UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP

Ecole Supérieure Polytechnique
Département de Génie Civil

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME D'INGENIEUR DE CONCEPTION

CONSTRUCTION DE CHAMPS DE DEPLACEMENTS POUR UNE FORMULATION DES ELEMENTS FINIS BASEE SUR LA METHODE TREFFTZ

Auteur : Lamine DOUMBOUYA

Directeur : Dr Moustapha NDIAYE

Année académique 1999 - 2000

Remerciements

Tous mes remerciements à mon directeur de projet Dr MOUSTAPHA N'DIAYE qui m'a été d'un grand apport dans les différentes phases de l'élaboration de ce rapport

Je remercie tous ceux qui ont assuré le support scientifique par des entretiens parfois brefs , mais efficaces.

Je remercie aussi tous ceux qui ont largement contribué à la saisie du rapport

Finalement , je remercie tous ceux qui ont contribué à améliorer mon équilibre social et financier

Sommaire

La construction de champ de déplacement interne est utilisée pour une formulation des éléments finis basée la méthode de TRFFTZ . Ce champ interne doit vérifier les équations différentielles du problème (tridimensionnel ou bi-dimensionnel) .

L ' équation du modèle est établie à partir des équations fondamentales de la théorie de l ' élasticité linéaire pour un solide .

La construction des fonctions (dans le cas tridimensionnel) à partir des simplifications appropriées de l ' équation du modèle a été accompagné du listing complet de programmes pour la génération et la vérification automatique écrit avec MAPLE V .

Il a été question aussi d ' assurer l ' indépendance linéaire des fonctions et le procédé d ' Orthogonalisation de GRAM _SMITHS a servi de base technique pour l ' aspect théorique et l ' élaboration des programmes .Au passage , l ' intégration numérique (méthode de Gauss_Legendre) a été développée pour régler certains problèmes liés à MAPLE V et l ' élément de référence quadratique a été utilisé pour simplifier le problème .

Enfin , l ' étude a été clôturé en développant les fonctions pour le calcul des dalles .

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Dans les problèmes relevant de la mécanique des structures , l'ingénieur recherche la répartition des contraintes qui régneront dans la structure étudiée. A l'occasion il peut être nécessaire de calculer les déplacements en quelques points particuliers afin de s'assurer que les spécifications de flèche sont bien respectées

Pour un problème donné, la première étape dans la détermination du système des contraintes et des déplacements consiste à établir les équations régissants la solution et qui satisfont les conditions d'équilibre et de compatibilité. Ces équations qui décrivent le comportement de nos structures, pour les problèmes de nature bi ou tridimensionnelle, sont des équations aux dérivées partielles ; qui constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifiques.

Les raisons principales de cet état de fait sont d'une part les progrès de l'analyses mathématiques et d'autres part l'arrivée de l'outil de calcul numérique qui était resté, pour les équations aux dérivées partielles, presque totalement inadéquat jusqu'aux année 1950. L'arrivée, en effet des ordinateurs, leurs progrès immenses et incessants, ont permis pour la première fois dans l'histoire de calculer, **à partir des modèles**, des équations qui jusqu'alors ne pouvaient être que très approximativement estimées ; d'ou la possibilité pour les chercheurs et pour les ingénieurs, de pouvoir utiliser les résultats numériques pour l'adaptation des raisonnements en cours.

Tout cela explique, pourquoi la **modélisation par des équations aux dérivées partielles,** suivie de l'analyses théoriques puis numériques, est devenue une démarche de base.

Pour l'analyse numérique qui nous intéresse particulièrement, **la méthode des éléments finis** est, actuellement, indéniablement le modèle de référence. Elle consiste à utiliser une approximation simple des variations inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques et fait appel aux trois domaines suivants :

- science de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles
- méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur

La compréhension de la méthode exige en effet des connaissances intuitives

dans des domaines variées :

- compréhension du problème physique étudié
- Approximation des fonctions inconnues par sous-domaines et constructions des fonctions
- Constructions des équations du système étudié sous forme variationnelle, soit à partir d'équation aux dérivées partielles, soit à partir de méthodes énergétiques.
- méthodes numériques d'intégrations , de résolution de systèmes d'équation algébriques linéaires .
- quelques techniques informatiques.

Il existe plusieurs types de modèles d'éléments finis :

- Le modèle éléments finis conventionnel basé sur la méthode de RAYLEIGH-RITZ, utilise un champ de déplacement conforme qui vérifie approximativement l'équilibre. Et pour reproduire le comportement de certains phénomènes dans nos structures, par exemples les effets locaux aux voisinages des points singuliers (trou circulaire , coin singulier) , cette méthode dite conventionnel s'adapte très mal car ces singularités conduisent à un ordre non optimal de convergence . Ainsi plusieurs stratégies ont été adoptées ; parmi celles-ci citons la méthode TREFFTZ

- La méthode des éléments finis basée sur la construction d'un champ de TREFFTZ utilise deux champs de déplacements : un champ interne qui vérifie à priori l'équation différentielle fondamentale du problème mais viole la continuité aux interfaces et un champ conforme mais défini uniquement sur la frontière. Alors qu'avec les éléments finis classiques, pour déterminer les efforts maxima en tout point d'un tablier de ponts due à une charge concentrée mobile par exemple , il faut adopter pour chaque position de la charge , la meilleure configuration du réseau qui permet au mieux , de représenter les effets de concentration de contraintes ;la méthode dite hybride-trefftz lui s'adapte bien à ce genre de problème puisqu'il prend en compte dans l'expression du champ de déplacements internes , les singularités dues aux charges concentrées . Par conséquent le maillage et la précision de la solution deviennent pratiquement indépendants du chargement. Donc la méthode basée sur une formulation de TREFFTZ apparaît de manière très clair sur le plan méthodologique comme un complément et une extension de la méthode classique.

Mais l'une des problèmes les plus fastidieux de cette méthode est la construction d'un champ interne qui vérifie les équations aux dérivées partielles fondamentales, surtout si le problème étudié est un problème bi ou tridimensionnelle.Plusieurs auteurs on fait des publications ;nous avons les fonctions de TREFFTZ ,etc. ...

Dans le cadre de ce projet nous allons traiter le cas tridimensionnel .Après avoir établi les équations du modèle , nous allons passer à l'étape de construction des fonctions ,ensuite vérifier indépendance des fonctions solutions de l'équation du modèle , et appliquer les conditions ad hoc pour revenir au cas bi-dimensionnel (cas des plaques) afin de comparer nos solutions à elles des autres auteurs .

Et à chaque étapes de la constructions des programmes de génération des fonctions et /ou de vérification des équation sera mis au point .Et pour cela nous travaillerons avec MAPLE qui est un outil de calcul numérique et formel développé par WATERLOO MAPLE SOFTWARE , (université de waterloo,ontario,conada) .Ici nous disposons de la version MAPLE V release 3 dans l'environnement windows édition etudent avec beaucoup de limite .

CHAPITRE I : LES MODELES PHYSIQUES ET MATHEMATIQUES

Dans ce chapitre nous rappelons les équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire. La solution de ces équations doit évidement satisfaire les conditions aux frontières ainsi que les conditions de chargement.

Dans la modélisation des structures, les équations fondamentales d'intérêt proviennent de trois sources :

1. Les problèmes d'équilibre en élasticité classique qui fixent les conditions d'équilibre.
2. Les relations cinématiques qui donnent les relations déformations - déplacements.
3. La loi de comportement élastique qui s'exprime par une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéaires.

Considérons maintenant un corps solide de volume Ω et de frontière $\partial\Omega = \Gamma_v \cup \Gamma_t$ soumis à l'action :

- de forces de volumes f_v
- de forces surfaciques f_s sur la frontière Γ_t
- de contraintes initiales $\{\sigma_0\}$

Avec les conditions aux limites cinématiques $u = \bar{u}$ sur la surface Γ_v

1- Contraintes et Equations d'équilibre

Cette section est relative à la description de l'état de contrainte d'un solide soumise à des sollicitations volumiques, surfaciques et statiques .

Considérons la force Δf qui exerce sur un élément de surface Δs de normale extérieure $\vec{n}$ au point p de coordonnées (x , y , z) .Le vecteur contraint au point p est défini par $\sigma(p\ ,\ \vec{n}) = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$ .Il existe une infinité de vecteurs au point p dépendant de l'orientation de $\vec{n}$.

soient $\sigma\left(\vec{i}\right), \sigma\left(\vec{j}\right), \sigma\left(\vec{k}\right)$ les vecteurs contraintes agissants sur les facettes de normales $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ représentés sur la figure 1; leurs composantes sont définies de la manière qu'on obtient la matrice des contraintes au point p .

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

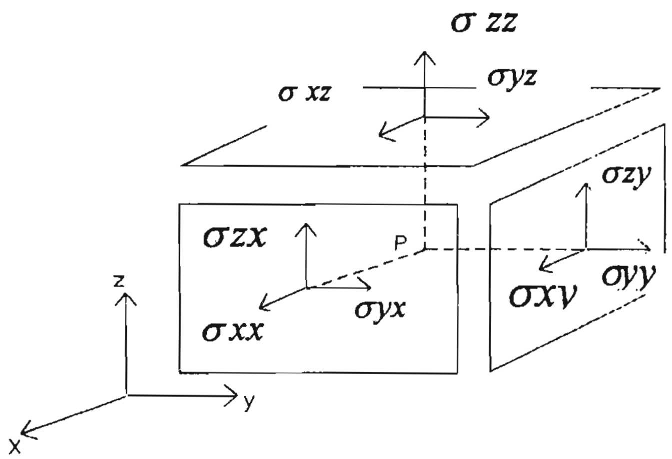


figure 1 : composantes de la matrice [σ]

En considérant l'équilibre d'un élément de volume dv au voisinage du point p , on obtient en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}+f_x=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}+f_y=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}+f_z=0$$

ou encore , sous forme matricielle

$$\boxed{\operatorname{div}[\sigma]^T + \{f_v\} = 0 \qquad 1.1}$$

2. Relations déformations /déplacements

La théorie de l'élasticité linéaire est basée sur l ' hypothèse suivante :

- les perturbations restent petites , de telles sorte que l'on puisse procéder à une linèarisation ; Il en découle les relations qui suivent :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

avec $\vec{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$ le vecteur déplacement

sous forme matricielle on a

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Ou bien sous forme d'opérateur sur dv avec $[L] = grad\ \vec{u}$

$$\boxed{[\varepsilon] = \frac{1}{2} * \left([L] + [L]^T\right)} \quad 1.2$$

3. La loi de comportement

Pour la loi de Hoche généralisée , pour les matériaux dits élastiques linéaires , les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations

$$\sigma_{ij} = H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(\vec{u}\right);$$

sous forme tensorielle on a

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad 1.3$$

avec [H] la matrice des composantes H_{ijkl} qui font inter venir les caractéristiques physiques du matériau .

pour un matériau homogène les H_{ijkl} se réduisent en λ et G appelés les coefficients de Lamé .

Par exemple pour le cas tridimensionnel isotrope en coordonnées cartésiennes nous avons :

$$[H]=\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

E :module d'élasticité du matériau et ν : coefficient de poisson

4. Equation du modèle

Dans un problème d'élasticité tridimensionnel nous avons ainsi quinze inconnues (six contraintes , six déformations, trois déplacement)et quinze relations avec trois conditions aux limites en chaque point de la frontière .

Le problème peut être décrit en fonction des trois composantes de déplacements en introduisant les relations 1.2 et 1.3 dans 1.1 . On obtient ainsi un système de trois équations différentielles partielles du second ordre par rapport aux coordonnées (x , y , z) .Les conditions aux limites peuvent être exprimées en fonctions des déplacements . Ces équations différentielles sous forme condensées sont appelées les équations de Navier . On a :

$$\boxed{(\lambda+G)grad\left(div\vec{u}\right)+G\nabla^2\vec{u}+\bar{b}=0} \quad \text{dans } \Omega \quad 1.4$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$v = v(u) = \bar{v} \qquad \text{sur } \Gamma_v$$

$$t = t(u) = \bar{t} \qquad \text{sur } \Gamma_t$$

Nous avons un problème de cauchy .Les solutions de cette équation appartienne à l'espace de Sobolev et pour s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution on est conduit à imposer aux frontières d'être soit analytiques soit dérivables jusqu ' à un certain ordre . Cependant , les exigences de la pratique obligent à introduire des conditions aux frontières , initiales ou aux limites , comportant des discontinuités .

Donc à partir d'une solution de l'équation 1.4 et des conditions aux limites , nous pouvons déterminer immédiatement le champ des contraintes en appliquant les équations 1.2 et 1.3 .

Etant donné qu'il est rare de voir une solution exacte à ce problème nous allons essayer de générer des fonctions qui vérifient l'équation (1.4) afin d'appliquer la formulation de TREFFTZ.

CHAPITRE II. CONSTRUCTION DES SOLUTIONS DE L'EQUATION DE NAVIER

Nous avons vu au chapitre précédent que l'équation du modèle dans un milieu élastique , isotrope et homogène infini occupant l'espace R^3 , est donnée par l'équation de Navier

$$\boxed{(\lambda+G)grad\left(div\vec{u}\right)+G\nabla^2\vec{u}+\bar{b}=0} \quad \text{dans } \Omega \qquad 2.1$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$v = v(u) = \bar{v} \qquad \text{sur } \Gamma_v$$

$$t = t(u) = \bar{t} \qquad \text{sur } \Gamma_t$$

$$\partial\Omega=\Gamma_t\cup\Gamma_v$$

1. Décomposition de la solution {u}

Il est démontré que u ,solution de cette équation s'écrit de manière unique comme somme de deux fonctions

$$Gu = v + grad\ \psi \qquad 2.2 \qquad [1]$$

Si nous introduisons dans l'équation une fonction auxiliaire F biharmonique , en posant $v = \phi = 2*(1-\nu)\nabla^2 F$ et $\psi = -\ div\ F$ la solution u s'écrit donc comme suite :

$$G.\vec{u} = \phi - \text{grad}\,\psi \qquad 2.2'$$

avec $\vec{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$ et $F = \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{Bmatrix}$

$$\nabla^4 F = 0 \quad (2.3) \quad \text{avec } F_x = F_y = F_z$$

la solution de cette équation aux dérivées partielles d'ordre quatre donne ainsi la solution de u

2. Résolution de $\nabla^4 F = 0$

Le bi-laplacien s'écrit en coordonnées cartésiennes c_à_d en (x , y , z) comme suit :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} + 2 * \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 * \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 * \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial z^2} = 0$$

Nous allons essayer d'éliminer les degrés supérieurs afin d'avoir une forme classique facile à résoudre

a_. Changement de variables

Faisons le changement de variables adéquates afin d'obtenir des formes d'équations différentielles classiques .Et pour cela on pose $\xi = ax + by + cz$

Pour passer en vu toutes les solutions possibles de changement de variables nous recalculons $\nabla^4 F(\xi) = 0$ et nous posons $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 0$

pour éliminer les dérivées partielles d'ordre supérieures . Nous obtenons comme solutions :

- $a = i$, $b = (\pm\cos(t)\,,\ \pm\sin(t))$, $c = (\pm\sin(t)\,,\ \pm\cos(t))$

- $b = i$, $a = (\pm\cos(t)\,,\ \pm\sin(t))$, $c = (\pm\sin(t)\,,\ \pm\cos(t))$

- $c = i$, $a = (\pm\cos(t)\,,\ \pm\sin(t))$, $b = (\pm\cos(t)\,,\ \pm\sin(t))$

$$t = [-\Pi, \Pi] \;;$$

Etant donnée que nous sommes dans l'espace complexe donc si ξ est solution son conjugué ($\bar{\xi}$) aussi l'est d'ou le changement de variables suivant :

$(X, Y, Z) \quad \rightarrow \quad \left(\xi, \bar{\xi}\right)$ et après calcul , l'équation (2.3) devient

$$\frac{\partial^4 F_Z\left(\xi, \bar{\xi}\right)}{\partial \xi^2 \partial \bar{\xi}^2} = 0$$

$\Rightarrow$ donc F_Z s'écrit sous la forme :

$$F_Z = \frac{1}{2}\left[\xi\Phi\left(\bar{\xi}\right) + \Phi(\xi)\xi + \chi(\xi) + \chi(\xi)\right]$$

Nous pouvons générer une solution de {u} en adoptant pour les fonctions $\Phi(\xi)$ et $\chi(\xi)$ une formulation polynomiale . En effet le théorème de weierstrass qui dit que toute fonction continue sur Ω est limite (uniformément sur tout compact de Ω) d'une suite de polynômes or nous avons des fonctions qui appartiennent à l'espace H^1 (**espace de Sobolev**) donc des fonctions continues , donc le choix de l'étude polynomiale se justifie bien [1].

Complète ?

3. Solution {u} du Modèle

Nous retenons comme solutions de changements de variables six ξ_i qui sont :

$$\xi_1 = ix + \cos(t)\, y + \sin(t)\, z \quad \text{avec} \quad \bar{\xi}_1 = -ix + \cos(t)\, y + \sin(t)\, z$$

$$\xi_2 = ix + \sin(t)\, y + \cos(t)\, z$$

$$\xi_3 = \cos(t)x + i\, y + \sin(t)\, z$$

$$\xi_4 = \sin(t)x + i\, y + \cos(t)\, z$$

$$\xi_5 = \cos(t)x + \sin(t)\, y + i\, z$$

$$\xi_6 = \sin(t)x + \cos(t)\, y + i\, z$$

$$\chi(\xi_i)=\sum b_n \xi_i^n \qquad n = 1 , 2 , 3 ,\ldots$$

$$\Phi(\xi_i)=\sum a_n \xi_i^n \qquad n = 2 , 3 , \ldots$$

Les fonctions génériques F_i seront donc :

$$F_{in} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_i \xi_i^{n-1} + \xi_i \bar{\xi}_i^{n-1} \\ {}_i\bar{\xi}_i \xi_i^{n-1} + \xi_i \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \bar{\xi}_i \xi_i^{n-1} + \xi_i \bar{\xi}_i^{n-1} \end{Bmatrix} \qquad \text{pour } i = 1 , 3 , 5$$

$$F_{in} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \xi_i^{n-1} + \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \xi_i^{n-1} + \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \xi_i^{n-1} + \bar{\xi}_i^{n-1} \end{Bmatrix} \qquad \text{pour } i = 2, 4, 6$$

Nous avons établi un programme pour voir l'influence de l'inversion des indices i et ; en fait en intervertissant les i pairs et les i impairs on obtient les mêmes résultats .

En s'intéressant à la partie imaginaire aussi nous avons :

$$F_{in} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \bar{\xi}_i \xi_i^{n-1} - \xi_i \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \bar{\xi}_i \xi_i^{n-1} - \xi_i \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \bar{\xi}_i \xi_i^{n-1} - \xi_i \bar{\xi}_i^{n-1} \end{Bmatrix} \qquad \text{pour } i = 1, 3, 5$$

$$F_{in} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \xi_i^{n-1} - \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \xi_i^{n-1} - \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \xi_i^{n-1} - \bar{\xi}_i^{n-1} \end{Bmatrix} \qquad \text{pour } i = 2, 4, 6$$

On obtient u en introduisant F_{in} dans l'équation 2.2 .Et on peut éliminer t dans l'expression de u(x ,y , z , t) en utilisant le théorème de la moyenne au sens des intégrales sur l'intervalle [-π…π] .

$$Gu_{in}(x, y, z,) = \frac{1}{2}\int_{-\Pi}^{\Pi} \left((1-\nu)\nabla^2 F_{in} - grad(divF_{in})\right)dt$$

Mais il faut vérifier par la suite que

$$(\lambda+G)\mathrm{grad}(\mathrm{div}(u_{in})) + G\nabla^2 u_{in} = 0$$

Nous avons fait quelques programmes avec le logiciel MAPLE V(voir annexe A) qui ont donnée des résultats satisfaisants ; Et on peut voir qu'en considérant les parties réelles de $\bar{\xi} * \xi^{n-1}$ et ξ^n ; nous avons des valeurs non nuls de u_{in} si n est pair et si nous considérons les parties imaginaires c'est plutôt les n impairs qui donnent des résultats non nuls de u_{in} .

On peut éliminer la variable auxiliaire t en utilisant d'autre technique ; par exemple en multipliant u par t ou (cos(t)+sin(t)) puis intégrer sur [-pi..pi] mais il reste à voir l'interprétation physique de ces expressions .Dans la suite de notre développement nous ne considérerons que l'expression qui représente la moyenne .

4 . Présentation du programme de génération et de vérification (test)

Dans cette section nous présentons les sous programmes relatifs à la partie réelle et à la partie imaginaire des fonctions génériques. Dans leurs structures les deux sous programmes sont les mêmes. La différence est que dans l'un on a considéré la partie réelle des fonctions $\bar{\xi}\xi^{n-1}$ et ξ^n,et dans l'autre la partie imaginaire .

Algo :

Début

$\{\xi_i\}$ i = 1 à 6

$$\{F_{ni}\} = \begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \\ F_{Zi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \xi_i^{n-1} + \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \xi_i^{n-1} + \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \xi_i^{n-1} + \bar{\xi}_i \end{Bmatrix} \quad \text{pour } i = 2,4,6$$

$$\{F_{in}\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \bar{\xi}_i \xi_i^{n-1} + \xi_i \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \bar{\xi}_i \xi_i^{n-1} + \xi_i \bar{\xi}_i^{n-1} \\ \bar{\xi}_i \xi_i^{n-1} + \xi_i \bar{\xi}_i^{n-1} \end{Bmatrix} \qquad \text{pour } i = 1, 3, 5$$

$$\{G\underline{u}_{ni}\} = 2*(1-\nu)\nabla^2\{F_{ni}\} - \mathrm{grad}(\mathrm{div}\{F_{ni}\})$$

$$\{G\underline{u}_{ni}\} = \int (2*(1-\nu)\nabla^2\{F_{ni}\} - \mathrm{grad}(\mathrm{div}\{F_{ni}\}))dt$$

Vérification de l'équation du modèle

$$(\lambda+G)\mathrm{grad}(\mathrm{div}(u_{in})) + G\nabla^2 u_{in} = 0$$

fin .

