

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

Unité de Formation et de Recherche
Sciences Exactes et Appliquées

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT UNIQUE

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option : GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

**SUR LES DÉFORMATIONS INFINITÉSIMALES DES FLOTS
ET LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES FIBRÉS
UNITAIRES DE CERTAINS ESPACES
SYMÉTRIQUES DE RANG UN**

par

Mikailou COMPAORÉ

Soutenue le 28 juin 2007, devant le jury composé de :

Michel N'GUIFFO BOYOM , Professeur, Université de Montpellier II	Président
Edmond FÉDIDA , Professeur, Université de Cocody d'Abidjan	Membre
Joël TOSSA , Professeur, IMSP Université d'Abomey Calavi	Membre
Akry KOULIBALY , Professeur, Université de Ouagadougou	Membre
Moussa OUATTARA , Professeur, Université de Ouagadougou	Membre
Alfred TOURÉ , Maître Assistant, Université de Ouagadougou	Invité

REMERCIEMENTS

Je souhaite, en premier lieu, exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Michel BOYOM N'GUIFFO et au Professeur Chérif BADJI qui ont bien voulu être les rapporteurs externes de mon mémoire de thèse. Leurs suggestions et conseils m'ont permis d'améliorer le contenu scientifique de ce mémoire. Je les remercie également d'avoir accepté de faire partie du jury de soutenance.

Je témoigne également ma reconnaissance au Professeur Edmond FEDIDA qui a guidé mes premiers pas dans ce travail et suggéré le thème de recherche de la première partie. Je garde pour lui un souvenir inoubliable et le remercie d'avoir accepté de faire le déplacement pour participer à mon jury de thèse.

Je remercie vivement le Professeur Joel TOSSA qui a bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

Le Professeur Akry KOULIBALY m'a suivi pas à pas dans ce travail. C'est grâce à ses conseils, à son soutien moral indéfectible, à son abnégation et à son dévouement que nous avons pu aboutir aujourd'hui à ces résultats. Cher Professeur Akry KOULIBALY, je vous renouvelle mes sincères remerciements.

Je remercie également le Professeur Moussa OUATTARA pour son efficacité dans la gestion administrative de mon dossier, pour ses conseils multiples et aussi pour sa participation au Jury.

Je remercie grandement le Dr Alfred TOURE qui m'a assisté assidûment tout au long de travail par ses conseils et suggestions répétés. Je lui suis également reconnaissant d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes remerciements s'adressent également au Professeur Karfa TRAORE, Directeur de l'UFR/SEA, au Dr PILABRE, aux enseignants de l'UFR/SEA, à tout mes camarades et ami(e)s pour leurs conseils, leur soutien efficace dans la réalisation de ce travail. D'une manière générale, je n'oublie pas tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce document.

Table des Matières

Table des Matières	viii
Résumé	ix
Introduction	1
I Sur les Déformations infinitésimales des feuilletages	5
1 Généralités sur les Feuilletages	6
1.1 Notion de Feuilletages	6
1.1.1 Pseudogroupe de transformations	6
1.1.2 Définition d'un feuilletage	7
1.1.3 Définition d'une feuille	8
1.1.4 Feuilletages et intégrabilité	9
1.2 Quelques types de feuilletages	11
1.2.1 Feuilletage simple	11
1.2.2 Feuilletage quotient	11
1.2.3 Feuilletage image inverse par une fibration	12
1.2.4 Suspension d'un feuilletage par un groupe de difféomorphismes	12
1.3 Sous-variétés transverses ; feuilles propres	13

1.3.1	Sous-variété transverse	13
1.3.2	Feuille propre ; feuille localement dense	13
1.4	L'holonomie des feuilles	14
1.4.1	Le glissement le long des feuilles d'un feuilletage	14
1.4.2	Cas général	15
1.4.3	Le groupe fondamental de la feuille F en x_0	16
1.5	Feuilletages et Γ -Structures	16
1.5.1	Γ -cocycle	17
1.6	Feuilletages de Lie	18
1.6.1	Définition	19
1.6.2	Exemples	19
2	Déformations des Feuilletages	21
2.1	Définitions	21
2.1.1	Déformation d'un feuilletage	22
2.1.2	Déformation à type différentiable fixé	22
2.2	Déformations infinitésimales	23
2.2.1	Définition	24
2.2.2	Champs de vecteurs feuilletés	24
2.2.3	Le faisceau fondamental Θ	25
2.2.4	Déformations infinitésimales d'un feuilletage suspension	26
2.2.5	Déformations infinitésimales de l'holonomie d'une feuille	28
2.3	Le théorème Kodaira-Spencer-Kuranishi [16]	29
3	Groupe de Cohomologie $H^1(\mathbb{Z}; \chi(F))$	31
3.1	Introduction	31
3.2	Représentations linéaires des groupes compacts dans les espaces de Hilbert	32

3.2.1	Définition	32
3.2.2	Le théorème de Peter-Weyl	34
3.2.3	Les représentations linéaires du groupe $SO(3)$	37
3.3	Résolution de l'équation (*) dans $C^\infty(S^2)$	41
3.3.1	Résolution de l'équation (*) dans E_{2j+1}	42
3.3.2	Résolution de l'équation (*) dans $C^\infty(S^2)$	44
3.4	Description des solutions de l'équation (E)	45
3.5	Description du groupe $H^1(M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$	46
Bibliographie		49
 II Géométrie différentielle des fibrés unitaires de certains espaces symétriques de rang 1		52
 1 Quelques Rappels		53
1.1	Métriques de Levi-Civita du fibré unitaire	53
1.2	Espaces homogènes	54
1.2.1	Définition	54
1.2.2	Définition	56
1.2.3	Définition	57
1.3	Espaces symétriques de rang 1	57
	théorème 1	57
1.3.1	Définition	58
1.4	Espace projectif des quaternions	58
 2 Le fibré unitaire du projectif quaternionien $P^n\mathbb{H}$		62
2.1	Le fibré unitaire $UP^n\mathbb{H}$ vu comme espace homogène sous $Sp(n+1)$	62
2.2	Le fibré unitaire vu comme espace homogène sous $Sp(n+1) \times SO(2)$	64

2.3	Métriques homogènes sur la variété des géodésiques de $P^n\mathbb{H}$	66
3	Le fibré unitaire du plan projectif de Cayley UP^2Ca	69
3.1	Algèbres de Lie semi-simples	69
3.1.1	Algèbres de Lie nilpotentes et algèbres de Lie résolubles	69
a)	Suite centrale descendante	69
b)	Dérivés successifs	70
3.1.2	Algèbres de Lie semi-simples	70
a)	Définition d'une algèbre de Lie semi-simple	70
b)	Le critère de Cartan-Killing	71
c)	Décomposition des algèbres de Lie semi-simples	71
d)	Eléments semi-simples et éléments nilpotents	72
e)	Théorème de complète réductibilité	72
f)	Passage du réel au complexe	73
3.2	Sous algèbres de Cartan	73
3.2.1	Définition des sous algèbres de Cartan	73
3.2.2	Eléments réguliers, rang	74
3.2.3	Sous algèbre de Cartan associée à un élément régulier	74
3.2.4	Conjugaison des sous algèbres de Cartan	75
3.2.5	Le cas semi-simple	75
3.2.6	Algèbres de Lie réelles	76
3.3	Système de racines d'une algèbre de Lie semi-simple complexe	76
3.3.1	Symétries	77
3.3.2	Systèmes de racines	78
3.3.3	Système inverse	79
3.3.4	Bases	80
3.3.5	Matrice de Cartan	82

3.3.6	Système de racines irréductibles	82
3.3.7	Construction des systèmes de racines irréductibles	83
3.3.8	Systèmes de racines complexes	83
3.4	Structure des algèbres de Lie semi-simples	85
3.4.1	Décomposition de \mathfrak{g}	85
3.4.2	Bases de Weyl	87
3.4.3	La normalisation de Chevalley	89
3.4.4	Construction des algèbres de Lie semi-simples par générateurs et relations	90
3.5	Rappels sur P^2Ca	90
3.5.1	Doublage d'algèbres, Octaves ou nombres de Cayley	90
3.5.2	Le plan projectif de Cayley P^2Ca	92
3.6	Les groupes F_4 et $Spin(n)$	94
3.6.1	Le groupe de Lie F_4	94
3.6.2	Algèbres de Clifford	95
3.6.3	Groupes $Pin(k)$ et $Spin(k)$	96
3.6.4	P^2Ca est un espace homogène sous F_4	98
3.7	Le fibré unitaire de P^2Ca vu comme espace homogène sous F_4	100
3.8	Métriques homogènes de UP^2Ca sous F_4	103
	Annexe	112
	Bibliographie	119

Résumé

Cette thèse étudie dans sa première partie le problème de la déformation infinitésimale des structures feuilletées qui n'est que le prolongement de celui posé dans les années 1950 par K.Kodaira et D.C Spencer concernant les déformations infinitésimales des structures complexes sur les espaces complexes. Dans les deux cas les classes d'équivalence des transformations infinitésimales sont en correspondance biunivoque avec respectivement $H^1(M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ et $H^1(M, \theta)$. On montre que dans le cas d'un flot obtenu en suspendant un difféomorphisme d'une variété F compact, $H^1(M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ est exactement la 1-cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, \chi(F))$ du groupe \mathbb{Z} à valeur dans le \mathbb{Z} module $\chi(F)$. Puis on détermine $H^1(\mathbb{Z}, \chi(F))$ dans le cas où $F = SO(3)$

La seconde partie est consacrée à l'étude de la structure homogène des fibrés unitaires de certains espaces symétriques compacts de rang 1 notamment $P^n\mathbb{H}$ et $P^2\mathbb{C}a$. Dans le cas de $P^n\mathbb{H}$ on a construit deux structures homogènes et déterminer toutes les métriques invariantes. Ensuite la variété des géodésiques de $P^n\mathbb{H}$ a été étudié du même point de vue. Enfin pour $P^2\mathbb{C}a$ on a étudié la structure homogène qui est $F_4/spin7$ et on a également déterminer les métriques $Ad_{spin7}F_4$ -invariantes en utilisant le système de poids et racines .

Introduction

Cette thèse comporte deux grandes parties. la première partie est consacrée à l'étude des déformations infinitésimales des feuilletages et la seconde porte sur la géométrie différentielle des fibrés unitaires de certains espaces symétriques de rang 1.

La théorie des feuilletages généralise la théorie des systèmes dynamiques dont l'étude a été introduite par le mathématicien Henri Poincaré à la fin du XIX^{ème} siècle. C'est l'étude qualitative des trajectoires maximales d'un champ de vecteurs sans singularités sur une variété M de dimension n et qui consiste en l'étude des courbes intégrales maximales d'un champ de vecteurs X . Ces courbes définissent une partition de M en sous variétés immergées de dimension un.

Plus généralement un « feuilletage de codimension q » sur M définira une partition \mathcal{F} de M en sous variétés de dimension $n - q$: les feuilles. La première image globale qui vient à l'esprit est celle d'un empilement de « plaques » ; regardé par la tranche, un tel empilement fera voir l'ensemble des plaques comme une sous variété quotient N de dimension q , la projection naturelle $\pi : M \longrightarrow N$ étant une submersion.

En réalité, cette image correspond à un cas particulier de feuilletage, celui des feuilletages « simples ».

En général, c'est seulement localement (dans un ouvert simple) qu'un feuilletage se présente comme un empilement de plaques. Globalement une même feuille peut venir recouper l'ouvert simple U suivant une infinité de plaques.

La notion de feuilletage a été introduite par C. Ehresmann et G. Reeb, et l'étude de la topologie et de la géométrie globale des « variétés feuilletées » a donné lieu à un ensemble de travaux extraordinairement riche et varié.

C'est à l'étude d'une propriété très particulière connue sous le nom de « déformations des feuilletages » que les présentes notes sont consacrées. L'origine de la théorie générale des déformations des feuilletages est l'étude des déformations des variétés complexes et de beaucoup d'autres pseudogroupes, initiée par Kodaira et Spencer [18], puis complétée par Kuranishi [19] qui a prouvé l'existence d'un espace analytique paramétrant une déformation.

De façon concrète soit \mathcal{F} un feuilletage de dimension m et de codimension n sur une variété compacte M . L'expression « coordonnées locales » va toujours signifier un système $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ pour lequel le feuilletage \mathcal{F} est défini localement par des équations

$$dy_1 = dy_2 = \dots = dy_n = 0.$$

On note TM le fibré tangent à M , $T\mathcal{F}$ Le fibré tangent à \mathcal{F} , $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = TM/T\mathcal{F}$ le fibré normal à \mathcal{F} , $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$, sera le faisceau des germes de champs de vecteurs qui s'écrivent localement :

$$\sum_i a_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

i. e. les automorphismes infinitésimaux (locaux) de \mathcal{F} . On munit l'espace $\mathcal{F}(M, m)$ des feuilletages de dimension m sur M de la topologie \mathcal{C}^∞ (convergence uniforme sur les compacts de toutes les dérivées); ceci est toujours possible puisque cet espace est un fermé de l'espace des sections globales de classe \mathcal{C}^∞ du fibré $\mathcal{G}(M, m) \rightarrow M$ de fibre au point $x \in M$ la grassmannienne des m -plans dans $T_x M$. On appelle alors déformation de \mathcal{F} paramétrée par un espace topologique S (dans notre cas ce sera toujours un intervalle ouvert de \mathbb{R} du type $] - \epsilon, \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$ « assez petit ») une application continue :

$$S \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}(M, m).$$

Pour étudier les déformations de $\mathcal{F}(M, m)$ il est d'usage de commencer par voir comment sont les déformations du fibré $T\mathcal{F}$ (en tant que section de $\mathcal{G}(M, m) \rightarrow M$) qu'on appelle déformations infinitésimales de \mathcal{F} ; celles-ci sont décrites par le groupe de cohomologie $H^1(M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ [16]. Ce groupe a donc beaucoup d'importance et son

calcul n'est connu que dans très peu de situations. Pour un flot (i. e. $m = 1$) obtenu en suspendant un difféomorphisme φ d'une variété compacte F , $H^1(M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ est exactement la 1-cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, \chi(F))$ du groupe \mathbb{Z} à valeurs dans le \mathbb{Z} -module $\chi(F)$ des champs de vecteurs sur F ; c'est aussi le quotient de $\chi(F)$ par le sous espace $\mathcal{B} \in \chi(F)$ des éléments de la forme $X - \varphi^*(X)$ avec X variant dans $\chi(F)$. (ici $\varphi^*(X)$ désigne l'image réciproque du champ X par le difféomorphisme φ . Il y a donc une action de \mathbb{Z} sur le module $\chi(F)$).

Un calcul du groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, \chi(F))$ sera donc développé dans notre exposé, précédé d'un bref aperçu sur les feuilletages et les déformations des feuilletages.

Le chapitre 1 est consacré aux généralités sur les feuilletages. On y rappelle la définition d'un feuilletage suivie de quelques propriétés géométriques comme les notions d'holonomie et de Γ -structures transverses. Quelques résultats sur les feuilletages de Lie complètent ce chapitre.

Le chapitre 2 traitera des déformations des feuilletages, on commencera par rappeler la définition d'une déformation, puis on étudiera les déformations infinitésimales d'un feuilletage et celles de l'holonomie d'une feuille. Un énoncé du théorème Kodaira-Spencer-Kuranishi viendra clore ce chapitre.

Enfin dans le chapitre 3 on fera un bref rappel de la théorie des représentations linéaires d'un groupe de Lie compact, puis on se servira de ces résultats pour calculer le groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, \chi(F))$.

Sa détermination se fera dans le cas d'un feuilletage de Lie obtenu en suspendant un difféomorphisme ce qui pourrait ouvrir la voie à l'étude plus complète des déformations de cette classe de feuilletages.

Abordons à présent la seconde partie de cette thèse.

Un espace homogène est une variété difféomorphe à un espace quotient G/H où G est un groupe de Lie compact et H un sous groupe de Lie de G . La topologie de ces espaces homogènes est assez bien comprise.

Par contre la géométrie de ces espaces pose de nombreux problèmes. Si M est difféomorphe à G/H , il existe sur M des métriques riemanniennes G -invariantes. A l'aide

d'exemples simples on peut mettre en évidence les faits suivants :

- a) Une même variété peut se mettre sous la forme G/H avec G effectif de plusieurs façons.
- b) Pour un même groupe G opérant transitivement sur M , il existe en général une famille de métriques riemanniennes G -homogènes :
on a un espace de modules qui, sauf dans le cas des groupes compacts, est assez mal connu.

La représentation linéaire d'isotropie est équivalente à l'action de $Ad(H)$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Si cette représentation est irréductible il y a sur G/H une unique métrique G -homogène. Un sous cas important est celui des espaces symétriques (irréductibles) classés par Elie Cartan. Ces espaces admettent de belles caractérisations géométriques. Notamment, une variété riemannienne (M, g) est localement isométrique à un espace symétrique si et seulement si son tenseur de courbure est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita.

Dans cette thèse nous étudions une classe particulièrement intéressante d'espaces homogènes définis de façon géométrique à savoir les fibrés unitaires des espaces projectifs quaternioniens et le fibré unitaire du plan de Cayley quand les variétés de base sont munies de leur métrique d'espaces symétriques. Malgré la simplicité de leur définition, ces espaces font apparaître les difficultés aux quelles se heurtent l'étude des espaces homogènes; ils sont homogènes sous plusieurs groupes et ne sont jamais à isotropie irréductible. Pour ce qui concerne le plan de Cayley nous n'avons étudié que sa structure homogène sous le groupe de Lie F_4 .

Enfin nous étudions au passage par le biais du flot géodésique, la variété des géodésiques de $P^n\mathbb{H}$ (le projectif quaternionien). C'est aussi un espace homogène qui n'est pas à isotropie irréductible. Nous déterminons l'ensemble des métriques $Sp(n+1)$ -homogènes sur cette variété.

Première partie

Sur les Déformations infinitésimales
des feuilletages

Chapitre 1

Généralités sur les Feuilletages

Dans ce chapitre nous rappellerons d'abord très brièvement les notions de feuilletages, d'holonomie d'un feuilletage, puis nous étudierons les structures transverses et les Γ structures. Quelques résultats sur les feuilletages de Lie viendront clore le chapitre.

1.1 Notion de Feuilletages

Nous commençons par définir la notion de pseudogroupe de transformations que nous utiliserons pour définir les feuilletages et les structures transverses.

1.1.1 Pseudogroupe de transformations

Un *pseudogroupe de transformations* de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ est une famille Γ de difféomorphismes locaux de \mathbb{R}^n telle que :

P1 : Si $\varphi \in \Gamma$, alors $\varphi^{-1} \in \Gamma$.

P2 : Si $\varphi : U \longrightarrow U'$ et $\varphi' : U' \longrightarrow U''$ appartiennent à Γ , alors $\varphi \circ \varphi'$ aussi appartient à Γ .

P3 : Si $\varphi : U \longrightarrow U'$ appartient à Γ , alors sa restriction à l'ouvert $U_1 \subset U$ appartient à Γ .

P4 : Si $\varphi : U \longrightarrow U'$ est un difféomorphisme local de \mathbb{R}^n qui coïncide, au voisinage de chaque point de U avec un élément de Γ alors $\varphi \in \Gamma$.

P5 : L'application identique de \mathbb{R}^n appartient à Γ .

Soit p un entier, $0 < p < n$ et notons $q = n - p$. On identifie \mathbb{R}^n au produit $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et on désigne par π la projection naturelle $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$.

On appelle *espace vertical* en un point u de \mathbb{R}^n le noyau de l'application tangente π_* en ce point.

L'ensemble $\Gamma_{n,q}$ des difféomorphismes locaux de \mathbb{R}^n dont l'application linéaire tangente en ce point envoie l'espace vertical en ce point sur l'espace vertical image de ce point, (en d'autres termes, $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$), est un élément de $\Gamma_{n,q}$ s'il est localement projectable par π sur \mathbb{R}^q (est un pseudogroupe de transformation de \mathbb{R}^n).

1.1.2 Définition d'un feuilletage

Un atlas feuilleté de dimension p et de codimension q sur une variété différentiable M de dimension n est un atlas \mathcal{A} de la variété V^n pour lequel les changements de cartes appartiennent à $\Gamma_{n,q}$. On dit encore que \mathcal{A} est un $\Gamma_{n,q}$ -atlas.

Un *feuilletage* \mathcal{F} de codimension q sur M est un atlas feuilleté de codimension q maximal.

Cette structure de variété feuilletée \mathcal{F} détermine également sur V^n une structure de variété différentiable de classe C^∞ et de dimension p . La topologie correspondante est appelée *topologie fine* de M associée à \mathcal{F} : elle est en effet plus fine que la topologie « initiale » correspondant à sa structure de variété de dimension n (que l'on considère dans la suite comme structure de base).

Les sources des cartes de \mathcal{F} ayant pour image un polytope de \mathbb{R}^n forment une base de la topologie de M . On les appelle les *ouverts distingués* pour \mathcal{F} . Leurs composantes connexes pour la topologie fine de M associée à \mathcal{F} forment une base pour cette topologie fine et sont appelées les *plaques* de \mathcal{F} .

