^2 & gk \end{vmatrix} = 0 \quad (3.44)$$

D'où la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (3.45)$$

et, on a de plus :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \tanh(kd) \quad (3.46)$$

Ce qui entraîne que :

$$\phi(z) = \mathbf{A} \frac{\cosh k(d+z)}{\omega \cosh(kd)} \quad (3.47)$$

Et le potentiel de vitesse est donné par :

$$\Phi(x, z, t) = \mathbf{A} \frac{\cosh k(d+z)}{\omega \cosh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (3.48a)$$

Pour obtenir l'expression de  $\eta$  on se sert de la condition dynamique à la surface libre:

$$\eta = \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} \right|_{z=0} \quad (3.48b)$$

En général le profil de l'onde est noté comme suit:

$$\eta = \frac{\mathbf{H}}{2} \sin(kx - \omega t) \quad (3.48c)$$

Ceci donne l'expression de la constante A :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{H}}{2\omega} \quad (3.48d)$$

D'où l'expression du potentiel de vitesse :

$$\Phi(x, z, t) = \frac{H}{2\omega} \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \cos(kx - \omega t) \quad (3.48e)$$

Expressions liant les différents paramètres de la houle.

### 3.4 Expressions des efforts sur les piles

Les piles qui supportent la structure sont soumises à l'effort de la houle. Cet effort est causé par les vitesses et les accélérations des particules [13].

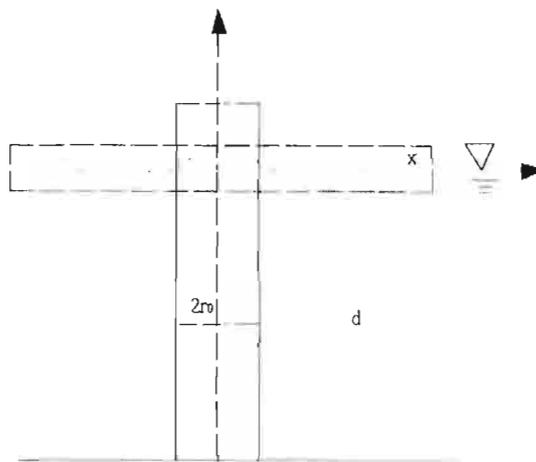


Fig. 12: Impact de la houle sur une pile circulaire

Avant de déterminer les efforts proprement dits, on établit les expressions des vitesses des particules. Comme déjà mentionné dans les hypothèses, ces vitesses se réduisent en deux composantes  $u$ ,  $w$  suivant la direction de la propagation de l'onde  $x$  et la direction verticale  $z$ .

Avec les relations définies dans l'équation (3.11), on obtient comme expression de  $u$  et  $w$

$$u = \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \sin(kx - \omega t) \quad (3.49a)$$

$$w = -\frac{agk}{\omega} \frac{\sinh k(d+z)}{\cosh kd} \cos(kx - \omega t) \quad (3.49b)$$

Lorsque  $z = -d$  on obtient  $w = 0$ , ce qui vérifie la condition de non pénétration de l'onde au fond.

La variation de la pression s'exprime ainsi :

$$p = \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \sin(kx - \omega t) - \rho g z \quad (3.49c)$$

Ainsi l'approche que nous allons utiliser est celle de Von Morrison par analogie avec les forces de mouvement permanent.

Ces forces sont de deux types :

Les forces d'inertie données par unité de longueur par la relation :

$$f_i = C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \frac{du}{dt} \quad (3.50a)$$

Les forces de trainée données par unité de longueur par la relation :

$$f_D = \frac{1}{2} C_D \rho D u |u| \quad (3.50b)$$

Avec  $C_D$  et  $C_M$  les coefficients de trainée et d'inertie sont souvent approximées à 1,2 et 2 respectivement.

En plus de la théorie de Von Morrison, nous allons utiliser l'hypothèse de l'absence de la pile de diamètre  $D$  i.e. nous considérons des piles de diamètres petits avec :

$$\frac{D}{L} \leq 0,05 \quad \text{où } L \text{ est la longueur d'onde.}$$

On a l'expression de la vitesse  $u$  en théorie linéaire:

$$u = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} R \sin\left(-\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (3.51a)$$

Avec  $H, g, T$  la hauteur d'onde, l'accélération de la gravité et la période respectivement.

Donc,

$$\frac{du}{dt} = -\frac{gH\pi}{L} R \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (3.51b)$$

En remplaçant les expressions  $u$  et  $\frac{du}{dt}$  définies dans les équations (3.51a), (3.51b) les équations (3.50b), (3.50a) respectivement, on aura :

$$f_i = -C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} H \frac{\pi}{L} R \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (3.52a)$$

$$f_D = \frac{1}{2} C_D \rho g D H^2 \frac{g T^2}{4 L^2} R^2 \sin\left(-\frac{2\pi t}{T}\right) \left| \sin\left(-\frac{2\pi t}{T}\right) \right| \quad (3.52b)$$

avec R le facteur de réponse à la pression qui est donnée par :

$$R = \frac{\cosh\left[\frac{2\pi}{L}(d+z)\right]}{\cosh\left[\frac{2\pi d}{L}\right]} \quad (3.52c)$$

On note que ces forces varient en fonction de l'élévation sur la pile z et du temps t.

La force horizontale totale et le moment total par rapport à la base de la pile s'obtiennent après intégration des forces  $f_i$  et  $f_D$  :

$$F = \int_{-d}^{\eta} f_i dz + \int_{-d}^{\eta} f_D dz = F_i + F_D \quad (3.53a)$$

$$M = \int_{-d}^{\eta} (d+z) f_i dz + \int_{-d}^{\eta} (d+z) f_D dz = M_i + M_D \quad (3.53b)$$

avec,

$\eta = \frac{H}{2} \sin\left(-\frac{2\pi t}{T}\right)$  qui est maximal lorsque  $t = -\frac{T}{4}$  et correspondant à un passage de la crête de l'onde.

Et  $M_i$ ,  $M_D$ ,  $F_i$  et  $F_D$  sont donnés par :

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho g D H^2 K_D \quad (3.54a)$$

$$F_i = C_M \rho g \frac{\pi D^2}{4} H K_i \quad (3.54b)$$

$$M_i = C_M \rho g \frac{\pi D^2}{4} H K_i d S_i = F_i d S_i \quad (3.54c)$$

$$M_D = \frac{1}{2} C_D \rho g D H^2 K_D d S_D = F_D d S_D \quad (3.54d)$$

Où les valeurs de  $K_i$ ,  $K_D$ ,  $S_i$  et  $S_D$  sont donnés par :

$$K_i = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (3.55a)$$

$$K_D = \frac{1}{4} n \left| \sin\left(-\frac{2\pi t}{T}\right) \right| \sin\left(-\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (3.55b)$$

$$S_i = 1 + \frac{1 - \cosh\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sinh\left(\frac{2\pi t}{T}\right)} \quad (3.55c)$$

$$S_D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh\left(\frac{4\pi d}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{4\pi d}{L}\right)} \right] \quad (3.55d)$$

où  $n$  est le nombre de groupe donné par :

$$n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{4\pi \frac{d}{L}}{\sinh\left(4\pi \frac{d}{L}\right)} \right] \quad (3.55e)$$

Les valeurs maximales des forces et des moments sont alors données par les formules :

$$F_{Dm} = \frac{1}{2} C_D \rho g D H^2 K_{Dm} \quad (3.56a)$$

$$F_{im} = C_M \rho g \frac{\pi D^2}{4} H K_{im} \quad (3.56b)$$

$$M_{im} = F_{im} d S_{im} \quad (3.56c)$$

$$M_{Dm} = F_{Dm} d S_{Dm} \quad (3.56d)$$

Où  $K_{im}$  et  $K_{Dm}$  sont respectivement obtenus à partir des équations (3.55a) et (3.55b) en prenant  $t = 0$  et  $t = -\frac{T}{4}$ , et les  $S_{im}$  et  $S_{Dm}$  restent égaux à  $S_i$  et  $S_D$  respectivement.

Cependant pour plus de précision, il faut prendre en compte les variations des coefficients d'inertie et de traînée en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la surface de la pile.

On a :

$$C_M = \begin{cases} 2 & \text{pour } Re < 2.5 \times 10^5 \\ 2 - \frac{Re}{5 \times 10^5} & \text{pour } 2.5 \times 10^5 < Re < 5 \times 10^5 \\ 1.5 & \text{pour } 5 \times 10^5 < Re \end{cases} \quad (3.57a)$$

Où le nombre de Reynolds est donné par :

$$Re = \frac{u_{max} D}{\nu} \quad (3.57b)$$

avec,

$$u_{max} = \frac{HgT}{2L} = \pi \frac{HL_0}{TL} \quad (3.57c)$$

$L_0$  est la longueur d'onde en eau profonde

- De plus le coefficient de traînée dépend de la rugosité de la surface et pris égal à 1 après majoration pour une surface lisse.

L'application de ces différentes méthodes se fera au chapitre 5.

## Chapitre 4:

# DIFFRACTION SUR LES OUVRAGES EN MER

## 4.1 Rappels sur les équations de Poisson et d'Helmholtz

Ces équations d'Helmholtz et de Poisson sont fréquemment rencontrées dans divers domaines de la physique et dans les sciences de l'ingénieur.

### 4.1.1 Spécialisation de l'équation de Poisson

L'équation de Poisson est rencontrée dans la propagation d'ondes dans un champ électromagnétique, la vibration des membranes. Elle permet aussi de décrire plusieurs phénomènes physiques telle que la transmission de la chaleur et permet de définir les lois de Maxwell.

Elle est définie par l'équation :

$$\nabla^2 \Phi = \bar{b} \quad \text{sur } \Omega \quad (4.1a)$$

avec les conditions de Dirichlet et de Neumann sont respectivement :

$$\Phi = \bar{\Phi} \quad \text{sur } \Gamma_\Phi \quad (4.1b)$$

$$\bar{\Phi}_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_\Phi \quad (4.1c)$$

et,

$$\Gamma_\Phi \cup \Gamma_\Phi = \Gamma \quad (4.1d)$$

lorsque le terme à droite est nul, elle nommée l'équation de Laplace.

### 4.1.2 Spécialisation de l'équation d'Helmholtz

L'équation d'Helmholtz est aussi rencontrée dans les mêmes domaines que l'équation de Poisson ainsi que dans les problèmes de diffractions des vagues sur les ouvrages offshore [7].

C'est l'équation différentielle :

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (4.2a)$$

avec les conditions de Dirichlet et de Neumann sont respectivement :

$$\Phi = \bar{\Phi} \quad \text{sur } \Gamma_\Phi \quad (4.2b)$$

$$\overline{\Phi}_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_\phi \quad (4.2c)$$

Et

$$\Gamma_\Phi \cup \Gamma_\phi = \Gamma \quad (4.2d)$$

## 4.2 Solution complète et Système complet

Par utilisation de la méthode de la séparation des variables, les solutions complètes et systèmes complets de ces deux équations sont données par [7] :

### 4.2.1 Equation de Poisson

- Cas bidimensionnel

$$\Phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m r^m \cos m\theta + b_m r^m \sin m\theta] \quad \text{en region limitée}$$

$$(4.3a) \quad \Phi(r, \theta) = a_0^* + a_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m r^{-m} \cos m\theta + b_m r^{-m} \sin m\theta] \quad \text{en region non limitée} \quad (4.3b)$$

Et les systèmes complets associés aux familles de solutions des équations (4.3a) et (4.3b) sont donnés par :

$$\Lambda = \{1, r^m \cos m\theta, r^m \sin m\theta\} \quad (4.4a)$$

$$\Lambda = \{1, \ln r, r^{-m} \cos m\theta, r^{-m} \sin m\theta\} \quad (4.4b)$$

- Cas tridimensionnel

$$\Phi(r, \theta, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{|m|} [a_{mq} r^m P_m^q(\cos \theta) e^{iq\psi}] \quad \text{en region limitée} \quad (4.5a)$$

$$\Phi(r, \theta, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{|m|} [a_{mq} r^{-m-1} (kr) P_m^q(\cos \theta) e^{iq\psi}] \quad \text{en region non limitée} \quad (4.5b)$$

et les systèmes complets associés aux familles de solutions des équations (4.5a) et (4.5b) sont donnés par :

$$\Lambda = \{r^m P_m^q(\cos \theta) e^{iq\psi}\} \quad (4.6a)$$

$$\Lambda = \{r^{-m-1}P_m^q(\cos\theta)e^{iq\psi}\} \quad (4.6a)$$

Avec

$$m = 1, 2, 3, 4 \dots; -m \leq q \leq m$$

#### 4.2.2 Equation d'Helmholtz

- Cas bidimensionnel

$$\Phi(r, \theta) = a_0 J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m J_m(kr) \cos m\theta + b_m J_m(kr) \sin m\theta] \quad \text{en region limitée}$$

$$(4.7a) \quad \Phi(r, \theta) = a_0 H_0^{(1)}(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m H_m^{(1)}(kr) \cos m\theta + b_m H_m^{(1)}(kr) \sin m\theta] \quad \text{en region non limitée} \quad (4.7b)$$

Et les systèmes complets associés aux familles de solutions des équations (4.7a) et (4.7b) sont donnés par :

$$\Lambda = \{J_0(kr), J_m(kr) \cos m\theta, J_m(kr) \sin m\theta\}$$

$$(4.8a) \quad \Lambda = \{H_0^{(1)}(kr), H_m^{(1)}(kr) \cos m\theta, H_m^{(1)}(kr) \sin m\theta\} \quad (4.8b)$$

- Cas tridimensionnel

$$\Phi(r, \theta, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{|m|} [a_{mq} j_m(kr) P_m^q(\cos\theta) e^{iq\psi}] \quad \text{en region limitée} \quad (4.10a)$$

$$\Phi(r, \theta, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{|m|} [a_{mq} h_m^{(1)}(kr) P_m^q(\cos\theta) e^{iq\psi}] \quad \text{en region non limitée} \quad (4.10b)$$

et les systèmes complets associés aux familles de solutions des équations (4.10a) et (4.10b) sont donnés par :

$$\Lambda = \{j_m(kr) P_m^q(\cos\theta) e^{iq\psi}\} \quad (4.11a)$$

$$\Lambda = \{h_m^{(1)}(kr) P_m^q(\cos\theta) e^{iq\psi}\} \quad (4.11b)$$

Avec

$$m = 1, 2, 3, 4 \dots; -m \leq q \leq m$$

Les fonctions spéciales utilisées dans les équations sont les fonctions de Bessel et Hankel de premier genre  $J_m(kr)$ ,  $H_m^{(1)}(kr)$ , associées aux fonctions de Legendre  $P_m^q(\cos\theta)$  et les fonctions sphériques de Bessel et Hankel  $j_m(kr)$ ,  $h_m^{(1)}(kr)$

Les fonctions de Bessel, découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernoulli, portent le nom de Friedrich Bessel et sont les solutions de l'équation différentielle de Bessel :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + (x^2 - n^2)f = 0 \quad (4.12)$$

Pour tout nombre réel ou complexe  $n$ , le cas le plus commun est quand  $n$  est un entier et il est alors nommé l'ordre de la fonction.

### 4.3 Formulation mathématique du problème

L'équation qui régit la propagation des ondes est définie par :

$$\nabla^2 \Phi(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.13)$$

Avec  $c$  la célérité de l'onde,  $\Phi(x, t)$  la fonction potentielle et  $x = (x, y, z)$ .

En supposant que le mouvement du fluide dépend du temps de façon harmonique c'est-à-dire la fonction peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(x, t) = \text{Re} \left[ \Phi(x) e^{-i\omega t} \right] \quad (4.14)$$

où  $\omega$  la fréquence d'onde et  $\Phi(x)$  le potentiel complexe ou potentiel total.