Ce programme génére des fonctions pour un n donné.

On fait de même pour les parties imaginaires.

5 . Expressions littérales des u_{ln}

Exprimons les solutions de u, v, en fonction de ξ_i et $\bar{\xi}_i$

$$\frac{\partial F_{nl}}{\partial x} = \frac{\partial F_{nl}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial F_{nl}}{\partial \bar{\xi}_i}\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial x} \text{ avec } \frac{\partial \xi_i}{\partial x} = a_i \text{ et } \frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial x} = \bar{a}_i$$

$$\frac{\partial F_{nl}}{\partial y} = \frac{\partial F_{nl}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial y} + \frac{\partial F_{nl}}{\partial \bar{\xi}_i}\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial y} \text{ avec } \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = b_i \text{ et } \frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial y} = \bar{b}_i$$

$$\frac{\partial F_{nl}}{\partial z} = \frac{\partial F_{nl}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial z} + \frac{\partial F_{nl}}{\partial \bar{\xi}_i}\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial z} \text{ avec } \frac{\partial \xi_i}{\partial z} = c_i \text{ et } \frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial z} = \bar{c}_i$$

$$\nabla^2 F_{ni} = 2(|a_i|^2 + |b_i|^2 + |c_i|^2)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \xi_i \partial \bar{\xi}_i}$$

$$\phi_{nl} = 4(1-\nu)(|a_i|^2 + |b_i|^2 + |c_i|^2)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \xi_i \partial \bar{\xi}_i}$$

$$grad(\psi_{nix}) = \frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial x \partial z}$$

$$grad(\psi_{nix}) = (a_i^2 + a_i b_i + a_i c_i)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \xi_i^2} + (2a_i\bar{a}_i + a_i\bar{b}_i + b_i\bar{a}_i + a_i\bar{c}_i + c_i\bar{a}_i)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \xi_i \partial \bar{\xi}_i} +$$
$$(\bar{a}_i^2 + \bar{a}_i\bar{b}_i + \bar{a}_i\bar{c}_i)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \bar{\xi}_i^2}$$

$$grad(\psi_{niy}) = \frac{\partial^2 F_{ni}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_{ni}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_{ni}}{\partial y \partial z}$$

$$grad(\psi_{niy}) = (b_i^2 + a_i b_i + b_i c_i)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \xi_i^2} + (2b_i\bar{b}_i + a_i\bar{b}_i + b_i\bar{a}_i + b_i\bar{c}_i + c_i\bar{b}_i)\frac{\partial^2 F_{ni}}{\partial \xi_i \partial \bar{\xi}_i} +$$
$$(\bar{b}_i^2 + \bar{a}_i\bar{b}_i + \bar{b}_i\bar{c}_i)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \bar{\xi}_i^2}$$

$$grad(\psi_{nlz}) = \frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial x \partial z}$$

$$grad(\psi_{nlz}) = (c_l^2 + c_l b_l + a_l c_l)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \xi_l^{\,2}} + (2c_l\bar{c}_l + c_l\bar{b}_l + b_l\bar{c}_l + a_l\bar{c}_l + c_l\bar{a}_l)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \xi_l \partial \bar{\xi}_l} +$$

$$(\bar{c}_l^2 + \bar{c}_l\bar{b}_l + \bar{a}_l\bar{c}_l)\frac{\partial^2 F_{nl}}{\partial \bar{\xi}_l^{\,2}}$$

Nous allons donner l'expression symbolique des u , v et w en considérant la partie réelle pour les n pairs et la partie imaginaire pour les n impairs .

$\triangleright$ $cas1 : n \ pair$

$pour \ i = 1,3,5$

$$F_{ni} = \frac{1}{2}(\overline{\xi}_i \xi_i^{n-1} + \xi_i \overline{\xi}_i^{n-1})$$

$pour \ i = 2,4,6$

$$F_{ni} = \frac{1}{2}(\xi_i^n + \overline{\xi}_i^n)$$

$\triangleright$ $cas2 : n \ impair$

$pour \ i = 1,3,5$

$$F_{ni} = \frac{1}{2}(\overline{\xi}_i \xi_i^{n-1} - \xi_i \overline{\xi}_i^{n-1})$$

$pour \ i = 2,4,6$

$$F_{ni} = \frac{1}{2}(\xi_i^n - \overline{\xi}_i^n)$$

▷ *cas* 1: *c_à_d n pair*

$$u_1 = (n-1)\left[(6-8\nu)Re(\xi_1^{n-2}) + (n-2)Re(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-3}) + (n-2)(\cos t + \sin t)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-3})\right]$$

$$v_1 = (n-1)\begin{bmatrix}(8-8\nu-2\cos^2 t - 2\sin t\cos t)Re(\xi_1^{n-2}) - \\ (n-2)(\cos^2 t + \cos t\sin t)Re(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-2}) + (n-2)\cos t\operatorname{Im}(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$w_1 = (n-1)\begin{bmatrix}(8-8\nu-2\sin^2 t - 2\sin t\cos t)Re(\xi_1^{n-2}) - \\ (n-2)(\sin^2 t + \cos t\sin t)Re(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-2}) + (n-2)\sin t\operatorname{Im}(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$u_2 = -n(n-1)\left[Re(\xi_2^{n-2}) + (\cos t + \sin t)\operatorname{Im}(\xi_2^{n-2})\right]$$

$$v_2 = n(n-1)\left[(\sin^2 t + \cos t\sin t)Re(\xi_2^{n-2}) - \sin t\operatorname{Im}(\xi_2^{n-2})\right]$$

$$w_2 = n(n-1)\left[(\cos^2 t + \cos t\sin t)Re(\xi_2^{n-2}) - \cos t\operatorname{Im}(\xi_2^{n-2})\right]$$

$$u_3 = (n-1)\begin{bmatrix}(8-8\nu-2\cos^2 t - 2\sin t\cos t)Re(\xi_3^{n-2}) - \\ (n-2)(\cos^2 t + \cos t\sin t)Re(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-2}) + (n-2)\cos t\operatorname{Im}(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$v_3 = (n-1)\left[(6-8\nu)Re(\xi_3^{n-2}) + (n-2)Re(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-3}) + (n-2)(\cos t + \sin t)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-3})\right]$$

$$w_3 = (n-1)\begin{bmatrix}(8-8\nu-2\sin^2 t - 2\sin t\cos t)Re(\xi_3^{n-2}) - \\ (n-2)(\sin^2 t + \cos t\sin t)Re(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-2}) + (n-2)\sin t\operatorname{Im}(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$u_4 = n(n-1)\left[(\sin^2 t + \cos t \sin t) Re(\xi_4^{n-2}) - \sin t \operatorname{Im}(\xi_4^{n-2})\right]$$

$$v_4 = -n(n-1)\left[Re(\xi_4^{n-2}) + (\cos t + \sin t)\operatorname{Im}(\xi_4^{n-2})\right]$$

$$w_4 = n(n-1)\left[(\cos^2 t + \cos t \sin t) Re(\xi_4^{n-2}) - \cos t \operatorname{Im}(\xi_4^{n-2})\right]$$

$$u_5 = (n-1)\begin{bmatrix} \left(8 - 8\nu - 2\cos^2 t - 2\sin t \cos t\right) Re(\xi_5^{n-2}) - \\ (n-2)(\cos^2 t + \cos t \sin t) Re(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-2}) + (n-2)\cos t \operatorname{Im}(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-2}) \end{bmatrix}$$

$$v_5 = (n-1)\begin{bmatrix} \left(8 - 8\nu - 2\sin^2 t - 2\sin t \cos t\right) Re(\xi_5^{n-2}) - \\ (n-2)(\sin^2 t + \cos t \sin t) Re(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-2}) + (n-2)\sin t \operatorname{Im}(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-2}) \end{bmatrix}$$

$$w_5 = (n-1)\left[(6 - 8\nu) Re(\xi_5^{n-2}) + (n-2) Re(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-3}) + (n-2)(\cos t + \sin t)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-3})\right]$$

$$u_6 = n(n-1)\left[(\sin^2 t + \cos t \sin t) Re(\xi_6^{n-2}) - \sin t \operatorname{Im}(\xi_6^{n-2})\right]$$

$$v_6 = n(n-1)\left[(\cos^2 t + \cos t \sin t) Re(\xi_6^{n-2}) - \cos t \operatorname{Im}(\xi_6^{n-2})\right]$$

$$w_6 = -n(n-1)\left[Re(\xi_6^{n-2}) + (\cos t + \sin t)\operatorname{Im}(\xi_6^{n-2})\right]$$

cas 2 : c_à_d n impair

$$u_1=(n-1)\left[(6-8\nu)\operatorname{Im}(\xi_1^{n-2})+(n-2)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-3})-(n-2)(\cos t+\sin t)Re(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-3})\right]$$

$$v_1=(n-1)\begin{bmatrix}\left(8-8\nu-2\cos^2 t-2\sin t\cos t\right)\operatorname{Im}(\xi_1^{n-2})-\\(n-2)(\cos^2 t+\cos t\sin t)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-2})-(n-2)\cos tRe(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$w_1=(n-1)\begin{bmatrix}\left(8-8\nu-2\sin^2 t-2\sin t\cos t\right)\operatorname{Im}(\xi_1^{n-2})-\\(n-2)(\sin^2 t+\cos t\sin t)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-2})-(n-2)\sin tRe(\bar{\xi}_1\xi_1^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$u_2=n(n-1)\left[\operatorname{Im}(\xi_2^{n-2})+(\cos t+\sin t)Re(\xi_2^{n-2})\right]$$

$$v_2=n(n-1)\left[(\sin^2 t+\cos t\sin t)\operatorname{Im}(\xi_2^{n-2})-\sin tRe(\xi_2^{n-2})\right]$$

$$w_2=n(n-1)\left[(\cos^2 t+\cos t\sin t)\operatorname{Im}(\xi_2^{n-2})-\cos tRe(\xi_2^{n-2})\right]$$

$$u_3=(n-1)\begin{bmatrix}\left(8-8\nu-2\cos^2 t-2\sin t\cos t\right)\operatorname{Im}(\xi_3^{n-2})-\\(n-2)(\cos^2 t+\cos t\sin t)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-2})-(n-2)\cos tRe(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$v_3=(n-1)\left[(6-8\nu)\operatorname{Im}(\xi_3^{n-2})+(n-2)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-3})-(n-2)(\cos t+\sin t)Re(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-3})\right]$$

$$w_3=(n-1)\begin{bmatrix}\left(8-8\nu-2\sin^2 t-2\sin t\cos t\right)\operatorname{Im}(\xi_3^{n-2})-\\(n-2)(\sin^2 t+\cos t\sin t)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-2})-(n-2)\sin tRe(\bar{\xi}_3\xi_3^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$u_4 = n(n-1)\left[(\sin^2 t + \cos t \sin t)\operatorname{Im}(\xi_4^{n-2}) - \sin t Re(\xi_4^{n-2})\right]$$

$$v_4 = -n(n-1)\left[\operatorname{Im}(\xi_4^{n-2}) + (\cos t + \sin t) Re(\xi_4^{n-2})\right]$$

$$w_4 = n(n-1)\left[(\cos^2 t + \cos t \sin t)\operatorname{Im}(\xi_4^{n-2}) - \cos t Re(\xi_4^{n-2})\right]$$

$$u_5 = (n-1)\begin{bmatrix}(8 - 8\nu - 2\cos^2 t - 2\sin t \cos t)\operatorname{Im}(\xi_5^{n-2}) - \\ (n-2)(\cos^2 t + \cos t \sin t)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-2}) - (n-2)\cos t Re(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$v_5 = (n-1)\begin{bmatrix}(8 - 8\nu - 2\sin^2 t - 2\sin t \cos t)\operatorname{Im}(\xi_5^{n-2}) - \\ (n-2)(\sin^2 t + \cos t \sin t)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-2}) - (n-2)\sin t Re(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-2})\end{bmatrix}$$

$$w_5 = (n-1)\left[(6 - 8\nu)\operatorname{Im}(\xi_5^{n-2}) + (n-2)\operatorname{Im}(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-3}) - (n-2)(\cos t + \sin t) Re(\bar{\xi}_5 \xi_5^{n-3})\right]$$

$$u_6 = n(n-1)\left[(\sin^2 t + \cos t \sin t) Re \xi_6^{n-2}) - \sin t \operatorname{Im}(\xi_6^{n-2})\right]$$

$$v_6 = n(n-1)\left[(\cos^2 t + \cos t \sin t) Re(\xi_6^{n-2}) - \cos t \operatorname{Im}(\xi_6^{n-2})\right]$$

$$w_6 = -n(n-1)\left[Re(\xi_6^{n-2}) + (\cos t + \sin t)\operatorname{Im}(\xi_6^{n-2})\right]$$

Toutes ces formules établies vérifient bien l'équation de NAVIER et nous avons fait un programme qui vérifie que ces $\{u\}_i$ sont les solutions de l'équation du modèle et toujours avec le logiciel MAPLE V(voir annexe B).

7 . Présentation du programme de vérification des formules

Nous avons établi ce programme pour vérifier les formules que nous avons établies à la main . Il donne le même résultat que le programme Test . Mais dans ce programme nous avons présenté u,v,w sous forme matricielle .

Début

n pair

$$A=\begin{pmatrix} 6-8\nu & n-2 & (n-2)(\cos t+\sin t) \\ 8-8\nu-2\cos t^2-2\cos t\bullet\sin t & -(n-2)(\cos t^2+\cos t\bullet\sin t) & (n-2)\cos t \\ 8-8\nu-2\sin t^2-2\cos t\bullet\sin t & -(n-2)(\sin t^2+\cos t\bullet\sin t) & (n-2)\sin t \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & -(\cos t+\sin t) \\ \sin t^2+\cos t\bullet\sin t & -\sin t \\ \cos t^2+\cos t\bullet\sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}_i=\left[Re(\xi_i^{n-2}), Re(\bar{\xi}_i\xi_i^{n-3}), \mathrm{Im}(\bar{\xi}_i\xi_i^{n-3})\right]$$

$$\mathrm{Y}_i=\left[Re(\xi_i^{n-2}), \mathrm{Im}(\xi_i^{n-2})\right]$$

$$i=1: G\begin{Bmatrix} u \\ v = \\ w \end{Bmatrix}=AX_1$$

soit [Ai] la ligne i de matrice A et [Bi] celle de B

$$\mathrm{i}=3: \mathrm{G}\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} [A_2] \\ [A_1] \\ [A_3] \end{Bmatrix}*\mathrm{X}_3 \;;\; \mathrm{i}=5: \mathrm{G}\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} [A_2] \\ [A_3] \\ [A_1] \end{Bmatrix}*\mathrm{X}_5$$

$$\mathrm{i}=2: \mathrm{G}\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\mathrm{BY}_2 \;;\; \mathrm{i}=4: \mathrm{G}\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} [B_2] \\ [B_1] \\ [B_3] \end{Bmatrix}*Y_4 \;;\; \mathrm{i}=6: \mathrm{G}\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} [B_2] \\ [B_3] \\ [B_1] \end{Bmatrix}*\mathrm{X}_6$$

vérification de l'équation du modèle comme dans le programme test

$(\lambda+G)\mathrm{grad}(\mathrm{div}(u_{in}))+G\nabla^2 u_{in}=0$

On fait la même chose pour n impair en changeant de matrice :

$$A=\begin{bmatrix} 6-8\nu & (n-2) & -(n-2)(\cos t+\sin t) \\ (8-8\nu-2\sin t^2-2\cos t*\sin t) & -(n-2)(\sin t^2+\cos t*\sin t) & -(n-2)\sin t \\ (8-8\nu-2\cos t^2-2\cos t*\sin t) & -(n-2)(\cos t^2+\cos t*\sin t) & -(n-2)\cos t \end{bmatrix}$$

$$X=\left[\mathrm{Im}\,\xi_i^{n-2}, \mathrm{Im}\,\bar{\xi}_i\xi_i^{n-3}, Re\,\bar{\xi}_i\xi_i^{n-3}\right]$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & (\cos t+\sin t) \\ \sin t^2+\cos t\sin t & -\sin t \\ \cos t^2+\cos t\sin t & -\cos t \end{bmatrix} \qquad \cancel{Y}_i=\left[\mathrm{Im}\,\xi_i^{n-2}, Re\,\xi_i^{n-2}\right]$$

fin

CHAPITRE III : **Orthogonalisation par Gram-smith**

Ici on fait une orthogonalisation par le procédé d'orthogonalisation de Gram-smith pour assurer l'indépendance des solutions obtenues. Pour se faire, on introduit les coordonnées paramétriques.

1) Représentation paramétrique

Dans la méthode des éléments finis les coordonnées paramétriques sont utilisées pour décrire la géométrie des éléments.
Le vecteur position $\xrightarrow[n]{}$ peut être généralement décrit en fonction de trois paramètres ζ, η, ξ tels que

$$x =< N(\zeta,\eta,\xi) >)\{x_n\} \quad \text{avec} \quad < x_n >=< x_1; x_2 ... x_n >$$

$$y =< N(\zeta,\eta,\xi) >)\{y_n\} \quad \text{idem pour} \quad < y_n > \text{et} < z_n >$$

$$z =< N(\zeta,\eta,\xi) >)\{z_n\} < z_n > \quad \text{et} \quad < N >=< N_1, N_2, ... N_n >$$

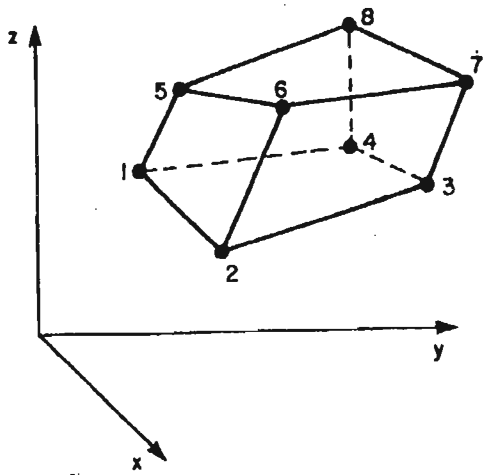
x_i, y_i, z_i, coordonnées du nœud i
N_i : fonction de forme du nœud i
Les fonctions d'interpolations $< N(\zeta,\eta,\xi)$ doivent assurer la continuité de la géométrie pour garantir $V = \sum_e Ve$
L'élément de volume au point p est défini par

$$dv = \det(J) d\zeta \, d\eta \, d\xi$$

Avec $[J]$ la matrice Jacobienne de la transformation supposé continue.

2. **Exemple d'élément à 3 D**

On prend comme élément de référence l'élément de type lagrange complet (voir figure 2.a et 2.b)



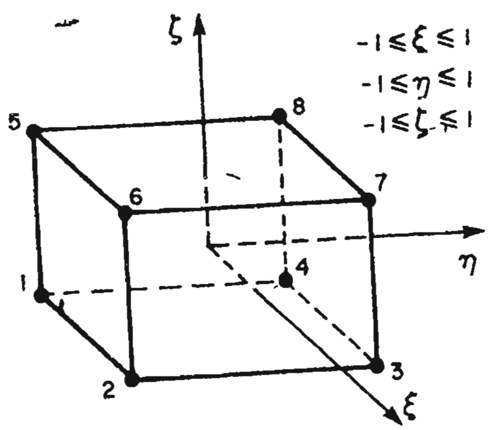


figure 2.a : élément réel figure 2.b : élément référence

Les fonctions d'interpolation sont :

$$< N_i > = \frac{1}{8}(1+\zeta\,\xi_i)\,(1+\eta\eta_i)(1+\xi\xi_i)$$

$$\Rightarrow i = 1 \cdots 8 \quad où\ \eta_i, \zeta_i, \xi_i = \pm 1$$

avec ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées du nœud i dans le nouveau repère

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Nœud i	1	2	3	4	5	6	7	8
ζi	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
ξi	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
ηi	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

Tableau des coordonnées des noeuds du cube de référence

3 - Orthogonalisation par Gram-smith

a) Formes symboliques

soients {U},{V},{W} les vecteurs de fonctions de déplacements construits précédemment :

$$\{U\} = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$$
$$\{V\} = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$$
$$\{W\} = \{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6$$
$$Soit\,[\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6]$$

un système de fonctions orthogonales, on construit les ϕ_i à partir des U_i de sorte que

$$\int_{\varphi} \phi_i \phi_j d\Omega = 0 \quad si \quad i \neq j$$

$$\phi_1 = U_1$$

$$\phi_i = U_i + \sum_{j<i} aij\phi_i$$

$$avec \quad \text{aij} = -\frac{\int_{\Omega} \phi_j U_i d\Omega}{\int_{\Omega} \phi_j^2 d\Omega}$$

pour rendre ce système orthonormale on divise ϕ_i par la norme de ϕ_i

$$\psi_i = \frac{\phi_i}{\left[\int_{\Omega} \phi_i^2\right]^{1/2}}$$

Idem pour {V} et {W}

Les intégrales triples seront appliquées à des éléments 3-D du fait que notre élément est représenté dans un espace global 3-D.

Alors que les bornes d'intégrations sont simples, l'intégration du vecteur de transformation orthogonale défie notre logiciel à cause du nombre de terme qu'elle contient et nous devons faire recours à l'intégration numérique si possible.