1.1.3 Définition d'une feuille

Une *feuille* du feuilletage \mathcal{F} sur M est une composante connexe de M pour la topologie fine associée à \mathcal{F} .

Les feuilles d'un feuilletage \mathcal{F} sur M définissent une partition de M en sous variétés connexes de classe C^∞ et de dimension p . On note M/\mathcal{F} l'espace des feuilles correspondant.

Le *saturé* d'un sous espace A de M pour \mathcal{F} est alors la réunion de toutes les feuilles de \mathcal{F} rencontrant A ; on dit que A est saturé si cette réunion est A lui-même.

Proposition 1. *La relation d'équivalence associée à une structure de variété feuilletée est ouverte.*

En effet soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M par des ouverts distingués pour \mathcal{F} et soit ρ_i la relation d'équivalence sur M identifiant les points d'une même plaque de \mathcal{F} dans U_i . Chacune de ces relations est ouverte et la relation d'équivalence associée à \mathcal{F} est la réunion des ρ_i .

Cependant cette relation d'équivalence n'est pas en générale fermée. Elle ne l'est que lorsque par exemple toute feuille de \mathcal{F} est fermée et possède un système fondamental de voisinages saturés pour \mathcal{F} .

corollaire 1. *Si un sous espace de M est saturé pour \mathcal{F} il en est de même de son complémentaire, de son adhérence, de son intérieur et de sa frontière.*

En particulier l'adhérence d'une feuille F de \mathcal{F} est un fermé connexe saturé pour \mathcal{F} . On dit alors d'une feuille de \mathcal{F} contenue dans \bar{F} qu'elle est *adhérente* à F .

Proposition 2. *Soit M une variété de dimension n et de classe C^∞ , et deux entiers p et q tel que $0 < p < n$ et $q = n - p$.*

La donnée d'un feuilletage \mathcal{F} de classe C^∞ et de dimension p sur M est équivalente à la donnée :

- d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de V^n ;

- d'une famille de submersions $(f_i)_{i \in I}$, $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^∞ de façon qu'au voisinage de chaque point de $U_i \cap U_j$ on ait $f_j = g_{ji} \circ f_i$ avec g_{ji} dans $Diff_{loc}^\infty(\mathbb{R}^q)$

En effet pour chaque carte $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ de la variété feuilletée de codimension q de classe C^∞ déterminée par un feuilletage \mathcal{F} de M , la seconde composante k_i de φ_i est une submersion de U_i dans \mathbb{R}^q ; et pour chaque point x de $U_i \cap U_j$ il existe une application de transition g_{ji} dans $Diff^\infty(\mathbb{R}^q)$ telle que $k_j = g_{ji} \circ k_i$ d'où la proposition.

Ainsi, une submersion k de M dans \mathbb{R}^q détermine un feuilletage de codimension q de V^n dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres de k .

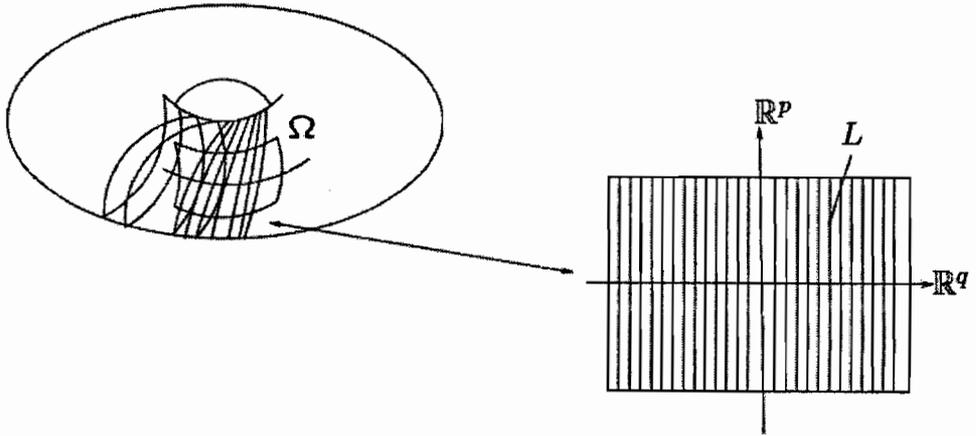


FIG. 1.1 – Un tore feuilleté

1.1.4 Feuilletages et intégrabilité

Le fibré tangent à un feuilletage \mathcal{F} de classe C^∞ et de dimension p d'une variété différentiable V^n détermine sur V^n un système différentiel S de classe C^∞ et de dimension p complètement intégrable. Inversement selon le théorème de Frobenius[3], un système différentiel de classe C^∞ et de dimension p complètement intégrable détermine un feuilletage de classe C^∞ et de dimension p ayant pour feuilles les sous variétés

intégrales maximales de ce système.

La correspondance ainsi établie entre feuilletages et systèmes différentiels S de classe C^∞ complètement intégrables est biunivoque et analytique.

Un *système différentiel* S de classe C^∞ et de dimension p sur une variété V^n est déterminé par la donnée en chaque point x_0 de V^n d'un sous espace P_{x_0} de $T_{x_0}V^n$ de dimension p , et tel que $\forall x_0 \in V^n$ il existe un voisinage U de x_0 , et X_1, X_2, \dots, X_p , p champs de vecteurs différentiables sur V^n et linéairement indépendants de classe C^∞ engendrant le sous espace P_y en tout point y de U .

Désignons par $\chi_S = \{X \in \chi(V^n); \forall x \in V^n, X_x \in P_x\}$ le sous module associé au système différentiel S . La condition de complète intégrabilité du système différentiel S est alors

$$[\chi_S, \chi_S] \subset \chi_S.$$

De façon duale le fibré tangent du feuilletage \mathcal{F} est caractérisé par un système de Pfaff \mathcal{P} de classe C^∞ et de rang $q = n - p$ complètement intégrable s'annulant sur χ_S .

Un *système de Pfaff* \mathcal{P} de rang q et de classe C^∞ sur une variété V^n est déterminé par la donnée en chaque point x_0 de V^n d'un sous espace $P_{x_0}^*$ de $T_{x_0}^*V^n$ de dimension $n - q$, et tel que $\forall x_0 \in V^n$ il existe un voisinage U de x_0 , et $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$, q formes différentielles sur V^n linéairement indépendants de classe C^∞ engendrant le sous espace P_y^* en tout point de U .

Désignons par $\Lambda(\mathcal{P}) = \{\omega \in \Lambda(V^n), \omega_x \in P_x^*, \forall x \in V^n\}$, et par $\mathcal{I}(\Lambda(\mathcal{P}))$ l'idéal engendré par $\Lambda(\mathcal{P})$.

La condition de complète intégrabilité se traduit alors par :

$$d\Lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{I}(\Lambda(\mathcal{P}))$$

Remarque : La feuille F_{x_0} du feuilletage \mathcal{F} passant par x_0 est alors l'ensemble des points de M que l'on peut atteindre à partir de x_0 par un chemin continûment différentiable par morceaux dont le (ou les) vecteur(s) tangent(s) en chaque point x appartient à F_x .

1.2 Quelques types de feuilletages

1.2.1 Feuilletage simple

Soit M une variété de dimension n , $\pi : M \rightarrow N$ une submersion de M dans une variété N de dimension q . Le système différentiel $\mathcal{S} = \ker \pi_*$ est complètement intégrable. Le feuilletage correspondant \mathcal{F} a pour feuilles les composantes connexes des préimages par π des points de N . On dit que le feuilletage est défini par la submersion π . Les feuilles sont des sous variétés propres fermées [9].

Si en outre les préimages par π des points de N sont *connexes*, on dira que *le feuilletage \mathcal{F} est simple*. En identifiant N à M/\mathcal{F} on note que la topologie de N est exactement la topologie quotient M/\mathcal{F} et sa structure de variété est entièrement déterminée par la condition que la projection canonique $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ soit une submersion.

Considérons une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) quelconque. U étant un ouvert quelconque de M , soit \mathcal{F}_U le feuilletage induit par \mathcal{F} sur U . On dira que U est *un ouvert simple* dans M pour \mathcal{F} si \mathcal{F}_U est un feuilletage simple. Le feuilletage est alors défini dans U par la projection $\pi_U : U \rightarrow \bar{U}$ sur une variété quotient locale. On observera que tout point de M admet une base de voisinages ouverts simples pour \mathcal{F} . Il suffira pour cela de considérer une carte feuilletée $\varphi : U \rightarrow \Omega$ dont on a restreint le domaine de façon que Ω soit un pavé de \mathbb{R}^n .

1.2.2 Feuilletage quotient

Soit G un sous groupe discret de $Diff^\infty(V^n)$ opérant différemment, proprement, et librement sur une variété différentiable V^n de classe \mathcal{C}^∞ :

la projection $p : V^n \rightarrow V^n/G$ est un revêtement.

Soit \mathcal{F} un feuilletage de classe \mathcal{C}^r et de dimension p sur V^n invariant par G , c'est-à-dire $g_*\mathcal{F} = \mathcal{F}$ pour tout $g \in G$, il existe un feuilletage \mathcal{F}/G sur V^n/G de même nature que \mathcal{F} et un seul tel que si p_U est un difféomorphisme d'un ouvert U de V^n sur un ouvert V de V^n/G alors les traces des feuilles de \mathcal{F}/G sont les images par p_U

des traces des feuilles \mathcal{F} sur U . $(\mathcal{F}/G)_U = p^*(\mathcal{F}_U)$.

\mathcal{F}/G est le *feuilletage quotient* du feuilletage \mathcal{F} par le groupe G . Les feuilles de \mathcal{F} sont les revêtements de celles de \mathcal{F}/G .

1.2.3 Feuilletage image inverse par une fibration

Soient M et V^n deux variétés différentiables, $\pi : M \longrightarrow V^n$ une fibration localement triviale de fibre F , et \mathcal{F} un feuilletage de classe \mathcal{C}^r et de dimension p sur V^n . Le feuilletage $\pi_*\mathcal{F}$ image inverse de \mathcal{F} par la fibration π est le feuilletage dont les feuilles sont dans M les composantes connexes des inverses par π des feuilles de \mathcal{F} .

Les feuilles de \mathcal{F} sont pour la projection π des fibrés localement triviaux ayant pour fibre type des réunions des composantes connexes de F .

En particulier,

Si π est un revêtement de V^n , les feuilles de $\pi_*\mathcal{F}$ sont des revêtements de celles de \mathcal{F} .

Si \mathcal{F} est le feuilletage trivial de V^n par ses points, les feuilles de $\pi_*\mathcal{F}$ sont des composantes connexes des fibres de π . Dans ces conditions on dit que le feuilletage $\pi_*\mathcal{F}$ est simple et est déterminé par la fibration π .

Si π est un difféomorphisme, les feuilles de $\pi_*\mathcal{F}$ sont des images par π^{-1} des feuilles de \mathcal{F} .

1.2.4 Suspension d'un feuilletage par un groupe de difféomorphismes

Considérons une variété différentiable connexe B de dimension p et une variété différentiable connexe T de dimension q . Soit $\rho : \pi_1(B; x_0) \longrightarrow \text{Diff}(T)$ un homomorphisme du groupe fondamental de B dans le groupe des difféomorphismes de T . Sur le produit cartésien $\tilde{V} = T \times \hat{B}$ de T par le revêtement universel de B (identifié aux classes d'homotopie de chemins issus de x_0), la première projection $pr_1 : \tilde{V} \longrightarrow T$ définit un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de codimension q .

On définit sur \tilde{V} une action différentiable de $\pi_1(B; x_0)$ en posant, pour tout

$$[\gamma] \in \pi_1(B; x_0) : R_{[\gamma]}(y, \hat{x}) = (\rho([\gamma]^{-1})(y), \hat{x} \cdot [\gamma])$$

On note V l'ensemble des orbites de $\pi_1(B; x_0)$ par cette action, et $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la projection canonique. L'élément de V défini par (y, \hat{x}) sera noté (y, \hat{x}) . Si on se place dans l'ouvert $T \times \hat{U}$ de \tilde{V} , où \hat{U} est la préimage d'un ouvert U simplement connexe de B par $\hat{p} : \hat{B} \rightarrow B$, la correspondance $(y, \hat{x}) \mapsto (y, \hat{p}(\hat{x}))$ définit une bijection ϕ_U de $\pi(T \times \hat{U})$ sur $T \times U$. Il existe une unique structure de variété sur V pour laquelle les ϕ_U sont des difféomorphismes locaux. Pour cette structure, $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est un étalement. Comme $R_{[\gamma]}$ envoie les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$, la projection sur V définit un feuilletage \mathcal{F} de codimension q de V dont les feuilles sont les projections de celles de $\tilde{\mathcal{F}}$. La projection $p : V \rightarrow B$ définie par $p((y, \hat{x})) = \hat{p}(\hat{x})$ est une fibration localement triviale de fibre -type T . On voit alors que les feuilles de \mathcal{F} sont *transverses aux fibres de la fibration p* .

1.3 Sous-variétés transverses ; feuilles propres

1.3.1 Sous-variété transverse

Soit T une sous variété immergée de M de dimension q . T est dite *sous-variété transverse* de \mathcal{F} si, en tout point de T l'espace tangent à T est supplémentaire de l'espace tangent à la feuille passant par x .

Lemme 1. [9] : *Le saturé d'une sous-variété transverse de \mathcal{F} est ouvert.*

1.3.2 Feuille propre ; feuille localement dense

Une feuille F d'une structure de variété feuilletée \mathcal{F} sur une variété M est *propre* (resp. *localement dense*) si la topologie fine de F coïncide avec celle induite par M (resp. s'il existe un ouvert de M dans lequel F est dense).

Proposition 3. [9] : *Si F_{x_0} est la feuille de \mathcal{F} passant par x_0 , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) F_{x_0} est propre

(ii) Il existe une sous-variété transverse T telle que : $T \cap F_{x_0} = \{x_0\}$

1.4 L'holonomie des feuilles

1.4.1 Le glissement le long des feuilles d'un feuilletage

Considérons T et T' deux sous-variétés transverse d'un feuilletage \mathcal{F} de V . L'objet de ce paragraphe est de définir une application de T dans T' qui à un point x de T fait correspondre un point x' de T' situé sur la même feuille. Seulement la difficulté, voir *fig.1*, reside au fait que la feuille passant par x peut ne pas rencontrer T' , ou au contraire la rencontrer en plusieurs points.

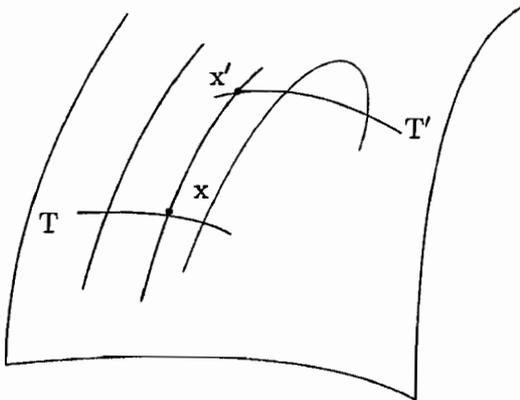


fig.1

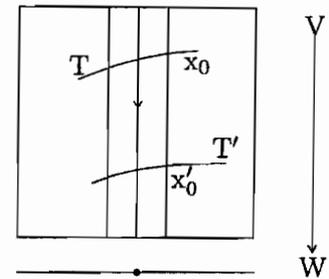


fig.2

Toutefois en se ramenant au cas particulier du feuilletage simple défini par la projection $\pi : V \rightarrow W$ de V sur une variété quotient (voir *fig.2*), on peut considérer deux points quelconques x_0 et x'_0 qui se projettent sur un point y . Il existe alors un voisinage ouvert U de x_0 dans T et un voisinage U' de x'_0 dans T' tel que la relation d'appartenance à la même feuille définisse sans ambiguïté un difféomorphisme de U dans U' qui sera dit glissement le long des feuilles.

1.4.2 Cas général

En revenant au cas général, Soient T et T' deux variétés transverses de \mathcal{F} . Considérons des points $x_0 \in T$ et x'_0 appartenant à la même feuille F .

L'idée suggérée par le cas des feuilletages simples, est de définir le glissement le long des feuilles en suivant une chaîne d'ouverts simples allant de x_0 à x'_0 .

Pour cela choisissons dans F un chemin continu

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow F \text{ avec } \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma(1) = x'_0.$$

Soit $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ une subdivision de $[0, 1]$ telle que, pour $1 \leq i \leq k$, l'image de $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ est contenue dans un ouvert simple U_i . On dira que $\{U_1, \dots, U_k\}$ est une chaîne d'ouverts recouvrant le chemin γ . De la connexité, on déduit que chaque $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ est contenue dans une plaque F_i de l'ouvert U_i . Pour $1 \leq i \leq k-1$ désignons par T_i la sous variété transverse de \mathcal{F} passant par $x_i = \gamma(t_i)$.

Le glissement le long des plaques dans l'ouvert simple U_k définit un difféomorphisme φ_k d'un voisinage ouvert U_{k-1} de x_{k-1} dans T_{k-1} sur un voisinage ouvert U_k de $x'_0 = x_k$ dans T' . Le glissement dans U_{k-1} définit un difféomorphisme φ_{k-1} d'un voisinage ouvert U_{k-2} de x_{k-2} dans T_{k-2} sur un voisinage ouvert U_{k-1} de x_{k-1} dans T_{k-1} , etc \dots , jusqu'à un difféomorphisme φ_1 d'un voisinage ouvert U de x_0 dans T sur un voisinage ouvert U_1 de x_1 dans T_1 , Finalement en posant :

$$U' = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \dots \circ \varphi_1(U)$$

on obtient un difféomorphisme

$$\varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \dots \circ \varphi_1 : U \rightarrow U'$$

d'un voisinage ouvert de x_0 dans T sur un voisinage ouvert de x'_0 dans T' . De plus ce difféomorphisme ne dépend visiblement pas du choix de ces sous variétés transverses T_1, T_2, \dots, T_{k-1} utilisées.

On notera h_γ le germe en x_0 de ce difféomorphisme. C'est un difféomorphisme du germe de T en x_0 sur le germe de T' en x'_0 . On dira que h_γ est le glissement le long des feuilles suivant γ . h_γ ne dépend pas de la chaîne d'ouverts simples utilisés mais seulement de la classe d'homotopie du chemin γ .

1.4.3 Le groupe fondamental de la feuille F en x_0

Dans le cas particulier où γ est un lacet en x_0 c'est-à-dire un chemin continu d'origine et d'extrémité x_0 , dans la feuille F , le glissement le long des feuilles définit un germe h_γ en x_0 de difféomorphisme de la sous variété transverse T respectant le point x_0 . Considérons un autre lacet γ_1 en x_0 dans la feuille F , il vient que $h_{\gamma \cdot \gamma_1} = h_\gamma \circ h_{\gamma_1}$ comme h_γ ne dépend que la classe d'homotopie $[\gamma]$, on définit une correspondance $[\gamma] \longrightarrow h_\gamma$ qui est un homomorphisme

$$h_{x_0} : \pi_1(F, x_0) \longrightarrow \text{Diff}_{x_0}(T)$$

du groupe d'homotopie de la feuille en x_0 dans le groupe des germes des difféomorphismes locaux laissant fixe le point x_0 .

On dira que h_{x_0} est la représentation d'holonomie de la feuille F en x_0 . Son image est le groupe d'holonomie de F en x_0 .

En remplaçant T par une autre sous variété transverse T_1 passant par x_0 , le glissement le long des feuilles dans un voisinage ouvert simple arbitraire de x_0 identifie canoniquement le germe en x_0 de T avec le germe en x_0 de T_1 , donc $\text{Diff}(T)$ avec $\text{Diff}(T_1)$. Il vient que le groupe d'holonomie de F en x_0 est défini indépendamment de la sous variété transverse. On pourrait alors raisonner modulo le glissement le long des feuilles, i. e. considérer $h_{x_0}([\gamma]) = h_\gamma$ comme un germe de difféomorphisme de la variété quotient locale en x_0 .

1.5 Feuilletages et Γ -Structures

Pour systématiser ce point de vue on considère une variété différentiable W^q de dimension q et de classe C^∞ , un sous-pseudogroupe Γ du pseudogroupe $\Gamma(W^q)$ des difféomorphismes locaux de classe C^∞ de W^q , ainsi que l'ensemble π_Γ des germes des éléments de Γ avec sa projection source α sur W et sa topologie de faisceau (cette topologie est engendrée par les ouverts obtenus en prenant pour chaque élément de Γ ses germes en tous les points de la source ; pour cette topologie α est un étalement

sur W). La composition et le passage à l'inverse munissent π_Γ d'une structure de groupoïde topologique.

1.5.1 Γ -cocycle

Un Γ -cocycle régulier de classe \mathcal{C}^∞ sur une variété différentiable V^n de dimension $n \geq q$ est déterminé par les données d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de V^n , et pour chaque couple (i, j) d'indices d'une application continue γ_{ji} de $U_i \cap U_j$ dans π_Γ vérifiant les conditions suivantes de cocycles et de régularité :

- i) γ_{ki} et $\gamma_{kj} \circ \gamma_{ji}$ coïncident sur $U_i \cap U_j \cap U_k$
- ii) $f_i = \alpha \circ \gamma_{ii}$ est une submersion de classe \mathcal{C}^∞ de U_i dans W^q .