Introduisons l'équation (4.14) dans (4.13), on obtient ainsi l'équation d'Helmholtz:

$$\nabla^2 \Phi(x) + k^2 \Phi(x) = 0 \quad (4.15)$$

où  $k$  est le nombre d'onde et  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Ainsi le problème défini par l'équation (4.13) devient un problème de détermination du potentiel total  $\Phi(x)$  qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(x) = \Phi^i + \Phi^s \quad (4.16)$$

Avec  $\Phi^i$  et  $\Phi^s$  les potentiels des vagues incidentes et diffractées et satisfaisant respectivement à l'équation de Laplace et la condition de Sommerfeld i.e. :

$$\nabla^2 \Phi^i = 0 \quad (4.17)$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \Phi^s}{\partial r} - ik \Phi^s \right) = 0 \quad (4.18)$$

Il est montré que le potentiel des vagues incidentes est :

$$\Phi^i = -\frac{igH}{2\omega} \frac{\cosh(z+d)}{\cosh(kd)} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \quad (4.19)$$

Avec  $d$ ,  $g$  et  $\alpha$  la profondeur des vagues, la constante gravitationnelle et l'angle d'incidence de l'onde et :

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (4.20)$$

Par la méthode de la séparation des variables, le potentiel total  $\Phi(x)$  peut s'écrire comme :

$$\Phi(x) = \phi(x, y) \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh(kd)} \quad (4.21)$$

où

$$\phi = \phi^i + \phi^s$$

$$\phi^i(x, y) = -\frac{igH}{2\omega} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \quad (4.22)$$

En substituant l'équation (4.22) dans l'équation (4.15), on obtient l'équation d'Helmholtz pour l'onde diffractée  $\phi^s$  :

$$\nabla^2 \phi^s + k^2 \phi^s = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (4.23a)$$

avec les conditions aux limites Neumann et Sommerfeld respectivement :

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial n} + \frac{\partial \phi^i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.23b)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \Phi^s}{\partial r} - ik\Phi^s \right) = 0 \quad (4.23c)$$

Où  $n$  est la normale extérieure à la structure.

### 4.3.1 Définition des paramètres physique du problème

Après avoir déterminé le potentiel de l'onde diffractée  $\phi^s$ , l'élévation de la surface libre  $\eta$  est donnée par la relation :

$$\eta = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (4.24a)$$

Et la pression exercée par l'onde sur la structure est égale à :

$$P(x, t) = -\rho \left( \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right) \quad (4.24b)$$

Où  $\rho$  est la densité du fluide.

Dans ce cas la force sur la structure par unité de longueur est obtenue après intégration de la pression autour de la structure par :

$$F_z = \int_0^{2\pi} nP(x, t) d\theta \quad (4.24c)$$

Ainsi la force totale horizontale et le moment sont évalués par les expressions :

$$F = \int_{-d}^0 F_z dz = i\rho\omega \frac{\sinh(kd)}{k} \int_{\Gamma_s} n\phi d\Gamma \quad (4.24d)$$

et,

$$M = \int_{-d}^0 F_z (z + d) dz \quad (4.24e)$$

### 4.3.2 Formulation de l'équation d'Helmholtz utilisant la méthode de Trefftz

L'équation d'Helmholtz peut être résolue en utilisant la méthode des éléments de bord de Trefftz. En effet nous pouvons construire à partir des équations (4.23a-c) des intégrales sur le bord de l'élément avec des fonctions poids d'après [4] et [6].

Ainsi on obtient une équation résiduelle qui correspond à un problème de calcul d'intégrale définie uniquement sur le bord.

En effet :

$$\int_{\Omega} W (\nabla^2 \phi^s + k^2 \phi^s) d\Omega + \int_{\Gamma_s} W_s \left( \frac{\partial \phi^s}{\partial n} + \frac{\partial \phi^i}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} W_{\infty} \left( \frac{\partial \Phi^s}{\partial r} - ik \Phi^s \right) d\Gamma = 0 \quad (4.25)$$

Où on suppose que  $W = -W_s = -W_{\infty}$

En utilisant la formule intégrale de GREEN i.e.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi^s W - \phi^s \nabla^2 W) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( W \frac{\partial \phi^s}{\partial n} - \phi^s \frac{\partial W}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (4.25)$$

En l'introduisant dans l'équation (2.25) on obtient :

$$\int_{\Omega} \phi^s (\nabla^2 W + k^2 W) d\Omega + \int_{\Gamma_s} \left( W \frac{\partial \phi^s}{\partial n} + \phi^s \frac{\partial W}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} \phi^s \left( \frac{\partial W}{\partial r} - ikW \right) d\Gamma = 0 \quad (4.25)$$

En supposant que la fonction de pondération W vérifie l'équation d'Helmholtz sur le domaine i.e.

$$\nabla^2 W + k^2 W = 0 \quad (4.26)$$

En associant cette équation avec les équations (4.8a) et (4.8b) donnant la famille de solutions complètes dans le système complet de Trefftz, on peut dire que :

$$W = H_m^{(1)}(kr) \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Où  $m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

De plus pour  $(kr)$  assez grand, la fonction de pondération peut être approximée comme suit :

$$H_m^{(1)}(kr) = \left( \frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \left( kr - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (4.28)$$

avec cette valeur de  $W$ , on obtient l'équation, :

$$\frac{\partial W}{\partial r} - ikW = 0 \quad (4.29)$$

Finalement la formulation intégrale pour un problème de diffraction d'ondes sur une structure est définie comme suit :

$$\int_{\Gamma_s} \left( W \frac{\partial \phi^s}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \left( \phi^s \frac{\partial W}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (4.30)$$

#### 4.3.2.1 La formulation indirecte

Dans la formulation indirecte les fonctions utilisent la famille des solutions complètes de l'équation d'Helmholtz.

Dans ce cas, l'équation (4.25) devient :

$$\int_{\Gamma} W \left( \frac{\partial \phi^s}{\partial n} + \frac{\partial \phi^i}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (4.31)$$

La fonction inconnue  $\phi^s$  est approximée par une série de fonctions d'interpolation  $N_i$  et un ensemble discret d'inconnues  $a_i$

$$\phi^s = \sum_i N_i a_i = Na \quad (4.32)$$

Avec les fonctions d'interpolation  $N_i$  qui sont les fonctions de Hankel du premier genre et satisfont à l'équation d'Helmholtz

$$\nabla^2 N_i + k^2 N_i = 0 \text{ sur } \Omega \quad (4.33a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} - ikN_i = 0 \text{ sur } \Gamma_{\infty} \quad (4.33b)$$

La fonction de pondération quant elle peut être choisie comme la fonction de Galerkin :

$$W_j = N_j \quad (4.34)$$

En introduisant ces équations (4.32) et (4.34) dans l'équation (4.31) , on obtient :

$$\int_{\Gamma} N_j \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial n} a_i + \frac{\partial \Phi^i}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (4.35)$$

En d'autre terme

$$Ka = f \quad (4.36)$$

avec

$$K_{ij} = \int_{\Gamma} N_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial n} d\Gamma \quad (4.37a)$$

$$f_{ij} = - \int_{\Gamma} N_j \frac{\partial \phi^i}{\partial n} d\Gamma \quad (4.37b)$$

Ce qui permettra de déterminer les coefficients  $a_i$ .

On observe que la matrice  $K$  est symétrique.

#### 4.3.2.2 La formulation directe

Dans la méthode de Trefftz, l'approche utilisée est généralement celle où les variables sont les grandeurs physiques comme le potentiel et la vitesse définis sur la frontière.

En introduisant l'équation (4.34) dans l'équation (4.30) , on obtient :

$$\int_{\Gamma_s} N_j \frac{\partial \phi^s}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \frac{\partial N_j}{\partial n} \phi^s d\Gamma = 0 \quad (4.38)$$

En subdivisant la structure en plusieurs éléments, la fonction  $\Phi^s$  typique à l'élément « e » peut être interpolée comme suit :

$$\begin{cases} \phi_c^s = \bar{N}_c \bar{\Phi}_c^s \\ \frac{\partial \phi_c^s}{\partial n} = \bar{N}_c \left( \frac{\partial \phi_c^i}{\partial n} \right)_c \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (4.39)$$

Où  $\bar{N}_c$  et  $\bar{N}_c$  sont des fonctions d'interpolation,  $\bar{\Phi}_c^s$  un vecteur inconnu défini par le potentiel de diffraction et  $\left( \frac{\partial \phi_c^i}{\partial n} \right)_c$  vecteur nodal donné sur les nœuds de l'élément.

Après assemblage, on peut obtenir les fonctions d'interpolation de la fonction  $\phi^s$  sur toute la frontière par :

$$\phi^s = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \bar{\Phi}_i^s \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (4.40)$$

Avec  $\bar{N}_i$  des expansions polynomiales définies uniquement sur la frontière  $\Gamma_s$  et  $\bar{\Phi}_i^s$  des valeurs nodales sur la frontière.

La matrice globale est obtenue dans ce cas par la relation suivante :

$$Hx = f \quad (4.41)$$

Où

$$H = \int_{\Gamma_s} \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial n} \right)^T \bar{N} d\Gamma \quad (4.42)$$

$$x = \left\{ \bar{\Phi} \right\} \quad (4.43)$$

$f$  peut être calculé par la relation définie dans l'équation (4.37b)

Une fois le potentiel de diffraction est obtenu, le profil de surface  $\eta$ , la pression  $P$ , la force horizontale totale  $F$  et le moment de renversement  $M$  peuvent être calculés à partir des équations (4.24 a – e)

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Sur un cylindre vertical

Considérons la solution analytique d'un problème de diffraction linéaire par un cylindre vertical isolé d'après [7] et supposons que l'onde arrive de l'infini avec une incidence nulle i.e.  $\alpha = 0$ .

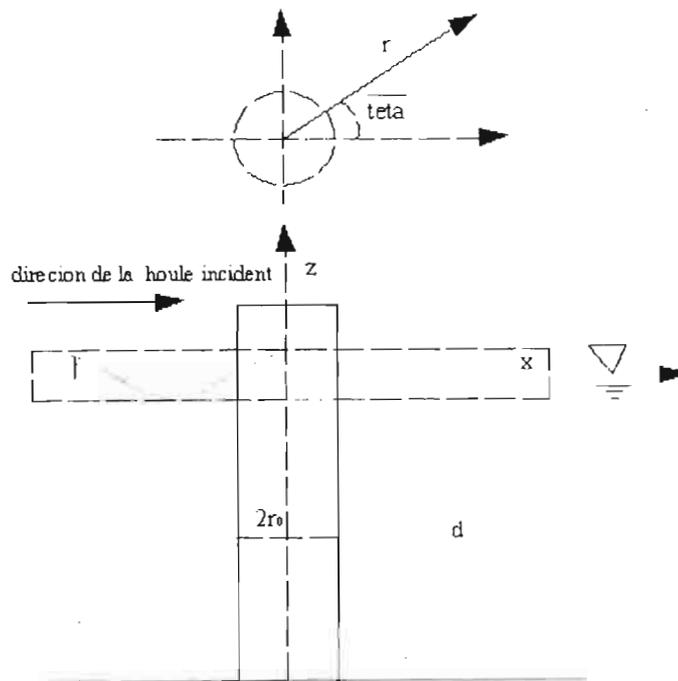


Fig. 13: Diffraction autour d'une pile

Dans ce cas la fonction potentielle incidente  $\phi^i$  sera approximée comme suit :

$$\phi^i = -\frac{igH}{2\omega} e^{ikx} = -\frac{igH}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\theta \quad (4.44a)$$

où les symboles de Jacobi sont définis par :

$$\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2 \text{ pour } n = 1, 2, \dots \quad (4.44b)$$

Et la fonction potentielle de diffraction  $\phi^s$  solution de l'équation d'Helmholtz est donnée par :

$$\phi^s = -\frac{igH}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n B_n H_n(kr) \cos n\theta \quad (4.44c)$$

où  $H_n(kr)$  les fonctions de Hankel du premier genre satisfaisant les conditions de Sommerfeld et les conditions de bord nous permettent de déterminer les coefficients inconnus  $B_n$  par :

$$B_n = -\frac{J'_n(kr_0)}{H'_n(kr_0)} \quad (4.44d)$$

Donc le potentiel total de vitesse est donné par :

$$\phi = \phi^s + \phi^i = -\frac{igH}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \left[ J_n(kr) - \frac{J'_n(kr_0)}{H'_n(kr_0)} H_n(kr) \right] \cos n\theta \quad (4.44e)$$

Nous remarquons que

$$J_n(kr_0) - \frac{J'_n(kr_0)}{H'_n(kr_0)} H_n(kr_0) = \frac{2i}{\pi k r_0 H'_n(kr_0)} \quad (4.44f)$$

D'où

$$\phi = \phi^s + \phi^i \Big|_{r=r_0} = \frac{gH}{\pi k r_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \left[ \frac{\cos n\theta}{H'_n(kr_0)} \right] \quad (4.44g)$$

Où  $r_0$  est le rayon du cylindre (pile).

Ainsi les paramètres physiques sont donnés par les relations suivantes d'après les équations (4.24 a – e) :

- L'élévation de surface au bord du cylindre est donnée par :

$$\eta = \frac{iH}{\pi k r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \left[ \frac{\cos n\theta}{H'_n(kr_0)} \right] \quad (4.44h)$$

- La pression dynamique au bord du cylindre est donnée par :

$$P = \frac{iH\rho g}{\pi k r_0} \times \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \left[ \frac{\cos n\theta}{H'_n(kr_0)} \right] \quad (4.44i)$$

- La force horizontale totale au bord du cylindre est donnée par :

$$F = 2H\rho g \times \frac{\tanh kd}{k^2} \times \frac{1}{H'_1(kr_0)} \quad (4.44j)$$

- Le moment de renversement au bord du cylindre est donnée par :

$$M = 2H\rho g \times \frac{kd \sinh kd + 1 - \cosh kd}{k^3} \times \frac{1}{H'_1(kr_0)} \quad (4.44h)$$

Pour ce type d'ouvrage, il y a d'autres formulations permettant de déterminer la fonction potentielle totale d'après [9]

$$\Phi(x, t) = \text{Re}(e^{i\omega t} \Phi(x)) \quad (4.44i)$$

Avec

$$\Phi(x, y) = \Phi^i(x, y) + \Phi^s(x, y) \quad (4.44j)$$

Où le potentiel incident  $\Phi^i$ , est donné par :

$$\Phi^i = \frac{\omega a}{k} \times T(\omega, z) \text{Re} \left[ e^{i(\omega t - kx)} \right] \quad (4.44k)$$

Avec

$$T(\omega, z) = \frac{\cosh(k(d+z))}{\sinh(kd)} \quad (4.44l)$$

L'onde se propage suivant la direction des  $x$  donc la composante suivant  $y$  du vecteur d'onde  $k_y$  est nulle.

Le développement en série de la fonction  $e^{ikx}$  est donné par :

$$e^{ikx} = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} 2 \times i^{-n} J_n(kr) \cos n\theta \right] \quad (4.44m)$$

Avec  $x = r_0 \cos \theta$

$$\Phi^i = \frac{\omega a}{k} \times T(\omega, z) \left[ e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} 2 \times i^{-n} J_n(kr) \cos n\theta \right] \quad (4.44n)$$

Pour la sommation la valeur du premier terme doit être divisée par 2

Le potentiel diffracté concerne le domaine illimité et a pour solution les fonctions de Hankel du second genre :

$$\Phi^s = \frac{\omega \times a}{k} \times T(\omega, z) \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr_0) \cos n\theta \right] \quad (4.44o)$$

avec la vérification de conditions de bords  $\frac{\partial}{\partial n}(\Phi^i + \Phi^s) = \frac{\partial}{\partial r}(\Phi^i + \Phi^s) = 0$  :

$$B_n = -2i^{-n} \frac{J_n'(kr_0)}{H_n^{(2)'}(kr_0)} \quad (4.44p)$$

Le potentiel total est donné par :

$$\Phi = \Phi^s + \Phi^i = \frac{\omega \times a}{k} T(\omega, z) \times \operatorname{Re} \left[ \frac{4}{\pi} e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{-n-1} \cos n\theta}{k \times r_0 H_n^{(2)'}(kr_0)} \right] \quad (4.44q)$$

Les paramètres physiques sont déterminés par les équations (4.24a-e)

#### 4.4.2 Sur un cylindre vertical infiniment long

Dans le problème de diffraction sur un cylindre infiniment long et sous l'influence d'une onde plane, l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindrique  $(r, \theta, z)$  mènera à l'équation de Bessel décrite ci-dessus.