On peut trouver les détails sur la technique d'intégration numérique dans Dhatt et Touzot (1984) et dans tous les ouvrages standard d'analyse numérique.[3]

Dans notre programme nous appliquons la très populaire méthode d'intégration de Gauss-Légendre.

b) Intégration numérique sur l'élément de référence

Les intégrales seront calculées dans le système des coordonnées locales. Dans ce système, non seulement les arrêts ou les faces des éléments sont parallèles aux lignes des coordonnées ou surfaces des coordonnées locales, mais encore les bornes d'intégrations sont simplement (-1 et +1)

L'intégrale sur le volume de l'élément réel est remplacée par l'intégrale de volume sur l'élément de référence,

$$\int_{ve} f(x,y,\tau)\,dv = \int_{vr} f(\zeta,\eta,\xi)\det[J]d\Omega \qquad (d\Omega = d\zeta\, d\eta\, d\xi)$$

les termes de $\phi_j * U_i * \det[J]$ sont des polynômes. Sur l'élément de référence cubique, les intégrales explicites des monômes sont données par :

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \zeta^i \eta^j \xi^k d\zeta\, d\eta\, d\xi = \begin{cases} 0 \text{ si j ou i ou k est pair} \\ \dfrac{8}{(i+1)(j+1)(k+1)} & si \text{ i et j et k sont pairs} \end{cases}$$

b-1.Intégrale numérique à une dimension (Méthode de Gauss – Legendre)

La méthode de **Gauss - Legendre** est une méthode d'intégrale numérique très utilisée dans laquelle les coefficients w_i et les abscisses ξ_i sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre $m \leq 2r-1$.

On remplace l'intégrale d'une fonction polynôme $y(\xi)$ par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration ξ_i

$$\int_{-1}^{1} y(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{r} w_i y(\xi) \qquad (i)$$

et les 2 r coefficient sont déterminés par les équations suivantes

$$\int_{-1}^{1} \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^{r} W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 0,2,4...,2r-2$$

$$(ii)$$

$$\int_{-1}^{1} \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^{r} W_i \xi_i^\alpha \qquad \alpha = 1,3,5;;2r-1$$

ce système de 2r équations est linéaire en W_i et non linéaire en ξ_i ; il détermine les 2r paramètres de (i) sous les conditions

$$W_i > 0 \quad \begin{cases} i = 1,2..,r \\ \end{cases}$$
$$-1 < \zeta_i < 1$$

les abscisses ξ_i,solutions de (ii) sont aussi les racines du polynôme de Legendre d'ordre α Pr (ζ)=0

les P_i sont définies par la formule de récurrence

$$p_0(\xi) = 1$$
$$p_1(\xi) = \zeta$$
$$p_k(\zeta) = \frac{2k-1}{k}\xi\, P_{k-1}(\zeta) - \frac{k-1}{k}P_{k-2}(\zeta); K = 2,3..,r$$
$$les\ po\text{int} s\ W_i \text{ s'écrivent } W_i = \frac{2(1-\zeta_i^2)}{[rp_{r-1}(\zeta_i)]^2}; i = 1,2,..,r$$

L'erreur d'intégrale est de la forme

$$e = \frac{2^{2r+1}(r!)^u}{(2r+1)[(2r)!]^3}\frac{d^{2r}y}{d\zeta^{2r}}$$

b-2.Intégrations numériques à trois dimensions

(Méthode « produit »)

Elles consistent à utiliser dans chaque direction ζ, η, ξ une intégration numérique à une dimension. Si nous utilisons $r_1$points dans le sens ζ ,r_2 points dans le sens η et r_3 points dans le sens ξ, la méthode de Gauss intègre exactement le produit d'un polynôme en ξ d'ordre $2r_1-1$, d'un polynôme en η d'ordre $2r_2-1$ et d'un polynôme en ξ d'ordre $2r_3-1$.

La méthode « produit » utilise $r = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ points ; elle intègre tous les monômes

$\zeta^i \eta^j \xi^k$ tels que $0 \le i \le 2r_1-1$

$0 \le j \le 2r_2-1$

$0 \le k \le 2r_3-1$

Elle s'écrit :

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y(\zeta\ \eta\ \xi)\,d\zeta\ d\eta\ d\xi = \sum_{i=1}^{r1}\sum_{j=1}^{r2}\sum_{k=1}^{r3} W_i W_j W_k\, y(\zeta_i,\eta_j,\xi_k)$$

où : $W_i\ W_j\ W_k$ sont les coefficient de l'intégration numérique à 1 dimension et ζ_i, η, ξ_k les coordonnées des points d'intégration correspondants .

b-3.Algorithme d'intégration numérique

$$I = \sum_{e=1}^{IPg} We y(\zeta\ \mathrm{e})$$

$$w_l = w_i w_j w_k\ ,\quad IPG = r_1 . r_2 . r_3$$

ou, ζ_l représente les coordonnées du i-iéme point d'intégration correspondant à w_l,
w_l est le poids correspondant au point d'intégration numéro l
IPG est le nombre total de points d'intégration.

Intégrale = 0
Pour l = 1 à IPG
Intégrale = intégrale + w_l . y (ζ_l)

Pour les éléments de référence cubique ,les méthodes « produit » sont les plus souvent utilisées , mais étant donné qu'on veut une méthode qui utilise moins de points ;nous avons finalement choisi les méthodes directes .

$$\int\int\int_{rr-} y(\zeta\ \eta\ \xi)\,d\zeta\ d\eta\ d\xi = \sum_{i=1}^{r} W_i\ y(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)$$

cette méthode intégrale exactement des monômes ζ^i, η^j, ξ^k tels que
$i + j + k \leq m$
pour le programme voir annexe C.

3. **Présentation des programmes d'orthogonalisation**

Les programmes d'orthogonalisation sont au nombre de deux . L'un est établi à partir de l'intégration symbolique et l'autre avec l'intégration numérique . Que ce soit l'intégration symbolique ou numérique , nous avons eu des problèmes de disponibilité de mémoire pour MAPLE V ; ce qui nous a conduit à des simplifications en faisant coïncider les repère (x,y,z) et (ζ,η,ξ) autrement dit on applique la transformation identité . Et de plus nous avons considéré le cas de l'acier en donnant au coefficient de poisson ν la valeur 0.3 et au module d'élasticité E la valeur 200.000 .Le listing des programmes est présentés à l'annexe C et il s'agit de orth nu qui fait l'Orthogonalisation en utilisant l'intégration numérique dans le cas générale et orth-sid qui est une simplification de orth nu appliquer à l'acier . Nous avons les mêmes rapport entre orth-sy et orth-sid ,et avec ces derniers les intégrales sont calculés directement en symbolique .

En principe ces programmes doivent nous permettre d'avoir des fonctions linéairement indépendantes et deux à deux orthogonaux en fonction des coordonnées paramétriques ζ , η , ξ .

[illegible] Y = module d'élasticité = 200 000 [illegible]

[illegible]

[illegible] $Y = 2 \times 10^{11}\ N/m^2$

[illegible] Y [illegible]

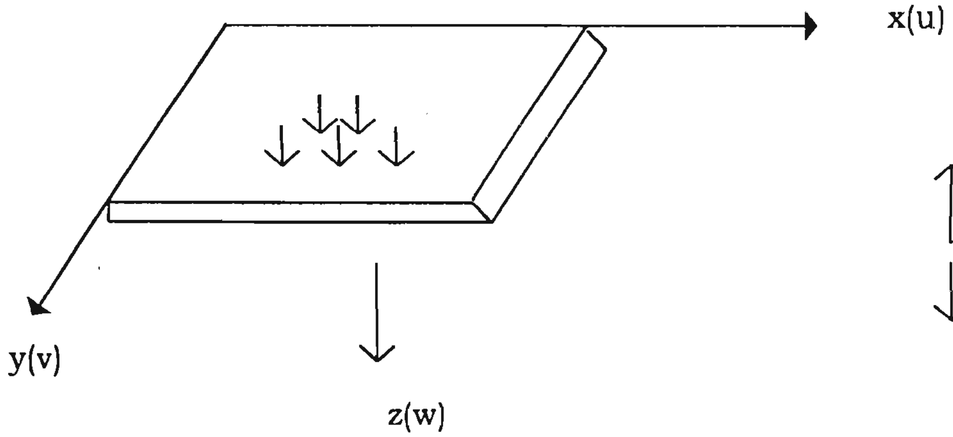
chapitre IV **Modélisation hiérarchique :**

Fonctions pour les dalles épaisses

Dans cette partie nous appliquerons les techniques de la modélisation hiérarchique . A partir des fonctions que nous avons obtenues avec la modélisation en trois dimension (3D) , on impose les conditions ad hoc pour une dalle épaisse .

1. **Les conditions ad hoc**

soit une plaque d'épaisseur 2d soumis à une charge uniformément répartie représentée sur la figure 3a et 3.b:



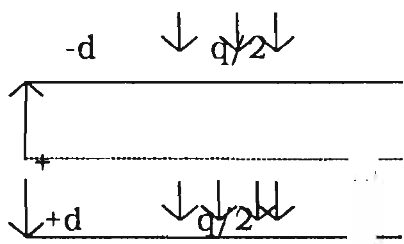


figure 3.a :plaque chargée *figure 3.b* : section dans le plan z.x

a) **conditions sur les contraintes**

Nous avons 6 conditions sur les contraintes : on a

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{ZZ}(x,y,z=d)=\frac{1}{2}q \\ \sigma_{ZZ}(x,y,z=-d)=\frac{1}{2}q \\ \tau_{ZX}(x,y,d)=o \\ \tau_{ZX}(x,y,-d)=o \\ \tau_{ZY}(x,y,d)=o \\ \tau_{ZY}(x,y,-d)=o \end{array}\right. \quad \text{6 équations}$$

b) **conditions cinématiques**

Nous avons trois conditions sur les déplacements et illustrer sur la figure.4 ci-contre .

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,y,z)=-u(x,y,-z) \\ v(x,y,z)=-v(x,y,-z) \\ w(x,y,z)=w(x,y,-z) \end{array}\right. \quad \text{3 équations}$$

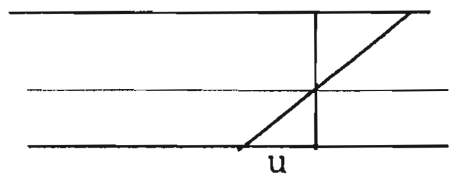


figure .4 plan zx

Donc au total nous avons 9 équations

2. La condensation des fonctions

Ici il s'agit d'établir les fonctions pour le cas des dalles . Nous avions retenu 18 fonctions et avec les 9 équations nous allons établir les relations entre les constantes . Il faut dire que nous avons 12 constantes soient :

a_i , b_i , c_i ; i = 1...6

$$u=\sum_{i=1}^{6}a_i u_i \quad ; \quad v=\sum_{i=1}^{6}b_i v_i \quad ; \quad w=\sum_{i=1}^{6}c_i w_i$$

$$\sigma_{ZZ}=\frac{\partial w}{\partial Z}=\sum_{i=1}^{6}c_i\frac{\partial w_i}{\partial Z}$$

$$\sigma_{ZX}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial X}+\frac{\partial u}{\partial Z}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\left(c_i\frac{\partial w_i}{\partial X}+a_i\frac{\partial u_i}{\partial Z}\right)$$

$$\sigma_{ZY}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial Y}+\frac{\partial v}{\partial Z}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\left(c_i\frac{\partial w_i}{\partial Y}+b_i\frac{\partial v_i}{\partial Z}\right)$$

Tous les calculs ont été effectués avec maple v (voir annexeD) et on voit que la neuvième condition s'est dégénérée ;il reste huit équations.

Avec ces équations on ne peut pas trouver de relations intéressantes sans au moins une condition limite .

Conclusion

Le but des travaux présentés dans ce rapport est de générer des fonctions, à partir des équations du modèle, pour une formulation basée sur la méthode de TREFFTZ. Le domaine à l'étude est tridimensionnel et peut être ramené à deux dimensions.

Des fonctions ont été générées de manière automatique et leur indépendance linéaire a été assurée, mais on ne peut pas garantir unicité de la solution.

Les programmes fonctionnent assez bien mais ils présentent des limites quand il s'agit de traiter des problèmes dans le cas général. Ces limites sont pour la plus part liée à la version pédagogique du logiciel qui a des capacités un peu limités surtout quand on ne fait que des calculs symboliques ; c'est pourquoi nous recommandons à ceux qui voudrons continuer le projet de travailler avec la version professionnelle ou d'autres logiciels de sa génération comme MATHEMATICA , MATLAB etc. ...

Nous avons aussi d'autres problèmes relatifs à la précision des résultats numériques .

Pour les résultats obtenus en dimension trois , nous manquons d'éléments de comparaison pour apprécier nos solutions .

Par contre en dimension deux, nous disposons de beaucoup d'éléments d'appréciation , mais la forme inexplicite des relations que nous avons obtenues à partir des conditions ad hoc , ne nous permet pas de nous prononcer .

Bibliographie

[1] : R . Dautray - J . L .Lions , Analyse mathématique et calcul numérique (tome 1 et 2)

[2] : R . H . Gallagher , Introduction à la méthode des élément finis , édition pluralis 1976

[3] : J . L . Batoz et G . Dhatt , Modélisation des structures par éléments finis (volume 1 et 3) édition Hermer 1990

[4] : Gouri Dhatt et Gilbert Touzat , Une présentation de la méthode des éléments finis , maloine s.A édition 1981

[5] : Moustapha N'Diaye , Modélisation par éléments finis des dalles champignons par la méthode Trefftz , thèse n° 966 (1991) Lausanne , EPFL 1992

[6] : Hassen el Bouzid , Méthodes d'éléments finis raffinés pour quelques problèmes aux limites dans des domaines non-réguliers , Thèse de doctorat.

Annexes :

Listing des programmes et des résultats

Annexe A

Programme « Test » de génération et de vérification des solutions.

```
>
>
> # considérons les parties réelles des fonctions génériques Fn
>
> with(linalg):
> s := vector (6) :
> s[1] := I*x+cos(t)*y+sin(t)*z :
> s[2] := I*x+sin(t)*y+cos(t)*z :
> s[3] := cos(t)*x+I*y+sin(t)*z :
> s[4] := sin(t)*x+I*y+cos(t)*z :
> s[5] := cos(t)*x+sin(t)*y+I*z :
> s[6] := sin(t)*x+cos(t)*y+I*z :
> n := 4;
> tet := vector(6):
> k := vector(6):
> zz := vector(6):
> for i from 1 to 6
>   do
>   tet[i] := factor(s[i]^(n-1)):
>   k[i] := factor(s[i]^n) :
>   if i = 1 or i = 3 or i = 5
>   then
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((conjugate(s[i])*tet[i] + s[i]*conjugate(tet[i]))/2))
> ):
>   else
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((k[i]+conjugate(k[i]))/2))):
>   fi :
>   zz[i];
>   od:
> lambda := el*nu/(1+nu)/(1-2*nu):
> G := el/(1+nu)/2:
> vv := [ x , y , z ]:
> u := vector(6):
> v := vector(6):
> w := vector(6):
> for ifc to 6
>  do
>   f := [ zz[ifc] , zz[ifc] , zz[ifc] ]:
>   dg := grad(diverge(f,vv),vv):
>   u[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[1],vv),vv)-dg[1])/G):
>   v[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[2],vv),vv)-dg[2])/G):
>   w[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[3],vv),vv)-dg[3])/G):
>   ee := diff( u[ifc] , x ) + diff( v[ifc] , y ) + diff( w[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x) + G*diverge(grad(u[ifc],vv),vv))
> );
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y) + G*diverge(grad(v[ifc],vv),vv))
> );
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z) + G*diverge(grad(w[ifc],vv),vv)
```

```
> ));
>  od:
  Warning: new definition for   norm
  Warning: new definition for   trace
```

$$n := 4$$

```
> # utilisation de la moyenne intégrale pour éliminer (t )
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for ifc from 1 to 6
>   do
>    ut[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>    vt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>       wt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[if
> c]/(2*pi)),  t = -pi..pi))));
>    ee := diff( ut[ifc] , x ) + diff( vt[ifc] , y ) + diff( wt[ifc] , z ):
>    e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[ifc],vv),vv
> ));
>    e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[ifc],vv),vv
> ));
>    e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[ifc],vv),vv
> ));
>  od;
```

$$ut_1 := 24\,\frac{(1+\nu)\left(2\,\nu\,x^2 - \nu\,z^2 - y^2\,\nu + y^2 - x^2 + z^2\right)}{el}$$

$$vt_1 := 3\,\frac{(1+\nu)\left(16\,\nu\,x^2 - 8\,\nu\,z^2 - 8\,y^2\,\nu - 16\,x^2 + 7\,z^2 - 2\,y\,z + 5\,y^2\right)}{el}$$

$$wt_1 := 3\,\frac{(1+\nu)\left(16\,\nu\,x^2 - 8\,\nu\,z^2 - 8\,y^2\,\nu - 16\,x^2 + 5\,z^2 + 7\,y^2 - 2\,y\,z\right)}{el}$$

$$ee := 24\,\frac{(1+\nu)\,(4\,\nu\,x - 2\,x)}{el} + 3\,\frac{(1+\nu)\,(-16\,y\,\nu - 2\,z + 10\,y)}{el}$$
$$+\,3\,\frac{(1+\nu)\,(-16\,\nu\,z + 10\,z - 2\,y)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_2 := -12\,\frac{(1+\nu)\left(-y^2 - 2\,\nu\,x + 2\,x^2 - 2\,x\,z - z^2\right)}{el}$$

$$vt_2 := 3\,\frac{(1+\nu)\left(-2\,y\,z + 4\,x^2 + 8\,y\,x - 3\,y^2 - z^2\right)}{el}$$

$$wt_2 := 3\,\frac{(1+\nu)\left(8\,x\,z-3\,z^2-2\,y\,z+4\,x^2-y^2\right)}{el}$$

$$ee := -12\,\frac{(1+\nu)(-2\,y+4\,x-2\,z)}{el}+3\,\frac{(1+\nu)(-2\,z+8\,x-6\,y)}{el}$$
$$+3\,\frac{(1+\nu)(8\,x-6\,z-2\,y)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_3 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(8\,\nu\,x^2+8\,\nu\,z^2-16\,y^2\,\nu-7\,z^2+16\,y^2+2\,x\,z-5\,x^2\right)}{el}$$

$$vt_3 := -24\,\frac{(1+\nu)\left(\nu\,x^2+\nu\,z^2-2\,y^2\,\nu-x^2-z^2+y^2\right)}{el}$$

$$wt_3 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(8\,\nu\,x^2+8\,\nu\,z^2-16\,y^2\,\nu-5\,z^2+16\,y^2+2\,x\,z-7\,x^2\right)}{el}$$

$$ee := -3\,\frac{(1+\nu)(16\,\nu\,x+2\,z-10\,x)}{el}-24\,\frac{(1+\nu)(-4\,y\,\nu+2\,y)}{el}$$
$$-3\,\frac{(1+\nu)(16\,z\,\nu-10\,z+2\,x)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_4 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(-8\,y\,x+2\,x\,z-4\,y^2+3\,x^2+z^2\right)}{el}$$

$$vt_4 := 12\,\frac{(1+\nu)\left(2\,y\,z+x^2+2\,y\,x-2\,y^2+z^2\right)}{el}$$

$$wt_4 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(2\,x\,z-8\,y\,z+3\,z^2-4\,y^2+x^2\right)}{el}$$

$$ee :=$$
$$-3\,\frac{(1+\nu)(-8\,y+2\,z+6\,x)}{el}+12\,\frac{(1+\nu)(2\,z+2\,x-4\,y)}{el}-3\,\frac{(1+\nu)(2\,x-8\,y+6\,z)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_5 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(8\,\nu\,x^2-16\,\nu\,z^2+8\,y^2\,\nu-7\,y^2+2\,y\,x+16\,z^2-5\,x^2\right)}{el}$$

$$vt_5 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(8\,\nu\,x^2 - 16\,\nu\,z^2 + 8\,y^2\,\nu - 5\,y^2 + 2\,y\,x - 7\,x^2 + 16\,z^2\right)}{el}$$

$$wt_5 := -24\,\frac{(1+\nu)\left(\nu\,x^2 - 2\,\nu\,z^2 + y^2\,\nu - x^2 + z^2 - y^2\right)}{el}$$

$$ee := -3\,\frac{(1+\nu)(16\,\nu\,x + 2\,y - 10\,x)}{el} - 3\,\frac{(1+\nu)(16\,y\,\nu - 10\,y + 2\,x)}{el}$$
$$- 24\,\frac{(1+\nu)(-4\,\nu\,z + 2\,z)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_6 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(-4\,z^2 - 8\,x\,z + 3\,x^2 + 2\,y\,x + y^2\right)}{el}$$

$$vt_6 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(-8\,y\,z + x^2 + 2\,y\,x + 3\,y^2 - 4\,z^2\right)}{el}$$

$$wt_6 := 12\,\frac{(1+\nu)\left(2\,y\,z + x^2 + 2\,x\,z + y^2 - 2\,z^2\right)}{el}$$

$$ee := -3\,\frac{(1+\nu)(-8\,z + 6\,x + 2\,y)}{el} - 3\,\frac{(1+\nu)(-8\,z + 2\,x + 6\,y)}{el}$$
$$+ 12\,\frac{(1+\nu)(2\,y + 2\,x - 4\,z)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

```
> # multiplication par (t) pour éliminer la variable (t)
>
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for ifc from 1 to 6
>   do
>    ut[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[ifc]*t
> ),  t = -pi..pi))));
>    vt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[ifc]*t)
> ,  t = -pi..pi))));
>    wt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[ifc]*
> t),  t = -pi..pi))));
>    ee := diff( ut[ifc] , x ) + diff( vt[ifc] , y ) + diff( wt[ifc] , z ):
>    e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[ifc],vv),vv
> ));
>    e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[ifc],vv),vv
```

```
> ));
>    e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[ifc],vv),vv
> ));
>  od;
```

$$ut_1 := 48\,\frac{y\,z\,(\nu-1)\,(1+\nu)\,\pi}{el}$$

$$vt_1 := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,y\,z\,\nu - 22\,y\,z + 3\,z^2 + 5\,y^2\right)}{el}$$

$$wt_1 := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,y\,z\,\nu + 5\,y^2 - 26\,y\,z + 3\,z^2\right)}{el}$$