($\gamma_{ii} = \text{identité}$)

Un tel cocycle détermine un feuilletage \mathcal{F} de codimension q et de classe \mathcal{C}^∞ de V^n caractérisé par la propriété d'induire sur chacun des ouverts U_i le feuilletage défini par la submersion f_i d'où la proposition :

Proposition 4. *La donnée d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension q sur une variété V^n est équivalente à la donnée d'un γ -cocycle régulier $(U_i; \gamma_{ij})$ sur une variété W^q de dimension q .*

Deux tels cocycles $(U_i; \gamma_{ij})$ et $(U_i; \gamma'_{ij})$ correspondant à un même recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de V^n sont *cohomologues* s'ils définissent le même feuilletage de V^n , ou encore si pour chaque indice $i \in I$ il existe une application $\lambda_i : U_i \rightarrow \pi_\Gamma$ telle que pour chaque couple (i, j) d'indices on ait la propriété suivante :

- iii) γ'_{ji} et $\lambda_j \gamma_{ji} \lambda_i^{-1}$ coïncident sur $U_i \cap U_j$: *condition de cobord*.

Plus généralement, deux tels cocycles $(U_i; \gamma_{ij})$ et $(U'_i; \gamma'_{ij})$ correspondant à deux recouvrements ouverts $(U_i)_{i \in I}$ et $(U'_j)_{j \in J}$ sont *équivalents* si les cocycles qu'ils induisent sur le recouvrement ouvert $(U_i \times U'_j)_{(i,j) \in I \times J}$ sont cohomologues, c'est à dire en fait si ces deux cocycles définissent le même feuilletage de V^n .

On définit alors une Γ -Structure régulière sur V^n comme un élément du premier groupe de cohomologie $H^1(V^n, \Gamma)$ à valeurs dans le faisceau sur V^n des germes

d'applications continues de V^n dans π_Γ ce qui correspond à une classe de Γ -cocycle réguliers équivalents. On dit alors que le feuilletage \mathcal{F} sur V^n est un Γ -*feuilletage* s'il peut être associé à une telle Γ -structure régulière.

On dit aussi que V^n est une Γ -variété lorsque ce feuilletage est de dimension 0, c'est à dire lorsque la dimension de M est égale à q . La donnée d'un Γ -cocycle régulier correspond alors à celle d'un atlas de V^n dans W^q avec changements de cartes dans le pseudogroupe Γ .

Partant de ce dernier point de vue et considérant que le pseudogroupe Γ est une géométrie sur W^q , on peut donc dire qu'un Γ -cocycle régulier sur V^n correspond à un feuilletage ayant une *structure géométrique transverse* modélée sur celle de W^q .

Exemples

- i) **Feuilletages transversalement de Lie** W^q est un groupe de Lie et Γ est le pseudogroupe obtenu par localisation du groupe des translations à gauche de W^q .
- ii) **Feuilletages transversalement parallélisables** W^q est une variété parallélisable et Γ est le pseudogroupe des difféomorphismes locaux conservant un parallélisme.
- iii) **Feuilletages riemanniens** W^q est une variété riemannienne et Γ est le pseudogroupe des isométries locales.

1.6 Feuilletages de Lie

Dans cette partie on désigne par \mathcal{G} une algèbre de Lie réelle de dimension n et par G un groupe de Lie connexe ayant \mathcal{G} pour algèbre de Lie.

Soit M , une variété différentiable connexe et paracompact de dimension p , $p \geq n$.

Toutes les variétés, applications, formes, champs de vecteurs sont supposées de classe C^∞ .

1.6.1 Définition

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension q sur une variété M . Une structure de G -feuilletage de Lie pour \mathcal{F} est déterminée par la donnée d'un Γ -cocycle régulier définissant \mathcal{F} , où Γ est le pseudogroupe sur G obtenu par localisation du groupe de ses translations à gauche. Autrement dit un tel feuilletage avec sa structure transverse est déterminé par les données :

- d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M ,
- d'une famille de submersions $f_i : U_i \rightarrow G$,
- d'une famille d'applications localement constantes $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, tels que l'on ait $f_j = g_{ij} f_i$ sur $U_i \cap U_j$

1.6.2 Exemples

- i) Le feuilletage défini par une submersion d'une variété M dans un groupe de Lie G possède une structure canonique de G -feuilletage de Lie.
- ii) Toute forme de Pfaff fermée et sans singularités sur une variété M , détermine un \mathbb{R} -feuilletage de Lie sur M .
- iii) Soient H et G deux groupes de Lie simplement connexes et D un homomorphisme surjectif de H dans G . Les fibres de D définissent un feuilletage de Lie sur H que nous noterons \mathcal{F} . Soit Γ un sous groupe discret uniforme de H (i. e. H/Γ est un compact). \mathcal{F} est invariant par les translations à droite de Γ . Par suite \mathcal{F} induit sur H/Γ un feuilletage de Lie de groupe G dont l'homomorphisme d'holonomie est $h : \pi_1(H/\Gamma) \rightarrow G$.

Proposition 5. [3] :

La donnée d'un G -feuilletage de Lie \mathcal{F} sur une variété M est équivalente à la donnée :

- d'un homomorphisme $h : \pi_1(M) \rightarrow G$
- d'un revêtement galoisien $p : N \rightarrow M$ de groupe $h(\pi_1(M))$
- d'une submersion $q : N \rightarrow G$, équivariante par h
(i. e. $q(\alpha.x) = h(\alpha)q(x) \quad \forall \alpha \in \pi_1(M) \quad , \quad \forall x \in N$).

De plus si la variété M est compacte alors q est une fibration à fibres compactes.

Théorème 1. *de structure [3](E. FEDIDA)*

Avec les notations et les hypothèses de la proposition précédente,

si $H = h(\pi_1(M))$ est le groupe d'holonomie globale de \mathcal{F} , les adhérences des feuilles de \mathcal{F} sont une fibration de M sur l'espace homogène G/\bar{H} . De plus si F est une feuille de \mathcal{F} , le feuilletage induit par \mathcal{F} sur \bar{F} est un K -feuilletage de Lie où K est la composante connexe de \bar{H} contenant l'identité de G .

En particulier, si M est connexe et si \mathcal{F} a une feuille compacte (resp. localement dense) toutes les feuilles de \mathcal{F} sont compactes (resp. partout denses).

Chapitre 2

Déformations des Feuilletages

Dans ce chapitre nous présentons quelques résultats de base sur les déformations d'un feuilletage, ensuite on étudie les déformations infinitésimales des feuilletages transversalement holomorphes et de celles de l'holonomie d'une feuille.

2.1 Définitions

Nous allons rappeler la définition d'une déformation d'un feuilletage de manière générale. Pour tout x élément de M , on note $G_x(M; n)$ la grassmannienne des plans de codimension n de $T_x M$. On obtient ainsi un fibré localement trivial

$$\mathcal{G}(M; n) \longrightarrow M$$

de fibre type la grassmannienne $G(p+n, n)$ de l'espace \mathbb{R}^{n+p} . Un champ de classe C^∞ de p -plan est une section de classe C^∞ de $\mathcal{G}(M; n) \longrightarrow M$.

Soient τ un champ de p -plan sur M et $(\tau_1; \tau_2; \dots; \tau_p)$ une base de sections locales de τ . Si $X = \sum_{i=1}^p a_i \tau_i$ et $Y = \sum_{j=1}^p b_j \tau_j$ sont deux sections locales de τ , on a :

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^p a_i b_j [\tau_i, \tau_j] + \sum_{i,j=1}^p \{a_i \tau_i(b_j) \tau_j - b_j \tau_j(a_i) \tau_i\}.$$

Dans le quotient $\nu = TM/\tau$, la valeur de $[X, Y]$ en un point $x \in M$ ne dépend que de celle X et Y et non celles de leurs dérivées. Ce qui permet de définir une 2-forme

$\Omega_\tau : \tau \times \tau \longrightarrow \nu$ dont la valeur en X_x et Y_x est la classe dans le quotient ν_x du vecteur $[X, Y]_x$. Par le théorème de Frobenius le champ de p-plans τ est intégrable si et seulement si Ω_τ est identiquement nulle. Dans ce cas τ définit un feuilletage de codimension n sur M .

On munit l'espace $\Gamma(\mathcal{G}(M, n))$ des sections \mathcal{C}^∞ de $\mathcal{G}(M, n)$ de la topologie \mathcal{C}^∞ qui en fait une variété de Fréchet. L'ensemble $\mathcal{F}(M, n)$ des feuilletages de codimension n sur M (zéros de Ω) en est un fermé; on le munit de la topologie induite.

2.1.1 Déformation d'un feuilletage

Une *déformation d'un feuilletage* $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M, n)$ paramétrée par un voisinage S de 0 dans \mathbb{R}^n est une application continue : $\rho : t \in T \longrightarrow \mathcal{F}_t \in \mathcal{F}(M, n)$ telle que

$$\rho(0) = \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$$

Le groupe $Diff(M)$ des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^∞ de M agit sur $\mathcal{F}(M, n)$. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(M, n)$ on notera $\mathcal{O}_\mathcal{F}$ l'orbite de \mathcal{F} .

2.1.2 Déformation à type différentiable fixé

Une déformation $\rho : t \in T \longrightarrow \mathcal{F}_t \in \mathcal{F}(M, n)$ paramétrée par un voisinage S de 0 dans \mathbb{R}^n est dite à type différentiable fixé si pour tout $t \in T$, $\rho(t) \in \mathcal{O}_\mathcal{F}$; en d'autres termes il existe une famille différentiable $(h_t)_{t \in T}$ de difféomorphismes de M tels que : $h_t^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Considérons maintenant un feuilletage \mathcal{F} transversalement holomorphe de codimension n d'une variété M compacte, défini par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ où $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M , $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une submersion et γ_{ij} des biholomorphismes locaux de \mathbb{C}^n tels que sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on ait $f_j = \gamma_{ji} \circ f_i$.

Une déformation \mathcal{F}_t de \mathcal{F} paramétrée par un espace analytique $(S, 0)$ (cf. [20] pour plus de détails) est la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M , $f_i^t : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$

une submersion et d'une famille de biholomorphismes locaux $(\gamma_{ij}^t)_{(i,j) \in I \times J}$ tels que $\gamma_{ij}^t : f_i^t(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j^t(U_i \cap U_j)$ dépendant holomorphiquement de t tels que :

i) $f_j^t = \gamma_{ij}^t \circ f_i^t$;

ii) $f_i^0 = f_i$ et $\gamma_{ij}^0 = \gamma_{ij}$.

On peut alors dire que nous avons sur $(S, 0) \times M$, un feuilletage \mathcal{F}^t défini par les submersions locales $(s, x) \longrightarrow (s, f_i^s(x))$ de $(S, 0) \times U_i$ dans $(S, 0) \times \mathbb{C}^n$ dont la structure transverse est localement isomorphe à $(S, 0) \times \mathbb{C}^n$.

Deux déformations \mathcal{F}^t et \mathcal{F}^t paramétrées par le même espace $(S, 0)$ sont dites *isomorphes* s'il existe une famille différentiable de difféomorphismes (h_t) de M tels que $\mathcal{F}^t = (h_t)^* \mathcal{F}^t$.

Plus précisément, si \mathcal{F}^t est défini par un recouvrement ouvert $(U'_k)_{k \in K}$ et une famille de submersions $\{f_k^t : U'_k \longrightarrow \mathbb{C}^n\}$. Pour tout $x \in U_i \cap U'_k$ il existe une famille analytique (γ_{ij}^t) d'isomorphismes complexes locaux de \mathbb{C}^n telle que : $f = \gamma_{ik}^t \circ f_k^t \circ h_t$ sur un voisinage de x .

Si $\varphi : (S', 0) \longrightarrow (S, 0)$ est morphisme analytique, alors $\mathcal{F}^{\varphi(t')}$ sera une déformation de \mathcal{F} paramétrée par $(S, 0)$ appelée déformation de \mathcal{F} induite par φ .

2.2 Déformations infinitésimales

Pour étudier des cas pratiques nous allons nous placer dans le cas où l'espace S paramétrant les déformations désignera toujours un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{C} . Désignons par \mathcal{F}^t une famille à un paramètre \mathcal{F}^t de feuilletages paramétrée par le complexe t .

On peut considérer $\dot{f}_i(x) = \frac{\partial}{\partial t} f_i^t(x)|_{t=0}$ comme un champ de vecteurs le long de $f_i^0 = f_i$ (i. e. une section du pull back $f_i^*(T\mathbb{C}^n)$ du fibré tangent de \mathbb{C}^n).

Aussi $\dot{\gamma}_{ij}(x) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij}^t(x)|_{t=0}$ peut être considéré comme un champ de vecteurs holomorphe le long de $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0$.

Les relations $f_i^t = \gamma_{ij}^t \circ f_j^t$ donnent

i) $\dot{f}_i = \dot{\gamma}_{ij} \circ f_j$

ii) $\dot{f}_i = \dot{\gamma}_{ik} \circ f_j + d\gamma_{ij}(f_i)$
 et les relations $\gamma_{ij}^t = \gamma_{ij}^t \circ \gamma_{jk}^t$ donnent :

iii) $\gamma_{ij} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$

iv) $\dot{\gamma}_{ik} = \dot{\gamma}_{ij} \circ \gamma_{jk} + d\gamma_{ij}(\dot{\gamma}_{jk})$.

d'où la définition :

2.2.1 Définition

Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement holomorphe de M de codimension n sur une variété compacte M . On appelle *déformation infinitésimale de \mathcal{F}* toute déformation \mathcal{F}^t de \mathcal{F} paramétrée par un voisinage ouvert S de 0 dans \mathbb{C} (dans notre cas S sera toujours un intervalle de \mathbb{R} du type $] -\epsilon, \epsilon[$, avec ϵ assez petit) du fibré tangent $T\mathcal{F}$ en tant que section de $\mathcal{G}(M, n) \rightarrow M$.

Une déformation infinitésimale sera alors définie par la donnée d'une famille (f_i, \dot{f}_i) , où f_i est une submersion de U_i dans \mathbb{C}^n , \dot{f}_i un champ de vecteurs le long de f_i , et d'une famille $(\gamma_{ij}, \dot{\gamma}_{ij})$, où γ_{ij} est un biholomorphisme de $f_j(U_i \cap U_j)$ sur $f_i(U_i \cap U_j)$, et $\dot{\gamma}_{ij}$ est un champ de vecteurs le long de γ_{ij} telle que les conditions i) - iv) soient satisfaites.

2.2.2 Champs de vecteurs feuilletés

Définition

Soit \mathcal{F} un feuilletage de dimension m et de codimension n sur une variété M , défini par la donnée d'un système différentiel complètement intégrable \mathcal{S} .

Un champ de vecteurs $X \in \chi_{\mathcal{S}}$ est dit *feuilleté* si, pour tout $Y \in \chi_{\mathcal{S}}$, le crochet $[X, Y]$ appartient à $\chi_{\mathcal{S}}$. L'ensemble $\chi(M, \mathcal{F})$ des champs feuilletés est le normalisateur dans $\chi(M)$ de la sous algèbre de Lie $\chi_{\mathcal{S}}$. $\chi(M, \mathcal{F})$ est une sous algèbre de Lie de $\chi(M)$. On peut d'ailleurs donner à la notion de champ feuilleté plusieurs définitions équivalentes, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 6. [9] : Soit $X \in \chi(M)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) X est feuilleté.
- ii) Si $(\varphi_t)_{|t|<\epsilon}$ est le groupe local à un paramètre associé à X au voisinage d'un point arbitraire de M , pour tout difféomorphisme local φ_t , φ_t laisse invariant le système différentiable \mathcal{S} .
- iii) Dans tout ouvert simple distingué, (i. e. un ouvert de co-ordonnées locales $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ sur lequel le feuilletage \mathcal{F} est défini par les équations $dy_1 = dy_2 = \dots = dy_n = 0$) les n dernières composantes de X ne dépendent que des variables y_1, \dots, y_n .

Il découle de la proposition ci-dessus que :

- Dans tout ouvert simple U , un champ feuilleté X est projetable en un champ de vecteurs différentiables sur la variété quotient locale \bar{U} (ceci est encore une caractérisation des champs feuilletés).
- Le quotient $\chi(M/\mathcal{F}) = \chi(M, \mathcal{F})/\chi_{\mathcal{S}}$ est une algèbre de Lie appelée l'algèbre des champs basiques de \mathcal{F} .

2.2.3 Le faisceau fondamental Θ

Soient \mathcal{F} un feuilletage transversalement holomorphe, et $\hat{\Theta}$ le faisceau des germes des champs de vecteurs feuilletés sur M . Un tel champ de vecteurs est projetable sur un ouvert simple distingué par f_i en un champ de vecteurs sur un ouvert de \mathbb{C}^n engendrant un groupe local à un paramètre d'isomorphismes analytiques.

Soit (x, z) un système de coordonnées locales dans lequel f_i est définie par : $(x, z) \longrightarrow z$, alors ξ est de la forme :

$$\xi(x, z) = a(x, z) \frac{\partial}{\partial x} + b(z) \frac{\partial}{\partial z} + \bar{b}(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

où $b(z)$ est holomorphe en z .

Désignons par Θ le quotient de $\hat{\Theta}$ par le faisceau des germes des champs de vecteurs tangents aux feuilles. On dit que c'est le faisceau des germes de champs de vecteurs

basiques. La restriction de Θ à U_i est canoniquement isomorphe à $f_i^*(\Theta_{\mathbb{C}^n})$, où $\Theta_{\mathbb{C}^n}$ désigne le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur \mathbb{C}^n .

Le crochet des champs de vecteurs induit une structure d'algèbre de Lie graduée sur les groupes de cohomologie $H^*(M, \Theta)$.

Considérons maintenant une déformation \mathcal{F}' du feuilletage \mathcal{F} paramétrée par $(S, 0)$ il existe un morphisme linéaire bien défini connu sous le nom de morphisme de "Kodaira – Spencer" définie par :

$$\rho : T_0S \longrightarrow H^1(M, \Theta)$$

qui à $\frac{\partial}{\partial s} \in T_0S$ fait correspondre la classe du cocycle associant à $U_i \cap U_j$ la section $f_i^* \left(\frac{\partial}{\partial s} \gamma_{ij}^s \right)$ de $\Theta/U_i \cap U_j = f_i^*(\Theta_{\mathbb{C}^n})/U_i \cap U_j$.

Il résultent de ce qui précède que la compacité de la variété M rend biunivoque la correspondance entre les éléments de $H^1(M, \Theta)$ et les classes d'équivalence des déformations infinitésimales de \mathcal{F} . D'où le théorème :

Théorème 2. *Soit M une variété différentiable compacte, et \mathcal{F} un feuilletage de M . L'espace $H^1(M, \Theta)$ paramètre les classes d'équivalence des déformations infinitésimales de \mathcal{F}*

2.2.4 Déformations infinitésimales d'un feuilletage suspension

Dans cette partie nous nous intéresserons à l'étude des déformations infinitésimales d'un flot \mathcal{F} d'un groupe de Lie compact G obtenues en suspendant un difféomorphisme φ de G . Considérons G un groupe de Lie compact et connexe, et φ un difféomorphisme de G . En suspendant le difféomorphisme G , on obtient un flot \mathcal{F} de G (i. e. un feuilletage de G de dimension 1). Ce feuilletage est engendré par un système différentiel complètement intégrable, déterminé par un champ de vecteurs sans singularités X tel que :

$$X = \varphi^*(X).$$

Désignons par :

$\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}, \chi(G))$ l'ensemble des fonctions f définies de \mathbb{Z} dans $\chi(G)$ par

$f_X : n \longrightarrow X - \varphi^*(X)$ avec $X \in \chi(X)$;

$\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}, \chi(G))$ l'ensemble des fonctions f définies de \mathbb{Z} dans $\chi(G)$ par

$f_{k,X} : n \longrightarrow k(n)X$ avec $k \in \text{End}(\mathbb{Z})$;

$\mathcal{C}^2(\mathbb{Z}, \chi(G))$ l'ensemble des fonctions f définies de \mathbb{Z}^2 dans $\chi(G)$ par

$g_{k,X} : (n, m) \longrightarrow k(n, m)X$ avec $k \in \text{End}(\mathbb{Z}^2)$.

Soient δ_0 l'application linéaire définie de $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}, \chi(G))$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}, \chi(G))$, par :

$\delta_0(f) = f_{k, X - \varphi^*(X)}$ avec $k \in \text{End}\mathbb{Z}$, et δ_1 l'application linéaire définie de $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}, \chi(G))$ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{Z}, \chi(G))$, par

$\delta_1(f_{k,X}) = 0$ si le sous module χ_X est une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\chi(G)$ où $f_X : n \longrightarrow k(n)X$; $X \in \chi(G)$, et $\chi_X = \{Y \in \chi_G, \forall x \in G, \text{où } G_x = \text{vect} \langle X_x \rangle\}$.

G étant un groupe de Lie compact, tout champ de vecteurs non nul X est sans singularités (i. e. $X_x \neq 0 \quad \forall x \in G$) par suite le système différentiel qu'il engendre est complètement intégrable. En appliquant le théorème de Frobenius on montre que χ_X est une sous algèbre de Lie de $\chi(G)$. Ainsi pour tout $f_X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}, \chi(G))$ on a :

$$\begin{aligned} (\delta_1 \circ \delta_0)(f_X) &= \delta_1[\delta_0(f_X)] \\ &= \delta_1(f_{k, X - \varphi^*(X)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où : $\delta_1 \circ \delta_0 = 0$.