On a l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta f + k^2 f = 0 \quad (4.45a)$$

Or le Laplacien de  $f$  en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (4.45b)$$

D'après les hypothèses :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + k^2 f = 0 \quad (4.45c)$$

L'équation (2.23o) devient :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + k^2 f = 0 \quad (4.45d)$$

Finalement on obtient :

$$(kr)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial (kr)^2}\right) + kr \frac{\partial f}{\partial (kr)} + (kr)^2 f = 0 \quad (4.45e)$$

qui est l'équation de Bessel avec  $x = kr$  et  $n = 0$ .

On utilise dans ce cas la fonction de Bessel d'ordre zéro  $J_0(kr)$

Et les paramètres physiques sont donnés par les relations suivantes :

- L'élévation de surface au bord du cylindre est donnée par :

$$\eta = \frac{iH}{\pi k r_0} \times \frac{1}{H'_0(kr_0)} \times \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \cos n\theta \quad (4.45d)$$

- La pression dynamique au bord du cylindre est donnée par :

$$p = \frac{iH\rho g}{\pi k r_0} \times \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \times \frac{1}{H'_0(kr_0)} \times \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \cos n\theta \quad (4.45f)$$

- La force horizontale totale au bord du cylindre est donnée par :

$$F = 2H\rho g \times \frac{\tanh kd}{k^2} \times \frac{1}{H'_1(kr_0)} \quad (4.45g)$$

- Le moment de renversement au bord du cylindre est donné par :

$$M = 2H\rho g \times \frac{kd(\sinh kd) + 1 - \cosh kd}{k^3} \times \frac{1}{H'_1(kr_0)} \quad (4.45h)$$

#### 4.4.3 Les fonctions spéciales appliquées aux domaines anguleux et trou circulaire

La configuration géométrique des ouvrages comportant de telles singularité mérite d'être traitée avec plus de précisions car de plus en plus les ouvrages épousent des formes complexes et variées [3], [4] et [9].

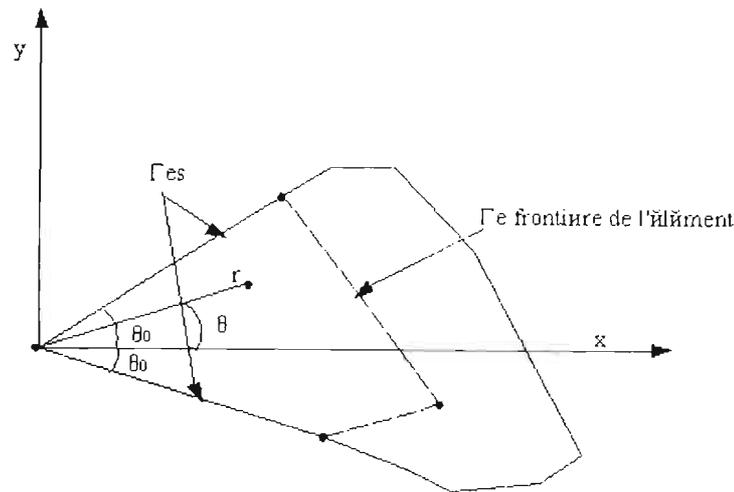


Fig. 14: Domaine anguleux

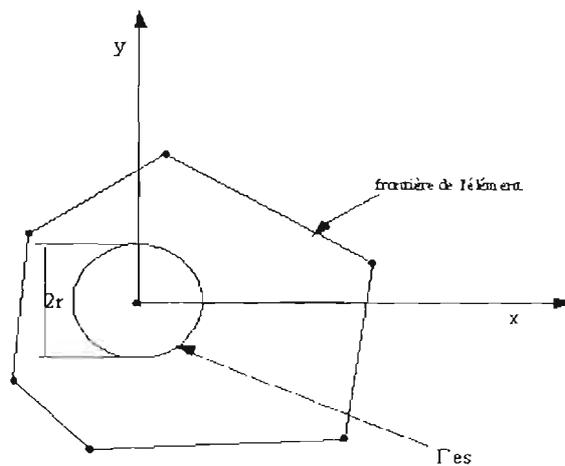


Fig. 15: Domaine avec un trou

On sait que la méthode des éléments finis dite conventionnelle ne traite pas fidèlement les singularités induites par les défauts locaux tels que les domaines anguleux, les trous circulaires, les têtes de colonne sur les dalles champignons etc.

Mais cette partie nous permet de construire ces fonctions spéciales dans un système complet de Trefftz satisfaisant l'équation d'équilibre et les conditions aux bords.

La formulation de chaque fonction est basée sur la solution générale de l'équation de Poisson d'une part et d'autre part l'équation d' Helmholtz en deux dimensions.

Pour l'équation de Poisson, la fonction s'exprime comme suit :

$$\Phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^{\lambda_n} + b_n r^{-\lambda_n}) \cos(\lambda_n \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (d_n r^{\lambda_n} + e_n r^{-\lambda_n}) \sin(\lambda_n \theta) \quad (4.46)$$

#### 4.4.3.1 Domaine anguleux avec l'équation de poisson

La fonction appropriée à ce type de domaine est obtenue en considérant un bord infini avec des conditions de bord fixée sur le long des cotés repérés par l'angle  $\theta = \pm\theta_0$  formant un secteur angulaire.

Les conditions de bord sont définies par :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \Big|_{\theta = \pm\theta_0} \quad (4.47)$$

Et la solution générale est donnée par :

$$\Phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^{\lambda_n} + b_n r^{-\lambda_n}) \cos(\lambda_n \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (d_n r^{\beta_n} + e_n r^{-\beta_n}) \sin(\beta_n \theta) \quad (4.48a)$$

Avec  $\lambda_n$  et  $\beta_n$  deux constantes positives. Ainsi en différenciant la solution obtenue et par une substitution dans la relation qui traduit les conditions de bord.

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_n r^{\lambda_n} + b_n r^{-\lambda_n}) \sin(\pm\lambda_n \theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (d_n r^{\beta_n} + e_n r^{-\beta_n}) \cos(\pm\beta_n \theta_0) = 0 \quad (4.48b)$$

Puisque les coefficients  $\lambda_n$  et  $\beta_n$  sont positifs et que la solution  $u$  doit être limitée pour  $r = 0$ .

Nous devons spécifier que les coefficients :

$$b_n = e_n = 0. \quad (4.48c)$$

Par ailleurs, on sait que les valeurs  $a_n$  et  $d_n \neq 0$  il va s'en dire d'après l'équation (4.48b) que les termes :

$$\sin(\pm\lambda_n \theta_0) = \cos(\beta_n \theta_0) = 0 \quad (4.48d)$$

Ce qui nous permet de dire que les coefficients  $\lambda_n$  et  $\beta_n$  sont donnés par :

$$\lambda_n \theta_0 = n\pi, \quad n = (1, 2, 3, \dots) \quad (4.48e)$$

$$\beta_n \theta_0 = \frac{n\pi}{2}, \quad n = (1, 3, 5 \dots) \quad (4.48f)$$

Après avoir exprimé les paramètres qui interviennent dans la solution générale de l'équation de Poisson, on voit que la fonction  $\Phi$  peut toujours s'exprimer à l'aide de la base :

$$\{ 1, N_{2n-1}, N_{2n} \} \quad (4.48g)$$

où

$$N_{2n-1} = r^{n\alpha} \cos(n\alpha\theta) \text{ et } N_{2n} = r^{\frac{2n-1}{2}\alpha} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\alpha\theta\right) \text{ avec } \alpha = \frac{\pi}{\theta_0} \quad (4.48h)$$

#### 4.4.3.2 Domaine avec trou circulaire avec l'équation de Poisson

On considère un domaine comportant un trou circulaire. Dans ce cas la solution  $\Phi(r, \theta)$  vérifie la condition de bord  $\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0$  sur le bord du trou c'est-à-dire à  $r = b = r_0$  avec  $b$  le rayon du trou

$$\text{Puisque } \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0 \quad (4.49)$$

Alors d'après l'équation (4.49) on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (d_n r_0^{\lambda_n-1} + e_n r_0^{-\lambda_n-1}) \sin(\pm\lambda_n \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (a_n r_0^{-\lambda_n-1} - b_n r_0^{2\lambda_n-1}) \cos(\pm\beta_n \theta) = 0 \quad (4.50a)$$

Ce qui nous permet d'observer que

$$e_n = d_n r_0^{2\lambda_n}, \quad b_n = a_n r_0^{2\lambda_n} \quad (4.50b)$$

De plus nous remarquons que

$$\Phi(r, \theta) = \Phi(r, \theta + 2\pi) \quad (4.50c)$$

Donc

$$\lambda_n = n \text{ et } (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.50a)$$

Finalement la solution est :

$$\Phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n + r_0^{2n} r^{-n}) [a_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)] \quad (4.50d)$$

Le système complet de Trefftz est donné par :

$$\{1, (r^n + r_0^{2n} r^{-n}) \cos(n\theta), (r^n + r_0^{2n} r^{-n}) \sin(n\theta)\} \quad (4.50e)$$

#### 4.4.3.3 Domaine anguleux avec l'équation d'Helmholtz

Considérons le domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$  la figure 4.2. La fonction appropriée à ce type de domaine est obtenue par la méthode de séparation de variables.

Posons :

$$\varphi(r, \theta) = F(r) \times G(\theta) \quad (4.51)$$

Considérons l'équation en coordonnée polaire :

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi = 0 \quad (4.51a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) = G(\theta) \times \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} \quad (4.51b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} G(\theta) \times \frac{\partial F(r)}{\partial r} \quad (4.51c)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} F(r) \times \frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2} \quad (4.51d)$$

$$k^2 \varphi = k^2 F(r) \times G(\theta) \quad (4.51e)$$

Donc l'équation (4.51) devient :

$$G(\theta) \times \left[ r^2 \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial F(r)}{\partial r} + (kr)^2 F(r) \right] + F(r) \times \frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.51f)$$

L'équation (4.51f) est multipliée par  $r^2$ .

Par suite en ajoutant et en retranchant le terme  $p^2 G(\theta) F(r)$  dans l'équation (4.51f), on obtient :

$$G(\theta) \times \left[ r^2 \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial F(r)}{\partial r} + ((kr)^2 - p^2) F(r) \right] + F(r) \left[ \frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2} + p^2 G(\theta) \right] = 0 \quad (4.51g)$$

Puisque les fonctions  $F(r)$  et  $G(\theta)$  sont linéairement indépendantes on aura :

$$r^2 \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial F(r)}{\partial r} + ((kr)^2 - p^2) F(r) = 0 \quad (4.51h)$$

$$\frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2} + p^2 G(\theta) = 0 \quad (4.51i)$$

Ainsi les solutions des équations (4.51h) et (4.51i) sont données respectivement par :

$$F(r) = A_1 J_p(kr) + A_2 Y_p(kr) \quad (4.51j)$$

$$G(\theta) = A_3 \cos(p\theta) + A_4 \sin(p\theta) \quad (4.51k)$$

Avec  $p$  un paramètre qui sera déterminé par les conditions de Neumann :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \right|_{\theta=\theta_2} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \right|_{\theta=\theta_1} \quad (4.51l)$$

Ce qui correspond au système:

$$\begin{cases} -A_3 \sin(p\theta_1) + A_4 \cos(p\theta_1) = 0 \\ -A_3 \sin(p\theta_2) + A_4 \cos(p\theta_2) = 0 \end{cases} \quad (4.51m)$$

Alors on obtient la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} -\sin(p\theta_1) & \cos(p\theta_1) \\ -\sin(p\theta_2) & \cos(p\theta_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.51n)$$

Donc,

$$-\sin(p\theta_1) \cos(p\theta_2) + \sin(p\theta_2) \cos(p\theta_1) = 0 \quad (4.51o)$$

D'où la relation :

$$\sin(p(\theta_2 - \theta_1)) = 0 \quad (4.51p)$$

$$\sin(p\beta\pi) = 0 \Rightarrow p_n\beta\pi = n\pi \rightarrow p_n = \frac{n}{\beta} \quad (4.51q)$$

La limitation de la fonction pour  $r$  proche de zéro, impose que le coefficient  $A_2$  est nul.

Ainsi la solution finale sera donnée par l'expression suivante :

$$\Phi(r, \theta) = J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{\frac{n}{\beta}}(kr) \cos\left(\frac{n}{\beta}(\theta - \theta_1)\right) \quad (4.51r)$$

Et le système complet de Trefftz de la fonction potentielle  $\phi(r, \theta)$  vérifiant a priori les conditions de Neumann est :

$$\left\{ J_0(kr), J_{\frac{n}{\beta}}(kr) \cos\left(\frac{n}{\beta}(\theta - \theta_1)\right) \right\} \quad (4.51s)$$

#### 4.4.3.4 Domaine avec trou circulaire avec l'équation d'Helmholtz

On considère un domaine comportant un trou circulaire. Dans ce cas la solution  $\Phi(r, \theta)$  vérifie la condition de bord de Neumann  $\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0$  sur le bord du trou c'est-à-dire à  $r = r_0 = b$  avec  $b$  le rayon du trou et de plus elle est approximée comme étant la combinaison linéaire des solutions dans une région limitée et dans une région illimitée [4].

On a :

$$\Phi(r, \theta) = N_1 a_1 + N_2 a_2 \quad (4.52a)$$

Avec

$N_1$  et  $N_2$

des fonctions d'interpolation

Les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  sont à déterminer.

Puisque 
$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{r=r_0} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (4.52b)$$

On obtient

$$\left. \frac{\partial(N_1 a_1 + N_2 a_2)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0 \quad (4.52c)$$

Avec l'utilisation des équations, on aura :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{1i} \left. \frac{\partial N_1}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \sum_{j=1}^{\infty} -a_{2j} \left. \frac{\partial N_2}{\partial r} \right|_{r=r_0} \quad (4.52d)$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité du système complet de Trefftz, les coefficients indéterminés  $a_i$  peuvent s'obtenir par les conditions de bord.

Ainsi, on obtient :

$$-a_{2j} \left. \frac{\partial N_2}{\partial r} \right|_{r=r_0} = a_{1i} \left. \frac{\partial N_1}{\partial r} \right|_{r=r_0} \Rightarrow a_{2j} = - \frac{\left. \frac{\partial N_1}{\partial r} \right|_{r=r_0}}{\left. \frac{\partial N_2}{\partial r} \right|_{r=r_0}} a_{1i} \quad (4.52e)$$

Dans ce cas la fonction potentielle sera interpolée par :

$$\Phi(r, \theta) = a_0 \left( J_0(kr) - \frac{J'_0(kr_0)}{H^{(1)'}_0(kr_0)} H^{(1)}_0(kr) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} a_n \left( J_n(kr) - \frac{J'_n(kr_0)}{H^{(1)'}_n(kr_0)} H^{(1)}_n(kr) \right) \cos n\theta + \\ b_n \left( J_n(kr) - \frac{J'_n(kr_0)}{H^{(1)'}_n(kr_0)} H^{(1)}_n(kr) \right) \sin n\theta \end{array} \right] \quad (4.52f)$$

Alors le système complet de Trefftz pour la fonction potentielle vérifiant a priori les conditions de Neumann est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( J_0(kr) - \frac{J'_0(kr_0)}{H^{(1)'}_0(kr_0)} H^{(1)}_0(kr) \right), \left( J_m(kr) - \frac{J'_m(kr_0)}{H^{(1)'}_m(kr_0)} H^{(1)}_m(kr) \right) \cos m\theta, \\ \left( J_m(kr) - \frac{J'_m(kr_0)}{H^{(1)'}_m(kr_0)} H^{(1)}_m(kr) \right) \sin m\theta \end{array} \right\} \quad (4.52g)$$

avec,

$J'_m(kr_0)$  et  $H^{(1)'}_m(kr_0)$  les dérivées des fonctions de Bessel et Hankel par rapport à  $r$  respectivement à  $r = r_0$

Chapitre 5:  
APPLICATIONS NUMERIQUES

Ce chapitre portera essentiellement sur les applications numériques.