$$ee := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,z\,\nu - 22\,z + 10\,y)}{el} + \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,y\,\nu - 26\,y + 6\,z)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_2 := -24\,\frac{(1+\nu)\,(y\,z + x\,z + y\,x)\,\pi}{el}$$

$$vt_2 := -\frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(16\,x\,z - 3\,y^2 - 6\,y\,z - 5\,z^2 + 8\,x^2\right)}{el}$$

$$wt_2 := -\frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(16\,y\,x - 10\,y\,z + 8\,x^2 - 3\,y^2 - 5\,z^2\right)}{el}$$

$$ee := -24\,\frac{(1+\nu)\,(z+y)\,\pi}{el} - \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(-6\,y - 6\,z)}{el} - \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(-10\,y - 10\,z)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_3 := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,x\,z\,\nu + 3\,z^2 - 22\,x\,z + 5\,x^2\right)}{el}$$

$$vt_3 := 48\,\frac{x\,z\,(\nu-1)\,(1+\nu)\,\pi}{el}$$

$$wt_3 := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,x\,z\,\nu - 26\,x\,z + 3\,z^2 + 5\,x^2\right)}{el}$$

$$ee := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,z\,\nu - 22\,z + 10\,x)}{el} + \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,x\,\nu - 26\,x + 6\,z)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_4 := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\left(-16\,y\,z + 3\,x^2 + 6\,x\,z + 5\,z^2 - 8\,y^2\right)}{el}$$

$$vt_4 := -24\,\frac{(1+\nu)\,(y\,z + x\,z + y\,x)\,\pi}{el}$$

$$wt_4 := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\left(-8\,y^2 + 3\,x^2 - 16\,y\,x + 5\,z^2 + 10\,x\,z\right)}{el}$$

$$ee := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(6\,x + 6\,z)}{el} - 24\,\frac{(1+\nu)\,(z+x)\,\pi}{el} + \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(10\,z + 10\,x)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_5 := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,y\,x\,\nu + 3\,y^2 + 5\,x^2 - 22\,y\,x\right)}{el}$$

$$vt_5 := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,y\,x\,\nu - 26\,y\,x + 3\,y^2 + 5\,x^2\right)}{el}$$

$$wt_5 := 48\,\frac{y\,x\,(\nu - 1)\,(1+\nu)\,\pi}{el}$$

$$ee := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,y\,\nu + 10\,x - 22\,y)}{el} + \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,x\,\nu - 26\,x + 6\,y)}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_6 := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\left(3\,x^2 + 6\,y\,x - 8\,z^2 + 5\,y^2 - 16\,y\,z\right)}{el}$$

$$vt_6 := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\left(3\,x^2 - 16\,x\,z + 5\,y^2 - 8\,z^2 + 10\,y\,x\right)}{el}$$

$$wt_6 := -24\,\frac{(1+\nu)\,(y\,z + x\,z + y\,x)\,\pi}{el}$$

$$ee := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(6\,x + 6\,y)}{el} + \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(10\,y + 10\,x)}{el} - 24\,\frac{(1+\nu)\,(y+x)\,\pi}{el}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

```
> # multiplication par (cost+sint) pour éliminer la variable (t)
>
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
```

```
> for ifc from 1 to 6
>   do
>         ut[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[if
> c]*(cos(t)+sin(t))),  t = -pi..pi))
> ));
>         vt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[if
> c]*(cos(t)+sin(t))),  t = -pi..pi)))
> );
>      wt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[if
> c]*(cos(t)+sin(t))),  t = -pi..pi)
> )));
>   ee := diff( ut[ifc] , x ) + diff( vt[ifc] , y ) + diff( wt[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[ifc],vv),vv
> ));
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[ifc],vv),vv
> ));
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[ifc],vv),vv
> ));
>  od;
>
>
```

$$ut_1 := 0$$

$$vt_1 := 0$$

$$wt_1 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_2 := 0$$

$$vt_2 := 0$$

$$wt_2 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_3 := 0$$

$$vt_3 := 0$$

$$wt_3 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_4 := 0$$

$$vt_4 := 0$$

$$wt_4 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_5 := 0$$

$$vt_5 := 0$$

$$wt_5 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_6 := 0$$

$$vt_6 := 0$$

$$wt_6 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

```
> # Ici on prend les parties imaginaires des Fn
>
> n := 5;
> tet := vector(6):
> k := vector(6):
> zz := vector(6):
> for i from 1 to 6
>   do
```

```
>  tet[i] := factor(s[i]^(n-1)):
>  k[i] := factor(s[i]^n) :
>  if i = 1 or i = 3 or i = 5
>  then
>  zz[i] := evalc(simplify(expand((conjugate(s[i])*tet[i] - s[i]*conjugate(tet[i]))/(2*I
> )))):
>  else
>  zz[i] := evalc(simplify(expand((k[i]-conjugate(k[i]))/(2*I)))):
>  fi :
>  zz[i];
>  od:
> lambda := e*nu/(1+nu)/(1-2*nu):
> G := e/(1+nu)/2:
> vv := [ x , y , z ]:
> u := vector(6):
> v := vector(6):
> w := vector(6):
> for i from 1 to 6
>   do
>   f := [ zz[i] , zz[i] , zz[i] ]:
>   div(f) := expand(diff(f[1],x)+diff(f[2],y)+diff(f[3],z)):
>   dg := grad(div(f),vv):
>   u[i] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[1],vv),vv)-dg[1])/G):
>   v[i] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[2],vv),vv)-dg[2])/G):
>   w[i] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[3],vv),vv)-dg[3])/G):
>   ee := diff( u[i] , x ) + diff( v[i] , y ) + diff( w[i] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x) + G*diverge(grad(u[i],vv),vv)));
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y) + G*diverge(grad(v[i],vv),vv)));
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z) + G*diverge(grad(w[i],vv),vv)));
>  od:
```

$$n := 5$$

```
> # utilisation de la moyenne intégrale pour éliminer (t )
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for i to 6
>   do
>   ut[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[i]/(2*pi
> )),  t = -pi..pi))));
>   vt[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[i]/(2*pi)
> ),  t = -pi..pi))));
>   wt[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[i]/(2*p
> i)),  t = -pi..pi))));
>   ee := diff( ut[i] , x ) + diff( vt[i] , y ) + diff( wt[i] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[i],vv),vv))
> ;
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[i],vv),vv));
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[i],vv),vv));
```

> od;

$$ut_1 := (1+\nu)\left(-9\,y\,z^2 + 84\,y^2\,x - 12\,x^2\,z - 12\,y\,x^2 - 96\,\nu\,x\,z^2 - 9\,y^3 + 64\,\nu\,x^3 - 96\,y^2\,x\,\nu + 84\,x\,z^2 - 9\,y^2\,z - 24\,x^3 - 9\,z^3\right)/e$$

$$vt_1 := (1+\nu)\left(64\,\nu\,x^3 - 96\,y^2\,x\,\nu - 96\,\nu\,x\,z^2 - 9\,y\,z^2 + 69\,y^2\,x - 9\,y^3 - 18\,y\,z\,x - 12\,y\,x^2 + 87\,x\,z^2 - 68\,x^3\right)/e$$

$$wt_1 := (1+\nu)\left(64\,\nu\,x^3 - 96\,y^2\,x\,\nu - 96\,\nu\,x\,z^2 - 68\,x^3 + 87\,y^2\,x - 9\,z^3 - 18\,y\,z\,x - 12\,x^2\,z + 69\,x\,z^2 - 9\,y^2\,z\right)/e$$

$$ee := \frac{(1+\nu)\left(84\,y^2 - 24\,x\,z - 24\,y\,x - 96\,\nu\,z^2 + 192\,\nu\,x^2 - 96\,y^2\,\nu + 84\,z^2 - 72\,x^2\right)}{e} + \frac{(1+\nu)\left(-192\,y\,x\,\nu - 9\,z^2 + 138\,y\,x - 27\,y^2 - 18\,x\,z - 12\,x^2\right)}{e} + \frac{(1+\nu)\left(-192\,x\,z\,\nu - 27\,z^2 - 18\,y\,x - 12\,x^2 + 138\,x\,z - 9\,y^2\right)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_2 := -5\,\frac{(1+\nu)\left(-12\,y^2\,x + 3\,y^2\,z + 8\,x^3 + 3\,z^3 + 3\,y\,z^2 - 12\,y\,x^2 + 3\,y^3 - 12\,x^2\,z - 12\,x\,z^2\right)}{e}$$

$$vt_2 := 5\,\frac{(1+\nu)\left(-3\,y^3 - 3\,x\,z^2 + 4\,x^3 + 12\,y\,x^2 - 3\,y\,z^2 - 9\,y^2\,x - 6\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$wt_2 := 5\,\frac{(1+\nu)\left(-6\,y\,z\,x - 3\,y^2\,x + 4\,x^3 + 12\,x^2\,z - 9\,x\,z^2 - 3\,y^2\,z - 3\,z^3\right)}{e}$$

$$ee := -5\,\frac{(1+\nu)\left(-12\,y^2 + 24\,x^2 - 24\,y\,x - 24\,x\,z - 12\,z^2\right)}{e} + 5\,\frac{(1+\nu)\left(-9\,y^2 + 12\,x^2 - 3\,z^2 - 18\,y\,x - 6\,x\,z\right)}{e} + 5\,\frac{(1+\nu)\left(-6\,y\,x + 12\,x^2 - 18\,x\,z - 3\,y^2 - 9\,z^2\right)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_3 := -(1+\nu)\left(96\,y\,x^2\,\nu + 96\,y\,z^2\,\nu - 64\,y^3\,\nu + 9\,x\,z^2 + 9\,x^3 - 69\,y\,x^2 - 87\,y\,z^2 + 12\,y^2\,x + 68\,y^3 + 18\,y\,z\,x\right)/e$$

$$vt_3 := -(1+\nu)\left(-84\,y\,z^2 + 12\,y^2\,x - 64\,y^3\,\nu + 9\,x^2\,z - 84\,y\,x^2 + 24\,y^3 + 96\,y\,z^2\,\nu + 96\,y\,x^2\,\nu + 9\,x\,z^2 + 12\,y^2\,z + 9\,x^3 + 9\,z^3\right)/e$$

$$wt_3 := -(1+\nu)\left(96\,y\,x^2\,\nu + 96\,y\,z^2\,\nu - 64\,y^3\,\nu + 12\,y^2\,z + 9\,z^3 + 18\,y\,z\,x - 69\,y\,z^2 + 68\,y^3 + 9\,x^2\,z - 87\,y\,x^2\right)/e$$

$$ee := -\frac{(1+\nu)\left(192\,y\,x\,\nu + 9\,z^2 + 27\,x^2 - 138\,y\,x + 12\,y^2 + 18\,y\,z\right)}{e} - \frac{(1+\nu)\left(-84\,z^2 + 24\,y\,x - 192\,y^2\,\nu - 84\,x^2 + 72\,y^2 + 96\,\nu\,z^2 + 96\,\nu\,x^2 + 24\,y\,z\right)}{e} - \frac{(1+\nu)\left(192\,z\,y\,\nu + 12\,y^2 + 27\,z^2 + 18\,y\,x - 138\,y\,z + 9\,x^2\right)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_4 := -5\,\frac{(1+\nu)\left(3\,y\,z^2 - 12\,y^2\,x + 3\,x\,z^2 + 9\,y\,x^2 - 4\,y^3 + 3\,x^3 + 6\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$vt_4 := -5\,\frac{(1+\nu)\left(3\,z^3 - 12\,y\,z^2 - 12\,y^2\,x + 3\,x^3 + 8\,y^3 + 3\,x^2\,z - 12\,y\,x^2 - 12\,y^2\,z + 3\,x\,z^2\right)}{e}$$

$$wt_4 := -5\,\frac{(1+\nu)\left(6\,y\,z\,x + 9\,y\,z^2 - 4\,y^3 + 3\,z^3 + 3\,x^2\,z + 3\,y\,x^2 - 12\,y^2\,z\right)}{e}$$

$$ee := -5\,\frac{(1+\nu)\left(-12\,y^2 + 3\,z^2 + 18\,y\,x + 9\,x^2 + 6\,y\,z\right)}{e} - 5\,\frac{(1+\nu)\left(-12\,z^2 - 24\,y\,x + 24\,y^2 - 12\,x^2 - 24\,y\,z\right)}{e} - 5\,\frac{(1+\nu)\left(6\,y\,x + 18\,y\,z + 9\,z^2 + 3\,x^2 - 12\,y^2\right)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_5 := -(1+\nu)\left(96\,x^2\,z\,\nu + 96\,y^2\,z\,\nu - 64\,z^3\,\nu + 12\,x\,z^2 + 9\,y^2\,x + 9\,x^3 - 69\,x^2\,z\right.$$

$$- 87 y^2 z + 18 y z x + 68 z^3\big)/e$$

$$vt_5 := -(1+\nu)\big(96 x^2 z \nu + 96 y^2 z \nu - 64 z^3 \nu - 87 x^2 z + 12 y z^2 + 9 y^3 + 68 z^3$$
$$+ 9 y x^2 - 69 y^2 z + 18 y z x\big)/e$$

$$wt_5 := -(1+\nu)\big(96 x^2 z \nu + 12 y z^2 + 9 y^2 x - 64 z^3 \nu - 84 x^2 z + 9 y x^2 + 9 y^3$$
$$+ 96 y^2 z \nu + 12 x z^2 - 84 y^2 z + 9 x^3 + 24 z^3\big)/e$$

$$ee := -\frac{(1+\nu)\big(192 x z \nu + 12 z^2 + 9 y^2 + 27 x^2 - 138 x z + 18 y z\big)}{e}$$
$$-\frac{(1+\nu)\big(192 y z \nu + 12 z^2 + 27 y^2 + 9 x^2 - 138 y z + 18 x z\big)}{e}$$
$$-\frac{(1+\nu)\big(96 \nu x^2 + 24 y z - 192 \nu z^2 - 84 x^2 + 96 y^2 \nu + 24 x z - 84 y^2 + 72 z^2\big)}{e}$$

$$e1 := 0$$
$$e2 := 0$$
$$e3 := 0$$

$$ut_6 := -5\,\frac{(1+\nu)\big(6 y z x + 3 y^2 x + 3 x^3 + 9 x^2 z - 12 x z^2 + 3 y^2 z - 4 z^3\big)}{e}$$

$$vt_6 := -5\,\frac{(1+\nu)\big(6 y z x - 12 y z^2 + 3 y^3 - 4 z^3 + 3 x^2 z + 3 y x^2 + 9 y^2 z\big)}{e}$$

$$wt_6 :=$$
$$-5\,\frac{(1+\nu)\big(8 z^3 - 12 y z^2 + 3 y^2 x + 3 x^3 + 3 y^3 - 12 x^2 z + 3 y x^2 - 12 y^2 z - 12 x z^2\big)}{e}$$

$$ee := -5\,\frac{(1+\nu)\big(6 y z + 3 y^2 + 9 x^2 + 18 x z - 12 z^2\big)}{e}$$
$$-5\,\frac{(1+\nu)\big(6 x z - 12 z^2 + 9 y^2 + 3 x^2 + 18 y z\big)}{e}$$
$$-5\,\frac{(1+\nu)\big(24 z^2 - 24 y z - 12 x^2 - 12 y^2 - 24 x z\big)}{e}$$

$$e1 := 0$$
$$e2 := 0$$
$$e3 := 0$$

```
> # multiplication par (t) pour éliminer la variable (t)
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for i to 6
```

```
>   do
>   ut[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[i]*t),  t
> = -pi..pi))));
>   vt[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[i]*t),  t
> = -pi..pi))));
>   wt[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[i]*t),  t
>  = -pi..pi))));
>   ee := diff( ut[i] , x ) + diff( vt[i] , y ) + diff( wt[i] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[i],vv),vv))
> ;
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[i],vv),vv));
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[i],vv),vv));
> od;
```

$$ut_1 := \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(9yz^2+8x^2z+8yx^2+5y^3+15y^2z+3z^3+128\nu yzx-112yzx\right)}{e}$$

$$vt_1 := \frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(45y^2x+24x^2z+27xz^2+45y^2z+8x^3+9z^3+384\nu yzx-294yzx\right)}{e}$$

$$wt_1 := \frac{1}{2}(1+\nu)\pi\left(27yz^2+45y^2x+24yx^2+15y^3+27xz^2+8x^3+384\nu yzx-330yzx\right)/e$$

$$ee := \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\pi(16xz+16yx+128\nu yz-112yz)}{e}+\frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\pi(90yx+90yz+384xz\nu-294xz)}{e}+\frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\pi(54yz+54xz+384yx\nu-330yx)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_2 := -\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(-15yz^2+24x^2z+24yx^2-3y^3-9y^2z-5z^3+48yzx\right)}{e}$$

$$vt_2 := -\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(-9y^2x+24x^2z-15xz^2-9y^2z+8x^3-5z^3-18yzx\right)}{e}$$

$$wt_2 := -\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(-15yz^2-9y^2x+24yx^2-3y^3-15xz^2+8x^3-30yzx\right)}{e}$$

$$ee := -\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi(48xz+48yx+48yz)}{e}-\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi(-18yx-18yz-18xz)}{e}$$

$$-\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi(-30\,y\,z-30\,x\,z-30\,y\,x)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_3 :=$$

$$\frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(27\,y\,z^2+45\,x^2\,z+45\,y\,x^2+8\,y^3+24\,y^2\,z+9\,z^3+384\,\nu\,y\,z\,x-294\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$vt_3 :=$$

$$\frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(8\,y^2\,x+15\,x^2\,z+9\,x\,z^2+8\,y^2\,z+5\,x^3+3\,z^3+128\,\nu\,y\,z\,x-112\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$wt_3 := \frac{1}{2}(1+\nu)\pi$$

$$\left(27\,y\,z^2+24\,y^2\,x+45\,y\,x^2+8\,y^3+27\,x\,z^2+15\,x^3+384\,\nu\,y\,z\,x-330\,y\,z\,x\right)/e$$

$$ee := \frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\pi(90\,x\,z+90\,y\,x+384\,\nu\,y\,z-294\,y\,z)}{e}$$

$$+\frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\pi(16\,y\,x+16\,y\,z+128\,x\,z\,\nu-112\,x\,z)}{e}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\pi(54\,y\,z+54\,x\,z+384\,y\,x\,\nu-330\,y\,x)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_4 := \frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(15\,y\,z^2+9\,x^2\,z+9\,y\,x^2-8\,y^3-24\,y^2\,z+5\,z^3+18\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$vt_4 := \frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(-24\,y^2\,x+9\,x^2\,z+15\,x\,z^2-24\,y^2\,z+3\,x^3+5\,z^3-48\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$wt_4 := \frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi\left(15\,y\,z^2-24\,y^2\,x+9\,y\,x^2-8\,y^3+15\,x\,z^2+3\,x^3+30\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$ee := \frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi(18\,x\,z+18\,y\,x+18\,y\,z)}{e}+\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi(-48\,y\,x-48\,y\,z-48\,x\,z)}{e}$$

$$+\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\pi(30\,y\,z+30\,x\,z+30\,y\,x)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_5 := \frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\left(24\,y\,z^2+45\,x^2\,z+45\,y\,x^2+9\,y^3+27\,y^2\,z+8\,z^3+384\,\nu\,y\,z\,x-294\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$vt_5 := \frac{1}{2}(1+\nu)\,\pi\left(27\,y^2\,x+45\,x^2\,z+24\,x\,z^2+27\,y^2\,z+15\,x^3+8\,z^3+384\,\nu\,y\,z\,x-330\,y\,z\,x\right)/e$$

$$wt_5 := \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\left(8\,y\,z^2+9\,y^2\,x+15\,y\,x^2+3\,y^3+8\,x\,z^2+5\,x^3+128\,\nu\,y\,z\,x-112\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$ee := \frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(90\,x\,z+90\,y\,x+384\,\nu\,y\,z-294\,y\,z)}{e}+\frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(54\,y\,x+54\,y\,z+384\,x\,z\,\nu-330\,x\,z)}{e}+\frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(16\,y\,z+16\,x\,z+128\,y\,x\,\nu-112\,y\,x)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_6 := \frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\left(-24\,y\,z^2+9\,x^2\,z+9\,y\,x^2+5\,y^3+15\,y^2\,z-8\,z^3+18\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$vt_6 := \frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\left(15\,y^2\,x+9\,x^2\,z-24\,x\,z^2+15\,y^2\,z+3\,x^3-8\,z^3+30\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$wt_6 := \frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\left(-24\,y\,z^2+15\,y^2\,x+9\,y\,x^2+5\,y^3-24\,x\,z^2+3\,x^3-48\,y\,z\,x\right)}{e}$$

$$ee := \frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(18\,x\,z+18\,y\,x+18\,y\,z)}{e}+\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(30\,y\,x+30\,y\,z+30\,x\,z)}{e}+\frac{5}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(-48\,y\,z-48\,x\,z-48\,y\,x)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

```
> # multiplication par (cost+sint) pour éliminer la variable (t)
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for i to 6
>    do
>    ut[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[i]*(cos
```

```
> (t)+sin(t))),  t = -pi..pi))));
>    vt[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[i]*(cos(
> t)+sin(t))),  t = -pi..pi))));
>    wt[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[i]*(co
> s(t)+sin(t))),  t = -pi..pi))));
>    ee := diff( ut[i] , x ) + diff( vt[i] , y ) + diff( wt[i] , z ):
>    e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[i],vv),vv))
> ;
>    e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[i],vv),vv));
>    e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[i],vv),vv));
>  od;
>
>
>
```