Par suite le complexe :

$\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}, \chi(G)) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^1(\mathbb{Z}, \chi(G)) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{C}^2(\mathbb{Z}, \chi(G))$ définit un groupe de cohomologie :

$$H^1(\mathbb{Z}, \chi(G)) = \frac{\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}, \chi(G))}{\delta_0(\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}, \chi(G)))}$$

que l'on peut aisément identifier à $\chi(G)/\mathcal{B}$ avec

$$\mathcal{B} = \{X - \varphi^*(X) \quad ; \quad X \in \chi(G)\}$$

. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3. *Les classes d'équivalence des déformations infinitésimales d'un flot \mathcal{F} , sur un groupe de Lie compact G , obtenu en suspendant un difféomorphisme φ*

de G sont décrites par le premier groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, \chi(G))$ du groupe \mathbb{Z} à valeurs dans le \mathbb{Z} -module $\chi(G)$ qui s'identifie également au quotient de $\chi(G)$ par le sous espace $\mathcal{B} \subset \chi(G)$ des éléments de la forme $X - \varphi^*(X)$ avec X variant dans $\chi(G)$.

2.2.5 Déformations infinitésimales de l'holonomie d'une feuille

Soit F une feuille propre d'un feuilletage \mathcal{F} de M de codimension n , et V une sous variété transverse à la feuille F passant par x_0 . L'holonomie de F sera un homomorphisme :

$$h^0 : \pi_1(F, x_0) \longrightarrow \mathcal{H}$$

où \mathcal{H} est le groupe des germes en z_0 des difféomorphismes de V laissant z_0 invariant.

Sur $(S, 0) \times M$ nous avons un feuilletage \mathcal{F}^s dont la structure transverse locale est isomorphe à $(S, 0) \times \mathbb{C}^n$, défini par les projections :

$$(s, x) \longrightarrow (s, f_i^s(x)).$$

On peut étendre la sous variété transverse locale V en une sous variété V^s isomorphe à $(S, 0) \times V$ au dessus de $(S, 0)$. L'holonomie de F considérée comme une feuille de \mathcal{F}^s sera un homomorphisme :

$$h^s : \pi_1(F, y_0) \longrightarrow \mathcal{H}^s$$

où \mathcal{H}^s est le groupe des germes en z_0 des automorphismes analytiques de V^s au dessus de S . Si nous identifions V^s à $(S, 0) \times V$, alors h^s sera de la forme :

$$h^s(\alpha)(s, z) = (s, h^s(\alpha)z) \quad \text{pour} \quad \alpha \in \pi_1(F, z).$$

Soit Θ_0 , l'espace vectoriel des germes en z_0 des champs de vecteurs holomorphes sur V . La restriction du faisceau Θ à la feuille F est un faisceau Θ_F localement constant isomorphe à Θ_0 en z_0 . Elle est déterminée par la représentation du groupe fondamental $\pi_1(F, z_0)$ dans Θ_0 induite par l'holonomie h^0 de F .

Ainsi pour $p = 0; 1$, $H^p(F, \Theta_F)$ est isomorphe à $H^p(\pi_1(F, z_0), \Theta_0)$, la cohomologie du groupe $\pi_1(F, z_0)$ dans Θ_0 considérée comme $\pi_1(F, z_0)$ -module à travers la représentation h^0 .

La fonction :

$$\alpha \longrightarrow \xi(\alpha) = h^0(\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial h^s(\alpha)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right)$$

est cocycle représentant un élément de $H^1(\pi_1(F, z_0), \Theta_0) = H^1(F, \Theta_F)$. Cet élément est précisément l'image de $\frac{\partial}{\partial s}$ par la composition de :

$$\rho : T_0 S \longrightarrow H^1(M, \Theta)$$

avec la restriction

$$H^1(M, \Theta) \longrightarrow H^1(F, \Theta_F).$$

Il mesure les déformations infinitésimales de l'holonomie de F .

2.3 Le théorème Kodaira-Spencer-Kuranishi [16]

Théorème 4. *soient \mathcal{F} un feuilletage transversalement holomorphe de codimension n sur une variété compacte M et Θ le faisceau des germes des champs de vecteurs basiques. Alors il existe un germe d'espace analytique $(S, 0)$ paramétrant une déformation \mathcal{F}_s tel que pour toute autre déformation \mathcal{F}_t paramétrée par $(T, 0)$ il existe un morphisme $\varphi : (T, 0) \longrightarrow (S, 0)$ tel que la déformation induite $\mathcal{F}_{\varphi(t)}$ soit isomorphe à \mathcal{F}_t . En plus il existe un voisinage U de 0 dans $H^1(M, \Theta)$ (qui est de dimension finie) et une application différentiable $\beta : U \longrightarrow H^2(M, \theta)$ tels que $(S, 0)$ est le germe en 0 de $\beta^{-1}(0)$.*

Le germe d'espace $(S, 0)$ est appelé *espace versel* (ou espace de Kuranishi) de \mathcal{F} et \mathcal{F}_s appelée la *famille verselle* de \mathcal{F} .

corollaire 2. *(Kalka-Duchamp)*

Si $H^1(M, \Theta) = 0$, alors tout feuilletage \mathcal{F}' muni d'une structure transverse très proche de \mathcal{F} est isomorphe à \mathcal{F} .

on dit que \mathcal{F} est *rigide*, si S est réduit à un point.

corollaire 3. *Si $H^2(M, \Theta) = 0$, alors l'espace versel des déformations de \mathcal{F} est isomorphe à un voisinage ouvert de 0 dans $H^1(M, \Theta)$.*

corollaire 4. *Si dans l'assertion du théorème ci-dessus le germe $(S', 0)$ n'est pas unique et si $\rho : T_0 S' \rightarrow H^1(M, \Theta)$ est un isomorphisme, alors $\varphi : (S', 0) \rightarrow (S, 0)$ est un isomorphisme.*

Chapitre 3

Groupe de Cohomologie $H^1(\mathbb{Z}; \chi(F))$

3.1 Introduction

Pour calculer $H^1(\mathbb{Z}, \chi(F))$ où $F = SO(3)$ désigne le groupe spécial des rotations de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , il faut déterminer l'espace

$\mathcal{B} = \{X - \varphi^*(X); X \in \chi(F)\}$. Pour cela il faut se donner $X \in \chi(F)$ et trouver $Z \in \chi(F)$ solution de l'équation

$$(E') \quad Z - \varphi^*(Z) = X$$

Considérons $(X_1; X_2; X_3)$ une base de champs de vecteurs invariants à gauche du module libre $\chi(F)$ de rang 3 sur l'anneau $\mathcal{C}^\infty(F)$ des fonctions complexes de classe \mathcal{C}^∞ sur F . Alors se donner un champ de vecteurs $X \in \chi(F)$ revient à se donner trois fonctions $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^\infty(F)$ telle que :

$X = f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3$ Comme les champs de vecteurs X_1 , X_2 , et X_3 sont invariants à gauche on a :

$$\varphi^*(X_i) = X_i \text{ pour } i = 1, 2, 3. \text{ D'où}$$

$$\varphi^*(X) = f_1 \circ \varphi X_1 + f_2 \circ \varphi X_2 + f_3 \circ \varphi X_3$$

Si on pose $Z = g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3$ l'équation (E') est alors équivalente au système

suisant (où chacune des inconnues est cette fois-ci une fonction).

$$(s) \quad \begin{cases} g_1 - g_1 \circ \varphi = f_1 \\ g_2 - g_2 \circ \varphi = f_2 \\ g_3 - g_3 \circ \varphi = f_3 \end{cases}$$

En réalité tout revient à résoudre l'équation (dite équation homologique) :

Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(F)$, trouver $g \in \mathcal{C}^\infty(F)$ telle que :

$$(E) \quad g - g \circ \varphi = f$$

Dans un 1^{er} temps nous allons résoudre l'équation (*) ci-dessous sur la sphère S^2 :
Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ et L'_a ($a \in SO(3)$) la translation à gauche provenant de l'action à gauche du groupe $SO(3)$ sur la sphère S^2 , trouver une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ telle que :

$$(*) \quad g - g \circ L'_a = f$$

Ensuite nous établirons que la résolution de l'équation (*) est suffisante pour décrire toutes les solutions de l'équation (E) dans $\mathcal{C}^\infty(SO(3))$.

Enfin nous procéderons à une description du groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, \chi(F))$

3.2 Représentations linéaires des groupes compacts dans les espaces de Hilbert

3.2.1 Définition

Soient G un groupe topologique, et E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Une représentation linéaire continue (ρ, E) de G est un homomorphisme $\rho : x \longrightarrow \rho_x$ de G dans l'ensemble des endomorphismes de E ,

($\rho_x \rho_y = \rho_{xy}$; $\rho_e =$ identité de E) tel que l'application $(a, x) \longrightarrow \rho_x(a)$ de $E \times G$ dans E soit continue.

Lemme 2. (lemme de Schur)

Soient (ρ_1, E_1) , (ρ_2, E_2) deux représentations linéaires irréductibles d'un groupe compact G .

Si γ est une application linéaire de E_2 dans E_1 telle que :

$$\rho_{1x} \circ \gamma = \gamma \circ \rho_{2x}; \forall x \in G$$

Alors on a : $\gamma = 0$ ou γ est un isomorphisme de E_2 dans E_1

Pour établir ce Lemme nous distinguons les deux cas suivants :

1. Si $a \in \text{Im} \gamma$ on a : $a = \gamma(b)$ avec $b \in E_2$ d'où

$$\rho_{1x}(a) = \rho_{1x}(\gamma(b)) = \gamma \circ \rho_{2x}(b) = \gamma(\rho_{2x}(b)); \forall x \in G \text{ donc } \text{Im} \gamma \text{ est stable par } \rho_1,$$

donc si $\gamma \neq 0$ on a : $\text{Im} \gamma = E_1$

2. Si $b \in \text{ker} \gamma$, $\gamma(\rho_{2x}(b)) = \rho_1(\gamma(b)) = 0$ donc $\text{ker} \gamma = E_2$.

En résumé on a : $\gamma = 0$, γ est un isomorphisme de E_2 dans E_1 .

conséquence

Si ρ est une représentation matricielle irréductible d'un groupe compact G , les seules matrices qui commutent avec tous les ρ_x sont les matrices scalaires (i.e. de la forme λI , $\lambda \in \mathbb{C}$).

Soit M une telle matrice, λ une valeur propre on a :

$$\rho_x \cdot (M - \lambda I) = (M - \lambda I) \cdot \rho_x; \forall x \in G$$

comme $M - \lambda I$ n'est pas un isomorphisme il vient que $M = \lambda I$

Cette preuve est basée sur l'existence de la valeur propre λ . ce qui est effectif si l'espace de la représentation est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Proposition 7. soit ρ et μ deux représentations matricielles irréductibles d'un même groupe compact G de degré n et m respectivement. Si on pose

$$\rho_x = (a_i^j(x)) \quad \mu_x = (b_i^k(x))$$

Alors

$$\int_G a_i^j(x) a_i^j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \text{ non équivalente à } \mu \\ \frac{\delta_i^k \delta_l^j}{n} & \text{si } \rho \text{ équivalente à } \mu \end{cases}$$

Pour démontrer ce résultat considérons M une matrice quelconque à n lignes et m colonnes ; posons $N = \int_G \rho_x M \mu_x dx$.

On vérifie immédiatement que : $\rho_y \circ N = N \circ \mu_y, \forall y \in G$. donc d'après le lemme de Schur si ρ n'est équivalente à μ ; on a $N = 0$ pour toute matrice M . En particulier si nous prenons $M = E_k^i$ matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. Alors on obtient le 1^{er} résultat.

Si maintenant ρ est équivalente à μ alors $N = \alpha I$ où α est un scalaire en prenant la trace des deux membres , on a : $tr(N) = tr(M) = \alpha tr(I) = \alpha.n$

D'où : $\alpha = \frac{tr(M)}{n}$

En prenant alors de nouveau $M = E_k^i$ on a : $tr(M) = \delta_k^i$ et on obtient le second résultat.

Dans tout ce qui suit G sera toujours un groupe compact, on désignera par Λ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations linéaires finies irréductibles de G . Si $\lambda \in \Lambda$ son degré sera noté n_λ , on pourra toujours supposer choisi dans Λ un représentant unitaire ; une représentation matricielle associée sera notée ${}^\lambda a_j^i ; 1 \leq i, j \leq n_\lambda$.

Proposition 8.

$${}^\lambda a_j^i * {}^\lambda a_k^l = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq \mu \\ \frac{{}^\lambda a_k^i}{n} \delta_j^l & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}, (\lambda; \mu) \in \Lambda \times \Lambda$$

cette proposition découle de la proposition ci-dessus

3.2.2 Le théorème de Peter-Weyl

Théorème 5. Si G est un groupe compact le système des fonctions $\sqrt{n_\lambda}({}^\lambda a_j^i)$, ($1 \leq i, j \leq n_\lambda$), $\lambda \in \Lambda$, est orthogonal et complet dans $L^2(G)$

$L^2(G)$ désigne l'ensemble des fonctions de carrés sommables sur G . Il a été déjà établi (cf. Proposition7) que le système était orthonormal.

Si le groupe G est fini, le système comporte $\sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda^2 = \text{card}(G) = \text{dim} L^2(G)$ fonctions.

Il est donc complet. Nous supposons donc G compact non fini. Pour démontrer que le système $\lambda a_j^i, (1 \leq i, j \leq n_\lambda), \lambda \in \Lambda$ est complet dans $L^2(G)$, il suffit de vérifier que si $f \in L^2(G)$ et si f est orthogonal à tous les λa_j^i alors $f = 0$. Soit $f \in L^2(G)$ et $f \neq 0$, alors $f * \tilde{f}$ est une fonction continue non nulle car $(f * \tilde{f})(e) = \|f\|^2$; où $(\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})})$ et $(f * \tilde{f})(x) = \int_G f(xy^{-1})\tilde{f}(y)dy$
d'autre part on vérifie facilement que $f * \tilde{f} = \overline{f * \tilde{f}}$ donc l'opérateur $\mathcal{L}_{f * \tilde{f}}$ défini par : $\mathcal{L}_{f * \tilde{f}}(h) = (f * \tilde{f}) * h \quad \forall h \in L^2(G)$ est hermitien, compact non nul et admet une décomposition de la forme

$$\mathcal{L}_{f * \tilde{f}} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_i$$

où les P_i sont des projecteurs orthogonaux sur $L^2(G)$, les sous espaces propres $P_i(L^2(G))$ étant de dimension finie (propriétés des opérateurs compacts).

Soit E_i un sous espace propre pour lequel $\mathcal{L}_{f * \tilde{f}} \neq 0$, de la relation $\mathcal{L}_{f * \tilde{f}} = \mathcal{L}_f \cdot \mathcal{L}_{\tilde{f}}$, on déduit que sur E_i on a : $\mathcal{L}_{\tilde{f}}$. si \mathcal{R} la représentation régulière à droite de G , définie par : $(\mathcal{R}_a f)(x) = f(xa) \quad \forall f \in L^2(G) \quad , \quad a \in G$

Comme \mathcal{L}_f commute avec \mathcal{R}_x , pour tout $x \in G$, E_i est invariant par \mathcal{R} alors (\mathcal{R}, E_i) est une représentation linéaire finie de G , donc il existe une base de E_i formée de fonctions du type $\lambda a_i^j, \lambda \in \Lambda$. Puisque $\mathcal{L}_f \neq 0$ il existe au moins une fonction λa_i^j telle que

$$\mathcal{L}_f \lambda a_i^j = f * \lambda a_i^j \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{or } (f * \lambda a_i^j)(x) &= \int_G f(xy^{-1})\lambda a_i^j(y)dy = \int_G f(u)\lambda a_i^j(u^{-1}x)du \\ &= \sum_{k=1}^{n_\lambda} \lambda a_i^k(x) \int_G f(u)\overline{\lambda a_i^k(u)}du. \end{aligned}$$

ainsi f ne peut être orthogonal à tous les λa_i^j .

Ce qui démontre le théorème.

Remarque

si $f \in L^2(G)$ et nous posons :

$$\begin{aligned} \lambda c_i^j &= \int_G f(x)\overline{\lambda a_i^k(x)}dx, \quad 1 \leq n_\lambda \leq n \quad \lambda \in \Lambda, \text{ il résulte du théorème précédent que :} \\ \int_G |f(x)|^2 dx &= \sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda \left(\sum_{1 \leq n_\lambda \leq n} |{}^{(\lambda)}c_i^j|^2 \right) \end{aligned}$$

On vérifie aisément que le coefficient de n_λ n'est autre chose que la trace de $\lambda_f \cdot \lambda_{f^*}$, en désignant par λ_f la représentation $\lambda_f = \int_G f(x) \lambda_x dx$ et par λ_{f^*} l'adjoint de λ_f ($\lambda_{f^*} = \lambda_f$) on a donc la formule suivante :

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda \text{Tr}(\lambda_f \cdot \lambda_{f^*})$$

Théorème 6. *soit ρ une représentation d'un groupe compact G dans un espace de Hilbert H . Alors ρ est somme directe hilbertienne de représentations irréductibles de dimensions finies*

Nous allons effectuer une décomposition de H à partir d'une famille de projecteurs orthogonaux $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ avec $(P_\lambda = n_\lambda \int_G \rho_x \cdot \bar{\chi}_\lambda(x) dx)$. posons :

$(P_\lambda u, v) = n_\lambda \int_G (\rho_x u, v) \bar{\chi}_\lambda(x) dx$, $\forall u \in H$, $\forall v \in H$, $\forall \lambda \in \Lambda$, avec n_λ désignant le degré de la représentation λ . Pour vérifier qu'on a une famille de projecteurs orthogonaux formons pour $\lambda \in \Lambda$ et $\mu \in \Lambda$ l'expression

$$\begin{aligned} (P_\lambda P_\mu u, v) &= n_\lambda n_\mu \int_G \int_G (\rho_{xy} u, v) \bar{\chi}_\lambda(x) \bar{\chi}_\mu(y) dx dy \\ &= n_\lambda n_\mu \int_G \int_G (\rho_z u, v) \bar{\chi}_\lambda(x) \bar{\chi}_\mu(x^{-1}z) dx dz \\ &= n_\lambda n_\mu \int_G \int_G (\rho_z u, v) (\bar{\chi}_\lambda * \bar{\chi}_\mu)(z) dz. \end{aligned}$$

De la proposition 8 et de la définition du caractère il découle que :

$$\bar{\chi}_\lambda * \bar{\chi}_\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq \mu \\ \frac{\chi_\lambda}{n_\lambda} & \text{si } \lambda = \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$$

Par suite on a : $(P_\lambda P_\mu u, v) = 0$ si $\lambda \neq \mu$, et $(P_\lambda P_\mu u, v) = (P_\lambda u, v)$ si $\lambda = \mu$.

Nous allons maintenant montrer que la somme de ces projecteurs est l'identité sur H . pour cela il suffit de vérifier que : $P_\lambda u = 0$ entraîne $\lambda = 0$

Posons $h(x) = (u, \rho_x u)$ $\forall x \in G$ $u \in H$ il vient :

$$(h * \bar{\chi}_\lambda)(x) = \int_G (u, \rho_{xy^{-1}} u) \bar{\chi}_\lambda(y) dy = \frac{1}{n_\lambda} (u, \rho_x P_\lambda u)$$

on a donc $h * \bar{\chi}_\lambda = 0$, on en déduit $\tilde{h} * h * \chi_\lambda = 0$. ce qui donne en particulier :

$(\tilde{h} * h * \chi_\lambda)(e) = 0$. Or le premier membre de cette équation n'est rien d'autre que la trace de l'opérateur $\lambda_{\tilde{h} * h}$ lequel rappelons nous est défini par :

$$\lambda_{\tilde{h} * h} = \int_G (\tilde{h} * h) \lambda_x dx$$

D'autre part d'après la remarque qui suit le théorème 1 on a :

$$\int_G |h(x)|^2 dx = \sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda \text{Tr}(\lambda_{\tilde{h} * h})$$

d'où $\|h\|_2 = 0$ et comme h est continue $h(e) = 0$ c'est-à-dire $(u, u) = 0$ ou encore $u = 0$ dans H

Pour vérifier que l'espace $E_\lambda = P_\lambda(H)$ est stable par ρ , il suffit de vérifier la formule : $(\rho_x P_\lambda \rho_{y^{-1}} u, v) = (P_\lambda u, v)$, $\forall u \in H, \forall v \in H$.

3.2.3 Les représentations linéaires du groupe $SO(3)$

Si (ρ, V) est une représentation linéaire finie de $SO(3)$, l'algèbre de Lie $\rho(SO(3))$ sera un sous espace de $Hom(V, V)$ de dimension 3 et pour lequel il existera une base (A_1, A_2, A_3) telle que :

$$[A_1, A_2] = A_3 \quad , \quad [A_2, A_3] = A_1 \quad , \quad [A_3, A_1] = A_2$$

pour déterminer les représentations linéaires finies de $SO(3)$ on est donc amené à rechercher tous les espaces vectoriels V et les opérateurs A_i , $(i = 1, 2, 3)$ sur V qui satisfont aux relations de commutation ci-dessus. $SO(3)$ étant compact on peut toujours supposer ρ unitaire.