D'abord on procède par la détermination des efforts dus à la houle selon les méthodes semi-empiriques et approches éléments finis. Après ces calculs, des analyses et des comparaisons seront faites.

Ensuite on passera à l'analyse structurale de l'ouvrage en intégrant cette fois ci tous les efforts qui le sollicitent. Cette partie sera assistée par un programme sur Fortran et l'outil de calcul Maple.

Une application sera faite aussi avec le logiciel de dimensionnement Robot Millennium sur le modèle des ouvrages à l'étape de l'avant projet.

## 5.1 Evaluation des efforts dus à la houle

L'évaluation des efforts repose surtout sur la détermination de la pression. Par conséquent, nous proposons de calculer la pression suivant les différentes approches des solutions de la fonction potentielle. Une discussion ou comparaison des résultats sera faite. Il est à noter que la pression hydrostatique est la même pour toutes les méthodes, donc la différence est à chercher au niveau de la pression dynamique.

### 5.1.1 Les données du problème

Ces données sont obtenues à partir des avants projets sommaire et détaillé du projet d'aménagement d'infrastructures de débarquement et d'embarquement de Dakar à Mbour.

- La profondeur de l'eau au pied de l'ouvrage :  $d = 3$  m
- La hauteur de la houle

Les hauteurs maximales de la houle sont enregistrées pendant les périodes des mois de Juillet à Septembre et peuvent atteindre facilement 4 mètres au large. Les hauteurs moyennes des vagues enregistrées à l'approche du rivage sont de l'ordre de 1,50 m selon les données météorologique de la D.M.N.

$H = H_b$  est la hauteur de la vague au déferlement,  $H_b = 2 H_i = 2 \times 2 = 4$  m

- La période :  $T = 8$  secondes
- La masse volumique de l'eau :  $\rho = 1225$  kg / m<sup>3</sup>

- La viscosité cinématique  $\mu = 1.007 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$
- La longueur d'onde

Elle est donnée par la relation suivante :

$$\frac{d}{L_0} = \frac{d}{L} \tanh\left(2\pi \frac{d}{L}\right)$$

Avec

$$L_0 = \frac{g}{2\pi} T^2$$

Donc pour une période de 8 secondes  $L_0 = 99,84 \approx 100 \text{ m}$

D'où

$$L = 136 \text{ m}$$

- Le diamètre de la pile

$$D = 0.6 \text{ m}$$

### 5.1.2 Selon M.S.E

La pression dynamique trouvée est de :

$$p = 24.5 \text{ kPa} \quad (5.1)$$

Les courbes donnant l'évolution de ces différentes valeurs en fonction de la profondeur sont ainsi montrées à la Fig.5.1.

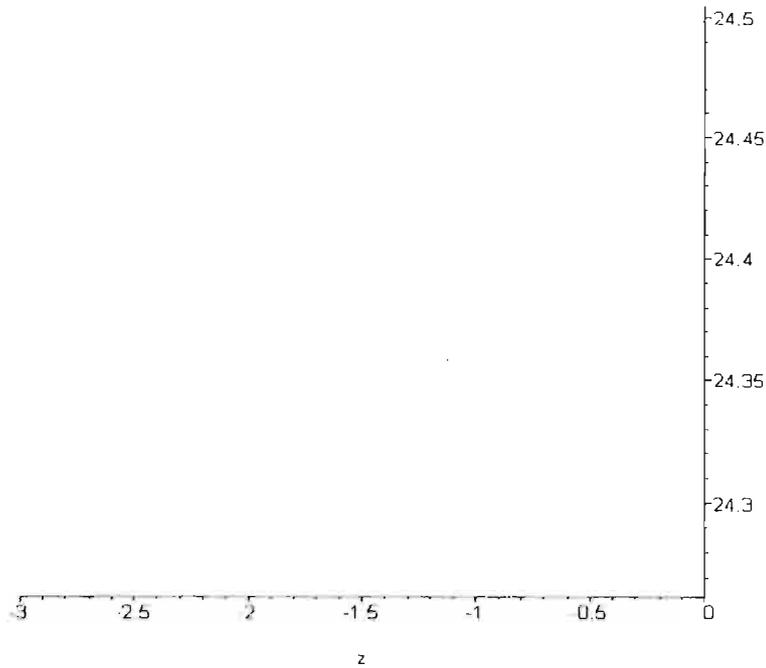


Fig. 16: Pression en fonction de la profondeur avec la méthode semi-empirique

### 5.1.3 Selon méthode numérique :

Nous avons deux formulations distinctes, donnons la valeur de la pression dynamique pour chaque cas :

- **Cas 1 :**

$$P = 21.65 \text{ kPa} \quad (5.2)$$

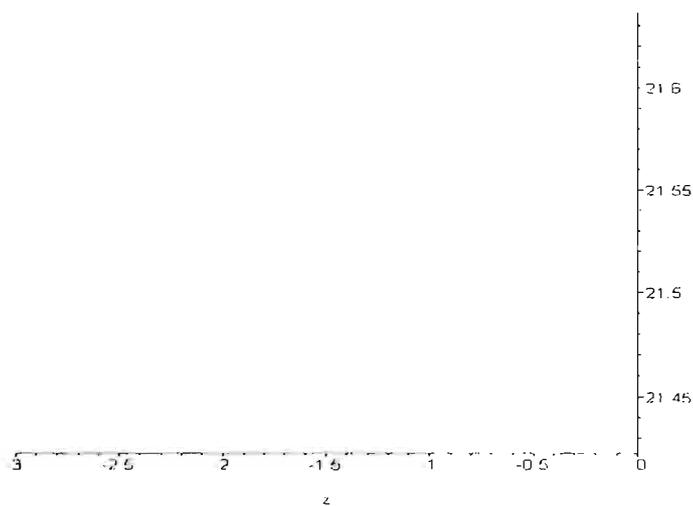


Fig. 17: Pression en fonction de la profondeur avec la méthode numérique cas 1

- **Cas 2:**

$$P = 14.54 \text{ kPa} \quad (5.3)$$

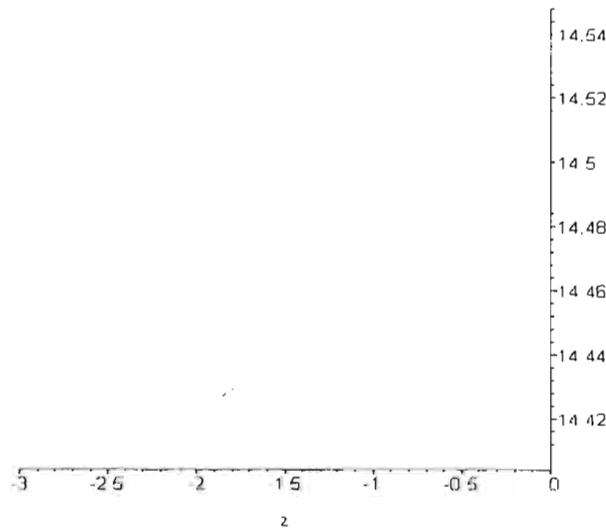


Fig. 18: Pression en fonction de la profondeur avec la méthode numérique cas2.

La pression hydrostatique suit une évolution linéaire

$$P = -\rho \times g \times z \quad (5.4)$$

Elle atteint son maximum à  $z = -d = -3$

Avec la symétrie du chargement au tour de la pile, l'effort dû à cette pression est nul.

#### 5.1.4 Etude comparative des différentes formulations :

On voit ici une différence sur l'évaluation de la pression qui découle des différentes formulations pour la modélisation de la fonction potentielle.

Etude de la différence entre les deux approches du T-système complet (5.1) et (5.2) respectivement:

$$\Phi = \frac{4 \omega \times a \cosh k(z+d)}{\pi k \sinh(kd)} \operatorname{Re} \left[ e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{-n-1} \cos n\theta}{k \times r_0 H_n'(kr_0)} \right] \quad (5.6)$$

$$\Phi = \frac{gH \cosh k(z+d)}{\pi k r_0 \omega \cosh(kd)} \operatorname{Re} \left[ e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^{n+1} \left[ \frac{\cos n\theta}{H_n'(kr_0)} \right] \right] \quad (5.7)$$

Avec la relation de dispersion

$$\omega^2 = g \times k \tanh kd \quad (5.8)$$

On montre que le potentiel exprimée à l'équation (5.6) devient :

$$\Phi = \frac{gH}{\pi\omega kr_0} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh(kd)} \operatorname{Re} \left[ e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} 2i^{-n-1} \frac{\cos n\theta}{H_n^{(2)}(kr_0)} \right] \quad (5.9)$$

Pour l'équation (5.6) : on divise le premier terme de la sommation par 2 c'est-à-dire le terme à  $n=0$  et pour l'équation (5.7)

$\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2$  pour les autres valeurs de  $n$ .

Alors la différence entre ces deux expressions se résume dans les termes généraux des séries de Hankel et de Bessel et de la puissance du nombre imaginaire  $i$ .

Pour ce qui concerne la différence entre ces deux et celle de la méthode semi-empirique on peut dire qu'elle est due par la superposition des ondes incidente et diffractée dans les méthodes numériques tandis que dans l'autre cas on ne considère que l'onde incidente. Une de ces différences avec le cas 2 peut être interpréter par le fait que cette méthode n'utilise pas la relation de dispersion sous sa forme intégrale, mais plutôt sous la forme simplifiée.

$$\omega^2 = g \times k \quad (5.10)$$

## 5.2 Evaluation des autres efforts sollicitant l'ouvrage

### 5.2.1 Charges permanentes

- **Poids propre de l'ouvrage**

Le poids propre est le poids volumique des matériaux constitutifs de la structure que multiplie la section transversale et la hauteur de la pile.

- **La variation de la température :**

La dilatation est l'expansion du volume d'un corps occasionné par son réchauffement, généralement imperceptible.

La variation de température est égale à :  $\Delta t = 20^\circ \text{C}$

La charge est alors donnée par :  $T = E \times A \times \alpha \times \Delta t$

Où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique ;  $E$  module de Young du matériau et  $A$  la surface.

Pour l'acier :  $\alpha = 12.10^{-6} \text{ K}^{-1}$

Le module de Young :  $E = 210000 \text{ MPa}$

Avec le logiciel de dimensionnement on a besoin que de la variation de la température.

### 5.2.2 Charges variables ou accidentelles:

- **Choc des bateaux**

La structure des pieux, des piles ou du duc d'albe doit être apte à supporter le choc d'un bateau taxi de 15 tonnes, d'un catamaran de 90 tonnes et d'une vedette monocoque de 150 tonnes, décrits dans le **chapitre I**. Cette charge est majorée

- de 50% compte tenu des possibilités de surcharge de passagers et de bagages,
- d'un coefficient d'amplification dynamique égal à 2.

La charge ponctuelle obtenue est :

$$P_1 = 1.5 \times 2 \times 15 = 45 \text{ kN} \rightarrow \text{Bateau taxi de } -0.60 \text{ m de tirant d'eau}$$

$$P_2 = 1.5 \times 2 \times 90 = 270 \text{ kN} \rightarrow \text{Catamaran}$$

$$P_3 = 1.5 \times 2 \times 150 = 450 \text{ kN} \rightarrow \text{Vedette monocoque}$$

- **Choc des bateaux à l'aide de la vitesse de dérive**

Selon [16] on a deux différents types de navire : Catamaran rapide et la vedette monocoque à deux ponts.

Pour le catamaran l'étude a donné les caractéristiques suivantes:

Longueur: 30 m ; largeur : 12 m ; Tirant d'eau : 1,2 m à 1.3 m ; capacité 200 à 250 passagers ; vitesse 20 nœuds.

Pour la vedette monocoque, les caractéristiques sont :

Longueur: 30 m ; largeur : 10 m ; Tirant d'eau : 2 m ; capacité ,250 passagers et plus de 30 tonnes de fret ; vitesse 20 nœuds.

Pour calculer l'effort d'accostage, il est nécessaire de connaître la vitesse au moment du choc. Un navire dérivant sous l'action d'une force  $F$  tend à prendre un mouvement permanent de vitesse  $U$ . cette vitesse est reliée à la force  $F$  comme suit :

$$F = \frac{C}{2} \times \rho \times S \times U^2 \quad (5.11)$$

Où  $S$  est la surface projetée ou surface de dérive du navire considéré.

$C$  un coefficient qui est fonction du pied de pilote  $p$  et de la profondeur au pied de l'ouvrage  $d$  :

$$\frac{1}{C} = 0.25 + 1.9 \times \left( \frac{p}{d} \right)^2 \rightarrow C = 3.3 \quad (5.12)$$

Avec  $p = 0.5$  m et  $d = 3$  m

Le mouvement du navire de masse  $M$  est décrit alors par :

$$f = (M + M_a) \times \frac{dV}{dt} = F - R \quad (5.13)$$

Où  $f$  est l'effort d'accostage cherché ;

$M_a$  est la masse ajoutée, c'est-à-dire la masse d'eau qui s'oppose à l'avancement du navire ;

$R$  la résistance offerte par l'eau. En régime permanent  $R = F$

Cherchons alors la masse virtuelle qui n'est rien d'autre que la somme de la masse du navire et celle de la masse ajoutée.

Nous abordons ce problème en calculant d'abord le coefficient de masse virtuelle

$$C_M = \frac{M + M_a}{M} \quad (5.14)$$

Pour calculer ce coefficient plusieurs formules sont établies par différents auteurs, comme [15].

$$C_M = 1 + \frac{2T}{B} \quad (5.15)$$

Pour des vitesses de dérives  $U \leq 0.3$  m/s ces expressions sont les mieux indiquées [21] :

$$C_M = 1 + \frac{T}{B} \quad (5.16)$$

Où  $T$  étant l'enfoncement moyen du navire ;  $L$  la longueur du navire ;  $B$  sa largeur au maître couple.

Par ailleurs il est possible d'après [20] de déterminer la valeur de la masse ajoutée directement par :

$$M_{ii} = M \frac{2}{\pi} \gamma \times \varphi(\delta) \quad (5.17)$$

Avec

$$\gamma = \frac{b}{2l}, \quad \delta = \frac{l}{d} \quad (5.18)$$

Les paramètres sont définis sur la figure ci-dessous

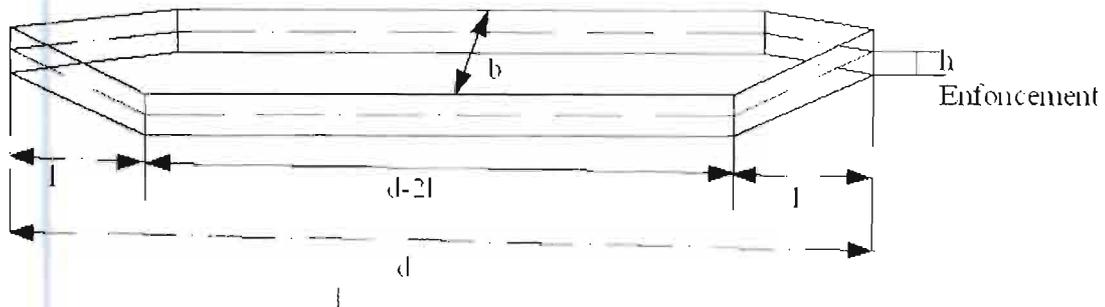


Fig. 19: Schéma d'un bateau-taxi

Cette formule est valable pour une longueur d'onde  $\frac{d}{L} \leq 0.2$  et  $\frac{h}{L} \leq 0.09$

Applicabilité des formules pour notre projet : les deux dernières formules sont bien applicables si on considère que l'accostage des bateaux-taxis ne se fait pas au-delà de 0.3m/s.

De plus le rapport liant la longueur d'onde d'une part à la longueur du bateau et d'autre part à son enfoncement sont dans les limites fixées.

Evaluation de la masse virtuelle suivant le type de bateau et la formule.