$$ut_1 := 0$$

$$vt_1 := 0$$

$$wt_1 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_2 := 0$$

$$vt_2 := 0$$

$$wt_2 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ut_3 := 0$$

$$vt_3 := 0$$

$$wt_3 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

Annexe B

Programme « Verif » de vérification des expressions symboliques.

```
>
>
> with(linalg):
> s := vector (6) :
> s[1] := I*x + cos(t)*y + sin(t)*z :
> s[2] := I*x+sin(t)*y+cos(t)*z :
> s[3] := cos(t)*x+I*y+sin(t)*z :
> s[4] := sin(t)*x+I*y+cos(t)*z :
> s[5] := cos(t)*x+sin(t)*y+I*z :
> s[6] := sin(t)*x+cos(t)*y+I*z :
> #Considerons les parties réelles avec des nombres pairs;
> n := 4;
> k1 := vector(6):k2 := vector(6):k3 := vector(6):k := vector(6):zz := vector(6):
> a := vector(6): b := vector(6): c := vector(6):abar := vector(6):bbar := vector(6):
> cbar := vector(6):phi := vector(6):gradpsi1 := vector(6):
> gradpsi2 := vector(6):
> gradpsi3 := vector(6):alpha := vector(6):alpha1:= vector(6):alpha2 := vector(6):
> alpha3 := vector(6):beta1 := vector(6):beta2 := vector(6):beta3 := vector(6):
> gama1 := vector(6):gama2 := vector(6):gama3 := vector(6):
> for i from 1 to 6
> do
> k1[i] := factor(s[i]^(n-1)):
> k[i] := factor(s[i]^n) :
> k2[i] := factor(s[i]^(n-2)):
> k3[i] :=factor(s[i]^(n-3)):
> a[i] := diff(s[i],x):
> b[i] := diff(s[i],y):
> c[i] := diff(s[i],z):
> abar[i] := diff(evalc(expand(conjugate(s[i]))),x):
> bbar[i] := diff(evalc(expand(conjugate(s[i]))),y):
> cbar[i] := diff(evalc(expand(conjugate(s[i]))),z):
> alpha[i] := (a[i]*abar[i]+b[i]*bbar[i]+c[i]*cbar[i]):
> gama1[i] := (c[i]^2+c[i]*b[i]+a[i]*c[i]):
> gama2[i] := (2*c[i]*cbar[i]+c[i]*bbar[i]+b[i]*cbar[i]+a[i]*cbar[i]+c[i]*abar[i]):
> gama3[i] := (cbar[i]^2+cbar[i]*bbar[i]+abar[i]*cbar[i]):beta1[i] := (b[i]^2+a[i]*b[i
> ]+b[i]*c[i]):
> beta2[i] := (2*b[i]*bbar[i]+a[i]*bbar[i]+b[i]*abar[i]+b[i]*cbar[i]+c[i]*bbar[i]):
> beta3[i] := (bbar[i]^2+abar[i]*bbar[i]+bbar[i]*cbar[i]):
> alpha1[i] := (2*a[i]*abar[i]+a[i]*bbar[i]+b[i]*abar[i]+a[i]*cbar[i]+c[i]*abar[i]):
> alpha2[i] := (a[i]^2+a[i]*b[i]+a[i]*c[i]):
> alpha3[i] := (abar[i]^2+abar[i]*bbar[i]+abar[i]*cbar[i]):
> if i = 1 or i = 3 or i = 5
> then
> zz[i] := evalc(simplify(expand((conjugate(s[i])*k1[i] + s[i]*conjugate(k1[i]))/2)));
>
> phi[i] := alpha[i]*(n-1)*(2*(1-nu))*(evalc(simplify(expand(k2[i]+conjugate(k2[i])))
> )):
```

```
> gradpsi1[i] :=    evalc(simplify(expand((alpha2[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(s[i])*k3[
> i]+alpha1[i]*(n-1)*(k2[i]+
> conjugate(k2[i]))+alpha3[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(k3[i])*s[i])/2))):
> gradpsi2[i] :=       evalc(simplify(expand((beta1[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(s[i])*k3
> [i]+beta2[i]*(n-1)*(k2[i]+
> conjugate(k2[i]))+beta3[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(k3[i])*s[i])/2))):
> gradpsi3[i] :=     evalc(simplify(expand((gama1[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(s[i])*k3
> [i]+gama2[i]*(n-1)*(k2[i]+
> conjugate(k2[i]))+gama3[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(k3[i])*s[i])/2))):
> else
> zz[i] :=  evalc(simplify(expand((k[i]+conjugate(k[i]))/2)))
> ;
> phi[i] := 0:
> gradpsi1[i] := evalc(simplify(expand((alpha2[i]*n*(n-1)*k2[i]+ alpha3[i]*n*(n-1)*
> conjugate(k2[i]))/2))):
> gradpsi2[i] := evalc(simplify(expand((beta1[i]*n*(n-1)*k2[i]+   beta3[i]*n*(n-1)*c
> onjugate(k2[i]))/2))):
> gradpsi3[i] := evalc(simplify(expand((gama1[i]*n*(n-1)*k2[i]+   gama3[i]*n*(n-1)
> *conjugate(k2[i]))/2))):
> fi:
> zz[i];
> phi[i];
> gradpsi1[i] ;
> gradpsi2[i] ;
> gradpsi3[i] ;
> od:
> lambda := e*nu/(1+nu)/(1-2*nu):G := e/(1+nu)/2:
> vv := [x,y,z]:u := vector(6):v := vector(6):w := vector(6):
> for i to 6
>  do
> u[i] := normal(simplify(expand((phi[i]-gradpsi1[i])/G)));
> v[i] := normal(simplify(expand((phi[i]-gradpsi2[i])/G)));
> w[i] := normal(simplify(expand((phi[i]-gradpsi3[i])/G)));
> ee := diff( u[i] , x ) + diff( v[i] , y ) + diff( w[i] , z ):
> e1 := simplify((lambda + G )*diff(ee,x) + G*diverge(grad(u[i],vv),vv));
> e2 := simplify((lambda + G )*diff(ee,y) + G*diverge(grad(v[i],vv),vv));
> e3 := simplify((lambda + G )*diff(ee,z) + G*diverge(grad(w[i],vv),vv));
> od:
  Warning: new definition for   norm
  Warning: new definition for   trace
                                    n := 4

> #nous multiplions u par t ,pour passer à l'intégrale;
> ur := vector(6):
> vr := vector(6):
> wr := vector(6):
> for i from 1 to 6 do
> ur[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[i]*t),  t =
```

```
> -pi..pi))));
> vr[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[i]*t), t =
> -pi..pi))));
> wr[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[i]*t), t
> = -pi..pi))));
> ee := diff( ur[i] , x ) + diff( vr[i] , y ) + diff( wr[i] , z ):
> e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ur[i],vv),vv));
> e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vr[i],vv),vv));
> e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wr[i],vv),vv));
> od;
```

$$ur_1 := 48\,\frac{y\,z\,(\nu-1)\,(1+\nu)\,\pi}{e}$$

$$vr_1 := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,y\,z\,\nu+5\,y^2+3\,z^2-22\,y\,z\right)}{e}$$

$$wr_1 := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,y\,z\,\nu+5\,y^2+3\,z^2-26\,y\,z\right)}{e}$$

$$ee := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,\nu\,z+10\,y-22\,z)}{e}+\frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,y\,\nu+6\,z-26\,y)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ur_2 := -24\,\frac{\pi\,(1+\nu)\,(y\,x+y\,z+x\,z)}{e}$$

$$vr_2 := -\frac{3}{2}\,\frac{\pi\left(-3\,y^2+8\,x^2-6\,y\,z-5\,z^2+16\,x\,z\right)(1+\nu)}{e}$$

$$wr_2 := -\frac{3}{2}\,\frac{\pi\left(-10\,y\,z-3\,y^2+16\,y\,x+8\,x^2-5\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$ee := -24\,\frac{\pi\,(1+\nu)\,(y+z)}{e}-\frac{3}{2}\,\frac{\pi\,(-6\,y-6\,z)\,(1+\nu)}{e}-\frac{3}{2}\,\frac{\pi\,(-10\,y-10\,z)\,(1+\nu)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ur_3 := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,x\,z\,\nu+3\,z^2-22\,x\,z+5\,x^2\right)}{e}$$

$$vr_3 := 48\,\frac{x\,z\,(\nu-1)\,(1+\nu)\,\pi}{e}$$

$$wr_3 := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,x\,z\,\nu+3\,z^2-26\,x\,z+5\,x^2\right)}{e}$$

$$ee := \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,z\,\nu - 22\,z + 10\,x)}{e} + \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,x\,\nu + 6\,z - 26\,x)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ur_4 := \frac{3}{2}\frac{\pi\left(-16\,y\,z + 3\,x^2 + 6\,x\,z - 8\,y^2 + 5\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$vr_4 := -24\,\frac{\pi\,(1+\nu)\,(y\,x + y\,z + x\,z)}{e}$$

$$wr_4 := \frac{3}{2}\frac{\pi\left(10\,x\,z - 16\,y\,x + 3\,x^2 - 8\,y^2 + 5\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$ee := \frac{3}{2}\frac{\pi\,(6\,x + 6\,z)\,(1+\nu)}{e} - 24\,\frac{\pi\,(1+\nu)\,(x+z)}{e} + \frac{3}{2}\frac{\pi\,(10\,x + 10\,z)\,(1+\nu)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ur_5 := \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,y\,x\,\nu + 5\,x^2 - 22\,y\,x + 3\,y^2\right)}{e}$$

$$vr_5 := \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\left(32\,y\,x\,\nu + 5\,x^2 + 3\,y^2 - 26\,y\,x\right)}{e}$$

$$wr_5 := 48\,\frac{y\,x\,(\nu - 1)\,(1+\nu)\,\pi}{e}$$

$$ee := \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,y\,\nu + 10\,x - 22\,y)}{e} + \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\,(32\,x\,\nu + 6\,y - 26\,x)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ur_6 := \frac{3}{2}\frac{(1-\nu)\,\pi\left(6\,y\,x - 8\,z^2 + 3\,x^2 - 5\,y^2 - 16\,y\,z\right)}{e}$$

$$vr_6 := \frac{3}{2}\frac{(1+\nu)\,\pi\left(10\,y\,x + 3\,x^2 + 5\,y^2 - 8\,z^2 - 16\,x\,z\right)}{e}$$

$$wr_6 := -24\,\frac{\pi\,(1+\nu)\,(y\,x + y\,z - x\,z)}{e}$$

$$ee := \frac{3}{2}\frac{(1-\nu)\,\pi\,(6\,y - [illegible])}{e} + \frac{3}{2}\frac{[illegible]}{e} + 24\,\frac{\pi\,[illegible]}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

```
>
> # nous ne multiplions pas u par t ,pour l'intéger mais nous passons directeme
> nt à la moyenne;
>
> uur := vector(6):
> vvr := vector(6):
> wwr := vector(6):
> for i from 1 to 6 do
> uur[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[i]/(2*pi
> )), t = -pi..pi))));
> vvr[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[i]/(2*pi)
> ), t = -pi..pi))));
> wwr[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[i]/(2*p
> i)), t = -pi..pi))));
> ee := diff( uur[i] , x ) + diff( vvr[i] , y ) + diff( wwr[i] , z ):
> e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(uur[i],vv),vv));
> e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vvr[i],vv),vv));
> e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wwr[i],vv),vv));
> od;
```

$$uur_1 := 24\,\frac{(1+\nu)\left(-\nu z^2 - y^2\nu + 2\nu x^2 + y^2 + z^2 - x^2\right)}{e}$$

$$vvr_1 := 3\,\frac{(1+\nu)\left(-8\nu z^2 - 8y^2\nu + 16\nu x^2 - 2yz + 5y^2 + 7z^2 - 16x^2\right)}{e}$$

$$wwr_1 := 3\,\frac{(1+\nu)\left(-8\nu z^2 - 8y^2\nu + 16\nu x^2 - 2yz + 7y^2 - 5z^2 - 16x^2\right)}{e}$$

$$ee := 24\,\frac{(1+\nu)(4\nu x - 2x)}{e} + 3\,\frac{(1+\nu)(-16y\nu - 2z + 10y)}{e} + 3\,\frac{(1+\nu)(-16z\nu - 2y + 10z)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uur_2 := -12\,\frac{(1+\nu)\left(-y^2 - z^2 - 2xz - 2yx + 2x^2\right)}{e}$$

$$vvr_2 := 3\,\frac{(1+\nu)\left(-3y^2 - 2yz + 4x^2 - z^2 - 8yx\right)}{e}$$

$$wwr_2 := 3\,\frac{[illegible]}{e}$$

$$ee := -12\,\frac{(1+\nu)(-2z - 2y + 4x)}{e} + 3\,\frac{(1+\nu)(-6y - 2z + 8x)}{e}$$

$$+3\,\frac{(1+\nu)\,(-6\,z-2\,y+8\,x)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uur_3 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(8\,\nu\,z^2-16\,y^2\,\nu+8\,\nu\,x^2+16\,y^2-7\,z^2+2\,x\,z-5\,x^2\right)}{e}$$

$$vvr_3 := -24\,\frac{(1+\nu)\left(\nu\,z^2-2\,y^2\,\nu+\nu\,x^2+y^2-z^2-x^2\right)}{e}$$

$$wwr_3 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(8\,\nu\,z^2-16\,y^2\,\nu+8\,\nu\,x^2+2\,x\,z-7\,x^2+16\,y^2-5\,z^2\right)}{e}$$

$$ee := -3\,\frac{(1+\nu)\,(16\,\nu\,x+2\,z-10\,x)}{e}-24\,\frac{(1+\nu)\,(-4\,y\,\nu+2\,y)}{e}$$
$$-3\,\frac{(1+\nu)\,(16\,\nu\,z+2\,x-10\,z)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uur_4 := -3\,\frac{\left(2\,x\,z-8\,y\,x+3\,x^2-4\,y^2+z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$vvr_4 := 12\,\frac{\left(2\,y\,x+x^2-2\,y^2+2\,y\,z+z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$wwr_4 := -3\,\frac{\left(2\,x\,z+x^2-4\,y^2-8\,y\,z+3\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$ee :=$$
$$-3\,\frac{(2\,z-8\,y+6\,x)\,(1+\nu)}{e}+12\,\frac{(2\,x-4\,y+2\,z)\,(1+\nu)}{e}-3\,\frac{(2\,x-8\,y+6\,z)\,(1+\nu)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uur_5 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(-16\,\nu\,z^2+8\,y^2\,\nu+8\,\nu\,x^2-7\,y^2+16\,z^2+2\,y\,x-5\,x^2\right)}{e}$$

$$vvr_5 := -3\,\frac{(1+\nu)\left(-16\,\nu\,z^2+8\,y^2\,\nu+8\,\nu\,x^2-5\,y^2+16\,z^2+2\,y\,x-7\,x^2\right)}{e}$$

$$wwr_5 := -24\,\frac{(1+\nu)\left(-2\,\nu\,z^2+y^2\,\nu+\nu\,x^2-y^2+z^2-x^2\right)}{e}$$

$$ee := -3\,\frac{(1+\nu)\,(16\,\nu\,x+2\,y-10\,x)}{e} - 3\,\frac{(1+\nu)\,(16\,y\,\nu-10\,y+2\,x)}{e}$$
$$-\,24\,\frac{(1+\nu)\,(-4\,\nu\,z+2\,z)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uur_6 := -3\,\frac{\left(-8\,x\,z+2\,y\,x+3\,x^2+y^2-4\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$vvr_6 := -3\,\frac{\left(2\,y\,x+x^2+3\,y^2-8\,y\,z-4\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$wwr_6 := 12\,\frac{\left(2\,x\,z+x^2+y^2+2\,y\,z-2\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$ee := -3\,\frac{(-8\,z+2\,y+6\,x)\,(1+\nu)}{e} - 3\,\frac{(2\,x+6\,y-8\,z)\,(1+\nu)}{e}$$
$$+\,12\,\frac{(2\,x+2\,y-4\,z)\,(1+\nu)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

```
> # nous ne multiplions pas u par (cost+sint)
> uut := vector(6):
> vvt := vector(6):
> wwt := vector(6):
> for i from 1 to 6 do
> uut[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[i]*(cos(
> t)+sin(t))),  t = -pi..pi))));
> vvt[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[i]*(cos(
> t)+sin(t))),  t = -pi..pi))));
> wwt[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[i]*(co
> s(t)+sin(t))),  t = -pi..pi))));
> ee := diff( uut[i] , x ) + diff( vvt[i] , y ) + diff( wwt[i] , z ):
> e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(uut[i],vv),vv));
> e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vvt[i],vv),vv));
> e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wwt[i],vv),vv));
> od;
```

$$uut_1 := 0$$

$$vvt_1 := 0$$

$$wwt_1 := 0$$

$$ee := 0$$

$e1 := 0$

$e2 := 0$

$e3 := 0$

$uut_2 := 0$

$vvt_2 := 0$

$wwt_2 := 0$

$ee := 0$

$e1 := 0$

$e2 := 0$

$e3 := 0$

$uut_3 := 0$

$vvt_3 := 0$

$wwt_3 := 0$

$ee := 0$

$e1 := 0$

$e2 := 0$

$e3 := 0$

$uut_4 := 0$

$vvt_4 := 0$

$wwt_4 := 0$

$ee := 0$

$e1 := 0$

$e2 := 0$

$e3 := 0$

$uut_5 := 0$

$vvt_5 := 0$

$wwt_5 := 0$

$ee := 0$

$e1 := 0$

$e2 := 0$

$e3 := 0$

$$uut_6 := 0$$

$$vvt_6 := 0$$

$$wwt_6 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

```
> # nous considerons ici les parties imaginaires en prenant les nombres impair
> s ;
> n := 5;
> k1 := vector(6):k2 := vector(6):k3 := vector(6):k := vector(6):zz := vector(6):
> a := vector(6): b := vector(6): c := vector(6):abar := vector(6):bbar := vector(6):
> cbar := vector(6):phi := vector(6):gradpsi1 := vector(6):
> gradpsi2 := vector(6):
> gradpsi3 := vector(6):alpha := vector(6):alpha1:= vector(6):alpha2 := vector(6):
> alpha3 := vector(6):beta1 := vector(6):beta2 := vector(6):beta3 := vector(6):
> gama1 := vector(6):gama2 := vector(6):gama3 := vector(6):
> for i from 1 to 6
> do
> k1[i] := factor(s[i]^(n-1)):
> k[i] := factor(s[i]^n) :
> k2[i] := factor(s[i]^(n-2)):
> k3[i] :=factor(s[i]^(n-3)):
> a[i] := diff(s[i],x):
> b[i] := diff(s[i],y):
> c[i] := diff(s[i],z):
> abar[i] := diff(evalc(expand(conjugate(s[i]))),x):
> bbar[i] := diff(evalc(expand(conjugate(s[i]))),y):
> cbar[i] := diff(evalc(expand(conjugate(s[i]))),z):
> alpha[i] := (a[i]*abar[i]+b[i]*bbar[i]+c[i]*cbar[i]):
> gama1[i] := (c[i]^2+c[i]*b[i]+a[i]*c[i]):
> gama2[i] := (2*c[i]*cbar[i]+c[i]*bbar[i]+b[i]*cbar[i]+a[i]*cbar[i]+c[i]*abar[i]):
> gama3[i] := (cbar[i]^2+cbar[i]*bbar[i]+abar[i]*cbar[i]):
> beta1[i] := (b[i]^2+a[i]*b[i]+b[i]*c[i]):
> beta2[i] := (2*b[i]*bbar[i]+a[i]*bbar[i]+b[i]*abar[i]+b[i]*cbar[i]+c[i]*bbar[i]):
> beta3[i] := (bbar[i]^2+abar[i]*bbar[i]+bbar[i]*cbar[i]):
> alpha1[i] := (2*a[i]*abar[i]+a[i]*bbar[i]+b[i]*abar[i]+a[i]*cbar[i]+c[i]*abar[i]):
> alpha2[i] := (a[i]^2+a[i]*b[i]+a[i]*c[i]):
> alpha3[i] := (abar[i]^2+abar[i]*bbar[i]+abar[i]*cbar[i]):
> if i = 1 or i = 3 or i = 5
> then
> zz[i] := evalc(simplify(expand((conjugate(s[i])*k1[i] - s[i]*conjugate(k1[i]))/(2*I))
> ));
>
```

```
> phi[i] := (alpha[i]/I)*(n-1)*(2*(1-nu))*(evalc(simplify(expand(k2[i]-conjugate(k2[i]
> ))))):
> gradpsi1[i] :=   evalc(simplify(expand((alpha2[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(s[i])*k3[
> i]+
> alpha1[i]*(n-1)*(k2[i]-conjugate(k2[i]))-alpha3[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(k3[i])*s[i]
> )/(2*I)))):
> gradpsi2[i] :=      evalc(simplify(expand((beta1[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(s[i])*k3
> [i]+
> beta2[i]*(n-1)*(k2[i]-conjugate(k2[i]))-beta3[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(k3[i])*s[i])/(
> 2*I)))):
> gradpsi3[i] :=    evalc(simplify(expand((gama1[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(s[i])*k3
> [i]
> +gama2[i]*(n-1)*(k2[i]-conjugate(k2[i]))-gama3[i]*(n-1)*(n-2)*conjugate(k3[i])*s[i
> ])/(2*I)))):
> else
> zz[i] := evalc(simplify(expand((k[i]-conjugate(k[i]))/(2*I))));
> phi[i] := 0:
> gradpsi1[i] := evalc(simplify(expand((alpha2[i]*n*(n-1)*k2[i]- alpha3[i]*n*(n-1)*c
> onjugate(k2[i]))/(2*I)))):
> gradpsi2[i] := evalc(simplify(expand((beta1[i]*n*(n-1)*k2[i]-  beta3[i]*n*(n-1)*co
> njugate(k2[i]))/(2*I)))):
> gradpsi3[i] := evalc(simplify(expand((gama1[i]*n*(n-1)*k2[i]- gama3[i]*n*(n-1)*c
> onjugate(k2[i]))/(2*I)))):
> fi:
> zz[i];
> phi[i];
> gradpsi1[i] ;
> gradpsi2[i] ;
> gradpsi3[i] ;
> od:
> lambda := e*nu/(1+nu)/(1-2*nu):
> G := e/(1+nu)/2:
> vv := [x,y,z]:
> u := vector(6):
> v := vector(6):
> w := vector(6):
> for i to 6
>  do
> u[i] := normal(simplify(expand((phi[i]-gradpsi1[i])/G)));
> v[i] := normal(simplify(expand((phi[i]-gradpsi2[i])/G)));
> w[i] := normal(simplify(expand((phi[i]-gradpsi3[i])/G)));
> ee := diff( u[i] , x ) + diff( v[i] , y ) + diff( w[i] , z ):
> e1 := simplify((lambda + G )*diff(ee,x) + G*diverge(grad(u[i],vv),vv));
> e2 := simplify((lambda + G )*diff(ee,y) + G*diverge(grad(v[i],vv),vv));
> e3 := simplify((lambda + G )*diff(ee,z) + G*diverge(grad(w[i],vv),vv));
> od:
>
```