En écrivant $\rho_g = \exp(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3)$, $g \in SO(3)$ et en traduisant la relation $\rho_g^* \cdot \rho = E$ (opérateur identique) on vérifie que :

$$A_i^* = -A_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

autrement dit pour une représentation unitaire les opérateurs A_i sont antihermitiens. Pour des commodités du calcul on pose :

$$H_+ = iA_1 - A_2, \quad H_{-1} = iA_1 + A_2, \quad H_3 = iA_3$$

l'opérateur H_3 est hermitien et H_+ et H_- sont hermitiquement conjugués. On vérifie les relations de commutations :

$$[H_+, H_-] = 2H_3 \quad , \quad [H_-, H_3] = H_- \quad , \quad [H_3, H_+] = H_+$$

Les valeurs propres λ de H_3 sont réelles et les vecteurs propres ν_λ associés deux à deux orthogonaux. On vérifie que :

1. $H_+\nu_\lambda$ est nul ou est vecteur propre de H_3 avec la valeur propre $\lambda + 1$.
2. $H_-\nu_\lambda$ est nul ou est vecteur propre de H_3 avec la valeur propre $\lambda + 1$.

on peut alors écrire :

$$\begin{cases} H_+\nu_\lambda = \beta_\lambda\nu_{\lambda+1} \\ H_-\nu_\lambda = \alpha_\lambda\nu_{\lambda-1} \end{cases}$$

On établit les relations de récurrence :

$$\alpha_\lambda = \beta_{\lambda-1}, \quad \beta_\lambda^2 = \beta_{\lambda-1}^2 - 2\lambda$$

Désignons par j la plus grande valeur propre de H_3 , on vérifie que $-j$ est la plus petite. Le nombre de valeurs propres de H_3 est donc $2j + 1$ d'où il résulte que j est entier ou demi entier.

Considérons alors les vecteurs $\nu_{-j}, \nu_{-j+1}, \dots, \nu_j$ supposés normés ; ils sont orthogonaux et constituent une base d'un espace R_{2j+1} à $2j + 1$ dimensions, espace dans lequel se réalise la représentation $\rho^{(j)}$ de $SO(3)$ de degré $2j + 1$.

Nous allons montrer que cette représentation est irréductible. Soit

$R' \subset R_{2j+1}$ un sous espace invariant par $\rho^{(j)}$ et h un vecteur propre de H_3 appartenant à R' et correspondant à la plus grande valeur propre de H_3 restreint à R' .

On a :

$$\begin{aligned} h &= \sum_{k=-j}^j c^k \nu_k \text{ et } H_+h = 0 \\ \implies \sum_{k=-j}^j c^k H_+\nu_k &= \sum_{k=-j}^j c^k \beta_k \nu_{k+1} = 0 \\ \implies c^{-j} &= c^{-j+1} = \dots = c^{j-1} = 0 \\ \implies h &= c_j \nu_j \text{ donc } \nu_j \in R', \end{aligned}$$

mais comme R' est stable par H_- , $\nu_{j-1}, \dots, \nu_{-j}$ appartiennent à R' , donc $R' \equiv R^{2j+1}$.

On a ainsi réalisé une représentation irréductible ρ_j de $SO(3)$ de dimension $2j + 1$. j est appelé le *poids dominant* de la représentation.

Considérons maintenant une représentation unitaire quelconque (ρ, V_n) dans un espace à n dimensions ; construisons les matrices H_+, H_-, H_3 , et trouvons la plus

grande valeur propre j' de H_3 , associons lui le vecteur $\nu_{j'}$ et à l'aide de H_- formons la suite des vecteurs propres $\nu_{j'}, \dots, \nu_{-j'}$. Ils engendrent un espace $R_{2j'+1}$ sur lequel se réalise une composante irréductible $\rho^{(j')}$ de ρ . Soit R' le supplémentaire orthogonal de $R_{2j'+1}$ dans V_n . On recommence le même procédé sur R' et on décompose ainsi ρ en somme directe de représentations irréductibles du type $\rho^{(j')}$ de ρ . En définitive après résolution des équations de récurrence donnant α_λ et β_λ on établit le théorème :

Théorème 7. *Toute représentation unitaire, irréductible de dimension finie du groupe $SO(3)$ est définie par un certain nombre positif entier ou $\frac{1}{2}$ entier j . le degré de la représentation est $2j+1$. Les opérateurs H_3, H_+, H_- sont donnés dans une certaine base orthonormée ν_j, \dots, ν_{-j} par les formules*

$$H_3\nu_k = k\nu_k, \quad H_-\nu_k = \sqrt{j(j+1) - k(k-1)}\nu_{k-1}$$

$$H_+\nu_k = \sqrt{j(j+1) - k(k+1)}\nu_{k+1}, \quad (k = -j, \dots, +j).$$

Le théorème ci-dessus donne les conditions nécessaires que doivent vérifier les représentations irréductibles de $SO(3)$, mais la question qui se pose est la suivante : à tout entier ou demi entier j correspond-il une représentation continue de $SO(3)$ du type $\rho^{(j)}$? La réponse n'est positive que si j est entier. Pour mettre cela en évidence nous allons considérer un revêtement universel de $SO(3)$ soit $SU(2)$.

On sait déjà que $SU(2)$ est simplement connexe (confert [10]). Tout élément de $SU(2)$ peut être représenté par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$ et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

D'autre part tout élément g de $SO(3)$ peut être considéré comme produit de trois rotations , l'une d'angle φ_2 autour de Oz , l'autre d'angle θ autour de Ox , troisième d'angle φ_1 autour de Oz avec $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$.

A tout élément a de $SU(2)$ on peut associer un élément g de $SO(3)$ défini par :

$$\sin \frac{\theta}{2} = |\beta|; \cos \frac{\theta}{2} = |\alpha|; \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \arg \alpha; \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \arg \beta - \frac{\pi}{2}.$$

Si on désigne par f l'application ainsi définie n'est pas injective; $(f, SU(2))$ est un revêtement du groupe simplement connexe $SO(3)$.

L'application f ainsi définie n'est pas injective : tout élément g de $SO(3)$ est l'image de deux éléments de $SU(2)$ représentés par les matrices

$$\pm \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}} & -i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\varphi_2 + \varphi_1)}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{-i(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}} \end{pmatrix}$$

il en résulte que le noyau $Ker f$ est isomorphe au groupe multiplicatif $(1, -1)$ et que $SO(3)$ est le quotient $SU(2)/Ker f$.

Par ailleurs $SO(3)$ et $SU(2)$ étant localement isomorphes ont la même algèbre de Lie. il en résulte que les conditions nécessaires que nous avons trouvées pour les représentations unitaires irréductibles de $SO(3)$ sont applicables aux représentations irréductibles de $SU(2)$ que nous désignerons par $\mu^{(j)}$, mais la situation est différente du fait que $SU(2)$ est simplement connexe. Désignons par \mathcal{H}_j le sous espace des endomorphismes de R_{2j+1} engendrés par les groupes à un paramètre d'opérateurs infinitésimaux H_+ , H_- et H_3 . $\mu^{(j)}$ est un isomorphisme local de $SU(2)$ dans \mathcal{H}_j et comme $SU(2)$ est simplement connexe $\mu^{(j)}$ être prolongé en un homomorphisme continu de $SU(2)$ dans \mathcal{H}_j , le prolongement étant encore noté $\mu^{(j)}$. Il en résulte que pour tout entier ou demi entier j , $\mu^{(j)}$ est une représentation unitaire continue de $SU(2)$.

Si nous revenons maintenant aux représentations de $SO(3)$, l'isomorphisme local $\rho^{(j)}$ sur \mathcal{H}_j ne pourra être prolongé en un homomorphisme continu de $SO(3)$ dans \mathcal{H}_j que si pour la représentation $\mu^{(j)}$ correspondante on a

$$\mu_a^{(j)} = \mu_{-a}^{(j)} \quad a \in SU(2).$$

On vérifie que cette circonstance n'a lieu pour j entier d'où le théorème

Théorème 8. *Toute représentation irréductible du groupe $SO(3)$ est équivalente à une représentation ρ^j , avec j entier.*

3.3 Résolution de l'équation (*) dans $C^\infty(S^2)$

On considère $(\rho, L^2(S^2))$, la représentation du groupe spécial des rotations $SO(3)$ dans l'ensemble des fonctions de carrées sommables sur la sphère S^2 définie par :

$$(\rho_g(f))(n) = f(g^{-1}n), \quad \forall g \in SO(3), \quad \forall f \in L^2(S^2), \quad \forall n \in S^2$$

. L'élément d'aire $d\omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$ étant invariant par rotation et comme on a :

$$\int_{S^2} |\rho_g(f)|^2 d\Omega = \int_{S^2} |f|^2 d\Omega$$

Alors la représentation est unitaire, par suite elle est décomposable en somme hilbertienne de représentations irréductibles dont les espaces de représentations sont des sous espaces E_{2j+1} de $L^2(S^2)$ de dimension $2j + 1$, (j étant entier).

Considérons E_{2j+1} un tel sous espace et $\rho^{(j)}$ la restriction de ρ à ce sous espace. nous allons en chercher une base constituée d'éléments $C^\infty(S^2)$ et déterminons les opérateurs infinitésimaux A_1, A_2, A_3 définis ci-dessus correspondant à $\rho^{(j)}$.

on a $A_3 f = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\rho_g f - f}{\alpha}$ la limite étant prise au sens de $L^2(S^2)$. Le domaine de définition ne sera pas $L^2(S^2)$ tout entier mais contiendra $C^\infty(S^2)$.

$$\forall f \in C^\infty(S^2) \quad A_3 f(\theta, \varphi) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\theta, \varphi - \alpha) - f(\theta, \varphi)}{\alpha} = -\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, \varphi)$$

D'une façon générale sur $C^\infty(S^2)$:

$$A_i = \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha^i} \right)_0 \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha^i} \right)_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad n' = g^{-1}n$$

En calculant on obtient

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \tan \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_2 &= -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \varphi \tan \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_3 &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$\{y_j^m, m = -j, -j + 1, \dots, j\}$ constituée d'éléments de $C^\infty(S^2)$ qui sont définis comme suit :

Si n est un point de la sphère S^2 , défini par ses angles polaires (θ, φ) , y_j^m s'écrit alors :

$$y_j^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{im\varphi} P_j^m(\cos \theta)$$

Où j est un entier, et P_j^m désigne le polynôme :

$$P_j^m(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!}} \sqrt{\frac{2j+1}{2}} \frac{1}{2^j j!} (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{j+|m|}(x^2-1)^j}{dx^{j+|m|}} \quad [10], [12]$$

3.3.1 Résolution de l'équation (*) dans E_{2j+1}

Soit un sous espace invariant E_{2j+1} de $L^2(S^2)$ par la représentation ρ précédemment définie, et L l'opérateur linéaire défini dans $L^2(S^2)$ par :

$$\forall g \in L^2(S^2) \quad L(g) = g - g \circ L'_a$$

Pour tout $g \in E_{2j+1}$, on a :

$$g \circ L'_a = \rho_{a^{-1}}(g) \in E_{2j+1}$$

Par suite l'opérateur L est stable sur E_{2j+1} . Considérons alors la restriction de l'opérateur L à E_{2j+1} que nous noterons encore L . Résoudre l'équation (*) pour une fonction $f \in E_{2j+1}$ revient à trouver un antécédent $g \in E_{2j+1}$ de f par l'opérateur L .

La famille $\{y_j^m, m = -j, -j + 1, \dots, j\}$ étant une base de E_{2j+1} et du fait de la linéarité de L , l'équation (*) se résoud complètement en faisant parcourir f dans $\{y_j^m, m = -j, -j + 1, \dots, j\}$. De plus a étant un élément de

$SO(3)$, il existe une base de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de a est de la forme :

$$a_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ Dans la suite a sera toujours pris sous la forme a_t .

Proposition 9. Soit $t \in \mathbb{R}$, et a_t un élément de $SO(3)$.

L'équation : (*) $g - g \circ L'_{a_t} = y_j^m$, $m = -j, -j+1, \dots, j$ dans E_{2j+1}

donne les solutions suivantes :

(i) si $m = 0$, il n'y a pas de solutions dans E_{2j+1}

(ii) si $m \in \{-j, -j+1, \dots, \widehat{0}, \dots, j\}$: Les solutions de l'équation (*) sont de la forme :

- Pour $t \notin \{\frac{2k\pi}{m_0}, m_0 \in \{-j, -j+1, \dots, \widehat{0}, \dots, j\}, k \in \mathbb{Z}\}$ on a :

$$g_\lambda = \frac{1}{1 - e^{-imt}} y_j^m + \lambda y_j^0, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

- Pour $t = \{\frac{2k\pi}{m_0}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m_0 \in \{-j, -j+1, \dots, \widehat{0}, \dots, j\}, k \in \mathbb{Z}\}$

.Si $|m| = |m_0|$ Il n'y a pas de solutions.

.Si $|m| \neq |m_0|$, les solutions sont de la forme :

$$g_{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{1}{1 - e^{-imt}} y_j^m + \alpha y_j^0 + \beta y_j^{-m_0} + \gamma y_j^{m_0} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

En effet considérons l'opérateur L défini précédemment dans E_{2j+1} et déterminons le complètement en calculant les images de la base de E_{2j+1} par L .

$$L(y_j^m) = y_j^m - y_j^m \circ L'_{a_t}$$

$$L(y_j^m)(n) = y_j^m(n) - y_j^m(a_t n) \quad \forall n \in S^2.$$

Pour un point n de la sphère S^2 déterminé par ses coordonnées polaires (θ, φ) on a :

$$a_t n = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Alors $a_t n$ aura pour coordonnées polaires $(\theta, \varphi - t)$ d'où :

$$\begin{aligned} L(y_j^m)(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{im\varphi} - e^{im(\varphi-t)}) P_j^m(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} (1 - e^{-imt}) P_j^m(\cos \theta) \\ &= (1 - e^{-imt}) y_j^m(n) \end{aligned}$$

Par suite :

$$L(y_j^m) = (1 - e^{-imt})y_j^m \quad (1)$$

Pour $m = 0$ on a :

$$L(y_j^0) = 0 \implies y_j^0 \in \text{Ker} L$$

Procédons maintenant à la résolution de l'équation (*).

-Si $m = 0$, il n'y a pas de solutions d'après (1).

-Si $m \in \{-j, \dots, \widehat{0}, \dots, j\}$, on distingue alors deux cas :

1^{er} cas : Si $t \notin \{\frac{2k\pi}{m_0} ; m_0 \in \{-j, \dots, \widehat{0}, \dots, j\}, k \in \mathbb{Z}\}$ les solutions de l'équation (*) dans E_{2j+1} sont les fonctions de la forme :

$$g_\lambda = \frac{1}{1 - e^{-imt}} y_j^m + \lambda y_j^0, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

2^o cas : Si $t = \frac{2k\pi}{m_0}$ avec $k \in \mathbb{Z}, m_0 \in \{-j, \dots, \widehat{0}, \dots, j\}$

On a : $L(y_j^{m_0}) = 0$ et $L(y_j^{-m_0}) = 0$ Par suite $y_j^{m_0}$ et $y_j^{-m_0} \in \text{Ker} L$ d'où :

-Pour $m = |m_0|$ il n'y a pas de solutions pour l'équation (*).

-Pour $m \neq |m_0|$, les solutions de l'équation (*) sont les fonctions de la forme :

$$g_{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{1}{1 - e^{-imt}} y_j^m + \alpha y_j^0 + \beta y_j^{-m_0} + \gamma y_j^{m_0} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

3.3.2 Résolution de l'équation (*) dans $C^\infty(S^2)$

On généralise les résultats obtenus dans E_{2j+1} à $L^2(S^2)$ qui est une somme hilbertienne des espaces E_{2j+1} . comme $C^\infty(S^2)$ est dense dans $L^2(S^2)$ et les éléments des bases canoniques des sous espaces E_{2j+1} étant dans $C^\infty(S^2)$, alors les résultats obtenus dans $L^2(S^2)$ restent valables $C^\infty(S^2)$. D'où la proposition :

Théorème 9. Soit $t \in \mathbb{R}$, η_{at} un élément de $SO(3)$.

L'équation

$$(*) \quad g - g \circ L'_{\eta_t} = y_j^m \text{ dans } C^\infty(S^2),$$

(où $m \in \{-j, -j+1, \dots, j\}$ et $j \in \mathbb{Z}$) a pour solutions :

(i) Si $m = 0$ et $j \in \mathbb{Z}$, il n'y a pas de solutions dans $C^\infty(S^2)$

(ii) Si $j \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \{-j, -j+1, \dots, \widehat{0}, \dots, j\}$;

les solutions de l'équation * sont de la forme :

- Pour $t \notin \{\frac{2k\pi}{m_0}, m_0 \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}\}$ on a :

$$g_\lambda = \frac{1}{1 - e^{-imt}} y_j^m + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j y_j^0, \text{ avec } \lambda_j \in \mathbb{C}$$

- Pour $t = \frac{2k\pi}{m_0}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et $m_0 \in \mathbb{N}^*$

- Si $|m| = |m_0|$, il n'y a pas de solutions ;
- Si $|m| \neq |m_0|$, les solutions sont de la forme :

$$g_{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{1}{1 - e^{-imt}} y_j^m + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j y_j^0 + \sum_{j=|m_0|}^{\infty} \beta_j y_j^{-m_0} + \sum_{j=|m_0|}^{\infty} \gamma_j y_j^{m_0}$$

où $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{C}$

3.4 Description des solutions de l'équation (E)

Considérons $(\rho, L^2(SO(3)))$ la représentation du groupe spécial des rotations $SO(3)$ dans l'espace vectoriel des fonctions de carrée sommable sur $SO(3)$. $SO(3)$ étant un groupe compact et $L^2(SO(3))$ un espace de Hilbert alors d'après le théorème de Peter Weyl [4], ρ est décomposable en une somme directe hilbertienne de représentations irréductibles ρ^j , j étant entier. De plus d'après [3] les espaces de représentations des ρ^j sont des sous espaces E'_{2j+1} de $L^2(SO(3))$ de dimension $2j+1$, j étant un entier.

Proposition 10. [11] : *Toute représentation irréductible τ du groupe Lie $SO(3)$ est isomorphe à l'une des représentations ρ^j .*

Où ρ^j désigne une des représentations irréductibles obtenues dans la décomposition de la représentation $(\rho, L^2(S^2))$

En appliquant le théorème 4 aux représentations irréductibles sur $L^2(S^2)$, on établit aisément ce théorème. Il découle de ce théorème que les représentations (ρ^j, E_{2j+1}) et (ρ'^j, E'_{2j+1}) sont isomorphes. Par suite les éléments de la base

canonique de E'_{2j+1} sont des fonctions indéfiniment dérivables sur $SO(3)$. On déduit de l'isomorphisme des représentations ρ et ρ' , que la résolution du problème (*) dans $C^\infty(S^2)$ est suffisante pour décrire toutes les solutions de l'équation (E) dans $C^\infty(SO(3))$. Il vient que la description du groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, \chi(F)) = \chi(F)/\mathcal{B}$ peut être effectué par la résolution de l'équation (*).

3.5 Description du groupe $H^1(M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}})$

Dans cette partie nous distinguerons deux cas :

1^{er} cas : Si $t \notin \{\frac{2k\pi}{m}, m \in N^*, k \in \mathbb{Z}\}$.

On considère dans un premier temps de l'opérateur L restreint à un espace E_{2j+1} , et on désigne par $K_j = \ker L = \text{vect} \langle y_j^0 \rangle$ et par H_j l'ensemble image de L dans E_{2j+1} . On a $H = \text{Im}L = \text{vect} \langle y_j^{-j}, \dots, \widehat{y_j^0}, \dots, y_j^j \rangle$.

De ces résultats, on déduit le calcul du noyau de l'opérateur L dans $C^\infty(S^2)$, et de son ensemble image.

Soit $K = \ker L$, et $H = \text{Im}L$ on a :

$$K = K_0 \oplus K_1 \oplus \dots \oplus K_j \oplus \dots, \text{ et } H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_j \oplus \dots$$

On détermine alors l'espace $\mathcal{B} = \{X - \varphi^*(X), X \in \chi(F)\}$ qui n'est autre que $\mathcal{B} = \{(f_1, f_2, f_3) \in (C^\infty(S^2))^3 / \exists (g_1, g_2, g_3) \in (C^\infty(S^2))^3 : g_i - g_i \circ L_{a_i} = f_i; i = 1, 2, 3\}$ d'où $\mathcal{B} \xrightarrow{\sim} H \times H \times H$.

Il reste à déterminer le groupe $\chi(S^2)/\mathcal{B}$.