Pour le Catamaran rapide :

Avec l'application de la formule :

$$C_M = 1 + \frac{T}{B} = 1 + \frac{2}{10} = 1.2 \quad (5.19)$$

Et on trouve :

Masse ajoutée

$$M_a = (C_M - 1) \times M = 18T \quad (5.20)$$

Masse virtuelle

$$M + M_a = 90 + 18 = 108T$$

Avec l'application de la formule (5.15)

$$\frac{d}{L} = 0.2 \quad \text{et} \quad \frac{h}{L} = 0.01$$

On se fixe une hauteur  $b = 3m$  et la longueur en biais  $l = 3m$

$$\gamma = \frac{b}{2l} = 0.5, \quad \delta = \frac{l}{d} = \frac{3}{30} = 0.1$$

$$\delta = 0.1 \Rightarrow \varphi(\delta) = 0.5$$

Nous obtenons pour la masse ajoutée  $M_a = 14.32T$  et pour la masse virtuelle :

$$M + M_a = 104.32T$$

Il reste à déterminer la vitesse de dérive. On admet qu'en régime variable la résistance  $R$  garde la même forme qu'en régime permanent. L'intégration de l'équation donnant  $f$  montre que la vitesse  $u$  est liée à l'abscisse  $x$  du centre de gravité du navire. La trajectoire du centre de gravité est supposée rectiligne.  $U$  est ainsi exprimé comme suit :

Réécrivons l'équation du mouvement :

$$(M + M_a) \frac{dv}{dt} = F - R \Rightarrow C_M \times M \frac{dv}{dt} = \frac{C}{2} \rho \times S \times (U^2 - v^2) \quad (5.21)$$

Posons :

$$C_M \times M = A \quad \text{et} \quad \frac{C}{2} \rho \times S = B \quad (5.22)$$

Alors l'équation à intégrer peut être réécrite sous cette forme :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{B}{A}(U^2 - v^2) \Leftrightarrow \frac{dv}{U^2 - v^2} = \frac{B}{A} \times dt \quad (5.23)$$

Sous une autre forme on voit que :

$$\frac{-2v dv}{U^2 - v^2} = -2 \frac{B}{A} \times v dt \quad (5.24)$$

D'où :

$$\ln(U^2 - v^2) = -2 \frac{B}{A} \int v dt + k = -2 \frac{B}{A} x + k \quad (5.25)$$

On considère que le choc annule la vitesse  $v$  et qu'à cet instant l'abscisse du centre de gravité est nulle aussi. Ces hypothèses permettent d'avoir la valeur de la constante  $k$ .

$$k = \ln U^2$$

Ce qui conduit à :

$$\ln \frac{(U^2 - v^2)}{U^2} = -2 \frac{B}{A} x \Rightarrow \frac{(U^2 - v^2)}{U^2} = \exp\left(-2 \frac{B}{A} x\right)$$

$$v^2 = U^2 - U^2 \exp\left(-2 \frac{B}{A} x\right) \Rightarrow v = U \sqrt{1 - \exp\left(-2 \frac{B}{A} x\right)}$$

En remplaçant les coefficients  $A$  et  $B$  par leur expression on trouve l'expression de la vitesse  $v$  :

$$v = U \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{C \cdot \rho \cdot S \cdot x}{C_M \cdot M}\right)} \quad (5.26)$$

avec

$$U = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{C \cdot \rho \cdot S}} \quad (5.27)$$

Ainsi l'effort au moment du choc est :

$$F_c = \frac{C}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \quad (5.28)$$

A défaut de données sur les vitesses de dérive des bateaux  $U$  on considère les valeurs calculées indiquées dans [16].

- **Les efforts d'amarrage**

Les efforts dus à la traction des bateaux attachés sur les piles pour les immobiliser le temps de charger ou de décharger. Chaque bateau est amarré sur les quatre piles du quai.

On estime que l'effort sur chaque pile est le quart du chargement du bateau amarré multiplié par un coefficient de sécurité de 1.5

$$F_1 = 1.5 \times \frac{15}{4} = 5.625 \text{ kN} \rightarrow \text{Bateau taxi de } -0.60 \text{ m de tirant d'eau}$$

$$F_2 = 1.5 \times \frac{90}{4} = 33.75 \text{ kN} \rightarrow \text{Catamaran}$$

$$F_3 = 1.5 \times \frac{150}{4} = 56.25 \text{ kN} \rightarrow \text{Vedette monocoque}$$

### 5.3 Procédure de résolution du problème :

L'application pratique de cette étude est destinée principalement à la détermination des contraintes et des déplacements d'une pile circulaire soumise à l'effort de la houle.

Elle se fera à l'aide d'un programme, qui est décrit ci-dessous.

#### 5.3.1 Programme

Le programme avec lequel on souhaite implémenter les formes des solutions de l'équation d'ondes est conçu et mis à notre disposition par notre encadreur [19].

Le programme permet de calculer les contraintes et les déplacements de l'ouvrage soumis à des efforts :

#### 5.3.2 Description

C'est un programme d'éléments finis, dès lors il épouse la procédure d'évaluation des contraintes déformation ou déplacement.

Il est composé d'un programme principal et de sous programmes. Chaque sous programme est destiné à effectuer une tâche spécifique. Le programme permet de fournir les solutions en faisant appel aux différents sous programmes. Il permet par ailleurs de présenter les résultats sous un format facile à lire. Concernant l'ouvrage le programme était basé sur un maillage élémentaire d'éléments rectangulaires à 8 nœuds, pour plus de précision on est passé à neufs nœuds. Pour les efforts (introduction des charges), il avait traité le problème avec la solution de Lagrange. Pour ce qui concerne notre étude l'introduction des charges, fait appel aux fonctions solutions des équations de Poisson et d'Helmholtz. Ce sont les équations qui régissent les fonctions potentielles d'ondes.

### 5.3.3 Les sous programmes intervenant :

Le programme intègre beaucoup de sous programmes, nous nous en limitons à ceux dont nous avons améliorés et adapté à notre projet.

La partie décrivant le maillage de la structure intègre les « subroutines » [12] (sous programmes) qui suivent :

### 5.3.4 Génération des nœuds :

Pour les éléments de références en deux dimensions nous procédons par des mailles rectangulaires à neufs nœuds.

Une bonne schématisation de l'élément permet une bonne numérotation des nœuds :

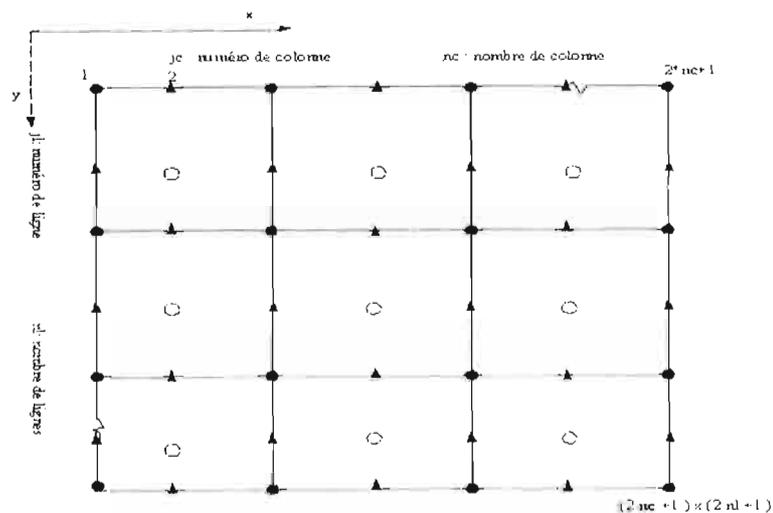


Fig. 20: Élément maillé

Entrée :

- longueur et largeur des cotés du rectangle,
- distance entre nœuds consécutifs,
- $X_0$  et  $Y_0$  les coordonnées de référence,

Sortie :

- Numéro de nœud,
- Coordonnées de chaque nœud suivant les deux directions,

### 5.3.5 Passage de l'élément de référence à l'élément réel :

Cette partie calcule les coordonnées physiques des nœuds à partir de leurs coordonnées de références à l'aide des fonctions d'interpolation et de la matrice de transformation jacobienne d'après [10] et [11]

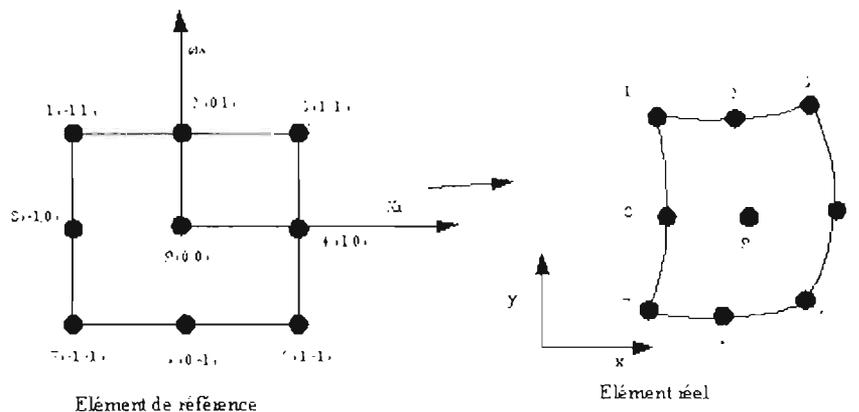


Fig. 21: Passage de l'élément de référence à l'élément réel

### 5.3.6 Génération des éléments :

Il donne pour chaque élément, les nœuds et les côtés qui le composent.

Ayant les numéros de nœuds d'un élément, on génère le numéro de ses côtés. Après cette opération, on procède à la connectivité des éléments, c'est-à-dire identifier les cotés en commun entre deux éléments.

### 5.3.7 Introduction des charges :

Cette partie repose essentiellement sur les solutions des équations de Poisson et de Helmholtz.

Différentes fonctions sont implémentées. Elles se distinguent par le domaine et l'équation considérée.

Ainsi pour les domaines ou les différentes géométries de l'ouvrage, on exprime la forme du potentiel d'onde dans une base. Ces bases sont différentes selon qu'on considère l'équation de Poisson ou de Helmholtz qui sont respectivement définies en coordonnées polaires par :

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.29)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi = 0 \quad (5.30)$$

### 5.3.8 Cylindre vertical :

Pour décrire les deux fonctions potentielles incidente et diffractée on parlera de deux domaines :

- Domaine limité : la fonction potentielle est donnée par le système :

$$\{J_0(kr), J_n(kr) \times \cos(n\theta), J_n(kr) \times \sin(n\theta)\} \quad (5.31)$$

- Domaine non limité : la fonction potentielle est donnée par le système :

$$\{H_0(kr), H_n(kr) \times \cos(n\theta), H_n(kr) \times \sin(n\theta)\} \quad (5.32)$$

Les solutions sont les fonctions de Bessel, Hankel du premier genre.

On est arrivé à implémenter ces fonctions s'exprimant à l'aide de la première base. On n'a pas pu implémenter les fonctions de Hankel I et leur dérivée première dans Fortran mais on pouvait créer cette fonction en combinant les fonctions de Bessel du premier et second genre et leurs dérivées.

Néanmoins on parvient à implémenter les fonctions de Bessel et leur dérivée première, ce qui permet de résoudre le problème pour le domaine limité.

La base devient alors :

$$\{J_0(kr), J_n(kr) \times \cos(n\theta), J_n(kr) \times \sin(n\theta)\} \quad (5.33)$$

On crée les fonctions BesselJ0, BesselJ1, BesselY0 et BesselY1 à l'aide des fonctions qui se trouvent dans [17]. Grâce aux relations de récurrence entre l'ordre des fonctions, on dispose des autres fonctions et des dérivées jusqu'à l'ordre n. L'ordre est fixé à la précision voulue. C'est-à-dire le nombre de fonction nf. On s'est fixé  $nf = 11$ . On note n et lié à nf par la relation suivante :  $nf = 2 \times n + 1$

Voilà les relations de récurrence qui nous ont permis de déterminer les fonctions de Bessel d'ordre supérieur.

$$J_{n+1}(kr) = -J_{n-1}(kr) + \frac{2n}{kr} J_n(kr) \quad n \geq 1 \quad (5.34)$$

$$Y_{n+1}(kr) = -Y_{n-1}(kr) + \frac{2n}{kr} Y_n(kr) \quad n \geq 1 \quad (5.35)$$

Les dérivées découlent de la relation suivante :

$$-2 \times k \times J'_n(kr) = J_{n+1}(kr) - J_{n-1}(kr) \quad n \geq 1 \quad (5.36)$$

BesselJ0, BesselJ1, BesselY0 et BesselY1 sont les fonctions créées.

$J_2$  est donné par :

$$J_2(kr) = -J_0(kr) + \frac{2}{kr} J_0(kr) \quad (5.37)$$

$Y_2$  est donné par :

$$Y_2(kr) = -Y_0(kr) + \frac{2}{kr} Y_0(kr) \quad (5.38)$$

$J'_1$  est donné par :

$$J'_0(kr) = -\frac{1}{k} J_1(kr) \quad (5.39)$$

$Y'_1$  est donné par :

$$Y'_0(kr) = -\frac{1}{k} Y_1(kr) \quad (5.40)$$

Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  (qu'on a fixé à 5)

On a les fonctions à implémenter et leurs dérivées par rapport à  $r$  et  $\theta$

$$I = 1$$

$$f(1) = J_0(kr)$$

$$f_r(1) = k \times J_0'(kr)$$

$$f_\theta(1) = 0$$

$$I=2$$

$$f(2) = J_1(kr) \times \cos(\theta)$$

$$f_r(2) = k \times J_1'(kr) \times \cos(\theta)$$

$$f_\theta(2) = -J_1(kr) \times \sin(\theta)$$

$$I=3$$

$$f(3) = J_1(kr) \times \sin(\theta)$$

$$f_r(3) = k \times J_1'(kr) \times \sin(\theta)$$

$$f_\theta(3) = J_1(kr) \times \cos(\theta)$$

La même procédure est respectée pour les autres fonctions.

### 5.3.9 Domaine anguleux

- **Cas de la résolution de l'équation de Poisson :**

La fonction potentielle s'exprime dans cette base.

$$\left\{ 1, r^{n\alpha} \cos(n\alpha\theta), r^{\frac{n-1}{2}\alpha} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\alpha\theta\right) \right\} \quad \alpha = \frac{\pi}{\theta_0} \quad (5.41)$$

Ces fonctions ne posent pratiquement pas de problème pour les implémenter.

- **Cas de la résolution de l'équation de Helmholtz :**

La base qui permet d'exprimer le potentiel est :

$$\left\{ J_0(kr), J_{\frac{n}{\beta}}(kr) \cos\left(\frac{n}{\beta}(\theta - \theta_1)\right) \right\} \quad (5.42)$$

Avec n entier.

Les fonctions de cette base, recourent celles de Bessel au cas standard (domaine limité) si le rapport  $\frac{n}{\beta}$  est entier. Pour les autres valeurs de ce rapport la programmation n'est pas faite.

### 5.3.10 Domaine avec trou circulaire :

- **Cas de la résolution de l'équation de Poisson :**

La fonction est générée par la base :

$$\left\{ 1, \left(r^n + \frac{r_0^{2n}}{r^n}\right) \times \cos(n\theta), \left(r^n + \frac{r_0^{2n}}{r^n}\right) \times \sin(n\theta) \right\} \quad (5.43)$$

- **Cas de la résolution de l'équation d'Helmholtz:**

La fonction est générée par la base :

$$\left\{ \left( J_0(kr) - \frac{J'_0(kr_0)}{H^{(1)'}_0(kr_0)} H^{(1)}_0(kr) \right), \left( J_m(kr) - \frac{J'_m(kr_0)}{H^{(1)'}_m(kr_0)} H^{(1)}_m(kr) \right) \cos m\theta, \right. \\ \left. \left( J_m(kr) - \frac{J'_m(kr_0)}{H^{(1)'}_m(kr_0)} H^{(1)}_m(kr) \right) \sin m\theta \right\} \quad (5.44)$$

## 5.4 Outil de dimensionnement ROBOT

ROBOT Millennium est un logiciel de calcul et d'optimisation des structures. Il utilise la méthode d'analyse par éléments finis pour étudier les structures planes et spatiales de type :

Treillis, coques, portiques, contraintes planes, déformation planes, grillage de poutres, corps axisymétriques, plaques, corps volumique

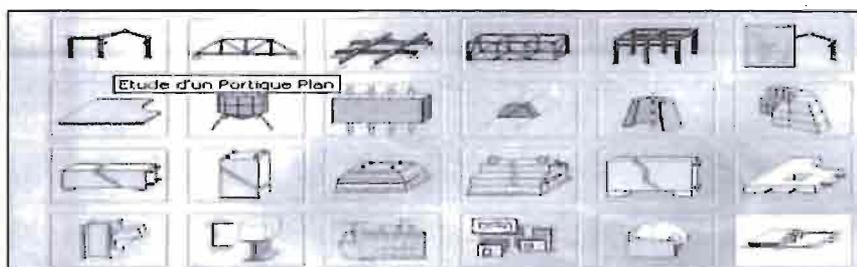


Fig. 22: Présentation de Robot

- ROBOT Millennium peut calculer les structures à un nombre de barres et à un nombre de nœuds illimités. Les seules limitations découlent des paramètres de l'ordinateur sur lesquels les calculs sont effectués (mémoire vive et espace disque disponibles).