$$n := 5$$

```
> # nous passons à la moyenne au sens des integrales
> ui := vector(6):
> vi := vector(6):
> wi := vector(6):
> for i from 1 to 6 do
> ui[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[i]/(2*pi)),
>   t = -pi..pi))));
> vi[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[i]/(2*pi)),
>   t = -pi..pi))));
> wi[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[i]/(2*pi)
> ), t = -pi..pi))));
> ee := diff( ui[i] , x ) + diff( vi[i] , y ) + diff( wi[i] , z ):
> e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ui[i],vv),vv));
> e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vi[i],vv),vv));
> e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wi[i],vv),vv));
> od;
```

$$ui_1 := (1+v)\left(-24x^3 + 64vx^3 - 9y^3 - 9z^3 - 96y^2xv - 12yx^2 + 84y^2x - 9y^2z - 9z^2y + 84z^2x - 96vz^2x - 12x^2z\right)/e$$

$$vi_1 := (1+v)\left(-96y^2xv - 96vz^2x + 64vx^3 + 87z^2x - 18yzx - 68x^3 - 12yx^2 - 9y^3 + 69y^2x - 9z^2y\right)/e$$

$$wi_1 := (1+v)\left(-96vz^2x - 96y^2xv + 64vx^3 - 9z^3 - 18yzx - 68x^3 + 87y^2x - 9y^2z + 69z^2x - 12x^2z\right)/e$$

$$ee := \frac{(1+v)\left(-72x^2 + 192vx^2 - 96y^2v - 24yx + 84y^2 + 84z^2 - 96vz^2 - 24xz\right)}{e} + \frac{(1+v)\left(-192yxv - 18xz - 12x^2 - 27y^2 + 138yx - 9z^2\right)}{e} + \frac{(1+v)\left(-192xzv - 27z^2 - 18yx - 9y^2 + 138xz - 12x^2\right)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ui_2 := -5\,\frac{\left(8x^3 - 12y^2x - 3y^2z - 12yx^2 - 3y^3 + 3z^2y - 3z^3 - 12x^2z - 12z^2x\right)(1+v)}{e}$$

$$vi_2 := 5\,\frac{\left(-6yzx - 4x^3 - 9y^2x + 12yx^2 - 3y^3 - 3z^2y - 3z^2x\right)(1+v)}{e}$$

$$wi_2 := 5\,\frac{\left(-6\,y\,z\,x+4\,x^3-3\,y^2\,x-3\,y^2\,z-3\,z^3+12\,x^2\,z-9\,z^2\,x\right)(1+\nu)}{e}$$

$$ee := -5\,\frac{\left(24\,x^2-12\,y^2-24\,y\,x-24\,x\,z-12\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$
$$+5\,\frac{\left(-6\,x\,z-18\,y\,x+12\,x^2-9\,y^2-3\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$
$$+5\,\frac{\left(-6\,y\,x-3\,y^2-9\,z^2+12\,x^2-18\,x\,z\right)(1+\nu)}{e}$$

$$e1 := 0$$
$$e2 := 0$$
$$e3 := 0$$

$$ui_3 := -(1+\nu)\left(96\,\nu\,z^2\,y+96\,y\,x^2\,\nu-64\,y^3\,\nu+18\,y\,z\,x-87\,z^2\,y+9\,z^2\,x+68\,y^3\right.$$
$$\left.+9\,x^3+12\,y^2\,x-69\,y\,x^2\right)/e$$

$$vi_3 := -(1+\nu)\left(9\,x^3+24\,y^3+9\,z^3-84\,y\,x^2+12\,y^2\,x+96\,y\,x^2\,\nu+12\,y^2\,z-64\,y^3\,\nu\right.$$
$$\left.+96\,\nu\,z^2\,y-84\,z^2\,y+9\,z^2\,x+9\,x^2\,z\right)/e$$

$$wi_3 := -(1+\nu)\left(96\,y\,x^2\,\nu-64\,y^3\,\nu+96\,\nu\,z^2\,y-69\,z^2\,y+68\,y^3+18\,y\,z\,x+9\,x^2\,z\right.$$
$$\left.+9\,z^3-87\,y\,x^2+12\,y^2\,z\right)/e$$

$$ee := -\frac{(1+\nu)\left(192\,y\,x\,\nu+18\,y\,z+9\,z^2+27\,x^2+12\,y^2-138\,y\,x\right)}{e}$$
$$-\frac{(1+\nu)\left(72\,y^2-84\,x^2+24\,y\,x+96\,\nu\,x^2+24\,y\,z-192\,y^2\,\nu+96\,\nu\,z^2-84\,z^2\right)}{e}$$
$$-\frac{(1+\nu)\left(192\,y\,z\,\nu-138\,y\,z+18\,y\,x+9\,x^2+27\,z^2+12\,y^2\right)}{e}$$

$$e1 := 0$$
$$e2 := 0$$
$$e3 := 0$$

$$ui_4 := -5\,\frac{(1+\nu)\left(3\,x^3+9\,y\,x^2+6\,y\,z\,x+3\,z^2\,y+3\,z^2\,x-4\,y^3-12\,y^2\,x\right)}{e}$$

$$vi_4 := -5$$
$$\frac{(1+\nu)\left(3\,x^2\,z-12\,y^2\,z+3\,x^3-12\,y\,x^2-8\,y^3+3\,z^3-3\,z^2\,x-12\,z^2\,y-12\,y^2\,x\right)}{e}$$

$$wi_4 := -5\,\frac{(1+\nu)\left(6\,y\,z\,x+3\,x^2\,z-4\,y^3+3\,z^3+3\,y\,x^2+9\,z^2\,y-12\,y^2\,z\right)}{e}$$

$$ee := -5\,\frac{(1+\nu)\left(9\,x^2+18\,y\,x+6\,y\,z+3\,z^2-12\,y^2\right)}{e}$$

$$-5\,\frac{(1+\nu)\left(-24\,y\,z-12\,x^2+24\,y^2-12\,z^2-24\,y\,x\right)}{e}$$

$$-5\,\frac{(1+\nu)\left(6\,y\,x+3\,x^2+9\,z^2+18\,y\,z-12\,y^2\right)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ui_5 := -(1+\nu)\left(96\,y^2\,z\,\nu-64\,z^3\,\nu+96\,x^2\,z\,\nu-69\,x^2\,z+18\,y\,z\,x+9\,x^3+68\,z^3\right.$$
$$\left.+12\,z^2\,x+9\,y^2\,x-87\,y^2\,z\right)/e$$

$$vi_5 := -(1+\nu)\left(96\,y^2\,z\,\nu-64\,z^3\,\nu+96\,x^2\,z\,\nu-87\,x^2\,z+18\,y\,z\,x+9\,y^3+68\,z^3\right.$$
$$\left.+9\,y\,x^2+12\,z^2\,y-69\,y^2\,z\right)/e$$

$$wi_5 := -(1+\nu)\left(9\,x^3+9\,y^3+24\,z^3+9\,y\,x^2+9\,y^2\,x-96\,y^2\,z\,\nu-84\,y^2\,z+12\,z^2\,y\right.$$
$$\left.+12\,z^2\,x-64\,z^3\,\nu+96\,x^2\,z\,\nu-84\,x^2\,z\right)/e$$

$$ee := -\frac{(1+\nu)\left(192\,x\,z\,\nu-138\,x\,z+18\,y\,z+27\,x^2+12\,z^2+9\,y^2\right)}{e}$$

$$-\frac{(1+\nu)\left(192\,y\,z\,\nu+18\,x\,z+27\,y^2-9\,x^2+12\,z^2-138\,y\,z\right)}{e}$$

$$-\frac{(1+\nu)\left(72\,z^2+96\,y^2\,\nu-84\,y^2+24\,y\,z+24\,x\,z-192\,\nu\,z^2+96\,\nu\,x^2-84\,x^2\right)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$ui_6 := -5\,\frac{\left(6\,y\,z\,x-3\,x^3+3\,y^2\,x+3\,y^2\,z-4\,z^3-9\,x^2\,z-12\,z^2\,x\right)(1+\nu)}{e}$$

$$vi_6 := -5\,\frac{\left(6\,y\,z\,x+9\,y^2\,z+3\,y\,x^2+3\,y^3-12\,z^2\,y-4\,z^3+3\,x^2\,z\right)(1+\nu)}{e}$$

$$wi_6 := -5$$
$$\frac{\left(3\,x^3+3\,y^2\,x-12\,y^2\,z+3\,y\,x^2+3\,y^3-12\,z^2\,y-8\,z^3-12\,x^2\,z-12\,z^2\,x\right)(1+\nu)}{e}$$

$$ee := -5\,\frac{\left(6\,y\,z+9\,x^2-3\,y^2+18\,x\,z-12\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$-5\,\frac{\left(6\,x\,z+18\,y\,z+3\,x^2+9\,y^2-12\,z^2\right)(1+\nu)}{e}$$

$$-5\,\frac{\left(-12\,y^2-24\,y\,z+24\,z^2-12\,x^2-24\,x\,z\right)(1+\nu)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

```
> # nous  multiplions  ut par t ,pour passer à l'intégraale;
>
> uui := vector(6):
> vvi := vector(6):
> wwi := vector(6):
> for i from 1 to 6 do
> uui[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[i]*t),  t
> = -pi..pi))));
> vvi[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[i]*t),  t
> = -pi..pi))));
> wwi[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[i]*t),  t
>  = -pi..pi))));
> ee := diff( uui[i] , x ) + diff( vvi[i] , y ) + diff( wwi[i] , z ):
> e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(uui[i],vv),vv));
> e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vvi[i],vv),vv));
> e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wwi[i],vv),vv));
> od;
>
```

$$uui_1 :=$$

$$\frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\left(128\,y\,z\,x\,\nu-112\,y\,z\,x+5\,y^3+3\,z^3+8\,y\,x^2+15\,y^2\,z+9\,z^2\,y+8\,x^2\,z\right)}{e}$$

$$vvi_1 := \frac{1}{2}(1+\nu)\,\pi$$

$$\left(384\,y\,z\,x\,\nu-294\,y\,z\,x+8\,x^3+9\,z^3+45\,y^2\,x+45\,y^2\,z+27\,z^2\,x-24\,x^2\,z\right)/e$$

$$wwi_1 := \frac{1}{2}(1+\nu)\,\pi$$

$$\left(384\,y\,z\,x\,\nu-330\,y\,z\,x+8\,x^3+15\,y^3+24\,y\,x^2+45\,y^2\,x+27\,z^2\,y+27\,z^2\,x\right)/e$$

$$ee := \frac{3}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(128\,y\,z\,\nu-112\,y\,z+16\,y\,x+16\,x\,z)}{e}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(384\,x\,z\,\nu-294\,x\,z+90\,y\,x+90\,y\,z)}{e}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{(1+\nu)\,\pi\,(384\,y\,x\,\nu-330\,y\,x+54\,y\,z+54\,x\,z)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uui_2 := -\frac{5}{2} \frac{\pi \left(48\, y\, z\, x - 3\, y^3 - 5\, z^3 + 24\, y\, x^2 - 9\, y^2\, z - 15\, z^2\, y + 24\, x^2\, z\right)(1+\nu)}{e}$$

$$vvi_2 := -\frac{5}{2} \frac{\pi \left(-18\, y\, z\, x + 8\, x^3 - 5\, z^3 - 9\, y^2\, x - 9\, y^2\, z - 15\, z^2\, x + 24\, x^2\, z\right)(1+\nu)}{e}$$

$$wwi_2 := -\frac{5}{2} \frac{\pi \left(-30\, y\, z\, x + 8\, x^3 - 3\, y^3 + 24\, y\, x^2 - 9\, y^2\, x - 15\, z^2\, y - 15\, z^2\, x\right)(1+\nu)}{e}$$

$$ee := -\frac{5}{2} \frac{\pi\,(48\, y\, z + 48\, y\, x + 48\, x\, z)\,(1+\nu)}{e} - \frac{5}{2} \frac{\pi\,(-18\, x\, z - 18\, y\, x - 18\, y\, z)\,(1+\nu)}{e} - \frac{5}{2} \frac{\pi\,(-30\, y\, x - 30\, y\, z - 30\, x\, z)\,(1+\nu)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uui_3 := \frac{1}{2}(1+\nu)\,\pi \left(384\, y\, z\, x\, \nu - 294\, y\, z\, x + 8\, y^3 + 9\, z^3 + 45\, y\, x^2 + 24\, y^2\, z + 27\, z^2\, y + 45\, x^2\, z\right)/e$$

$$vvi_3 := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi \left(128\, y\, z\, x\, \nu - 112\, y\, z\, x + 5\, x^3 + 3\, z^3 + 8\, y^2\, x + 8\, y^2\, z + 9\, z^2\, x + 15\, x^2\, z\right)}{e}$$

$$wwi_3 := \frac{1}{2}(1+\nu)\,\pi \left(384\, y\, z\, x\, \nu - 330\, y\, z\, x + 15\, x^3 + 8\, y^3 + 45\, y\, x^2 + 24\, y^2\, x - 27\, z^2\, y + 27\, z^2\, x\right)/e$$

$$ee := \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(384\, y\, z\, \nu - 294\, y\, z + 90\, y\, x + 90\, x\, z)}{e} + \frac{3}{2} \frac{(1-\nu)\,\pi\,(128\, x\, z\, \nu - 112\, x\, z + 16\, y\, x + 16\, y\, z)}{e} + \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(384\, y\, x\, \nu - 330\, y\, x + 54\, y\, z + 54\, x\, z)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uui_4 := \frac{5}{2} \frac{\pi \left(18\, y\, z\, x - 8\, x^3 + 5\, z^3 - 9\, y\, x^2 - 24\, y^2\, z - 15\, z^2\, y - 9\, x^2\, z\right)(1-\nu)}{e}$$

$$vvi_4 := \frac{5}{2} \frac{\pi \left(-48\, y\, z\, x + 3\, x^3 - 5\, z^3 - 24\, y^2\, x - 24\, y^2\, z - 15\, z^2\, x - 9\, x^2\, z\right)(1-\nu)}{e}$$

$$wwi_4 := \frac{5}{2} \frac{\pi \left(30\,y\,z\,x + 3\,x^3 - 8\,y^3 + 9\,y\,x^2 - 24\,y^2\,x + 15\,z^2\,y + 15\,z^2\,x\right)(1+\nu)}{e}$$

$$ee := \frac{5}{2} \frac{\pi\,(18\,y\,z + 18\,y\,x + 18\,x\,z)\,(1+\nu)}{e} + \frac{5}{2} \frac{\pi\,(-48\,x\,z - 48\,y\,x - 48\,y\,z)\,(1+\nu)}{e} + \frac{5}{2} \frac{\pi\,(30\,y\,x + 30\,y\,z + 30\,x\,z)\,(1+\nu)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uui_5 := \frac{1}{2}(1+\nu)\,\pi \left(384\,y\,z\,x\,\nu - 294\,y\,z\,x + 9\,y^3 + 8\,z^3 + 45\,y\,x^2 + 27\,y^2\,z + 24\,z^2\,y + 45\,x^2\,z\right)/e$$

$$vvi_5 := \frac{1}{2}(1+\nu)\,\pi \left(384\,y\,z\,x\,\nu - 330\,y\,z\,x + 15\,x^3 + 8\,z^3 + 27\,y^2\,x + 27\,y^2\,z + 24\,z^2\,x + 45\,x^2\,z\right)/e$$

$$wwi_5 := \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi \left(128\,y\,z\,x\,\nu - 112\,y\,z\,x + 5\,x^3 + 3\,y^3 + 15\,y\,x^2 + 9\,y^2\,x + 8\,z^2\,y + 8\,z^2\,x\right)}{e}$$

$$ee := \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(384\,y\,z\,\nu - 294\,y\,z + 90\,y\,x + 90\,x\,z)}{e} + \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(384\,x\,z\,\nu - 330\,x\,z + 54\,y\,x + 54\,y\,z)}{e} + \frac{3}{2} \frac{(1+\nu)\,\pi\,(128\,y\,x\,\nu - 112\,y\,x + 16\,y\,z + 16\,x\,z)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uui_6 := \frac{5}{2} \frac{\pi \left(18\,y\,z\,x - 5\,y^3 - 8\,z^3 - 9\,y\,x^2 + 15\,y^2\,z - 24\,z^2\,y - 9\,x^2\,z\right)(1+\nu)}{e}$$

$$vvi_6 := \frac{5}{2} \frac{\pi \left(30\,y\,z\,x + 3\,x^3 - 8\,z^3 + 15\,y^2\,x + 15\,y^2\,z - 24\,z^2\,x + 9\,x^2\,z\right)(1+\nu)}{e}$$

$$wwi_6 := \frac{5}{2} \frac{\pi \left(-48\,y\,z\,x + 3\,x^3 + 5\,y^3 + 9\,y\,x^2 + 15\,y^2\,x - 24\,z^2\,y - 24\,z^2\,x\right)(1+\nu)}{e}$$

$$ee := \frac{5}{2} \frac{\pi\,(18\,y\,z + 18\,y\,x - 18\,x\,z)\,(1+\nu)}{e} + \frac{5}{2} \frac{\pi\,(30\,x\,z + 30\,y\,x - 30\,y\,z)\,(1+\nu)}{e} + \frac{5}{2} \frac{\pi\,(-48\,y\,x - 48\,y\,z - 48\,x\,z)\,(1+\nu)}{e}$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

```
> # nous  multiplions  ut par (cost+sint) ,pour passer à l'intégrale;
> uuit := vector(6):
> vvit := vector(6):
> wwit := vector(6):
> for i from 1 to 6 do
> uuit[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[i]*(cos
> (t)+sin(t))),  t = -pi..pi))));
> vvit[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[i]*(cos
> (t)+sin(t))),  t = -pi..pi))));
> wwit[i] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[i]*(co
> s(t)+sin(t))),  t = -pi..pi))));
> ee := diff( uuit[i] , x ) + diff( vvit[i] , y ) + diff( wwit[i] , z ):
> e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(uuit[i],vv),vv))
> ;
> e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vvit[i],vv),vv))
> ;
> e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wwit[i],vv),vv))
> ;
> od;
>
>
>
>
```

$$uuit_1 := 0$$

$$vvit_1 := 0$$

$$wwit_1 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uuit_2 := 0$$

$$vvit_2 := 0$$

$$wwit_2 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uuit_3 := 0$$

$$vvit_3 := 0$$

$$wwit_3 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uuit_4 := 0$$

$$vvit_4 := 0$$

$$wwit_4 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uuit_5 := 0$$

$$vvit_5 := 0$$

$$wwit_5 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

$$uuit_6 := 0$$

$$vvit_6 := 0$$

$$wwit_6 := 0$$

$$ee := 0$$

$$e1 := 0$$

$$e2 := 0$$

$$e3 := 0$$

>

Annexe C

-Sous programme ortho.Sy :Orthogonalisation avec l'integration symbolique.

-Sous programme Orth.SiD : Application de ortho.Sy au cas des aciers

-Sous programme Ortho.Nu : orthogonalisation avec l'intégration numérique.