Pour cela, on considère l'application φ définie par :

$$\varphi : K^3 \longrightarrow \chi(S^2)/\mathcal{B}$$

$$(g_1, g_2, g_3) \mapsto \varphi(g_1, g_2, g_3) = \overline{g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3}$$

Il est facile d'établir que φ est un isomorphisme linéaire. On en déduit que :

$$\chi(S^2)/\mathcal{B} \approx K^3$$

2^{ème} cas : Si $t = \frac{2k\pi}{m_0}$, $m_0 \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$

On raisonne de manière analogue que précédemment, en déterminant dans un premier temps le noyau et l'image de l'opérateur L restreint à un sous espace E_{2j+1} . Ainsi deux cas sont à distinguer dans ce calcul :

(i) Si $0 \leq j < m_0$

on a : $K_j = \ker L = \text{vect} \langle y_j^0 \rangle$

et $H_j = \text{Im} L = \text{Vect} \langle y_j^{-j}, \dots, \widehat{y_j^0}, \dots, y_j^j \rangle$

(ii) Si $j \geq 0$

il vient que : $K_j = \text{vect} \langle y_j^{-m_0}, y_j^0, y_j^{-m_0} \rangle$

et $H_j = \text{Im} L = \text{vect} \langle y_j^m \rangle_{m \in \{-j, \dots, -\widehat{m_0}, \dots, \widehat{0}, \dots, \widehat{m_0}, \dots, j\}}$.

On en déduit dans un 2nd temps le noyau et l'ensemble image de l'opérateur L dans $C^\infty(S^2)$

soit : $K = \ker L = K_0 \oplus K_1 \oplus \dots K_j \oplus \dots$

et $H = \text{Im} L = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots H_j \oplus \dots$

L'ensemble $\mathcal{B} = \{X - \varphi^*(X), X \in \chi(S^2)\}$ sera donc isomorphe à $H \times H \times H = H^3$. Il vient que le groupe $\chi(S^2)/\mathcal{B}$ est isomorphe à $K \times K \times K = K^3$.

D'où :

$$H^1(M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}}) \approx K^3.$$

On a alors théorème suivant :

Théorème 10. Soit F le groupe spécial des transformations orthogonales de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , $t \in \mathbb{R}$, $a_t \in SO(3)$ avec comme matrice dans une base convenablement choisie

$$a_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } L_{a_t} \text{ désigne la translation à gauche sur } SO(3) \text{ suivant } a_t.$$

Soit \mathcal{F} un flot de Lie de groupe $SO(3)$ sur la variété $M = S^1 \times F$, transverse à la fibration triviale $F \rightarrow M \xrightarrow{\pi} S^1$ (où π est la projection sur le facteur S^1) obtenu en suspendant le difféomorphisme L_{a_t} .

Alors on a :

(i) Si $t \in \{\frac{2k\pi}{m} ; m \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}\}$

$$H^1(M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}}) \approx K^3 \text{ avec } K = \text{vect} \langle y_j^0 \rangle_{j \in \mathbb{Z}}$$

(ii) Si $t = \frac{2k\pi}{m_0}, m_0 \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$

$$H^1(M, \mathcal{N}_{\mathcal{F}}) \approx K^3 \text{ avec } K = \text{vect} \langle (y_j^0)_{j \in \mathbb{N}} ; (y_j^{-m_0})_{j \geq m_0} ; (y_j^{m_0})_{j \geq m_0} \rangle$$

Bibliographie

- [1]C. ALBERT, P. MOLINO :Pseudogroupes de Lie transitifs, I. Structures principales, Travaux en cours, Hermann Paris 1984
- [2]C. ALBERT, P. MOLINO :Pseudogroupes de Lie transitifs, II. Théorèmes d'intégrabilités, Travaux en cours, Hermann Paris 1987
- [3]Mikaïlou COMPAORE :Mémoire de D. E. A. , Feuilletages de Lie , Université de Ouagadougou, mars 1999.
- [4]Edmond FEDIDA : Feuilletages du plan, Feuilletages de Lie, thèse d'état présentée en 1973 à Strasbourg
- [5]Claude GODBILLON : Géométrie différentielle et Mécanique analytique, Hermann Paris 1969
- [6]Claude GODBILLON : Eléments de topologie algébrique, Hermann, Paris 1971
- [7]Claude GODBILLON : Feuilletages, Etudes géométriques I, I. R. M. A. Strasbourg 1986
- [8]Claude GODBILLON : Feuilletages, Etudes géométriques II, I. R. M. A. Strasbourg 1986
- [9]Pierre MOLINO : Cours de D. E. A. sur "Les feuilletages riemanniens", institut de mathématiques, Facultés des sciences et techniques de Languedoc, Montpellier 1983
- [10]Guy PICHON, Groupes de Lie, Représentations Linéaires et Applications, collection Hermann Méthodes, Paris 1973

- [11] Ernest B. VINBERG, Linear Representations of Groups, Translated from the Russian by A. Iacob, Birkhäuser Verlag (1989)
- [12] WITTAKER and WATSON :A course of modern analysis, Cambridge university Press , cambridge, 1952.

Articles

- [13] T. DUCHAMP, M. KALKA : Deformation for holomorphic foliations, *J. Diff. Geom.* 14 (1979), 317-337
- [14] T. DUCHAMP, M. KALKA : Holomorphic foliations and deformations of the Hopf foliation, preprint.
- [15] A. El Kacimi Alaoui, B. Gmira Stabilité du caractère Kälérien transverse, *Israel journal of mathematics*, 1996.
- [16] J. Girbau, A. Haefliger, and D. Sanderaman : On deformations of transversely holomorphic foliations, *J. für die reine und. math.* Band 345 (1983), 122-147.
- [17] A. HAEFLIGER, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, in "Structures transverses des feuilletages", *Astérisque* , 116(1984), 70-97.
- [18] K. KODIARA and D. C. SPENCER : On deformation of complex analytic Structure. I, II, *Ann. Math.* 67(1958), 328-466 ; III, 71(1960). 43-76
- [19] M. KURANISHI : Deformation of complex compact manifold, Montréal, 1971.
- [20] B. MALGRANGE, Analytic spaces, *L'enseignement mathématique* 14(1968), 1-28.

Deuxième partie

Géométrie différentielle des fibrés
unitaires de certains espaces
symétriques de rang 1

Chapitre 1

Quelques Rappels

1.1 Métriques de Levi-Civita du fibré unitaire

Soit $P : M \rightarrow N$ une submersion ; notons que le complémentaire dans $T_m M$ de $(T_m P)^{-1}(O)$ est isomorphe à $T_{P(m)}N$.

Il n'existe pas de choix canonique pour un tel complémentaire, toutefois dans le cas où M est munit d'une métrique riemannienne, nous pouvons choisir le complémentaire orthogonal de $(T_m P)^{-1}(O)$ dans $T_m M$, soit H_m : c'est le sous espace horizontal de $T_m M$.

Définition

Une application P de (M, g) dans (N, h) est une submersion riemannienne si

- P est une submersion lisse.
- Pour $m \in M$, $T_m P$ est une isométrie entre H_m et $T_{P(m)}N$.

Soit (M, g) une variété riemannienne. Le fibré unitaire de (M, g) noté $U^g M$ est l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à M :

$$U^g M = \{v \in TM \mid g(v, v) = 1\}$$

Soit $p_M : TM \rightarrow M$ la projection canonique. La restriction de p_M à $U^g M$ sera notée p . On désigne par $T_v p$ la différentielle de p . Son noyau est l'espace tangent $T_v(T_x M)$ à la fibre de $x = p(v)$, et cet espace qu'on appelle espace vertical, s'identifie canoniquement à $T_x M$. Nous allons définir sur TM une métrique de submersion riemannienne qui induit la métrique g_x sur la fibre $T_x M$. Il suffit pour cela de se donner une distribution de plans dans TTM transverse à la distribution verticale. Une connexion sur TM définit bien une telle distribution (voir par exemple (B1], ch.1)). La métrique de Levi-Civita est obtenue si on prend pour connexion la connexion de Levi-Civita de la métrique. Cette métrique peut être décrite simplement en se donnant les longueurs des courbes dans TM . Une telle courbe $s(t) = (u(t), v(t))$ n'est autre qu'un champ de vecteurs le long de la courbe $t \rightarrow u(t)$ dans M . Le carré de la norme du vecteur vitesse $s'(t)$ pour la métrique est donnée par

$$g_1(s'(t), s'(t)) = g(u'(t), u'(t)) + g(D^u v(t), D^u v(t))$$

où $u'(t)$ est le vecteur tangent à la courbe $u(t)$ dans M , et $D^u v(t)$ est la dérivée covariante de $v(t)$ le long de $u(t)$ dans M .

On voit facilement que cette description est équivalente à la première, et que p_M est à fibres totalement géodésiques.

La métrique induite sur $U^g M$ par celle de TM sera aussi notée g_1 . La projection $p : (U^g M, g_1) \rightarrow (M, g)$ est encore une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques.

1.2 Espaces homogènes

1.2.1 Définition

- a) Une variété riemannienne (M, g) est homogène si le groupe des isométries $I(M, g)$ agit transitivement.
- b) Une variété riemannienne est dite G -homogène (ou homogène sous le groupe de Lie G) si G est un sous groupe fermé de $I(M, g)$ qui agit transitivement sur M .

Dans ce cas la variété est difféomorphe au quotient G/H_x , où l'on a désigné par H_x le stabilisateur de x dans G . Notons que H_x est compact (théorème d'Ascoli). Inversement en utilisant un argument d'intégration (cf. $[G - H - L]$ par exemple) on prouve le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit G/H un espace homogène effectif, où H est compact. Alors il existe sur G/H des métriques riemanniennes G -homogènes. Ces métriques sont déterminées par les produits scalaires $Ad(H)$ -invariants sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

Il est plus commode de travailler avec un supplémentaire $Ad(H)$ -invariant \mathfrak{m} de \mathfrak{h} (il existe d'après le même argument d'intégration). Sous les mêmes hypothèses, il est possible de préciser de combien de paramètres au plus dépendent ces métriques G -invariantes. Nous utilisons librement le vocabulaire et les notions de base de la théorie des représentations (voir par exemple $[PC]$).

Théorème 2. *Soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_l$ une décomposition de \mathfrak{m} en somme directe de H -modules irréductibles deux à deux non isomorphes. Alors tout produit scalaire $Ad(H)$ -invariant sur \mathfrak{m} est de la forme*

$$g = \sum_{i=1}^{i=l} g_i,$$

où l'on a désigné par g_i un produit scalaire $Ad(H)$ -invariant (et donc unique à un facteur près) sur \mathfrak{m}_i . En particulier, si \mathfrak{m} est un H -module irréductible, il y a sur G/H une métrique G -invariante (à un facteur scalaire près).

Une reformulation plus commode est la suivante. On se donne une fois pour toute un produit scalaire $Ad(H)$ -invariant sur \mathfrak{m} noté \langle, \rangle . Alors g peut s'écrire sous la forme

$$g = \sum_i \lambda_i \langle, \rangle_{\mathfrak{m}_i}.$$

En employant ce point de vue dans le cas général où une décomposition de \mathfrak{m} peut admettre des composantes irréductibles isomorphes on obtient le résultat suivant.

Théorème 3. Soit G/H un espace homogène, où G est un groupe de Lie compact, \langle, \rangle un produit scalaire AdG -invariant sur \mathfrak{g} , et \mathfrak{m} l'orthogonal de \mathfrak{h} pour ce produit scalaire. Soit

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_l$$

une décomposition de \mathfrak{m} en somme directe de H -modules irréductibles alors toute forme quadratique $Ad(H)$ -invariante sur \mathfrak{m} peut se mettre sous la forme

$$g(u) = \sum_{i=1}^{i=l} \lambda \langle u_i, u_i \rangle_{\mathfrak{m}_i} + \sum_{i < j} \mu_{ij} \langle \Phi_{ij} u_i, u_j \rangle_{\mathfrak{m}_j}$$

où u_j désigne la composante dans \mathfrak{m}_j de $u \in \mathfrak{m}$, et Φ_{ij} un H -morphisme de \mathfrak{m}_i dans \mathfrak{m}_j

Rappelons que si \mathfrak{m}_i et \mathfrak{m}_j ne sont pas isomorphes il n'existe aucun H -morphisme de l'un dans l'autre. On retrouve alors le théorème 2. Rappelons aussi que l'ensemble des H -morphisms d'un H -module irréductible est isomorphe à \mathbb{R}, \mathbb{C} ou \mathbb{H} .

Si G est compact et semi simple, il existe sur G/H une métrique privilégiée : on choisit pour \mathfrak{m} l'orthogonal de \mathfrak{h} pour la forme de Killing B de \mathfrak{g} , et on munit \mathfrak{m} de la restriction de $-B$

(rappelons que B est définie négative).

1.2.2 Définition

Cette métrique s'appelle la métrique normale canonique. Par abus de langage, on donnera le même nom à toute métrique proportionnelle.

Si G est seulement compact, on appelle métrique normale sur G/H toute métrique obtenue à partir d'un produit scalaire $Ad(G)$ -invariant sur \mathfrak{g} . Notons que si G est connexe, un produit scalaire \langle, \rangle sur \mathfrak{g} est $Ad(G)$ -invariant si et seulement si

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \quad \langle [Z, X], Y \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle = 0.$$

Cela conduit à la généralisation suivante des métriques normales.

1.2.3 Définition

Soit G/H un espace homogène et \mathfrak{m} un supplémentaire $Ad(H)$ -invariant de \mathfrak{g} dans \mathfrak{h} . Une métrique G -homogène g sur G/H est dite *naturellement réductrice*, si elle est définie par un produit scalaire \langle, \rangle sur \mathfrak{m} tel que

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{m} \quad \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle + \langle [Z, Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle = 0.$$

Cette notion dépend bien sûr du choix de \mathfrak{m} . Dans le cas général, un produit scalaire $Ad(H)$ -invariant \langle, \rangle sur \mathfrak{m} étant donné, on définit une application bilinéaire U de $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ dans \mathfrak{m} par la formule

$$2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle + \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}} \rangle$$

1.3 Espaces symétriques de rang 1

Soit M une variété riemannienne et N un voisinage symétrique de 0 dans $T_m M$ tel que $\exp_m|_N : N \rightarrow V_m$ est un difféomorphisme.

Définissons $s : N \rightarrow N$ par $s(X) = -X$ et posons $s_m = (\exp_m|_N) \circ s \circ (\exp_m|_N)^{-1}$. Cette application est appelée la symétrie géodésique par rapport à m sur V_m . La variété M est dite localement symétrique si pour chaque m , il existe N et V_m tel que la symétrie géodésique est une isométrie. Ces espaces sont caractérisés par la condition d'intégrabilité suivante :

Théorème 1. *Une variété riemannienne M est localement symétrique si et seulement si le tenseur de courbure R (resp. la courbure sectionnelle) est invariant sous le transport parallèle (où ce qui est équivalent, si $DR = 0$)*

1.3.1 Définition

Une variété riemannienne connexe M est un *espace symétrique* si pour chaque $m \in M$ il existe une isométrie involutive $s_m : M \rightarrow M$ telle que (sur $T_m M$)

$$s_m \circ \exp_m = \exp_m \circ s$$

Il est clair que si M est symétrique, il est localement symétrique et complet.

Le *rang* d'un espace symétrique M est la dimension maximale des sous variétés plates (c'est à dire celles de courbure nulle) qui sont totalement géodésiques dans M .

On désigne par *ROSSes*, les espaces symétriques de rang 1 et par *CROSSes* les espaces symétriques compacts de rang 1.

Les espaces $P^n \mathbb{R}$, $P^n \mathbb{C}$, $P^n \mathbb{H}$, $P^2 \mathbb{C}a$ et les sphères euclidiennes sont des *CROSSes*.

En fait les espaces symétriques riemanniens peuvent être identifiés de manière canonique avec des espaces riemanniens homogènes particuliers, via l'action transitive de leur groupe d'isométrie. Cette propriété a été utilisée par Elie Cartan pour les classifier.

1.4 Espace projectif des quaternions

L'espace \mathbb{H}^{n+1} où \mathbb{H} est le corps des quaternions est muni de sa structure d'espace vectoriel à droite

$$x \cdot \lambda = (x_1, \dots, x_{n+1}) \cdot \lambda = (x_1 \lambda, \dots, x_{n+1} \lambda)$$

de son produit hermitien

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \bar{y}_i$$

et de son produit scalaire réel (où norme hermitienne standard)

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \text{Re}(\langle x, y \rangle)$$

L'espace projectif $P^n \mathbb{H}$ est l'espace des orbites pour l'action à droite du groupe $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$. C'est l'ensemble quotient $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathcal{R}$ où \mathcal{R} est la relation

d'équivalence définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{H}^*/x = \lambda y$$

Rappelons d'abord la métrique canonique de $P^n\mathbb{H}$. On considère S^{4n+3} comme la sphère unité de \mathbb{H}^{n+1} pour la norme hermitienne standard, où ce qui revient au même pour la norme euclidienne standard de l'espace réel associé. C'est la norme associée à $\langle, \rangle_{\mathbb{R}}$.

On a une action de la sphère S^3 vu comme l'ensemble des quaternions de norme 1 sur S^{4n+3} c'est donnée par $(z, u) \rightarrow z \cdot u$ pour $u \in S^3$ et $z \in S^{4n+3}$. Le projectif quaternionien $P^n\mathbb{H}$ c'est aussi l'espace quotient S^{4n+3}/S^3 . En considérant la projection induite sur cette action, nous obtenons la fibration de Hopf

$$(1) \quad q : S^{4n+3} \rightarrow P^n\mathbb{H}$$

$$TS^{4n+3} = \{(x, u)/x \in S^{4n+3}, u \in \mathbb{H}^{n+1}, \langle x, u \rangle_{\mathbb{R}} = 0\}$$

Pour $z \in S^{4n+3}$, \mathbb{H}^{n+1} se décompose en somme orthogonale réelle $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}_z \oplus T_z S^{4n+3}$. De plus l'espace tangent à l'orbite de z sous l'action de S^3 étant le sous espace réel

$$\mathbb{R}_{zi} \oplus \mathbb{R}_{zj} \oplus \mathbb{R}_{zk} = V_z S^{4n+3} = \{(z, z\lambda), \lambda \in \mathbb{H}, \text{Re}\lambda = 0\}$$

de $T_z S^{4n+3}$ on a :

$$\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}_z \oplus \mathbb{R}_{zi} \oplus \mathbb{R}_{zj} \oplus \mathbb{R}_{zk} \oplus L_z$$

avec $L_z = \{v \in \mathbb{H}^{n+1} / \langle v, z \rangle = 0\}$, où \langle, \rangle désigne le produit hermitien de \mathbb{H}^{n+1} . $T_z S^{4n+3} = L_z \oplus V_z S^{4n+3}$ c'est une somme directe orthogonale pour \langle, \rangle .

L'action de S^3 sur TS^{4n+3} dans (1) est donnée par

$$((x, u), \lambda) \rightarrow (x\lambda, u\lambda).$$

La distribution $L_x S^{4n+3}$ reste invariante puisque $\langle x\lambda, u\lambda \rangle = \bar{\lambda} \langle x, u \rangle \lambda$ et il définit une connexion sur le fibré (1). Il s'en suit que l'espace tangent à $P^n\mathbb{H}$ en $q(x)$ est isomorphe à l'ensemble des classes $\{(x\lambda, u\lambda) / \langle x, u \rangle = 0, \lambda \in S^3\} \simeq T_{q(x)} P^n\mathbb{H}$. Nous désignerons par $q(x, u)$ un tel vecteur tangent en $q(x)$.

L'espace projectif $P^n\mathbb{H}$ est muni d'une structure riemannienne naturelle . Notons d'abord que pour $u, v \in \mathbb{H}^{n+1}$ et $\lambda \in S^3$,

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u\lambda, v\lambda \rangle_{\mathbb{R}}$$

En fait

$$\begin{aligned} 2 \langle u\lambda, v\lambda \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle u\lambda, v\lambda \rangle + \langle v\lambda, u\lambda \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle u, v \rangle \lambda + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle \lambda \\ &= 2\bar{\lambda} \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} \lambda \\ &= 2 \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

L'expression $g(q(x, u), q(x, v)) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}}$ définit une métrique naturelle sur $P^n\mathbb{H}$ pour laquelle $q : S^{4n+3} \rightarrow P^n\mathbb{H}$ est une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques.

Notons que $\langle u, v \rangle$ n'est pas invariante sur S^3 à cause de la non commutativité de la multiplication.

Désignons par $U(n+1, \mathbb{H}) = Sp(n+1)$ le sous groupe de $GL(n+1, \mathbb{H})$ qui laisse le produit hermitien \langle, \rangle invariant c'est à dire

$$\forall A \in Sp(n+1), \quad \forall x, y \in \mathbb{H}^{n+1} \quad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Ce groupe est appelé le groupe symplectique. Pour $A \in Sp(n+1)$, $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ et $\lambda \in \mathbb{H}$ on a : $A(x\lambda) = A(x)\lambda$

$Sp(n+1)$ agit donc transitivement sur $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1}$ et agit transitivement aussi sur $P^n\mathbb{H}$. Soit (e_1, \dots, e_{n+1}) la base canonique de \mathbb{H}^{n+1} et \mathcal{H} le sous groupe de $Sp(n+1)$ laissant fixe le point $q(e_{n+1})$.