- ROBOT Millennium permet d'effectuer des analyses statiques et dynamiques, ainsi que des analyses linéaires ou non-linéaires.
- ROBOT Millennium est un logiciel orienté Métier adapté aux constructions en acier, en bois, en béton armé ou mixte. Il comprend des modules d'assemblage, de ferrailage, de vérification et de dimensionnement suivant les différentes normes nationales existantes.

Les charges et toutes les combinaisons possibles sont données en annexes.

Les extrêmes globaux des efforts, des déplacements, déformations et des contraintes sont aussi donnés en annexe.

### **Conclusion**

Ce chapitre portant sur l'application, a montré les différences numériques entre les différentes méthodes d'approximation de la pression dynamique.

L'implémentation des fonctions solutions du potentiel d'onde est faite dans des « subroutine ».

Le logiciel Robot nous a permis de faire l'analyse de la structure.

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS:

Ce projet a permis de voir l'importance que l'ingénieur doit accorder au dimensionnement des ouvrages particulièrement les ouvrages maritimes en tenant compte d'une manière très sérieuse de l'effort de la houle. A cet effet les fonctions potentielles permettant la détermination des efforts dus à la houle sont générées à partir de l'équation d'Helmholtz et l'aide des méthodes semi-empiriques. La différence relativement faible entre les deux approches justifie leur cohérence.

L'étude structurale par la méthode des éléments finis à l'aide d'un programme sur Fortran devait permettre la détermination des différentes sollicitations sur l'ouvrage. À partir d'un élément de référence les éléments réels ont été décrits après une discrétisation du domaine en des sous domaines élémentaires finis et à l'aide de la transformation jacobienne. Pour les domaines particuliers tels que les coins et les angles, des fonctions ont été générées à l'aide des équations de Poisson et Helmholtz avec les fonctions de Bessel et de Hankel.

L'application sur ROBOT a permis de déterminer les efforts, les déplacements, les contraintes et les flèches de la structure étudiée.

Au moment où le milieu terrestre se fait de plus en plus indisponible, la construction navale est plus que jamais d'actualité. D'où l'importance de tels projets de fin d'études dans des écoles d'ingénieur comme la notre. Tout en essayant d'y associer les entreprises afin de permettre aux élèves ingénieurs de maîtriser l'aspect théorique et pratique des phénomènes physiques tels que la houle et leur impact sur les ouvrages.

Avec les difficultés que nous avons rencontrées pour développer un outil de calcul et d'établir les équations, nous recommandons aux autorités de l'école :

- Approfondir les cours sur les sciences de l'ingénieur,
- Insister sur les cours de programmation et d'informatique,
- Inciter les étudiants à la recherche scientifique.

Comme toute œuvre humaine, notre étude peut être complétée surtout sur le volet programmation.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Dr Moustapha NDIAYE, La Méthode des éléments finis appliquée à l'analyse des structures et des solides, Cours de structures II, Ecole polytechnique de Thiès.
- [2] Dr Moustapha NDIAYE, Thèse doctorale Modèle d'élément fini pour la solution des plancher-dalle, des dalles champignons et des dalles orthotropes
- [3] Qing-Hua Qin, Trefftz Finite and Boundary Element Method
- [4] Malgorzata STOJET, These doctoral Finite T-elements for the Poisson and Helmholtz equations
- [5] J. JIROUSEK, Variational formulation of two complementary hybrid-Trefftz FE models numerical method in engineering
- [6] O.C. Zienkiewicz, Y.K CHEUNG and W.G.JIN, Solution of Helmholtz equation by Trefftz method
- [7] O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method for Fluid Dynamics Sixth edition
- [8] G. R. Liu et S. S. Quek, finite element method a practical course
- [9] H.O MADSON, S.KRENK, N.C.LIND, Methods of structural safety
- [10] J.L. BATOZ et G. DHATT, Modélisation des structures par éléments finis, poutres et plaques.
- [11] J.L. BATOZ et G. DHATT, Modélisation des structures par éléments finis, solides élastiques.
- [12] JOHN M. BLATT, Introduction to Fortran 6 programming
- [13] S.TAMBA, cours de port et navigation
- [14] Cours de travaux maritimes Nouvelle Edition JANVIER 1987 de l'Institut portuaire d'enseignement et de recherche.
- [15] J.CHAPON, Travaux maritimes Tome I, II Edition EYROLLES de E .N.P.C
- [16] Rapport APS et APD appontements de Dakar-Saly et de Dakar-Ngor
- [17] Numerical recipes FORTRAN

[18] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, Handbook of Mathematical Function, Dover, New York, 1965

[19] Dr Moustapha NDIAYE, Programme STEPRO FRAMLESS, Programme d'EF FRONTIERE. JANVIER 2008

[20] VASCO Costa, professeur à l'université technique de Lisbonne ( The Berthing Ship), revue The Dock and Harbour Authority, mai-juin-juillet 1964

[21] M. SOMMET, Mémoire présenté le 27 juin 1960 de l'académie des sciences

## ANNEXES

## ANNEXE 1



Structure du quai

La structure a été modélisée. Notre travail consiste donc à faire une vérification et un dimensionnement.

La démarche suivie, d'ailleurs comme toutes les autres est la suivante:

- **Introduction des charges:**

L'ensemble des cas de charges que nous avons déterminé dans la partie application plus les charges venant de la passerelle sont appliquées à la structure. Ces charges se résument dans le tableau suivant:

Cas	Type de charge	Liste				
3:PERM2	pooids propre	13	Partie de la structure		Coef=1,00	X=2,33
3:PERM2	force sur barre	2	FX=0,0	FY=0,0	FZ=45,42	X=2,33
2:EXPL1	force sur barre	13	FX=0,0	FY=0,0	FZ=-69,89	X=0,47
2:EXPL1	force sur barre	13	FX=0,0	FY=0,0	FZ=-69,89	X=1,83
2:EXPL1	force sur barre	13	FX=0,0	FY=0,0	FZ=3,08	X=1,83
2:EXPL1	force sur barre	3	FX=0,0	FY=0,0	FZ=69,53	X=0,47
2:EXPL1	force sur barre	2	FX=0,0	FY=0,0	FZ=69,53	X=2,33
2:EXPL1	force sur barre	13	FX=0,0	FY=0,0	FZ=45,60	X=2,33
2:EXPL1	force sur barre	13	FX=0,0	FY=0,0	FZ=45,60	X=1,83
2:EXPL1	force sur barre	2	FX=0,0	FY=0,0	FZ=20,90	X=1,83
2:EXPL1	force sur barre	3	FX=0,0	FY=0,0	FZ=20,90	X=0,47
2:EXPL1	force sur barre	13	FX=0,0	FY=0,0	FZ=-0,40	X=2,33
2:EXPL1	force sur barre	13	FX=0,0	FY=0,0	FZ=0,40	X=1,83
2:EXPL1	force sur barre	13	FX=0,0	FY=0,0	FZ=81,88	X=1,83
2:EXPL1	force sur barre	2	FX=0,0	FY=0,0	FZ=-81,88	X=0,47
6:choc bat90	force sur barre	1A4	FX=-450,00	FY=0,0	FZ=0,0	X=2,33
10:chobat0	force sur barre	1	FX=0,0	FY=-450,00	FZ=0,0	X=0,47
10:chobat0	force sur barre	4	FX=0,0	FY=450,00	FZ=0,0	X=2,33
11:chocbat45	force sur barre	1A4	FX=-450,00	FY=0,0	FZ=0,0	X=3,50
7:amarrage	force sur barre	1A4	FX=56,25	FY=0,0	FZ=0,0	X=3,50
8:Houle	charge trapézoïdale	1A4	X1=0,0	PX1=0,0	PY1=0,0	X=3,50
8:Houle	charge trapézoïdale	1A4	X1=1,00	PX1=-21,42	PY1=0,0	X=3,50
8:Houle	charge trapézoïdale	1A4	X1=2,00	PX1=-21,52	PY1=0,0	X=3,00
8:Houle	charge trapézoïdale	1A4	X1=0,0	PX1=0,0	PY1=0,0	PY2=0,0
8:Houle	charge trapézoïdale	1A4	X1=1,00	PX1=-21,42	PY1=0,0	PY2=0,0
8:Houle	charge trapézoïdale	1A4	X1=2,00	PX1=-21,52	PY1=0,0	PY2=0,0

• **Combinaison de charges:**

La simultanéité de l'action des charges sur l'ouvrage suit une probabilité. On doit alors penser à les combiner. Le dimensionnement de chaque élément de la structure se fera avec la combinaison la plus défavorable pour lui. Les combinaisons sont faites suivant les deux états limites ultime et service. On obtient après étude de la probabilité de présence simultanée de certaines charges le tableau suivant:

Tableau de combinaisons

- Cas: 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

_filtre	Combinaison
Liste complète	43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Sélection	43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Nombre total	51
Nombre sélectionné	51

- Cas: 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Combinaison	Nom	Type d'analyse	Nature	Définition
43 (C)	COMB1	Combinaison linéaire	ELU	$(1+3+8)*1.33$
45 (C)	COMB2	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33$
46 (C)	COMB3	Combinaison linéaire	ELU	$(1+3+8)*1.33+4*1.35$
47 (C)	COMB4	Combinaison linéaire	ELU	$(1+3+8)*1.33+5*1.80$
48 (C)	COMB5	Combinaison linéaire	ELU	$(1+3+8)*1.33+6*1.00$
49 (C)	COMB6	Combinaison linéaire	ELU	$(1+3+8)*1.33+11*1.00$
50 (C)	COMB7	Combinaison linéaire	ELU	$(1+3+8)*1.33+10*1.00$
51 (C)	COMB8	Combinaison linéaire	ELU	$(1+3+8)*1.33+7*1.50$
52 (C)	COMB9	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33+4*1.35$
53 (C)	COMB10	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33+5*1.80$
54 (C)	COMB11	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33+6*1.00$
55 (C)	COMB12	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33+11*1.00$
56 (C)	COMB13	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33+10*1.00$
57 (C)	COMB14	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33+7*1.50$
58 (C)	COMB15	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33+4*1.35+5*1.80$
59 (C)	COMB16	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33+4*1.35+6*1.00$
60 (C)	COMB17	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+8)*1.33+4*1.35+11*1.00$
61 (C)	COMB18	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+4+8)*1.35+10*1.00$

62 (C)	COMB19	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+4+8)*1.35+7*1.50$
63 (C)	COMB20	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+4+8)*1.35+5*1.80+6*1.00$
64 (C)	COMB21	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+4+8)*1.35+5*1.80+11*1.00$
65 (C)	COMB22	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+4+8)*1.35+5*1.80+10*1.00$
66 (C)	COMB23	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+4+8)*1.35+5*1.80+7*1.50$
67 (C)	COMB24	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+4+8)*1.35+5*1.80+6*1.00+7*1.50$
68 (C)	COMB25	Combinaison linéaire	ELU	$(1+2+3+4+8)*1.35+5*1.80+7*1.50+11*1.00$
85 (C)	COMB26	Combinaison linéaire	ELU	$(1+3+4+8)*1.35+(2+7)*1.50+5*1.80+10*1.00$
86 (C)	COMB27	Combinaison linéaire	ELS	$(3+8+1)*1.00$
87 (C)	COMB28	Combinaison linéaire	ELS	$(2+86)*1.00$
88 (C)	COMB29	Combinaison linéaire	ELS	$(5+86)*1.00$
89 (C)	COMB30	Combinaison linéaire	ELS	$(4+86)*1.00$
90 (C)	COMB31	Combinaison linéaire	ELS	$(6+86)*1.00$
91 (C)	COMB32	Combinaison linéaire	ELS	$(11+86)*1.00$
92 (C)	COMB33	Combinaison linéaire	ELS	$(10+86)*1.00$
93 (C)	COMB34	Combinaison linéaire	ELS	$(7+86)*1.00$
95 (C)	COMB36	Combinaison linéaire	ELS	$(5+87)*1.00$
96 (C)	COMB37	Combinaison linéaire	ELS	$(6+87)*1.00$
97 (C)	COMB38	Combinaison linéaire	ELS	$(11+87)*1.00$
98 (C)	COMB39	Combinaison linéaire	ELS	$(10+87)*1.00$
99 (C)	COMB40	Combinaison linéaire	ELS	$(7+87)*1.00$
101 (C)	COMB41	Combinaison linéaire	ELS	$(4+87)*1.00$
102 (C)	COMB42	Combinaison linéaire	ELS	$(5+101)*1.00$
103 (C)	COMB43	Combinaison linéaire	ELS	$(6+101)*1.00$
104 (C)	COMB44	Combinaison linéaire	ELS	$(11+101)*1.00$
107 (C)	COMB47	Combinaison linéaire	ELS	$(6+102)*1.00$
108 (C)	COMB46	Combinaison linéaire	ELS	$(11+103)*1.00$
110 (C)	COMB48	Combinaison linéaire	ELS	$(10+102)*1.00$
111 (C)	COMB49	Combinaison linéaire	ELS	$(7+102)*1.00$
112 (C)	COMB50	Combinaison linéaire	ELS	$(7+107)*1.00$
113 (C)	COMB51	Combinaison linéaire	ELS	$7*1.00$
114 (C)	COMB52	Combinaison linéaire	ELS	$(7+111)*1.00$

• **Calcul des efforts agissant sur les différentes barres**

Après calcul, Robot donne l'ensemble des efforts qui agissent sur chaque barre. Nous avons pris seulement les efforts extrêmes globaux

Efforts

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Extrêmes globaux

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Filtre	Barre	Cas
Liste complète	1A40	1A19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Sélection	1A40	1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
<b>Nombre total</b>	40	70
<b>Nombre sélectionné</b>	40	67

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

	FX (kN)	FY (kN)	FZ (kN)	MX (kNm)	MY (kNm)	MZ (kNm)
<b>MAX</b>	636,34	287,68	292,86	143,76	1611,55	373,23
<b>Barre</b>	17	1	4	2	3	1
<b>Noeud</b>	8	7	2	5	3	7
<b>Cas</b>	108 (C)	50 (C)	108 (C)	108 (C)	108 (C)	50 (C)
<b>MIN</b>	-371,34	-287,80	-752,55	-143,01	-266,28	-372,83
<b>Barre</b>	19	4	3	3	37	4
<b>Noeud</b>	18	1	3	3	14	1
<b>Cas</b>	108 (C)	61 (C)	108 (C)	108 (C)	108 (C)	61 (C)

• **Calcul des déplacements sur les barres critiques**

L'application de charges sur une structure induit des déplacements sur les éléments de celle-ci. Ainsi nous avons repéré les déplacements extrêmes globaux qui sont présents ci-dessous.

Déplacements

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Extrêmes globaux

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Filtre	Noeud	Cas
Liste complète	1A28	1A19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Sélection	1A28	1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Nombre total	28	70
Nombre sélectionné	28	67

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

	UX (cm)	UY (cm)	UZ (cm)	RX (Rad)	RY (Rad)	RZ (Rad)
<b>MAX</b>	0,4429	0,2820	0,0495	0,001	0,001	0,010
<b>Noeud</b>	6	28	11	2	24	2
<b>Cas</b>	114 (C)	108 (C)	ELU/15	61 (C)	114 (C)	108 (C)
<b>MIN</b>	-6,1014	-0,2714	-0,3141	-0,001	-0,009	-0,010
<b>Noeud</b>	4	27	28	8	25	8
<b>Cas</b>	108 (C)	108 (C)	108 (C)	61 (C)	108 (C)	108 (C)

• **Calcul des contraintes sur les barres critiques**

On ne peut pas faire le dimensionnement sans avoir déterminé au préalable les contraintes qui règnent dans la structure.