-Sous programme Ortho.NiD : Application de ortho.Nu au cas des aciers.

```
>
> with(linalg):
> # Orthogonalisation  des solutions par GRAM-SMITH
> #  Avec la méthode symbolique d'intégration
> N := vector(8):
> a.(1) := 1+ zeta :
> a.(2) := 1- zeta:
> b.(1) := 1+ eta:
> b.(2) := 1- eta:
> c.(1) := 1+ xi:
> c.(2) := 1- xi :
> N[1] := a.(2)*b.(2)*c.(2)/8:N[2] := a.(1)*b.(2)*c.(2)/8:N[3] := a.(1)*b.(1)*c.(2)/8:
>  N[4] := a.(2)*b.(1)*c.(2)/8: N[5] := a.(2)*b.(2)*c.(1)/8: N[6] := a.(1)*b.(2)*c.(1)/8:
>  N[7] := a.(1)*b.(1)*c.(1)/8: N[8] := a.(2)*b.(1)*c.(1)/8:
> p := 'p':
>
> vx := [x.(1..8)]:
> vy :=  [y.(1..8)]:
> vz :=  [z.(1..8)]:
> xx := simplify(expand(sum( N[p]*vx[p],p = 1..8 ))):
> yy := simplify(expand(sum( N[p]*vy[p],p = 1..8 ))):
> zz := simplify(expand(sum( N[p]*vz[p],p = 1..8 ))):
> JJ := matrix(3,3):
> JJ[1,1] := simplify(expand(diff(xx,zeta))):
> JJ[1,2] := simplify(expand(diff(xx,eta))):
> JJ[1,3] := simplify(expand(diff(xx,xi))):
> JJ[2,1] := simplify(expand(diff(yy,zeta))):
> JJ[2,2] := simplify(expand(diff(yy,eta))):
> JJ[2,3] := simplify(expand(diff(yy,xi))):
> JJ[3,1] := simplify(expand(diff(zz,zeta))):
> JJ[3,2] := simplify(expand(diff(zz,eta))):
> JJ[3,3] := simplify(expand(diff(zz,xi))):
> JJ := map(simplify,map(expand,JJ));
> detJJ := det(JJ);
>
> s := vector (6) :
> s[1] := l*x+cos(t)*y+sin(t)*z :
> s[2] := l*x+sin(t)*y+cos(t)*z :
> s[3] := cos(t)*x+l*y+sin(t)*z :
> s[4] := sin(t)*x+l*y+cos(t)*z :
> s[5] := cos(t)*x+sin(t)*y+l*z :
> s[6] := sin(t)*x+cos(t)*y+l*z :
> n := 4;
> tet := vector(6):
> k := vector(6):
> zz := vector(6):
> for i from 1 to 6
>   do
```

```
>   tet[i] := factor(s[i]^(n-1)):
>   k[i] := factor(s[i]^n) :
>   if i = 1 or i = 3 or i = 5
>   then
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((conjugate(s[i])*tet[i] + s[i]*conjugate(tet[i]))/2))
> ):
>   else
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((k[i]+conjugate(k[i]))/2))):
>   fi :
>   zz[i];
>   od:
> lambda := e*nu/(1+nu)/(1-2*nu):
> G := e/(1+nu)/2:
> vv := [ x , y , z ]:
> u := vector(6):
> v := vector(6):
> w := vector(6):
> for ifc to 6
>  do
>   f := [ zz[ifc] , zz[ifc] , zz[ifc] ]:
>   dg := grad(diverge(f,vv),vv):
>   u[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[1],vv),vv)-dg[1])/G):
>   v[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[2],vv),vv)-dg[2])/G):
>   w[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[3],vv),vv)-dg[3])/G):
>   ee := diff( u[ifc] , x ) + diff( v[ifc] , y ) + diff( w[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x) + G*diverge(grad(u[ifc],vv),vv))
> );
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y) + G*diverge(grad(v[ifc],vv),vv))
> );
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z) + G*diverge(grad(w[ifc],vv),vv)
> ));
>  od:
>
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for ifc from 1 to 6
>  do
>   ut[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>   vt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>   wt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[ifc]/
> (2*pi)),  t = -pi..pi))));
>   ee := diff( ut[ifc] , x ) + diff( vt[ifc] , y ) + diff( wt[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[ifc],vv),vv
> ));
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[ifc],vv),vv
```

```
> ));
>    e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[ifc],vv),vv
> ));
>  od:
> B := vector(6):
> alpha := (Q,P) -> int(int(int(Q*P*detJJ,zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1):
> beta := Q -> (int(int(int(Q^2*detJJ,zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1))^(1/2):
> for i to 6 do B[i] := subs({x = xx , y = yy , z = zz} , ut[i]) od:
> phi := vector(6):
> psi := vector(6):
> A := matrix(6,6):
> for i from 1 to 6 do
>
>   if  i = 1 then
> phi[i] := B[i] ;
> psi[i] := simplify(expand(phi[i]/beta(phi[i])));
> else
> p := 'p':
> phi[i] := B[i] + sum(A[i,p]*phi[p] , p = 1..i-1);
> for j to 6 do
> if j < i then A[i,j] := simplify(-alpha (B[i],phi[j]));
> else
> A[i,j] := 0 ;
> fi ;
> od;
> fi;
> psi[i] := simplify(expand(phi[i]/beta(phi[i])));
> od;
>
>
>
>
>
```

```
> with(linalg):
> # Orthogonalisation  des solutions par GRAM-SMITH
> #  Avec la méthode symbolique d'intégration
> N := vector(8):
> a.(1) := 1+ zeta :
> a.(2) := 1- zeta:
> b.(1) := 1+ eta:
> b.(2) := 1- eta:
> c.(1) := 1+ xi:
> c.(2) := 1- xi :
> N[1] := a.(2)*b.(2)*c.(2)/8:N[2] := a.(1)*b.(2)*c.(2)/8:N[3] := a.(1)*b.(1)*c.(2)/8:
>  N[4] := a.(2)*b.(1)*c.(2)/8: N[5] := a.(2)*b.(2)*c.(1)/8: N[6] := a.(1)*b.(2)*c.(1)/8:
>  N[7] := a.(1)*b.(1)*c.(1)/8: N[8] := a.(2)*b.(1)*c.(1)/8:
> p := 'p':
> vx := [-1,1,1,-1,-1,1,1,-1]:
> vy := [-1,-1,1,1,-1,-1,1,1]:
> vz := [-1,-1,-1,-1,1,1,1,1]:
> xx := simplify(expand(sum( N[p]*vx[p],p = 1..8 ))):
> yy := simplify(expand(sum( N[p]*vy[p],p = 1..8 ))):
> zz := simplify(expand(sum( N[p]*vz[p],p = 1..8 ))):
> JJ := matrix(3,3):
> JJ[1,1] := simplify(expand(diff(xx,zeta))):
> JJ[1,2] := simplify(expand(diff(xx,eta))):
> JJ[1,3] := simplify(expand(diff(xx,xi))):
> JJ[2,1] := simplify(expand(diff(yy,zeta))):
> JJ[2,2] := simplify(expand(diff(yy,eta))):
> JJ[2,3] := simplify(expand(diff(yy,xi))):
> JJ[3,1] := simplify(expand(diff(zz,zeta))):
> JJ[3,2] := simplify(expand(diff(zz,eta))):
> JJ[3,3] := simplify(expand(diff(zz,xi))):
> JJ := map(simplify,map(expand,JJ));
> detJJ := det(JJ);
> s := vector (6) :
> s[1] := l*x+cos(t)*y+sin(t)*z :
> s[2] := l*x+sin(t)*y+cos(t)*z :
> s[3] := cos(t)*x+l*y+sin(t)*z :
> s[4] := sin(t)*x+l*y+cos(t)*z :
> s[5] := cos(t)*x+sin(t)*y+l*z :
> s[6] := sin(t)*x+cos(t)*y+l*z :
> n := 4;
> tet := vector(6):
> k := vector(6):
> zz := vector(6):
> for i from 1 to 6
>   do
>   tet[i] := factor(s[i]^(n-1)):
>   k[i] := factor(s[i]^n) :
>   if i = 1 or i = 3 or i = 5
```

```
>   then
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((conjugate(s[i])*tet[i] + s[i]*conjugate(tet[i]))/2))
> ):
>   else
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((k[i]+conjugate(k[i]))/2))):
>   fi :
>   zz[i];
>   od:
> lambda := el*nu/(1+nu)/(1-2*nu):
> G := el/(1+nu)/2:
> vv := [ x , y , z ]:
> u := vector(6):
> v := vector(6):
> w := vector(6):
> for ifc to 6
>  do
>   f := [ zz[ifc] , zz[ifc] , zz[ifc] ]:
>   dg := grad(diverge(f,vv),vv):
>   u[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[1],vv),vv)-dg[1])/G):
>   v[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[2],vv),vv)-dg[2])/G):
>   w[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[3],vv),vv)-dg[3])/G):
>   ee := diff( u[ifc] , x ) + diff( v[ifc] , y ) + diff( w[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x) + G*diverge(grad(u[ifc],vv),vv))
> );
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y) + G*diverge(grad(v[ifc],vv),vv))
> );
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z) + G*diverge(grad(w[ifc],vv),vv)
> ));
>  od:
>
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for ifc from 1 to 6
>  do
>   ut[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>   vt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>   wt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[ifc]/
> (2*pi)),  t = -pi..pi))));
>   ee := diff( ut[ifc] , x ) + diff( vt[ifc] , y ) + diff( wt[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[ifc],vv),vv
> ));
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[ifc],vv),vv
> ));
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[ifc],vv),vv
> ));
```

```
>  od:
> B := vector(6):
> phi := vector(6):
> psi := vector(6):
>
> alpha := (Q,P) -> int(int(int(Q*P,zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1):
> beta := Q -> (int(int(int(Q^2,zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1))^(1/2):
> for i to 6 do B[i] := subs({x = xx , y = yy , z = xi,nu = 0.3 , el = 200000 } , ut[i]) od
> :
> A := matrix(6,6):
>
> for i from 1 to 6 do
>   if  i = 1 then
> phi[i] := B[i] ;
> psi[i] := simplify(expand(phi[i]/beta(phi[i])));
> else
> p := 'p':
> phi[i] := B[i] + sum(A[i,p]*phi[p] , p = 1..i-1);
> for j to 6 do
>
> if j < i then A[i,j] := simplify(-alpha (B[i],phi[j])/beta(phi[j]));
> else
> A[i,j] := 0 ;
> fi ;
> od;
> fi;
> psi[i] := simplify(expand(phi[i]/beta(phi[i])));
> od;
Warning: new definition for   norm
Warning: new definition for   trace
```

$$JJ := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$detJJ := 1$$

$$n := 4$$

$$\psi_1 := .5369456857\,\eta^2 + .5369456857\,\xi^2 - .3068261061\,\zeta^2$$

$$\psi_2 := .2964323108\,\eta^2 + .5929423227\,\eta\,\zeta + .5929423227\,\zeta\,\xi - .5929201223\,\zeta^2 + .2964323108\,\xi^2$$

$$\psi_3 := -.9944891895\,\eta^2 + .4085650605\,\xi^2 + .2308010674\,\zeta^2 - .1775527447\,\zeta\,\xi + .00004905910091\,\eta\,\zeta$$

$$\psi_4 := .4501333821\,\eta^2 + .9004730494\,\eta\,\zeta - .2252437913\,\zeta\,\xi - .3375904155\,\zeta^2$$

$- .1126034999\,\xi^2$

$$\psi_5 := .2308327860\,\zeta^2 + .4084870628\,\eta^2 - .9944905595\,\xi^2 - .1775618837\,\eta\,\zeta + .00003288048162\,\zeta\,\xi$$

$$\psi_6 := -.2251937885\,\eta\,\zeta + .9004791464\,\zeta\,\xi - .1125757012\,\eta^2 + .4501350257\,\xi^2 - .3376188633\,\zeta^2$$

```
>
> diag := matrix(6,6):
> for j to 6 do diag[1,j] := int(int(int(psi[1]*psi[j],zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1)
> od ;
> for j to 6 do diag[2,j] := int(int(int(psi[2]*psi[j],zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1)
> od ;
> for j to 6 do diag[3,j] := int(int(int(psi[3]*psi[j],zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1)
> od ;
> for j to 6 do diag[4,j] := int(int(int(psi[4]*psi[j],zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1)
> od ;
> for j to 6 do diag[5,j] := int(int(int(psi[5]*psi[j],zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1)
> od ;
> for j to 6 do diag[6,j] := int(int(int(psi[6]*psi[j],zeta = -1..1),eta = -1..1),xi = -1..1)
> od ;
> diag;
>
>
>
```

$$diag_{1,1} := 1.000000000$$

$$diag_{1,2} := .3557022274$$

$$diag_{1,3} := -.5162157749$$

$$diag_{1,4} := .2024950936$$

$$diag_{1,5} := -.5162854890$$

$$diag_{1,6} := .2025132206$$

$$diag_{2,1} := .3557022274$$

$$diag_{2,2} := 1.000000000$$

$$diag_{2,3} := -.3143613250$$

$$diag_{2,4} := .5693752344$$

$$diag_{2,5} := -.3144047702$$

$diag_{2,6} := .5694230033$

$diag_{3,1} := -.5162157749$

$diag_{3,2} := -.3143613250$

$diag_{3,3} := 1.000000000$

$diag_{3,4} := -.3708458369$

$diag_{3,5} := -.4278258907$

$diag_{3,6} := .01287211207$

$diag_{4,1} := .2024950936$

$diag_{4,2} := .5693752344$

$diag_{4,3} := -.3708458369$

$diag_{4,4} := 1.000000001$

$diag_{4,5} := .01286069179$

$diag_{4,6} := -.3515692847$

$diag_{5,1} := -.5162854890$

$diag_{5,2} := -.3144047702$

$diag_{5,3} := -.4278258907$

$diag_{5,4} := .01286069179$

$diag_{5,5} := 1.000000000$

$diag_{5,6} := -.3708647245$

$diag_{6,1} := .2025132206$

$diag_{6,2} := .5694230033$

$diag_{6,3} := .01287211207$

$diag_{6,4} := -.3515692847$

$diag_{6,5} := -.3708647245$

$diag_{6,6} := 1.000000000$

```
>
> with(student):
> with(linalg):
> # Orthogonalisation  des solutions par GRAM-SMITH
> #  Avec la méthode numèrique d'intégration
>
> N := vector(8):
> J := vector(4):
> a.(1) := 1+ zeta :
> a.(2) := 1- zeta:
> b.(1) := 1+ eta:
> b.(2) := 1- eta:
> c.(1) := 1+ xi:
> c.(2) := 1- xi :
>
> N[1] := a.(2)*b.(2)*c.(2)/8:N[2] := a.(1)*b.(2)*c.(2)/8:N[3] := a.(1)*b.(1)*c.(2)/8:
>  N[4] := a.(2)*b.(1)*c.(2)/8: N[5] := a.(2)*b.(2)*c.(1)/8: N[6] := a.(1)*b.(2)*c.(1)/8:
>  N[7] := a.(1)*b.(1)*c.(1)/8: N[8] := a.(2)*b.(1)*c.(1)/8:
> wl := [2 , 2 , 2 , 2]:
> eeta := [ -(2/3)^(1/2) , (2/3)^(1/2) , 0 , 0 ]:
> xxi := [ -(1/3)^(1/2) , -(1/3)^(1/2) , (1/3)^(1/2) , (1/3)^(1/2) ]:
> zzeta := [ 0 , 0 , -(2/3)^(1/2) , (2/3)^(1/2) ]:
> p := 'p':
> cx := [x.(1..8)]:
> cy :=  [y.(1..8)]:
> cz :=  [z.(1..8)]:
> xp := sum( N[p]*cx[p],p = 1..8 ):
> yp := sum( N[p]*cy[p],p = 1..8 ):
> zp := sum( N[p]*cz[p],p = 1..8 ):
> J := matrix([[diff(xp,zeta),diff(xp,eta),diff(xp,xi)],
> [diff(yp,zeta),diff(yp,eta),diff(yp,xi)],
> [diff(zp,zeta),diff(zp,eta),diff(zp,xi)]]):
> J := map(simplify,map(expand,J));
>
> detJ := det(J);
> for j to 4 do det.(j) := det(subs({zeta = zzeta['i'],eta = eeta['i'],xi = xxi['i']},J)) od:
> s := vector (6) :
> s[1] := l*x+cos(t)*y+sin(t)*z :
> s[2] := l*x+sin(t)*y+cos(t)*z :
> s[3] := cos(t)*x+l*y+sin(t)*z :
> s[4] := sin(t)*x+l*y+cos(t)*z :
> s[5] := cos(t)*x+sin(t)*y+l*z :
> s[6] := sin(t)*x+cos(t)*y+l*z :
> n := 4;
> tet := vector(6):
> k := vector(6):
> zz := vector(6):
> for i from 1 to 6
```

```
>   do
>   tet[i] := factor(s[i]^(n-1)):
>   k[i] := factor(s[i]^n) :
>   if i = 1 or i = 3 or i = 5
>   then
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((conjugate(s[i])*tet[i] + s[i]*conjugate(tet[i]))/2))
> ):
>   else
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((k[i]+conjugate(k[i]))/2))):
>   fi :
>  zz[i];
>   od:
> lambda := e*nu/(1+nu)/(1-2*nu):
> G := e/(1+nu)/2:
> vv := [ x , y , z ]:
> u := vector(6):
> v := vector(6):
> w := vector(6):
> for ifc to 6
>  do
>    f := [ zz[ifc] , zz[ifc] , zz[ifc] ]:
>   dg := grad(diverge(f,vv),vv):
>   u[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[1],vv),vv)-dg[1])/G):
>   v[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[2],vv),vv)-dg[2])/G):
>   w[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[3],vv),vv)-dg[3])/G):
>   ee := diff( u[ifc] , x ) + diff( v[ifc] , y ) + diff( w[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x) + G*diverge(grad(u[ifc],vv),vv))
> );
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y) + G*diverge(grad(v[ifc],vv),vv))
> );
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z) + G*diverge(grad(w[ifc],vv),vv)
> ));
>  od:
>
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for ifc from 1 to 6
>  do
>   ut[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>   vt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>        wt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[if
> c]/(2*pi)),  t = -pi..pi))));
>   ee := diff( ut[ifc] , x ) + diff( vt[ifc] , y ) + diff( wt[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[ifc],vv),vv
> ));
```

```
>    e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[ifc],vv),vv
> ));
>    e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[ifc],vv),vv
> ));
>  od:
> B := vector(6):
> for i to 6 do B[i] := simplify(expand(subs({x = xp,y = yp,z = zp},ut[i]))) od;
> phi := vector(6):
> psi := vector(6):
>  alpha := (Q,P) -> sum(wl['i']*(subs({zeta = zzeta['i'],eta = eeta['i'],xi = xxi['i']},Q))
> *(subs({zeta = zzeta['i'],
> eta = eeta['i'],xi = xxi['i']},P))*det.('i') , 'i' = 1..4):
>
> beta := (Q) -> (sum(wl['i']*((subs({zeta = zzeta['i'],eta = eeta['i'],xi = xxi['i']},Q))^(
> 2))*det.('i') , 'i' = 1..4))^(1/
> 2):
>
> A := matrix(6,6):
> for i from 1 to 6 do
>
>  if  i = 1 then
> phi[i] := B[i] ;
> psi[i] := simplify(expand(phi[i]/beta(phi[i])));
> else
> p := 'p':
> phi[i] := B[i] + sum(A[i,p]*phi[p] , p = 1..i-1);
> for j to 6 do
> if j < i then A[i,j] := simplify(-alpha (B[i],phi[j]));
> else
> A[i,j] := 0 ;
> fi ;
> od;
> fi;
> psi[i] := simplify(expand(phi[i]/beta(phi[i])));
> od;
>
>
>
>
>
>
>
```

```
>
>
> with(student):
> with(linalg):Digits := 20:
> # Orthogonalisation  des solutions par GRAM-SMITH
> #  Avec la méthode numèrique d'intégration
>
> N := vector(8):
> J := vector(4):
> a.(1) := 1+ zeta :
> a.(2) := 1- zeta:
> b.(1) := 1+ eta:
> b.(2) := 1- eta:
> c.(1) := 1+ xi:
> c.(2) := 1- xi :
>
> N[1] := a.(2)*b.(2)*c.(2)/8:N[2] := a.(1)*b.(2)*c.(2)/8:N[3] := a.(1)*b.(1)*c.(2)/8:
>  N[4] := a.(2)*b.(1)*c.(2)/8: N[5] := a.(2)*b.(2)*c.(1)/8: N[6] := a.(1)*b.(2)*c.(1)/8:
>  N[7] := a.(1)*b.(1)*c.(1)/8: N[8] := a.(2)*b.(1)*c.(1)/8:
> wl := [2 , 2 , 2 , 2]:
> eeta := [ -(2/3)^(1/2) , (2/3)^(1/2) , 0 , 0 ]:
> xxi := [ -(1/3)^(1/2) , -(1/3)^(1/2) , (1/3)^(1/2) , (1/3)^(1/2) ]:
> zzeta := [ 0 , 0 , -(2/3)^(1/2) , (2/3)^(1/2) ]:
> p := 'p':
> cx := [-1,1,1,-1,-1,1,1,-1]:
> cy :=  [-1,-1,1,1,-1,-1,1,1]:
> cz :=  [-1,-1,-1,-1,1,1,1,1]:
> xp := sum( N[p]*cx[p],p = 1..8 ):
> yp := sum( N[p]*cy[p],p = 1..8 ):
> zp := sum( N[p]*cz[p],p = 1..8 ):
> J := matrix([[diff(xp,zeta),diff(xp,eta),diff(xp,xi)],
> [diff(yp,zeta),diff(yp,eta),diff(yp,xi)],
> [diff(zp,zeta),diff(zp,eta),diff(zp,xi)]]):
> J := map(simplify,map(expand,J));
>
> s := vector (6) :
> s[1] := l*x+cos(t)*y+sin(t)*z :
> s[2] := l*x+sin(t)*y+cos(t)*z :
> s[3] := cos(t)*x+l*y+sin(t)*z :
> s[4] := sin(t)*x+l*y+cos(t)*z :
> s[5] := cos(t)*x+sin(t)*y+l*z :
> s[6] := sin(t)*x+cos(t)*y+l*z :
> n := 4;
> tet := vector(6):
> k := vector(6):
> zz := vector(6):
> for i from 1 to 6
>   do
>   tet[i] := factor(s[i]^(n-1)):
>   k[i] := factor(s[i]^n) :
>   if i = 1 or i = 3 or i = 5
>   then
```

```
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((conjugate(s[i])*tet[i] + s[i]*conjugate(tet[i]))/2))):
>   else
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((k[i]+conjugate(k[i]))/2))):
>   fi :
>  zz[i];
>   od:
> lambda := el*nu/(1+nu)/(1-2*nu):
> G := el/(1+nu)/2:
> vv := [ x , y , z ]:
> u := vector(6):
> v := vector(6):
> w := vector(6):
> for ifc to 6
>  do
>    f := [ zz[ifc] , zz[ifc] , zz[ifc] ]:
>   dg := grad(diverge(f,vv),vv):
>   u[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[1],vv),vv)-dg[1])/G):
>   v[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[2],vv),vv)-dg[2])/G):
>   w[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[3],vv),vv)-dg[3])/G):
>   ee := diff( u[ifc] , x ) + diff( v[ifc] , y ) + diff( w[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x) + G*diverge(grad(u[ifc],vv),vv)));
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y) + G*diverge(grad(v[ifc],vv),vv)));
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z) + G*diverge(grad(w[ifc],vv),vv)));
>  od:
>
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for ifc from 1 to 6
>  do
>       ut[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[ifc]/(2*pi))
> ,  t = -pi..pi))));
>       vt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[ifc]/(2*pi)),
>  t = -pi..pi))));
>      wt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[ifc]/(2*pi))
> ,  t = -pi..pi))));
>   ee := diff( ut[ifc] , x ) + diff( vt[ifc] , y ) + diff( wt[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[ifc],vv),vv));
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[ifc],vv),vv));
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[ifc],vv),vv));
>  od:
> Bu := vector(6):
> Bv := vector(6):
> Bw := vector(6):
> for i to 6 do
> Bu[i] := simplify(expand(subs({x = xp,y = yp,z = zp,nu = 0.3,el = 200000},ut[i]))):
> Bv[i] := simplify(expand(subs({x = xp,y = yp,z = zp,nu = 0.3,el = 200000},vt[i]))):
> Bw[i] := simplify(expand(subs({x = xp,y = yp,z = zp,nu = 0.3,el = 200000},wt[i]))):
> od:
> phiu := vector(6):
> psiu := vector(6):
> phiv := vector(6):
```

```
> psiv := vector(6):
> phiw := vector(6):
> psiw := vector(6):
>    alpha := (Q,P) -> sum(wl['i']*(subs({zeta = zzeta['i'],eta = eeta['i'],xi = xxi['i']},Q))*(sub
> s({zeta = zzeta['i'],eta = eeta['i'],xi = xxi['i']},P)) , 'i' = 1..4):
> beta := (Q) -> (sum(wl['i']*((subs({zeta = zzeta['i'],eta = eeta['i'],xi = xxi['i']},Q))^(2))
> , 'i' = 1..4))^(1/2):
> vol := alpha(1,1);
> rvol := beta(1);
> Au := matrix(6,6):
> Av := matrix(6,6):
> Aw := matrix(6,6):
>
> for i from 1 to 6 do
>   if i = 1 then
> phiu[i] := Bu[i] ;
> psiu[i] := simplify(expand(phiu[i]/beta(phiu[i])));
> phiv[i] := Bv[i] ;
> psiv[i] := simplify(expand(phiv[i]/beta(phiv[i])));
> phiw[i] := Bw[i] ;
> psiw[i] := simplify(expand(phiw[i]/beta(phiw[i])));
> else
> p := 'p':
> phiu[i] := Bu[i] + sum(Au[i,p]*phiu[p] , p = 1..i-1);
> phiv[i] := Bv[i] + sum(Av[i,p]*phiv[p] , p = 1..i-1);
> phiw[i] := Bw[i] + sum(Aw[i,p]*phiw[p] , p = 1..i-1);
> for j to 6 do
> if j < i then
>
> Au[i,j] := simplify(-alpha (Bu[i],phiu[j])/beta(phiu[j]));
> Av[i,j] := simplify(-alpha (Bv[i],phiv[j])/beta(phiv[j]));
> Aw[i,j] := simplify(-alpha (Bw[i],phiw[j])/beta(phiw[j]));
> else
> Au[i,j] := 0 ;
> Av[i,j] := 0 ;
> Aw[i,j] := 0 ;
> fi ;
> od;
> fi;
> psiu[i] := simplify(expand(phiu[i]/(beta(phiu[i]))));
> psiv[i] := simplify(expand(phiv[i]/(beta(phiv[i]))));
> psiw[i] := simplify(expand(phiw[i]/(beta(phiw[i]))));
> od;
  Warning: new definition for    D
```