Considérons l'application $p : Sp(n+1) \rightarrow P^n\mathbb{H}$ définie par $p(A) = q(A(e_{n+1}))$ pour $A \in Sp(n+1)$. Cette application est C^∞ et l'on sait voir (H N 1 p114 par exemple) que l'application $\phi : Sp(n+1)/\mathcal{H} \rightarrow P^n\mathbb{H}$ donnée par $\phi(A\mathcal{H}) = q(A(e_{n+1}))$ est un difféomorphisme. Pour $A \in \mathcal{H}$ on a :

$$A(e_{n+1}) = e_{n+1}\lambda, \quad \lambda \in S^3 .$$

Donc A est de la forme $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $B \in Sp(n)$. Ainsi $\mathcal{H} = Sp(n) \times Sp(1)$ d'où le difféomorphisme $\phi : Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1) \rightarrow P^n\mathbb{R}$.

Montrons maintenant que l'espace projectif $P^n\mathbb{H}$ a une structure symétrique. Pour cela on définit l'involution θ sur $Sp(n+1)$ en posant : $\theta(A) = SAS^{-1}$ avec $S = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; alors $\theta(A) = A$ si et seulement si $A \in \mathcal{H}$. Il s'en suit que $(Sp(n+1), \mathcal{H}, \theta)$ est une paire symétrique (voir HN1 pp 173 ou K-N2 pp 225).

La décomposition canonique de l'algèbre de Lie de $Sp(n+1)$ est donnée par :

$$sp(n+1) \simeq \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \text{ avec } \mathfrak{h} = sp(n) \oplus sp(1)$$

Un élément b appartient à $sp(n+1)$ si et seulement si $b + {}^t \bar{b} = 0$ et

$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{H}^n \right\}$, \mathfrak{m} s'identifie ainsi à \mathbb{H}^n . Par cette identification l'action adjointe de \mathcal{H} sur \mathfrak{m} a la forme

$$ad \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} (\xi) = B\xi\bar{\lambda}$$

Pour $\xi, \eta \in \mathfrak{m} \simeq \mathbb{H}^n$ le produit scalaire réel $\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}}$ est $ad\mathcal{H}$ -invariant. En fait on a :

$$\langle B\xi\bar{\lambda}, B\eta\bar{\lambda} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B\xi, B\eta \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \xi, \eta \rangle.$$

Donc $Sp(n+1)/\mathcal{H}$ a une structure riemannienne. On montre (voir [B2]) que $\phi : sp(n+1)/\mathcal{H} \rightarrow P^n\mathbb{H}$ est une isométrie.

Chapitre 2

Le fibré unitaire du projectif quaternionien $P^n\mathbb{H}$

2.1 Le fibré unitaire $UP^n\mathbb{H}$ vu comme espace homogène sous $Sp(n+1)$

En 1) nous avons vu que $T_{q(x)}P^n\mathbb{H} = \{(x\lambda, u\lambda) / \langle x, u \rangle = 0, \lambda \in S^3\}$. On appellera fibré unitaire de $P^n\mathbb{H}$, l'ensemble des vecteurs de $TP^n\mathbb{H}$ de norme 1 pour sa métrique naturelle. Nous le noterons $UP^n\mathbb{H}$.

$$UP^n\mathbb{H} = \{q(x, u) \in TP^n\mathbb{H} / g(q(x, u), q(x, u)) = \langle u, u \rangle_{\mathbb{R}} = 1\}$$

$Sp(n+1)$ agit sur $UP^n\mathbb{H}$ par :

$$A \in Sp(n+1) \text{ et } q(x, u) \in UP^n\mathbb{H}, Aq(x, u) = q(Ax, Au).$$

Cette action est transitive car $Sp(n+1)$ est transitive sur les couples de vecteurs orthogonaux de \mathbb{H}^{n+1} .

Reste à déterminer l'isotropie. Choisissons pour point base $(q(e_0), T_{e_0}q(e_1))$. Alors le groupe d'isotropie pour l'action de $Sp(n+1)$ est formé des applications linéaires qui transforment (e_0, e_1) en $(e_0\lambda, e_1\lambda), \lambda \in S^3$.

C'est le groupe des matrices de $Sp(n+1)$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A \in Sp(n-1)$ et $\lambda \in S^3$. On va noter (λ, A) une telle matrice. Nous désignerons par

$$\Delta(S^3 \times Sp(n-1)) \simeq \mathcal{H}_2$$

ce sous groupe d'isotropie. Le fibré unitaire peut donc s'identifier à l'espace homogène $Sp(n+1)/\mathcal{H}_2$. L'espace tangent au point base s'identifie à l'orthogonal de \mathfrak{h}_2 (algèbre de Lie de \mathcal{H}_2) dans $sp(n+1)$ pour la forme de Killing. Nous noterons \mathfrak{n} ce dernier espace. Il est formé des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} x & -\bar{u} & -{}^t\bar{v} \\ u & -x & -{}^t\bar{w} \\ v & w & 0 \end{pmatrix}$$

Où x est un quaternion pur, $u \in \mathbb{H}$, $v, w \in \mathbb{H}^{n-1}$. Un tel vecteur peut alors s'écrire sous la forme $X = (x, u, v, w)$.

L'action d'isotropie est équivalente à la représentation adjointe de \mathcal{H}_2 dans \mathfrak{n} . Elle est donnée après calcul par :

$$(\lambda, A) \cdot (x, u, v, w) \longrightarrow (\lambda x \bar{\lambda}, \lambda u \bar{\lambda}, Av \bar{\lambda}, Aw \bar{\lambda})$$

Nous déduisons la proposition suivante qui résume notre discussion.

Proposition 1. *La représentation d'isotropie de l'espace homogène $UP^n\mathbb{H} \simeq Sp(n+1)/\mathcal{H}_2$ se décompose en un facteur de dimension réelle 7 et en deux exemplaires η_2 et η_3 isomorphes à \mathbb{H}^{n-1}*

En désignant par $\eta = \eta_1 \oplus \eta_2 \oplus \eta_3$, on voit en appliquant le lemme Schur, qu'une métrique $Sp(n+1)$ -homogène est déterminée par une forme quadratique sur n du type :

$$q(x_1, x_2, x_3, u_0, u_1, u_2, u_3) + \lambda \|v\|^2 + \mu \|w\|^2 \\ + 2\nu \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}} + 2\nu_1 \langle vi, w \rangle_{\mathbb{R}} + \nu_2 \langle vj, w \rangle_{\mathbb{R}} + \nu_3 \langle vk, w \rangle_{\mathbb{R}} .$$

2.2 Le fibré unitaire vu comme espace homogène sous $Sp(n+1) \times SO(2)$

Comme pour toute variété le flot géodésique opère sur le fibré unitaire $UP^n\mathbb{H}$. Et comme toutes les géodésiques sont fermées et de même longueur (voir [G-H-L] ou [B2] chap3), cette action passe au quotient en une action de $SO(2)$. Plus précisément les géodésiques de $P^n\mathbb{H}$ sont les images par la projection q des géodésiques horizontales de S^{4n+3} . Avec les notations de $I.D$), celles-ci sont de la forme $t \rightarrow \cos t z + \sin t u$ et

le flot géodésique transforme le couple (z, u) en $(z, u) \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Cette action commute avec l'action de S^3 et passe au quotient. On obtient ainsi une action transitive du groupe $Sp(n+1) \times SO(2)$ sur $UP^n\mathbb{H}$.

Cette action est définie par :

$$(A, B) \cdot q(x, u) = q(\cos(tAx) + \sin(tAu), -\sin(tAx) + \cos(tAu))$$

où $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2)$ et $A \in Sp(n+1)$. Pour qu'un élément (A, B) de $Sp(n+1) \times SO(2)$ soit dans l'isotropie de $(q(e_0), T_{e_0}q(e_1))$, il faut et

il suffit que $(Ae_0, Ae_1) \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \lambda(e_0, e_1)$ si $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ et $\lambda \in S^3$.

Les éléments du sous groupe d'isotropie K_2 se mettent sous la forme :

$$\left(\left(\begin{array}{cccccc} \lambda \cos t & \lambda \sin t & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda \sin t & \lambda \cos t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{array} \right), \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \right)$$

où $\lambda \in S^3$ et $A = (a_{ij})$ est une matrice de $Sp(n-1)$. Dans ce cas

$$UP^n\mathbb{H} \simeq Sp(n+1) \times SO(2)/K_2$$

On munit $sp(n+1) \oplus so(2)$ de la forme bilinéaire associée à la forme quadratique

$$(A, B) \longrightarrow -\frac{1}{2}(tr A^t \bar{A} - tr B^t B)$$

L'espace tangent à $Sp(n+1) \times SO(2)/K_2$ s'identifie au supplémentaire orthogonal de l'algèbre de Lie \mathfrak{k}_2 de K_2 pour cette forme. Les éléments de \mathfrak{k}_2 sont de la forme :

$$\left(\left(\begin{array}{cccccc} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{array} \right), \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right)$$

où α est un quaternion pur, β un réel et (b_{ij}) est une matrice antihermitienne de trace -2α . Par conséquent les éléments de l'orthogonal \mathfrak{p} de \mathfrak{k}_2 sont de la forme :

$$X = (X_1, X_2) = \left(\left(\begin{array}{cccccc} \alpha & -\beta + \gamma & -\bar{v}_1 & \dots & -\bar{v}_{n-1} \\ \beta + \gamma & -\alpha & -\bar{w}_1 & \dots & -\bar{w}_{n-1} \\ v_1 & w_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1} & w_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Où β est réel, α, γ des quaternions purs, et $v, w \in \mathbb{H}^{n-1}$

Ces éléments $X = (X_1, X_2)$ peuvent se noter $X = (\alpha, \beta, \gamma, v, w)$.

L'action d'isotropie est alors donnée après calcul par :

$$(\alpha, \beta, \gamma, v, w) \rightarrow (\cos 2t\lambda\alpha\bar{\lambda} + \sin 2t\lambda\gamma\bar{\lambda}, \beta, \cos 2t\lambda\gamma\bar{\lambda} - \sin 2t\lambda\alpha\bar{\lambda}, \\ \cos tAv\bar{\lambda} + \sin tAw\bar{\lambda}, -\sin tAv\bar{\lambda} + \cos tAw\bar{\lambda})$$

Il y a donc trois sous espaces invariants par cette action. Nous avons :

Proposition 1. *La représentation d'isotropie de $UP^n\mathbb{H} \simeq Sp(n+1) \times SO(2)/K_2$ se décompose en trois facteurs irréductibles, le premier est de dimension réelle 6, le second est trivial de dimension 1, et le troisième de dimension réelle $8(n-1)$.*

Une métrique $Sp(n+1) \times SO(2)$ -invariante sur $UP^n\mathbb{H}$ est donc déterminée par une forme quadratique sur \mathfrak{p} du type :

$$\lambda(\|\alpha\|^2 + \|\gamma\|^2) + 2\mu\beta^2 + \nu(\|u\|^2 + \|w\|^2)$$

2.3 Métriques homogènes sur la variété des géodésiques de $P^n\mathbb{H}$

La variété $P^n\mathbb{H}$ pour sa métrique canoniques a toutes ses géodésiques fermées et de même longueur. L'ensemble des géodésiques (orientées) de $P^n\mathbb{H}$ (voir [B]) a une structure de variété différentiable. Désignons par $Geod(P^n\mathbb{H})$ cette variété. C'est encore un espace homogène sous $Sp(n+1)$ puisque ce groupe opère transitivement sur le fibré unitaire $UP^n\mathbb{H}$ et commute avec l'action de S^1 . Prenons pour point base la géodésique définie par $(q(e_0), T_{e_0}q(e_1))$. Pour qu'elle soit globalement invariante sous l'action de $A \in Sp(n+1)$, il faut et il suffit qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in S^3$ tel que :

$$(Ae_0, Ae_1) \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \lambda(e_0, e_1)$$

Après calcul le sous groupe d'isotropie est le sous groupe de $Sp(n+1)$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda \cos t & -\lambda \sin t & 0 & \dots & 0 \\ \lambda \sin t & \lambda \cos t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1}$ appartient à $Sp(n-1)$, et $\lambda \in S^3$. Nous noterons K_3 ce groupe. Donc

$$Geod(P^n \mathbb{H}) \simeq Sp(n+1)/K_3$$

Soit \mathfrak{k}_3 l'algèbre de Lie de K_3 . L'espace tangent en un point base de $Sp(n+1)/K_3$ est l'orthogonal \mathfrak{t} de \mathfrak{k}_3 dans $sp(n+1)$ pour la forme de Killing. Après calcul on voit que \mathfrak{t} est formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} x & y & -\bar{u}_1 & \dots & -\bar{u}_{n-1} \\ y & -x & -\bar{v}_1 & \dots & -\bar{v}_{n-1} \\ v_1 & w_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1} & v_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & -{}^t\bar{u} \\ y & -x & -{}^t\bar{v} \\ u & v & 0 \end{pmatrix}$$

où x, y sont des quaternions purs et $u_i \in \mathbb{H}, v_i \in \mathbb{H} \quad 1 \leq i \leq n, u, v \in \mathbb{H}^{n-1}$

En désignant par (x, y, u, v) un élément de \mathfrak{t} avec x, y quaternions purs, et $u, v \in \mathbb{H}^{n-1}$, la représentation d'isotropie est équivalente à la représentation adjointe de K_3 restreinte à \mathfrak{t} . On en déduit après calcul qu'elle est donnée par :

$$(x, y, v, w) \rightarrow ((\cos 2t)\lambda x \bar{\lambda} + (\sin 2t)\lambda y \bar{\lambda}, (\cos 2t)\lambda y \bar{\lambda} + (\sin 2t)\lambda x \bar{\lambda}, \\ \cos t A u \bar{\lambda} - \sin t A v \bar{\lambda}, \sin t A u \bar{\lambda} + \cos t A v \bar{\lambda})$$

Cette représentation s'obtient à partir de celle de 2.2 en supprimant le facteur trivial de dimension 1.

Proposition 1. *La représentation d'isotropie de $Geod(P^n \mathbb{H}) \simeq Sp(n+1)/K_3$ se décompose en deux facteurs irréductibles \mathfrak{t}_1 et \mathfrak{t}_2 de dimensions réelles respectives 6 et $8(n-1)$.*

Les métriques $Sp(n+1)$ -invariantes de $Sp(n+1)/K_3$ sont données par les formes quadratiques définies positives sur \mathfrak{t} du type

$$g = \lambda_1 \langle, \rangle_{\mathfrak{t}_1} + \lambda_2 \langle, \rangle_{\mathfrak{t}_2}$$

où $\langle, \rangle_{\mathfrak{t}_i}$ désigne la restriction à \mathfrak{t}_i de la forme normale canonique.

Chapitre 3

Le fibré unitaire du plan projectif de Cayley $UP^2\mathbb{C}a$

3.1 Algèbres de Lie semi-simples

3.1.1 Algèbres de Lie nilpotentes et algèbres de Lie résolubles

Dans cette partie toutes les algèbres de Lie considérées sont des algèbres de Lie de dimension finie sur un corps k .

a) Suite centrale descendante

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie, on appelle *suite centrale descendante* de \mathfrak{g} la suite $(C^n \mathfrak{g})_{n \geq 1}$ d'idéaux de \mathfrak{g} définie par les formules :

$$C^1 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}, C^n \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{n-1} \mathfrak{g}] \text{ si } n \geq 2.$$

$$\text{On a } C^2 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ et } C^n[\mathfrak{g}, C^m \mathfrak{g}] \subset C^{n+m} \mathfrak{g}$$

Définition 1 : Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite *nilpotente* lorsqu'il existe un entier n tel que $C^n \mathfrak{g} = 0$

Plus précisément \mathfrak{g} est nilpotente de classe inférieure ou égale à r lorsque $C^{r+1} \mathfrak{g} = 0$. Pour $r = 1$ cela signifie que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ c'est à dire que \mathfrak{g} est abélienne.

Le centre d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x, y] = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$. C'est un idéal abélien de \mathfrak{g} .

Théorème 1. (*Engel*)

Pour qu'une algèbre de Lie \mathfrak{g} soit nilpotente il faut et il suffit que adx soit nilpotente pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

b) Dérivés successifs

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. On appelle *suite des dérivés successifs* de \mathfrak{g} , la suite décroissante $(D^n \mathfrak{g})_{n \geq 1}$ d'idéaux de \mathfrak{g} définis par les formules :

$$D^1 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}, D^n \mathfrak{g} = [D^{n-1} \mathfrak{g}, D^{n-1} \mathfrak{g}] \text{ si } n \geq 2$$

Définition 2 : Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite *résoluble* lorsqu'il existe un entier n tel que $D^n \mathfrak{g} = 0$

Ici encore on dit que \mathfrak{g} est résoluble de classe inférieure ou égale à r lorsque $D^{r+1} \mathfrak{g} = 0$

Le Critère de Cartan

On suppose ici que k est un corps algébriquement clos et de caractéristique 0.

Théorème 2. Soient V un espace vectoriel de dimension finie et \mathfrak{g} une sous algèbre de Lie de $\text{End}(V)$. Alors \mathfrak{g} est résoluble si et seulement si $\text{tr}(x \circ y) = 0$ pour tous $x \in \mathfrak{g}$ et $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

3.1.2 Algèbres de Lie semi-simples

Dans cette partie, le corps de base k est de caractéristique zéro. Toutes les algèbres de Lie et tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur k .

a) Définition d'une algèbre de Lie semi-simple

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Si \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont des idéaux résolubles de \mathfrak{g} , l'idéal $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ de \mathfrak{g} est aussi résoluble, étant une extension de $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ par \mathfrak{a} . Il existe donc un plus grand idéal résoluble \mathfrak{r} de \mathfrak{g} . On l'appelle le *radical* de \mathfrak{g} .

Définition 3 : On dit que \mathfrak{g} est *semi-simple* si son radical r est réduit à 0

Théorème 3. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie et soit \mathfrak{r} son radical

(i) $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est *semi-simple*

(ii) Il existe une sous algèbre de Lie \mathfrak{s} de \mathfrak{g} qui est supplémentaire de \mathfrak{r} .

b) Le critère de Cartan-Killing

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Une forme bilinéaire $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$ sur \mathfrak{g} est invariante si l'on a : $B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$ pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

La forme de Killing $B(x, y) = \text{tr}(adx \circ ady)$ est invariante et symétrique.

Lemme 1. Soit B une forme bilinéaire invariante sur \mathfrak{g} , et soit \mathfrak{a} un idéal de \mathfrak{g} . L'orthogonal \mathfrak{a}' de \mathfrak{a} pour B est alors un idéal de \mathfrak{g}

Par définition \mathfrak{a}' est l'ensemble des $y \in \mathfrak{g}$ tels que $B(x, y) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$

Théorème 4. (Critère de Cartan-Killing)

Pour qu'une algèbre de Lie soit *semi-simple*, il faut et il suffit que sa forme de Killing soit non dégénérée.

c) Décomposition des algèbres de Lie semi-simples

Théorème 5. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie *semi-simple* et soit \mathfrak{a} un idéal de \mathfrak{g} . L'orthogonal \mathfrak{a}' de \mathfrak{a} pour la forme de Killing de \mathfrak{g} est un supplémentaire de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} ; l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est canoniquement isomorphe au produit $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}'$.

corollaire 1. Tout idéal, tout quotient, et tout produit d'algèbres *semi-simples* est *semi-simple*.

Définition 4 : Une algèbre de Lie est dite *simple* si :

(i) Elle n'est pas abélienne,

(ii) ses seuls idéaux sont 0 et \mathfrak{s} .

Théorème 6. Pour qu'une algèbre de Lie \mathfrak{g} soit *semi-simple*, il faut et il suffit qu'elle soit isomorphe à un produit d'algèbres *simples*.

En fait cette décomposition est unique. En effet

Théorème 7. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple et soient (\mathfrak{a}_i) ses idéaux non nuls minimaux. Les (\mathfrak{a}_i) sont des algèbres de Lie simples, et \mathfrak{g} s'identifie au produit des \mathfrak{a}_i

Il est clair que si \mathfrak{s} est simple, on a $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$. Le théorème 6 entraîne donc :

corollaire 2. Si \mathfrak{g} est semi-simple on a $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

d) Éléments semi-simples et éléments nilpotents

Définition 5 : Soit \mathfrak{g} une algèbre de semi-simple, et soit $x \in \mathfrak{g}$.

- (i) On dit que x est *nilpotent* si l'endomorphisme adx de \mathfrak{g} est nilpotent.
- (ii) On dit que x est *semi-simple* si adx est semi-simple (c'est-à-dire diagonalisable après extension du corps de base).

Théorème 8. Si \mathfrak{g} est semi-simple, tout élément x de \mathfrak{g} s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $x = s + n$ avec n nilpotent, s semi-simple, et $[s, n] = 0$. De plus tout élément $y \in \mathfrak{g}$ qui commute à x commute aussi à s et à n .

On dit que n est la composante nilpotente de x et s sa composante semi-simple.

Théorème 9. Soit $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(V)$ une représentation linéaire d'une algèbre de Lie. Si $x \in \mathfrak{g}$ est nilpotent (resp. semi-simple), Il en est de même de l'endomorphisme $\Phi(x)$.

e) Théorème de complète réductibilité

Rappelons qu'une représentation linéaire $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(V)$ est dite *irréductible* (ou *simple*) si $V \neq 0$ et si ne contient pas d'autres sous-espaces stables (sous modules) que 0 et V .