Contraintes

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Extrêmes globaux

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Filtre	Barre	Cas
Liste complète	1A40	1A19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Sélection	1A40	1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
<b>Nombre total</b>	40	70
<b>Nombre sélectionné</b>	40	67

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

	S max (MPa)	S min (MPa)	S max(My) (MPa)	S max(Mz) (MPa)	S min(My) (MPa)	S min(Mz) (MPa)	Fx/Sx (MPa)
<b>MAX</b>	385,65	37,43	332,60	396,36	0,00	0,00	80,36
<b>Barre</b>	37	15	37	7	24	21	17
<b>Noeud</b>	14	3	14	4	22	16	8
<b>Cas</b>	108 (C)	ACC/18	108 (C)	108 (C)	114 (C)	50 (C)	108 (C)
<b>MIN</b>	-12,90	-416,86	-0,00	-0,00	-332,60	-396,36	-20,13
<b>Barre</b>	23	7	25	24	37	7	5
<b>Noeud</b>	21	4	19	22	14	4	8
<b>Cas</b>	ELU/15	108 (C)	108 (C)	67 (C)	108 (C)	108 (C)	108 (C)

- **Calcul des flèches sur les barres critiques**

La détermination des flèches en quelques points critiques permet de voir si les spécifications techniques sont bien satisfaites.

**Flèches maximales**

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

**Extrêmes globaux**

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Filtre	Barre	Cas
Liste complète	1A40	1A19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Sélection	1A40	1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Nombre total	40	70
Nombre sélectionné	40	67

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

	UX (cm)	UY (cm)	UZ (cm)
MAX	0,0000	1,3288	0,7914
Barre	13	18	4
Cas	64 (C)	108 (C)	108 (C)
MIN	-0,0017	-1,2846	-0,5043
Barre	3	17	21
Cas	85 (C)	108 (C)	108 (C)

• **Calcul des réactions:**

Les réactions permettent de voir les efforts qui règnent aux noeuds. C'est la réaction inter-élément ou la réaction développée aux appuis de l'ouvrage.

Réactions

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Extrêmes globaux

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

Filtre	Noeud	Cas
Liste complète	1A28	1A19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Sélection	15A22	1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114
Nombre total	28	70
Nombre sélectionné	8	67

- Cas: 1A8 10A13 15 16 18 19 43 45A68 85A93 95A104 107 108 110A114

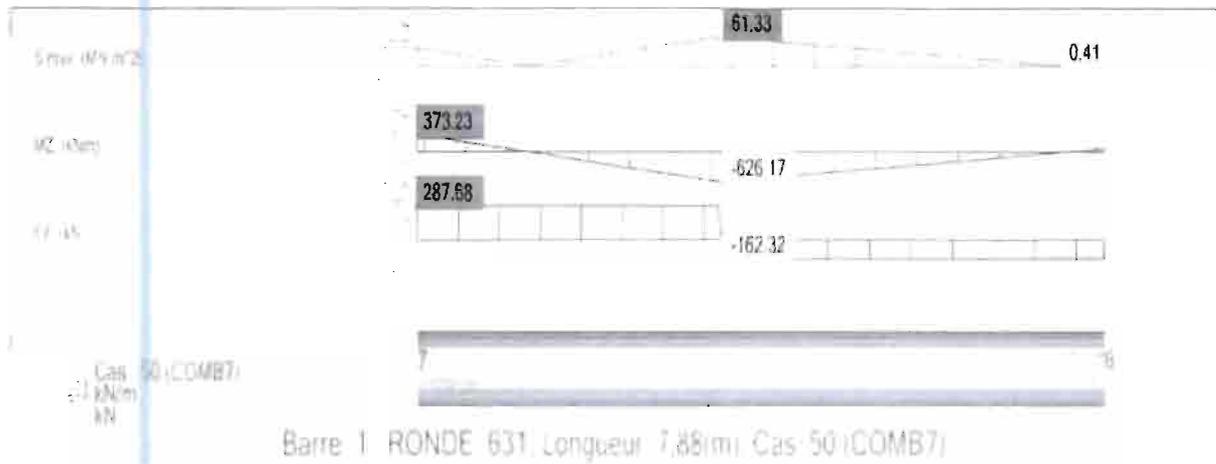
	FX (kN)	FY (kN)	FZ (kN)	MX (kNm)	MY (kNm)	MZ (kNm)
<b>MAX</b>	5,96	7,35	261,44	0,00	0,00	0,00
<b>Noeud</b>	16	16	22	17	18	18
<b>Cas</b>	114 (C)	61 (C)	108 (C)	85 (C)	108 (C)	108 (C)
<b>MIN</b>	-94,56	-7,26	-371,34	-0,00	-0,00	-0,00
<b>Noeud</b>	16	17	18	15	15	17
<b>Cas</b>	108 (C)	10	108 (C)	10	ELU/9	108 (C)

## ANNEXE 2

- **Analyse détaillée des barres critiques**

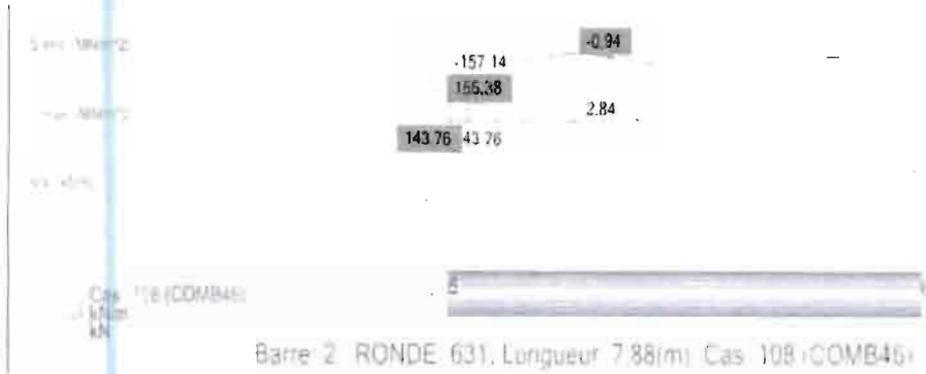
Ainsi une analyse détaillée est faite sur ces barres avant dimensionnement. Cette analyse permet de présenter les diagrammes détaillés et les tableaux de résultats numériques pour les barres critiques

- **Analyse de la barre 1**



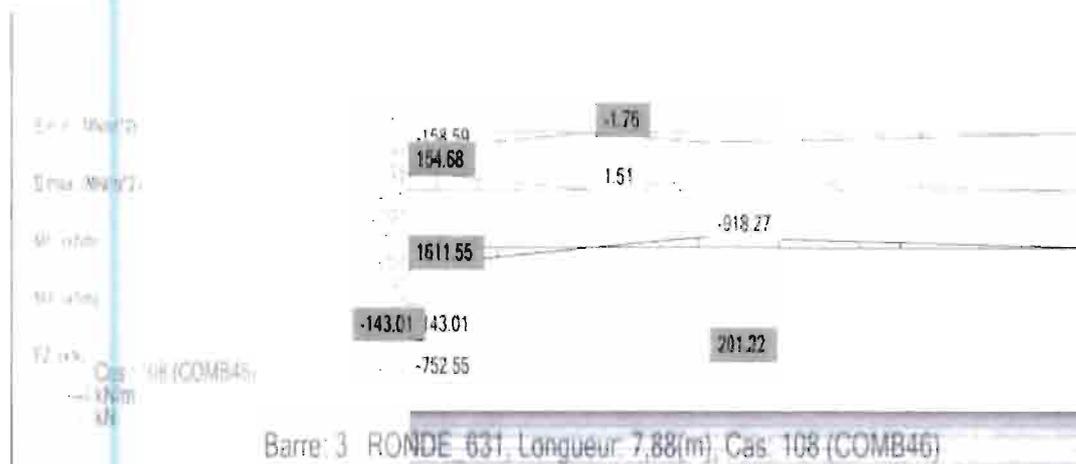
Barre / Point (m)	FY (kN)	MZ (kNm)	S max (MPa)
<b>MAX</b>	287,68	373,23	61,15
<b>pour la barre</b>	1	1	1
<b>dans le point :</b>	x=0,0 (m)	x=0,0 (m)	x=-3,47 (m)
<b>MIN</b>	-162,32	-624,20	0,37
<b>pour la barre</b>	1	1	1
<b>dans le point :</b>	x=3,57 (m)	x=3,47 (m)	x=7,40 (m)

• Analyse de la barre 2



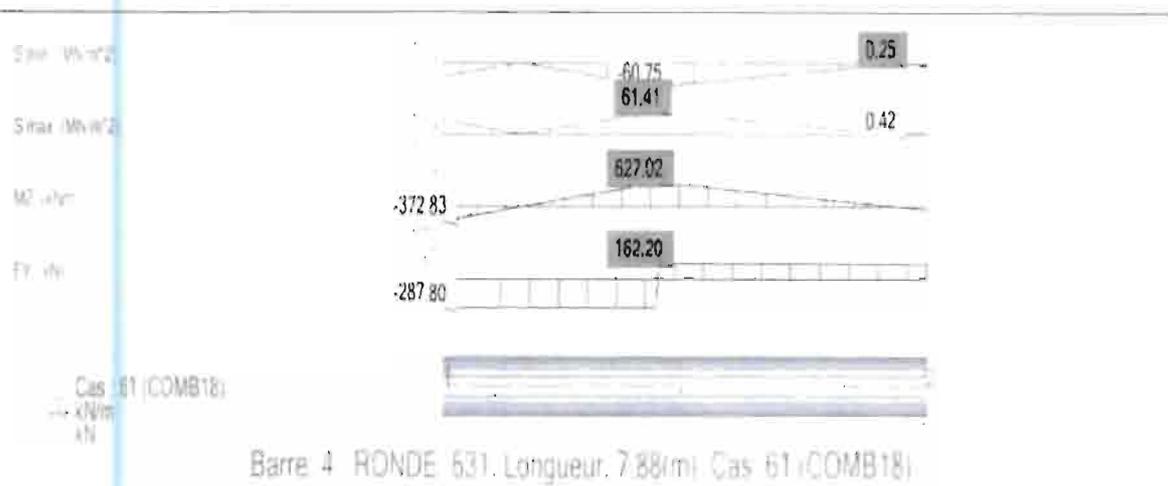
Barre / Point (m)	MX (kNm)	S max (MPa)	S min (MPa)
<b>Valeur actuelle</b>	143,76	155,38	-157,14
<b>pour la barre :</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
<b>dans le point :</b>	<b>x=0,0 (m)</b>	<b>x=0,0 (m)</b>	<b>x=0,0 (m)</b>
<b>2 / orig.</b>	143,76	155,38	-157,14
<b>2 / extr.</b>	143,76	4,37	-4,67

• Analyse de la barre 3



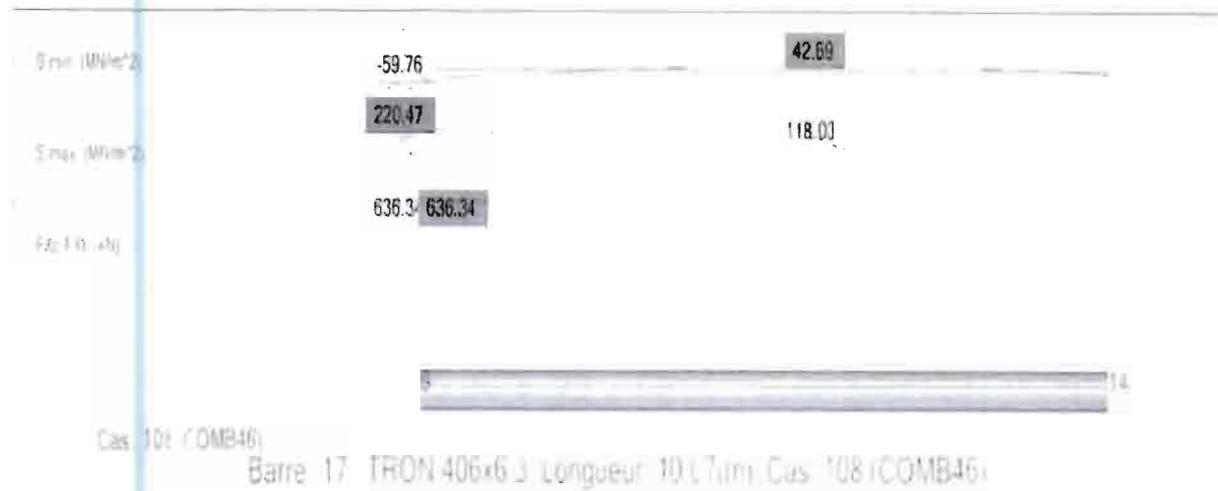
	FZ (kN)	MX (kNm)	MY (kNm)	S max (MPa)	S min (MPa)
<b>MAX</b>	201,22	-143,01	1611,55	154,68	-0,28
<b>pour la barre</b>	3	3	3	3	3
<b>dans le point :</b>	x=3,59 (m)	x=0,0 (m)	x=0,0 (m)	x=0,0 (m)	x=2,18 (m)
<b>MIN</b>	-752,55	-143,01	-909,50	0,04	-158,59
<b>pour la barre</b>	3	3	3	3	3
<b>dans le point :</b>	x=0,0 (m)	x=0,0 (m)	x=3,59 (m)	x=2,18 (m)	x=0,0 (m)

• Analyse de la barre 4



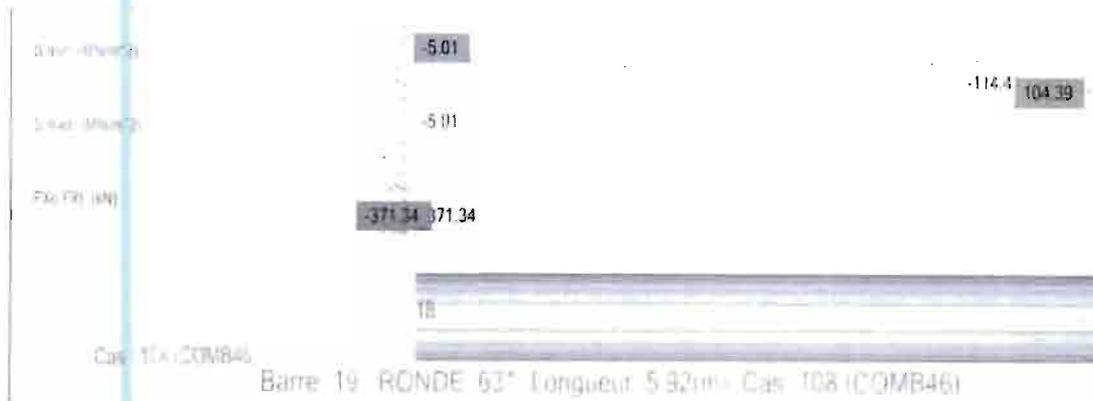
	FZ (kN)	MY (kNm)	MZ (kNm)	S max (MPa)	S min (MPa)
<b>MAX</b>	290,74	992,34	8,04	113,08	-4,93
<b>pour la barre</b>	1	1	1	1	1
<b>dans le point :</b>	x=3,57 (m)	x=0,0 (m)	x=0,0 (m)	x=3,47 (m)	x=1,51 (m)
<b>MIN</b>	-663,03	-1213,41	-37,18	-4,80	-122,80
<b>pour la barre</b>	1	1	1	1	1
<b>dans le point :</b>	x=0,0 (m)	x=3,47 (m)	x=7,88 (m)	x=1,51 (m)	x=3,47 (m)