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n := 4$$

$$vol := 8$$

$$rvol := \sqrt{8}$$

$$psiu_1 := .49943406886221878286\,\eta^2 - .28539089649269644735\,\zeta^2 + .49943406886221878286\,\xi^2$$

$$psiv_1 := .19010146451932736534\,\eta^2 - .81889861639094865069\,\zeta^2 + .33633336030342533868\,\xi^2 - .14623189578409797334\,\eta\,\xi$$

$$psiw_1 := .29712687386406103997\,\eta^2 - .72343934506032253210\,\zeta^2 + .16794127653186058781\,\xi^2 - .12918559733220045216\,\eta\,\xi$$

$$psiu_2 := .29413134705257697555\,\eta^2 + .29413134705257697555\,\xi^2 + .58839716699969698323\,\zeta\,\xi - .58835874617268468833\,\zeta^2 + .58839716699969698323\,\zeta\,\eta$$

$$psiv_2 := -.43712380890040058532\,\eta^2 - .14564409094028422308\,\xi^2 - .29147971796011636224\,\eta\,\xi + 1.1657820603550740803\,\zeta\,\eta + .58269949409798912409\,\zeta^2$$

$$psiw_2 := -.10995029755776601716\,\eta^2 - .32995433771312043156\,\xi^2 - .22000404015535441440\,\eta\,\xi + .87994227130725881469\,\zeta\,\xi + .43986769061380702725\,\zeta^2$$

$$psiu_3 := .33662361790841607982\,\xi^2 - .81903904894121001697\,\eta^2 + .18998137718352982919\,\zeta^2 - .14615096240645874909\,\zeta\,\xi + .00013545111881037708178\,\zeta\,\eta$$

$$psiv_3 := -.28538371963630506228\,\eta^2 + .49932350284140700307\,\zeta^2 + .49966695369075695054\,\xi^2 - .69396631603353394917\;10^{-5}\,\eta\,\xi - .00011101058091665319851\,\zeta\,\eta$$

$$psiw_3 := .16805127532135567118\,\xi^2 - .72353814876186828843\,\eta^2 + .29698225573615213389\,\zeta^2 - .12928057199129618780\,\zeta\,\xi - .000018284487926767843306\,\eta\,\xi$$

$$psiu_4 := -.14580461135347019562\,\xi^2 + .58270055628825206826\,\eta^2 - .43707535670230655447\,\zeta^2 + 1.1659396698283671987\,\zeta\,\eta - .29164542700973434428\,\zeta\,\xi$$

$$psiv_4 := .58853982693122110127\,\eta\,\xi + .29429746673400370373\,\xi^2$$

$$-.58842809444819859658\,\eta^2+.29396685414000853760\,\zeta^2$$
$$+.58844738082452517610\,\zeta\,\eta$$

$$psiw_4 := .88003449565475604555\,\eta\,\xi-.33004809018759241458\,\xi^2$$
$$+.43987036405014585899\,\eta^2-.10982819728269522253\,\zeta^2$$
$$-.21993357654345779388\,\zeta\,\xi$$

$$psiu_5 := -2.6565167699915411782\,\xi^2+1.0910076038685268005\,\eta^2$$
$$+.61677256947267976523\,\zeta^2-.47450761320470239592\,\zeta\,\eta$$
$$-.00004824842038944644284\,\zeta\,\xi$$

$$psiv_5 := 1.0910076323595096565\,\zeta^2+.61677257396218326910\,\eta^2$$
$$-2.6565167909738426338\,\xi^2-.47450761573536675253\,\zeta\,\eta$$
$$-.000048264467280019205181\,\eta\,\xi$$

$$psiw_5 := .74245735884081938018\,\eta^2+.74245737795410932700\,\zeta^2$$
$$-.42425456510026020924\,\xi^2-.95023661470544632768\;10^{-5}\,\eta\,\xi$$
$$-.95047890673254756490\;10^{-5}\,\zeta\,\xi$$

$$psiu_6 := .51457127696309479667\,\xi^2-.12881222430865272066\,\eta^2$$
$$-.38580699518252511059\,\zeta^2-.25740240898812362733\,\zeta\,\eta$$
$$+1.0290547533756402763\,\zeta\,\xi$$

$$psiv_6 := .51457125802572275587\,\xi^2-.38580697888939253372\,\eta^2$$
$$-.12881221886493541025\,\zeta^2-.25740244652362001430\,\zeta\,\eta$$
$$+1.0290547560852892322\,\eta\,\xi$$

$$psiw_6 := -.74999462449473075134\,\xi^2+.37499058711125226281\,\eta^2$$
$$+.37499059877080243897\,\zeta^2+.74999999546336414971\,\eta\,\xi$$
$$+.75000000441623819255\,\zeta\,\xi$$

```
> diag := matrix(6,6):
> for j to 6 do diag[1,j] := alpha(psiu[1],psiu[j]) od ;
> for j to 6 do diag[2,j] := alpha(psiu[2],psiu[j]) od ;
> for j to 6 do diag[3,j] := alpha(psiu[3],psiu[j]) od ;
> for j to 6 do diag[4,j] := alpha(psiu[4],psiu[j]) od ;
> for j to 6 do diag[5,j] := alpha(psiu[5],psiu[j]) od ;
> for j to 6 do diag[6,j] := alpha(psiu[6],psiu[j]) od ;
>
>
>
>
>
```

$diag_{1,1} := .99999999999999999996$

$diag_{1,2} := .61558375633548041046$

$diag_{1,3} := -.88937730040741167337$

$diag_{1,4} := .71130452388413706565$

$diag_{1,5} := -.27085375572787927020$

$diag_{1,6} := .17925484999538392651$

$diag_{2,1} := .61558375633548041046$

$diag_{2,2} := .99999999999999999996$

$diag_{2,3} := -.86792644733845852802$

$diag_{2,4} := .64741227976519201776$

$diag_{2,5} := .37206262985996195732$

$diag_{2,6} := .73981177376503640526$

$diag_{3,1} := -.88937730040741167337$

$diag_{3,2} := -.86792644733845852802$

$diag_{3,3} := 1.0000000000000000000$

$diag_{3,4} := -.87670933362495847851$

$diag_{3,5} := -.17872257417128196505$

$diag_{3,6} := -.36417448512527677947$

$diag_{4,1} := .71130452388413706565$

$diag_{4,2} := .64741227976519201776$

$diag_{4,3} := -.87670933362495847851$

$diag_{4,4} := 1.0000000000000000001$

$diag_{4,5} := .43004244543468559497$

$diag_{4,6} := -.03381513534353700475$

$diag_{5,1} := -.27085375572787927020$

$$diag_{5,2} := .37206262985996195732$$

$$diag_{5,3} := -.17872257417128196505$$

$$diag_{5,4} := .43004244543468559497$$

$$diag_{5,5} := 1.0000000000000000001$$

$$diag_{5,6} := .10833045206178434477$$

$$diag_{6,1} := .17925484999538392651$$

$$diag_{6,2} := .73981177376503640526$$

$$diag_{6,3} := -.36417448512527677947$$

$$diag_{6,4} := -.03381513534353700475$$

$$diag_{6,5} := .10833045206178434477$$

$$diag_{6,6} := 1.0000000000000000001$$

>

Annexe D

Programme « Dalle » : Expressions littérales des conditions adhoc.

```
>
> with(linalg):
> s := vector (6) :
> s[1] := I*x+cos(t)*y+sin(t)*z :
> s[2] := I*x+sin(t)*y+cos(t)*z :
> s[3] := cos(t)*x+I*y+sin(t)*z :
> s[4] := sin(t)*x+I*y+cos(t)*z :
> s[5] := cos(t)*x+sin(t)*y+I*z :
> s[6] := sin(t)*x+cos(t)*y+I*z :
> n := 4;
> tet := vector(6):
> k := vector(6):
> zz := vector(6):
> for i from 1 to 6
>   do
>   tet[i] := factor(s[i]^(n-1)):
>   k[i] := factor(s[i]^n) :
>   if i = 1 or i = 3 or i = 5
>   then
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((conjugate(s[i])*tet[i] + s[i]*conjugate(tet[i]))/2))
> ):
>   else
>   zz[i] := evalc(simplify(expand((k[i]+conjugate(k[i]))/2))):
>   fi :
>   zz[i];
>   od:
> lambda := el*nu/(1+nu)/(1-2*nu):
> G := el/(1+nu)/2:
> vv := [ x , y , z ]:
> u := vector(6):
> v := vector(6):
> w := vector(6):
> for ifc to 6
>  do
>   f := [ zz[ifc] , zz[ifc] , zz[ifc] ]:
>   dg := grad(diverge(f,vv),vv):
>   u[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[1],vv),vv)-dg[1])/G):
>   v[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[2],vv),vv)-dg[2])/G):
>   w[ifc] := simplify((2*(1-nu)*diverge(grad(f[3],vv),vv)-dg[3])/G):
>   ee := diff( u[ifc] , x ) + diff( v[ifc] , y ) + diff( w[ifc] , z ):
>   e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x) + G*diverge(grad(u[ifc],vv),vv))
> );
>   e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y) + G*diverge(grad(v[ifc],vv),vv))
> );
>   e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z) + G*diverge(grad(w[ifc],vv),vv)
> ));
>  od:
>
```

```
> ut := vector(6):
> vt := vector(6):
> wt := vector(6):
> for ifc from 1 to 6
>   do
>    ut[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(u[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>    vt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(v[ifc]/(
> 2*pi)),  t = -pi..pi))));
>         wt[ifc] := simplify(subs(cos(pi) = 1,sin(pi) = 0,factor(integrate(simplify(w[if
> c]/(2*pi)),  t = -pi..pi))));
>    ee := diff( ut[ifc] , x ) + diff( vt[ifc] , y ) + diff( wt[ifc] , z ):
>    e1 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,x)) + G*diverge(grad(ut[ifc],vv),vv
> ));
>    e2 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,y)) + G*diverge(grad(vt[ifc],vv),vv
> ));
>    e3 := simplify(expand((lambda + G )*diff(ee,z))+ G*diverge(grad(wt[ifc],vv),vv
> ));
>  od:
> # conditions pour les dalles
> a := vector(6):b := vector(6):  c := vector(6):
> uu := (x,y,z) -> simplify(expand(sum(a['i']*ut['i'],'i' = 1..6))):
> vv := (x,y,z) -> simplify(expand(sum(b['i']*vt['i'],'i' = 1..6))):
> ww := (x,y,z) -> simplify(expand(sum(c['i']*wt['i'],'i' = 1..6))):
> sigmazz := (x,y,z) ->simplify(expand(diff(ww(x,y,z),z))):
> sigmazx := (x,y,z) ->simplify(expand((1/2)*(diff(ww(x,y,z),x)+diff(uu(x,y,z),z)))):
> sigmazy := (x,y,z) ->simplify(expand((1/2)*(diff(ww(x,y,z),y)+diff(vv(x,y,z),z)))):
> cond1 := collect(subs(z = d,sigmazz (x,y,z)),{x,y,d})-q/2;
> cond2 := collect(subs(z = d,sigmazz (x,y,z)),{x,y,d})-q/2;
> cond3 := collect(subs(z = d,sigmazx (x,y,z)),{x,y,d});
> cond4 := collect(subs(z = d,sigmazx (x,y,z)),{x,y,d});
> cond5 := collect(subs(z = d,sigmazy (x,y,z)),{x,y,d});
> cond6 := collect(subs(z = d,sigmazy (x,y,z)),{x,y,d});
> cond7 := factor(combine(uu(x,y,z)+uu(x,y,-z)));
> cond8 := factor(combine(vv(x,y,z)+vv(x,y,-z)));
> cond9 := factor(combine(ww(x,y,z)-ww(x,y,-z)));
>
>
>
>
>
>
Warning: new definition for   norm
Warning: new definition for   trace
```

$$n := 4$$

$$cond1 := 6\,\frac{\left(-c_4\,\nu + 4\,c_6 - c_4 - c_3 + 4\,c_6\,\nu - c_3\,\nu + 4\,c_2 + 4\,c_2\,\nu\right)x}{cl}$$

$$+6\,\frac{\left(4c_4\nu+4c_6\nu-c_1\nu-c_2\nu+4c_4-c_2-c_1+4c_6\right)y}{el}+6\,\big(-3c_4\nu+8c_5\nu$$

$$+16c_5\nu^2-3c_3\nu-8c_3\nu^2-3c_1\nu-8c_1\nu^2-8c_6\nu-3c_2\nu+5c_1-8c_5-8c_6$$

$$-3c_4+5c_3-3c_2\big)\,d/el-\frac{1}{2}q$$

$$cond2 := 6\,\frac{\left(-c_4\nu+4c_6-c_4-c_3+4c_6\nu-c_3\nu+4c_2+4c_2\nu\right)x}{el}$$

$$+6\,\frac{\left(4c_4\nu+4c_6\nu-c_1\nu-c_2\nu+4c_4-c_2-c_1+4c_6\right)y}{el}+6\,\big(-3c_4\nu+8c_5\nu$$

$$+16c_5\nu^2-3c_3\nu-8c_3\nu^2-3c_1\nu-8c_1\nu^2-8c_6\nu-3c_2\nu+5c_1-8c_5-8c_6$$

$$-3c_4+5c_3-3c_2\big)\,d/el-\frac{1}{2}q$$

$$cond3 := 3\,\big(-c_3\nu+4c_2\nu+4c_6\nu-16c_1+4c_6+16c_1\nu^2-c_4-8c_5\nu^2+7c_3-c_4\nu$$

$$+8c_5+4c_2-8c_3\nu^2-a_4+4a_6+4a_2-a_3+4a_2\nu-a_3\nu-a_4\nu+4a_6\nu\big)\,x/el+3$$

$$\big(-c_4\nu-c_3\nu+4c_6\nu+4c_2\nu-c_4+4a_6\nu+8a_1+4a_2-8a_1\nu^2+4a_2\nu-c_3$$

$$+4c_6+4c_2+16a_5\nu^2-a_4-a_3\nu-8a_3\nu^2+7a_3-16a_5-a_4\nu+4a_6\big)\,d/el$$

$$cond4 := 3\,\big(-c_3\nu+4c_2\nu+4c_6\nu-16c_1+4c_6+16c_1\nu^2-c_4-8c_5\nu^2+7c_3-c_4\nu$$

$$+8c_5+4c_2-8c_3\nu^2-a_4+4a_6+4a_2-a_3+4a_2\nu-a_3\nu-a_4\nu+4a_6\nu\big)\,x/el+3$$

$$\big(-c_4\nu-c_3\nu+4c_6\nu+4c_2\nu-c_4+4a_6\nu+8a_1+4a_2-8a_1\nu^2+4a_2\nu-c_3$$

$$+4c_6+4c_2+16a_5\nu^2-a_4-a_3\nu-8a_3\nu^2+7a_3-16a_5-a_4\nu+4a_6\big)\,d/el$$

$$cond5 := -3\,\big(8c_5\nu^2-16c_3\nu^2-4c_4\nu+c_1\nu+c_2-4c_6\nu+b_1+b_2-4b_4-4b_6$$

$$+8c_1\nu^2+16c_3-8c_5+c_2\nu-4c_6-4c_4-7c_1+b_1\nu+b_2\nu-4b_4\nu-4b_6\nu\big)\,y/$$

$$el-3\,\big(-4c_4\nu+c_1\nu-4c_6\nu+c_2\nu+c_1+b_1\nu+8b_1\nu^2+b_2\nu-7b_1+b_2-8b_3$$

$$-4b_4+16b_5-4c_6+c_2-4c_4-4b_6\nu+8b_3\nu^2-4b_4\nu-16b_5\nu^2-4b_6\big)\,d/el$$

$$cond6 := -3\,\big(8c_5\nu^2-16c_3\nu^2-4c_4\nu+c_1\nu+c_2-4c_6\nu+b_1+b_2-4b_4-4b_6$$

$$+8c_1\nu^2+16c_3-8c_5+c_2\nu-4c_6-4c_4-7c_1+b_1\nu+b_2\nu-4b_4\nu-4b_6\nu\big)\,y/$$

$$el - 3\left(-4 c_4 \nu + c_1 \nu - 4 c_6 \nu + c_2 \nu + c_1 + b_1 \nu + 8 b_1 \nu^2 + b_2 \nu - 7 b_1 + b_2 - 8 b_3 - 4 b_4 + 16 b_5 - 4 c_6 + c_2 - 4 c_4 - 4 b_6 \nu + 8 b_3 \nu^2 - 4 b_4 \nu - 16 b_5 \nu^2 - 4 b_6\right) d / el$$

$$cond7 := 6(1+\nu)\left(-8 \nu a_1 y^2 + 16 \nu a_5 z^2 - 8 \nu a_1 z^2 + 16 \nu a_3 y^2 - 8 a_1 x^2 + 8 a_1 y^2 + 8 a_1 z^2 + 4 a_2 z^2 + 4 a_2 y^2 - 8 a_2 x^2 + 7 a_3 z^2 - 16 a_3 y^2 + 5 a_3 x^2 + 4 a_4 y^2 - 3 a_4 x^2 - a_4 z^2 + 5 a_5 x^2 + 7 a_5 y^2 - 16 a_5 z^2 + 4 a_6 z^2 - 3 a_6 x^2 - a_6 y^2 + 16 a_1 \nu x^2 + 8 a_2 x z + 8 a_2 y x - 8 a_3 \nu z^2 - 8 a_3 \nu x^2 - 2 a_3 x z + 8 a_4 y x - 2 a_4 x z - 8 a_5 \nu x^2 - 8 a_5 y^2 \nu - 2 a_5 y x + 8 a_6 x z - 2 a_6 y x\right) / el$$

$$cond8 := 6(1+\nu)\left(-8 \nu b_3 x^2 + 16 \nu b_1 x^2 - 8 \nu b_3 z^2 + 16 \nu b_5 z^2 + 8 b_4 y x - 8 b_3 y^2 - 3 b_2 y^2 + 8 b_4 y z - 8 b_5 \nu x^2 - 8 b_5 y^2 \nu - 2 b_5 y x + 16 b_3 y^2 \nu - 2 b_2 y z + 8 b_2 y x - 2 b_1 y z - 8 b_1 \nu z^2 - 8 b_1 y^2 \nu + 8 b_3 z^2 + 8 b_6 y z - 2 b_6 y x + 7 b_1 z^2 - 16 b_1 x^2 + 4 b_2 x^2 - b_2 z^2 + 8 b_3 x^2 - 8 b_4 y^2 + 4 b_4 z^2 + 4 b_4 x^2 + 7 b_5 x^2 + 5 b_5 y^2 - 16 b_5 z^2 + 5 b_1 y^2 + 4 b_6 z^2 - b_6 x^2 - 3 b_6 y^2\right) / el$$

$$cond9 := 0$$

>