• Analyse de la barre 17



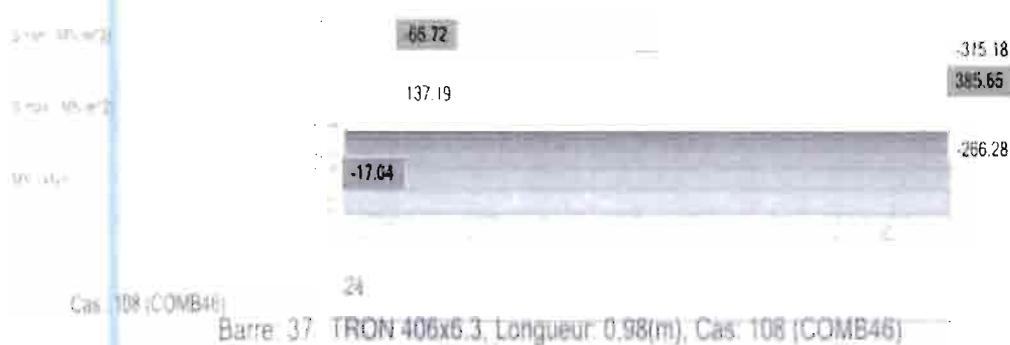
	FX (kN)	S max (MPa)	S min (MPa)
<b>MAX</b>	636,34	220,47	42,69
<b>pour la barre</b>	17	17	17
<b>dans le point :</b>	x=0,0 (m)	x=0,0 (m)	x=6,04 (m)
<b>MIN</b>	636,34	118,03	-59,76
<b>pour la barre</b>	17	17	17
<b>dans le point :</b>	x=0,0 (m)	x=6,04 (m)	x=0,0 (m)

• Analyse de la barre 19



	FX (kN)	S max (MPa)	S min (MPa)
<b>MAX</b>	-371,34	104,39	-5,01
<b>pour la barre</b>	19	19	19
<b>dans le point :</b>	x=0,0 (m)	x=5,21 (m)	x=0,0 (m)
<b>MIN</b>	-371,34	-5,01	-114,41
<b>pour la barre</b>	19	19	19
<b>dans le point :</b>	x=0,0 (m)	x=0,0 (m)	x=5,21 (m)

• Analyse de la barre 37



	MY (kNm)	S max (MPa)	S min (MPa)
<b>MAX</b>	-17,04	385,65	-66,78
<b>pour la barre</b>	37	37	37
<b>dans le point :</b>	x=0,0 (m)	x=0,98 (m)	x=0,10 (m)
<b>MIN</b>	-266,28	137,25	-315,18
<b>pour la barre</b>	37	37	37
<b>dans le point :</b>	x=0,98 (m)	x=0,10 (m)	x=0,98 (m)

**CM66 - Vérification des familles ( ELU ) 1A6**

Résultats Messages

Pièce	Profil	Matériau	Lay	Laz	Ratio	Cas
<b>Famille : 1 ducs d'albe</b>						
3	<input checked="" type="checkbox"/> RONDE_631	ACIER	37.69	37.69	0.32	6 choc bat90
<b>Famille : 2 Cadre</b>						
37	<input checked="" type="checkbox"/> TRON 406x6.3	ACIER	6.92	6.92	0.80	6 choc bat90
<b>Famille : 3 Longrines</b>						
16	<input checked="" type="checkbox"/> TREC 300x200	ACIER	23.77	32.41	0.63	6 choc bat90
<b>Famille : 4 Pieux</b>						
21	<input checked="" type="checkbox"/> RONDE_631	ACIER	28.32	28.32	0.31	6 choc bat90
<b>Famille : 5 Barres sup</b>						
7	<input checked="" type="checkbox"/> TRON 406x6.3	ACIER	18.98	18.98	0.86	6 choc bat90
<b>Famille : 6 Pieux 1</b>						
24	<input checked="" type="checkbox"/> TRON 406x6.3	ACIER	42.93	42.93	0.31	6 choc bat90

Et le dimensionnement a donné le tableau suivant :

**CM66 - Dimensionnement des familles ( ELU ) 1A6**

Résultats Messages

Pièce	Profil	Matériau	Lay	Laz	Ratio	Cas
<b>Famille : 1 ducs d'albe</b>						
3	<input checked="" type="checkbox"/> RONDE_631	ACIER	37.69	37.69	0.32	6 choc bat90
<b>Famille : 2 Cadre</b>						
37	<input type="checkbox"/> TRON 355x6.3	ACIER	7.92	7.92	1.03	6 choc bat90
	<input checked="" type="checkbox"/> TRON 406x6.3		6.92	6.92	0.80	
	<input type="checkbox"/> TRON 406x8		6.95	6.95	0.63	
<b>Famille : 3 Longrines</b>						
16	<input type="checkbox"/> TREC 300x100	ACIER	26.13	61.89	1.72	6 choc bat90
	<input checked="" type="checkbox"/> TREC 300x200		23.77	32.41	0.63	
	<input type="checkbox"/> TREC 300x200		24.50	33.55	0.35	
<b>Famille : 4 Pieux</b>						
21	<input checked="" type="checkbox"/> RONDE_631	ACIER	28.32	28.32	0.31	6 choc bat90
<b>Famille : 5 Barres sup</b>						
7	<input type="checkbox"/> TRON 355x6.3	ACIER	21.74	21.74	1.13	6 choc bat90
	<input checked="" type="checkbox"/> TRON 406x6.3		18.98	18.98	0.86	
	<input type="checkbox"/> TRON 406x8		19.06	19.06	0.69	
<b>Famille : 6 Pieux 1</b>						
24	<input checked="" type="checkbox"/> TRON 406x6.3	ACIER	42.93	42.93	0.31	6 choc bat90

Les profilés satisfont les conditions réglementaires ou les spécifications techniques.

## CALCUL DES STRUCTURES ACIER

NORME : EUROCODE 3

TYPE D'ANALYSE : Dimensionnement des familles

FAMILLE : 1 dues d'albe

PIECE : 3

POINT : 1

COORDONNEE : 0.000 0.000

CHARGEMENTS :

Cas de charge décisif : 6 choc bat90

MATERIAU :

ACIER  $f_y = 235.00$  MPa



PARAMETRES DE LA SECTION : RONDE\_631

ht=63 cm

bf=63 cm

ea=4 cm

es=4 cm

$A_y = 0.044$  m<sup>2</sup>

$I_y = 0.003$  m<sup>4</sup>

$W_{ely} = 0.010$  m<sup>3</sup>

$A_z = 0.044$  m<sup>2</sup>

$I_z = 0.003$  m<sup>4</sup>

$W_{elz} = 0.010$  m<sup>3</sup>

$A_x = 0.074$  m<sup>2</sup>

$I_x = 0.006$  m<sup>4</sup>

FORMULES DE VERIFICATION :

$\text{SigN} + \text{SigF}_y + \text{SigF}_z = -0.07 + -75.96 + -0.00 = |-76.04| < 235.00$  MPa (3.731)

$1.54 * \text{Tau}_y = 1.54 * 0.02 = 0.04 < 235.00$  MPa (1.313)

$1.54 * \text{Tau}_z = |1.54 * -7.92| = |-12.19| < 235.00$  MPa (1.313)

Profil correct !!!

## CALCUL DES STRUCTURES ACIER

NORME : EUROCODE 3

TYPE D'ANALYSE : Dimensionnement des familles

FAMILLE : Cadre

PIECE : 37

POINT :

COORDONNEE :

1.000 m

CHARGEMENTS :

Cas de charge décisif : 6 choc bat90

MATERIAU :

ACIER  $f_y = 235.00$  MPa



PARAMETRES DE LA SECTION : TRON 406x6.3

ht=41 cm

bf=41 cm

ea=1 cm

es=1 cm

$A_y = 0.005$  m<sup>2</sup>

$I_y = 0.000$  m<sup>4</sup>

$W_{ely} = 0.001$  m<sup>3</sup>

$A_z = 0.005$  m<sup>2</sup>

$I_z = 0.000$  m<sup>4</sup>

$W_{elz} = 0.001$  m<sup>3</sup>

$A_x = 0.008$  m<sup>2</sup>

$I_x = 0.000$  m<sup>4</sup>

FORMULES DE VERIFICATION :

$\text{SigN} + kD * kF_y * \text{SigF}_y + kF_z * \text{SigF}_z = 17.17 + 1.00 * 1.00 * 160.98 + 1.00 * 8.75 = 186.89 < 235.00$   
MPa (3.731)

$1.54 * \text{Tau}_y = 1.54 * 15.00 = 23.10 < 235.00$  MPa (1.313)

$1.54 * \text{Tau}_z = |1.54 * -26.07| = |-40.15| < 235.00$  MPa (1.313)

*Profil correct !!!*

## CALCUL DES STRUCTURES ACIER

NORME : *EUROCODE 3*

TYPE D'ANALYSE : Dimensionnement des familles

FAMILLE : *3 Longrines*

PIECE : 16

POINT :

COORDONNEE : 001 168

CHARGEMENTS :

*Cas de charge décisif* : 6 choc bat90

MATERIAU :

ACIER  $f_y = 235.00$  MPa



PARAMETRES DE LA SECTION : TREC 300x200x6

ht=30 cm

bf=20 cm

ea=1 cm

es=1 cm

$A_y = 0.002$  m<sup>2</sup>

$I_y = 0.000$  m<sup>4</sup>

$W_{ely} = 0.000$  m<sup>3</sup>

$A_z = 0.003$  m<sup>2</sup>

$I_z = 0.000$  m<sup>4</sup>

$W_{elz} = 0.000$  m<sup>3</sup>

$A_x = 0.006$  m<sup>2</sup>

$I_x = 0.000$  m<sup>4</sup>

FORMULES DE VERIFICATION :

$\text{SigN} + kD \cdot kF_y \cdot \text{SigF}_y + kF_z \cdot \text{SigF}_z = 0.12 + 1.00 \cdot 1.00 \cdot 1.45 + 1.00 \cdot 146.82 = 148.39 < 235.00$   
MPa (3.731)

$1.54 \cdot \text{Tau}_y = 1.54 \cdot 17.07 = 26.29 < 235.00$  MPa (1.313)

$1.54 \cdot \text{Tau}_z = |1.54 \cdot -0.16| = |-0.25| < 235.00$  MPa (1.313)

*Profil correct !!!*

## CALCUL DES STRUCTURES ACIER

NORME : EUROCODE 3

TYPE D'ANALYSE : Dimensionnement des familles

FAMILLE : 4 Pieux

PIECE : 21

POINT :

COORDONNEE :

1001 9.92 m

CHARGEMENTS :

Cas de charge décisif : 6 choc bat90

MATERIAU :

ACIER  $f_y = 235.00$  MPa



PARAMETRES DE LA SECTION : RONDE\_631

ht=63 cm

bf=63 cm

ea=4 cm

es=4 cm

$A_y = 0.044$  m<sup>2</sup>

$I_y = 0.003$  m<sup>4</sup>

$W_{ely} = 0.010$  m<sup>3</sup>

$A_z = 0.044$  m<sup>2</sup>

$I_z = 0.003$  m<sup>4</sup>

$W_{elz} = 0.010$  m<sup>3</sup>

$A_x = 0.074$  m<sup>2</sup>

$I_x = 0.006$  m<sup>4</sup>

FORMULES DE VERIFICATION :

$\text{SigN} + kD * \text{SigFy} + \text{SigFz} = -0.17 + 1.00 * -72.40 + -0.00 = -72.56 < 235.00$  MPa (3.731)

$1.54 * \text{Tauy} = |1.54 * -0.04| = |-0.06| < 235.00$  MPa (1.313)

$1.54 * \text{Tauz} = |1.54 * -5.74| = |-8.84| < 235.00$  MPa (1.313)

*Profil correct !!!*

## CALCUL DES STRUCTURES ACIER

NORME : EUROCODE 3

TYPE D'ANALYSE : Dimensionnement des familles

FAMILLE : 5 Barres sup

PIECE : 7

POINT :

COORDONNEE :

(3.00) (6.00) m

CHARGEMENTS :

Cas de charge décisif : 6 choc bat90

MATERIAU :

ACIER  $f_y = 235.00$  MPa



PARAMETRES DE LA SECTION : TRON 406x6.3

ht=41 cm

bf=41 cm

ea=1 cm

es=1 cm

$A_y = 0.005$  m<sup>2</sup>

$I_y = 0.000$  m<sup>4</sup>

$W_{ely} = 0.001$  m<sup>3</sup>

$A_z = 0.005$  m<sup>2</sup>

$I_z = 0.000$  m<sup>4</sup>

$W_{elz} = 0.001$  m<sup>3</sup>

$A_x = 0.008$  m<sup>2</sup>

$I_x = 0.000$  m<sup>4</sup>

FORMULES DE VERIFICATION :

$\text{SigN} + kD \cdot \text{SigFy} + \text{SigFz} = -9.74 + 1.00 \cdot -0.28 + -192.74 = -202.76 < 235.00$  MPa (3.731)

$1.54 \cdot \text{Tauy} = |1.54 \cdot -20.48| = |-31.54| < 235.00$  MPa (1.313)

$1.54 \cdot \text{Tauz} = |1.54 \cdot -1.09| = |-1.68| < 235.00$  MPa (1.313)

Profil correct !!!

## CALCUL DES STRUCTURES ACIER

NORME : EUROCODE 3

TYPE D'ANALYSE : Dimensionnement des familles

FAMILLE : (Pieux)

PIECE : 24

POINT :

COORDONNEE :

(0,1 - 6,07 m)

CHARGEMENTS :

Cas de charge décisif : 6 choc bat90

MATERIAU :

ACIER  $f_y = 235.00$  MPa



PARAMETRES DE LA SECTION : TRON 406x6.3

ht=41 cm

bf=41 cm

ea=1 cm

es=1 cm

$A_y = 0.005$  m<sup>2</sup>

$I_y = 0.000$  m<sup>4</sup>

$W_{ely} = 0.001$  m<sup>3</sup>

$A_z = 0.005$  m<sup>2</sup>

$I_z = 0.000$  m<sup>4</sup>

$W_{elz} = 0.001$  m<sup>3</sup>

$A_x = 0.008$  m<sup>2</sup>

$I_x = 0.000$  m<sup>4</sup>

FORMULES DE VERIFICATION :

$\text{SigN} + kD * kF_y * \text{SigF}_y + kF_z * \text{SigF}_z = 16.11 + 1.00 * 1.00 * 1.97 + 1.00 * 2.87 = 20.95 < 235.00$  MPa  
(3.731)

$1.54 * \text{Tau}_y = |1.54 * -0.08| = |-0.12| < 235.00$  MPa (1.313)

$1.54 * \text{Tau}_z = |1.54 * -47.41| = |-73.02| < 235.00$  MPa (1.313)

*Profil correct !!!*

### Vérification de la portance du sol

Il s'agit ici de comparer les résultats des efforts normaux trouvés dans les pieux avec les capacités portantes des sols données dans les études géotechniques. [16]

### Résultats des études

#### Stratigraphie

- de 0.00 à 4.10 m : sable noirâtre + rognons basaltiques et coquillage en profondeur.
- de 4.10 à 12.00 m : marne grise ocre devenant grisâtre en profondeur.

Site	Pieux		Q <sub>v</sub> ELS (kN)	Q <sub>v</sub> ELU (kN)
	Diamètre (m)	Longueur (m)		
	0.40	6.00	132	198
		8.00	197	295
		10.00	240	359
		12.00	473	709
	0.60	6.00	242	362
		8.00	370	555
		10.00	396	593
		12.00	808	1211

### Résultats après dimensionnement

Pieux	Profondeur (m)	FZ enveloppe (kN)	FZ ELU (kN)	FZ ELS (kN)
19	5.92	552.4	48.59	35.99
20	5.92	541.18	46.96	34.79
21	5.92	545.32	46.84	34.55
22	5.92	557.66	50.91	37.71
23	6.20	343.97	20.12	14.90
24	6.07	472.91	30.32	22.40
25	6.07	454.49	27.86	20.64
26	6.20	345.72	19.00	14.58

A l'ELU comme à l'ELS les efforts normaux dans les pieux sont inférieurs à la capacité portante du sol. Mais pour les autres types de combinaisons les efforts dans les pieux sont supérieurs à la capacité du sol à six mètres (6 m). Pour des raisons sécuritaires on doit augmenter la fiche des pieux jus qu'à huit mètres (8 m). A cette profondeur on voit que la portance du sol peut reprendre les charges venant de la structure.