On dit que Φ est *complètement réductible* (ou semi-simple) si elle est somme directe de représentations irréductibles; il revient au même de supposer que tout sous ensemble stable de V admet un supplémentaire stable.

Théorème 10. (H. Weyl)

Toute représentation linéaire (de dimension finie) d'une algèbre de Lie semi-simple est complètement réductible.

f) Passage du réel au complexe

Soient \mathfrak{g}_0 une algèbre de Lie sur \mathbb{R} , $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ la complexifiée canonique v_i obtenu par extension du corps de base.

Théorème 11. *Pour que \mathfrak{g}_0 soit abélienne (resp. nilpotente, resp. résoluble, resp. semi-simple) il faut et il suffit que \mathfrak{g} le soit.*

Par contre \mathfrak{g}_0 est simple si et seulement si \mathfrak{g} est simple ou de la forme $\mathfrak{s} \times \bar{\mathfrak{s}}$ avec \mathfrak{s} et $\bar{\mathfrak{s}}$ simples et conjuguées l'une de l'autre.

De plus, toute algèbre de Lie simple complexe \mathfrak{g} est la complexifiée de plusieurs algèbres de Lie simples réelles non isomorphes ; on les appelle les « formes réelles » de \mathfrak{g} .

3.2 Sous algèbres de Cartan

Dans cette partie (sauf mention du contraire) le corps de base est le corps \mathbb{C} des nombres complexes. toutes les algèbres considérées sont de dimension finie.

3.2.1 Définition des sous algèbres de Cartan

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie et soit \mathfrak{a} une sous algèbre de \mathfrak{g} . On appelle *normalisateur* de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} l'ensemble $n(\mathfrak{a})$ des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $adx(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$; c'est la plus grande sous algèbre de \mathfrak{g} qui contienne \mathfrak{a} et dans laquelle \mathfrak{a} soit un idéal.

Définition 1

Une sous algèbre \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est appelée sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) \mathfrak{h} est nilpotente
- (ii) \mathfrak{h} est égale à son normalisateur (c'est à dire $\mathfrak{h} = n(\mathfrak{h})$)

3.2.2 Eléments réguliers, rang

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Si $x \in \mathfrak{g}$, nous noterons $P_x(X)$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme adx défini par x . On a :

$$P_x(X) = \det(X - ad(x))$$

Si $n = \dim \mathfrak{g}$, on peut écrire $P_x(X)$ sous la forme :

$$P_x(X) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i(x) X^i$$

Si x a pour coordonnées x_1, \dots, x_n (par rapport à une base fixée de \mathfrak{g}), on peut considérer $a_i(x)$ comme une fonction des n variables complexes x_1, \dots, x_n et l'on vérifie immédiatement que c'est un polynôme homogène de degré $n - i$ en x_1, \dots, x_n .

Définition 2

On appelle rang de \mathfrak{g} le plus petit entier l tels que la fonction a_l définie ci-dessus ne soit pas identiquement nulle. Un élément $x \in \mathfrak{g}$ est dit régulier si $a_l(x) \neq 0$

Proposition 1. *Soit \mathfrak{g} une algèbre Lie. L'ensemble \mathfrak{g}_r des éléments réguliers de \mathfrak{g} est un sous-ensemble ouvert, dense et connexe de \mathfrak{g} .*

3.2.3 Sous algèbre de Cartan associée à un élément régulier

Soit x un élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Si $\lambda \in \mathbb{C}$, nous noterons \mathfrak{g}_x^λ le *nillespace* de $ad(x) - \lambda$, c'est à dire l'ensemble $y \in \mathfrak{g}$ tels que $(ad(x) - \lambda)^p y = 0$ pour p assez grand.

En particulier \mathfrak{g}_x^0 est le nilspace de adx . Sa dimension est la multiplicité de 0 comme valeur propre de adx c'est à dire le plus petit entier i tel que $a_i(x) \neq 0$

Proposition 2. *Soit $x \in \mathfrak{g}$. Alors :*

- (i) \mathfrak{g} est somme directe des \mathfrak{g}_x^λ
- (ii) $[\mathfrak{g}_x^\lambda, \mathfrak{g}_x^\mu] = \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$ si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(iii) \mathfrak{g}_x^0 est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

Théorème 1. *Si x est régulier, \mathfrak{g}_x^0 est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , sa dimension est égale au rang l de \mathfrak{g} .*

Pour la démonstration, on peut voir par exemple [S]

3.2.4 Conjugaison des sous algèbres de Cartan

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Nous noterons G le groupe des automorphismes intérieurs de \mathfrak{g} , c'est à dire le sous groupe $Aut(\mathfrak{g})$ engendré par les $e^{ad(y)}$ pour $y \in \mathfrak{g}$.

Théorème 2. *Le groupe G opère transitivement sur l'ensemble des sous-algèbres de cartan de \mathfrak{g} .*

En combinant ce théorème avec le théorème précédent on en déduit.

corollaire 1. *La dimension d'une sous algèbre de cartan de \mathfrak{g} est égal au rang de \mathfrak{g}*

corollaire 2. *Toute sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} est de la forme \mathfrak{g}_x^0 où x est un élément régulier \mathfrak{g} .*

3.2.5 Le cas semi-simple

Théorème 3. *Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi simple \mathfrak{g} . Alors :*

- (i) \mathfrak{h} est abélienne
- (ii) Tout élément de \mathfrak{h} est semi-simple
- (iii) le commutant de \mathfrak{h} est \mathfrak{h}
- (iv) La restriction à \mathfrak{h} de la forme de killing de \mathfrak{g} est non dégénérée.

Nous déduisons les deux corollaires suivants :

corollaire 3. \mathfrak{h} est une sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{g}

corollaire 4. Tout élément régulier de \mathfrak{g} est semi-simple.

En effet, un tel élément est contenu dans une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}

Remarque On peut montrer que toute sous algèbre abélienne maximale de \mathfrak{g} formé d'éléments semi-simples est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Par contre, si $\mathfrak{g} \neq 0$, il existe des sous algèbres abéliennes maximales de \mathfrak{g} qui contiennent des éléments nilpotents non nuls, et ne sont donc pas des sous-algèbres de Cartan.

3.2.6 Algèbres de Lie réelles

Soit \mathfrak{g}_0 une algèbre de Lie sur \mathbb{R} et soit \mathfrak{g} sa complexifiée. Les notions de sous algèbres de Cartan, d'élément régulier, et de rang se définissent pour \mathfrak{g}_0 comme dans le cas complexe. D'ailleurs le rang de \mathfrak{g}_0 est égal à celui de \mathfrak{g} ; une sous algèbre de \mathfrak{h}_0 de \mathfrak{g}_0 est une sous algèbre de cartan de si et seulement si sa complexifiée \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} ; un élément de \mathfrak{g}_0 est régulier dans \mathfrak{g}_0 si et seulement si il l'est dans \mathfrak{g} . Les théorèmes 1 et 3 restent valables (ce qui montre en particulier l'existence de sous algèbre de Cartan). Il n'en est pas de même du théorème 2; on peut seulement affirmer que les sous algèbres de Cartan de \mathfrak{g}_0 se répartissent en un nombre fini de classes modulo les automorphismes intérieurs de \mathfrak{g}_0 . (cela tient à ce que l'ensemble des éléments réguliers de \mathfrak{g}_0 n'est plus nécessairement connexe, mais seulement réunion finie d'ouverts connexes).

3.3 Système de racines d'une algèbre de Lie semi-simple complexe

Dans cette partie le corps de base est le corps \mathbb{R} des nombres réels et tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

3.3.1 Symétries

Définition 1

Soit V un espace vectoriel et soit α un élément non nul de V . On appelle *symétrie de vecteur* α tout automorphisme s de V vérifiant les conditions suivantes :

- (i) $s(\alpha) = -\alpha$
- (ii) L'ensemble H des éléments de V invariants par s est un hyperplan de V .

Il est clair que H est un supplémentaire de la droite $\mathbb{R}\alpha$ engendrée par α . La symétrie s est bien déterminée par la donnée de $\mathbb{R}\alpha$ et H .

Soit V^* le dual de V , et soit α^* l'unique élément de V^* qui s'annule sur H et prend la valeur 2 en α .

$$s(x) = x - \langle \alpha^*, x \rangle \alpha \text{ pour } x \in V,$$

ce qui s'écrit encore

$$s = 1 - \alpha^* \otimes \alpha \text{ en identifiant } \text{End}(V) \text{ et } V^* \otimes V.$$

Inversement, si $\alpha \in V$ et $\alpha^* \in V^*$ sont tels que $\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2$ l'élément $1 - \alpha^* \otimes \alpha$ est une symétrie de vecteur α

Lemme 1. *Soit α un élément non nul de V , et soit R une partie finie de V qui engendre V . Il existe au plus une symétrie de vecteur α qui laisse stable R .*

En effet soit s et s' deux telles symétries et soit u leur produit. L'endomorphisme u jouit des propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} u(R) &= R \\ u(\alpha) &= \alpha \end{aligned} \quad u \text{ induit l'identité sur } V/R\alpha$$

Les deux dernières propriétés montrent que les valeurs propres de u sont égales à 1. D'autre part, puisque R est fini, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $u^n(x) = x$ pour tout $x \in R$, d'où $u^n = 1$ puisque R engendre V . On sait que cela entraîne que u est diagonalisable; comme ses valeurs propres sont égales à 1, on a donc $u = 1$, d'où $s = s'$

3.3.2 Systèmes de racines

Définition 2

Soit V un espace vectoriel et soit R une partie de V . On dit que R est un *système de racines* dans V si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) R est fini, engendre V , et ne contient pas 0
- (b) Pour tout $\alpha \in R$, il existe une symétrie s_α de vecteur α laissant stable R . (cette symétrie est unique en vertu du lemme 1)
- (c) Pour tout $\alpha, \beta \in R$, $s_\alpha(\beta) - \beta$ est un multiple entier de α . La dimension de V est appelé le *rang* de R . Les éléments de R sont appelés les *racines* de V (relativement à R).

D'après §1. , la symétrie s_α attachée à la racine α s'écrit de manière unique :
 $s_\alpha = 1 - \alpha^* \otimes \alpha$, avec $\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2$.

L'élément α^* de V^* s'appelle la *racine inverse* de α ; la condition (c) est équivalente à la suivante :

- (c') Pour tout $\alpha, \beta \in R$, on a $\langle \alpha^*, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

Soit $\alpha \in R$. D'après (b) et (c) on a $-\alpha \in R$ puisque $-\alpha = s_\alpha(\alpha)$.

Définition 3

Un système de racines est dit *réduit* si, pour tout $\alpha \in R$, α et $-\alpha$ sont les seules racines proportionnelles à α .

Si un système n'est pas réduit, il contient deux racines proportionnelles α et $t\alpha$ avec $0 < t < 1$. Appliquant (c) à $\beta = t\alpha$, on voit que $2t \in \mathbb{Z}$, ce qui entraîne $t = \frac{1}{2}$.

Les racines proportionnelles à α sont simplement : $-\alpha, -\alpha/2, \alpha/2, \alpha$.

Remarque Les systèmes de racines réduits sont ceux qui interviennent dans la théorie des algèbres de Lie (ou groupes algébriques) semi-simples sur un corps algébriquement clos; ce sont les seules que nous rencontrerons. Les systèmes non réduits apparaissent lorsqu'on ne suppose plus que le corps de base est algébriquement clos.

Définition 4

Soit R un système de racines dans un espace vectoriel V . On appelle groupe de Weyl de R le sous groupe W de $Gl(V)$ engendré par les symétries $s_\alpha, \alpha \in R$.

Proposition 1. *Soit R un système de racines dans V . Il existe une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée $(,)$ sur V qui est invariante par le groupe de Weyl.*

La forme $(,)$ munit V d'une structure d'espace euclidien par rapport à laquelle les éléments de W sont des transformations *orthogonales*. Cela s'applique en particulier aux symétries s_α ; on en déduit que l'on a $s_\alpha x = x - \frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$ pour tout $x \in V$.

3.3.3 Système inverse

Soit R un système de racines dans V .

Proposition 2. *L'ensemble R^* des racines inverses $\alpha^*, \alpha \in R$, est un système de racines dans V^* . En outre $\alpha^{**} = \alpha$.*

Il est clair que R^* est fini, et ne contient pas 0; pour prouver qu'il engendre V^* il suffit (transport de structure) de montrer que les $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ engendrent V , ce qui est évident. Si $\alpha^* \in R^*$ on prend pour symétrie s_{α^*} correspondante la transposée ${}^t s_\alpha = 1 - \alpha \otimes \alpha^*$ de s_α . Du fait que $s_\alpha(R) = R$, on a $s_{\alpha^*}(R^*) = R^*$. On voit également que $\alpha^{**} = \alpha$. Enfin si $\alpha^*, \beta^* \in R^*$ on a $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle = \langle \beta^*, \alpha^* \rangle \in \mathbb{Z}$.

Le système R^* s'appelle le *système inverse* (ou *dual*) du système R . Son groupe de Weyl s'identifie à celui de R au moyen de l'application

$$w \longrightarrow {}^t w^{-1}$$

si α, β sont deux racines posons :

$$n(\beta, \alpha) = \langle \alpha^*, \beta \rangle = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$$

on a $n(\beta, \alpha) \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3. *Soient α et β deux racines proportionnelles. Si $n(\beta, \alpha) > 0$, $\alpha - \beta$ est une racine.*

Pour la preuve on peut voir par exemple [S]

3.3.4 Bases

Soit R un système de racines dans V .

Définition 5

Une partie S de R est appelée une base de R si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) S est une base de l'espace vectoriel V
- (ii) tout $\beta \in R$ s'écrit comme combinaison linéaire

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} m_{\alpha} \alpha$$

où les m_{α} sont des entiers de même signe (c'est à dire tous positifs ou tous négatifs).

Au lieu de « base » on dit aussi « système simple de racines » ; les éléments de S sont appelés les « les racines simples ».

Théorème 1. *Il existe une base.*

Preuve (voir par exemple [S] p VII à p VI3)

On désigne par S une base du système de racines R ; on note R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients positifs des éléments de S ; un élément de R^+ est appelé une *racine positive* (par rapport à S).

Proposition 4. *Toute racine positive peut s'écrire*

$$\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$

avec $\alpha_i \in S$ de telle sorte que toutes les sommes partielles

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_h \quad 1 \leq h \leq k$$

soient des racines.

Preuve (voir [S])

Proposition 5. *Supposons R réduit et soit $\alpha \in S$. La symétrie s_α relative à α laisse stable $R^+ \setminus \{\alpha\}$. Soit $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$. On a*

$$\beta = \sum_{\gamma \in S} m_\gamma \gamma \text{ avec } m_\gamma \geq 0$$

Puisque R est réduit et $\beta \neq \gamma$, β n'est pas proportionnel à γ , et il existe un $\gamma \neq \alpha$ tel que $m_\gamma \neq 0$. comme $s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$, on voit que le coefficient de γ dans $s_\alpha(\beta)$ est égal à m_γ . D'où $s_\alpha(\beta) \in R^+$ ce qui démontre la proposition .

corollaire 1. *Soit ρ la demi somme des racines positives. On a :*
 $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ pour tout $\alpha \in S$

Proposition 6. *Supposons R réduit. L'ensemble S^* des racines inverses des éléments de S est une base de R^**

Soit R' le système de racines formé des $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ pour $\alpha \in R$. Il suffit (transport de structure) de prouver que les $\alpha', \alpha \in S$, forment une base de R' . Si $t \in V^*$ est tel que $\langle t, \alpha \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in S$, $(R')_t^+$ est formé des α' avec $\alpha \in R^+$. Le cône convexe C engendré par $(R')_t^+$ est donc le même que celui engendré par R^+ . Soit S'_t la base correspondante de R' . Les demi-droites engendrées par les éléments de S'_t sont les génératrices extrémales de C ; Ce sont donc les demi-droites $\mathbb{R}^+\alpha$ avec $\alpha \in S$. Comme R est réduit, une telle demi-droite contient une seule racine de R' , à savoir α' . On a donc $S'_t = S'$.

3.3.5 Matrice de Cartan

Définition 6

On appelle matrice Cartan de R (relativement à la base S choisie) la *matrice*

$$(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in S}.$$

On rappelle que $n(\alpha, \beta) = \langle \beta^*, \alpha \rangle$ est un entier. On a

$$n(\alpha, \alpha) = 2;$$

$$\text{si } \alpha \neq \beta \quad n(\alpha, \beta) = 0, -1, -2 \text{ ou } -3$$

Par exemple la matrice de Cartan de G_2 (groupe des automorphismes de l'algèbre $\mathbb{C}a$) est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 7. *Un système de racines réduit est déterminé à isomorphisme près par sa matrice de Cartan.*

Plus précisément :

Proposition 8. *Soit R' un système de racines réduit dans un espace vectoriel V' , soit S' une base de R' , et soit $\Phi : S \rightarrow S'$ une bijection telle que $n(\Phi(\alpha), \Phi(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ pour $\alpha, \beta \in S$. Si R est réduit, il existe un isomorphisme $f : V \rightarrow V'$ et un seul qui prolonge Φ et applique R sur R' .*

3.3.6 Système de racines irréductibles

Proposition 9. *Supposons que V soit une somme directe de deux sous-espaces V_1 et V_2 et que R soit contenu dans $V_1 \cup V_2$. Soit $R_i = R \cap V_i$ $i = 1, 2$ Alors :*

- (a) V_1 et V_2 sont orthogonaux
- (b) R_i est un système de racines dans V_i .

En effet si $\alpha \in R_1$ et $\beta \in R_2$, $\alpha - \beta$ n'est pas contenu dans $V_1 \cup V_2$, donc n'est pas une racine. D'après la proposition 3, (α, β) est donc inférieure ou égal à 0. Comme ceci s'applique aussi à α et à $-\beta$, on voit que $(\alpha, \beta) = 0$. comme R_i engendre V_i , on en déduit (a).

Pour (b) , il suffit de remarquer que, d'après (a) la symétrie définie par un élément de R_1 laisse stable V_2 , donc aussi V_1 .

On dit que le système R est *somme* des sous-systèmes R_i . Si cela n'est possible que de façon triviale (c'est à dire avec V_1 ou V_2 réduit à 0) et si $V \neq 0$ on dit que R est *irréductible*.

Proposition 10. *Tout système de racines est somme de systèmes irréductibles.*

On peut montrer qu'une telle décomposition est *unique* .

3.3.7 Construction des systèmes de racines irréductibles

Dans ce paragraphe on note e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{R}^n et l'on munit \mathbb{R}^n de la forme bilinéaire $(,)$ telle que $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. On note L_n le sous groupe engendré par les e_i . Nous nous bornerons à la construction de F_4 . Pour cela, dans $V = \mathbb{R}^4$ soit L'_4 le sous groupe engendré par L_4 et $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$. On prend pour R l'ensemble des $\alpha \in L'_4$ tels que $(\alpha, \alpha) = 1$ ou $(\alpha, \alpha) = 2$. Ce sont les $\pm e_i$, les $\pm e_i \pm e_j$ ($i \neq j$) et les $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$.

Pour base on a : $e_2 - e_3, \quad e_3 - e_4, \quad e_4, \quad \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$.

Nous utiliserons plus loin cette construction.

3.3.8 Systèmes de racines complexes

Soit V un espace vectoriel *complexe* de dimension finie. La définition d'une symétrie donnée §1. s'applique sans changement et le lemme 1 reste valable. D'où la notion de système de racines :

Définition 7

Une partie R de V est appelée un système de racines (complexes) si :

- (1) R est fini, engendre V (comme espace vectoriel complexe) et ne contient pas 0
- (2) Pour tout $\alpha \in R$, il existe une symétrie $s_\alpha = 1 - \alpha^* \otimes \alpha$ de vecteur α qui laisse stable R .
- (3) Si $\alpha, \beta \in R$, $s_\alpha(\beta) - \beta$ est un multiple entier de α .

Exemple Soit R un système de racines dans un espace vectoriel réel V_0 , et prenons pour V le complexifié $V_0 \times \mathbb{C}$ de V_0 . L'espace V_0 se plonge dans V , et R est un système de racines dans V . Cela se voit en étendant par linéarité à V les symétries s_α^0 de V_0 .

Théorème 2. *Tout système de racines complexes s'obtient par le procédé précédent.*

Plus précisément :

Théorème 3. *Soit R un système de racines dans un espace vectoriel complexe V . Soit V_0 le \mathbb{R} sous espace vectoriel de V engendré par R . Alors :*

- (a) R est un système de racines dans V_0
- (b) L'application canonique $i : V_0 \otimes \mathbb{C} \longrightarrow V$ est un isomorphisme
- (c) Si $\alpha \in R$, la symétrie s_α de V est l'extension par linéarité de la symétrie s_α^0 de V_0 .

Démonstration de (a) Il est clair que R engendre V_0 . D'autre part, si $\alpha \in R$, la symétrie s_α laisse stable R donc V_0 ; Soit s_α^0 sa restriction à V_0 . Si $\beta \in R$, on a $s_\alpha^0(\beta) = \beta - \alpha^*(\beta)\alpha$ avec $\alpha^*(\beta) \in \mathbb{Z}$.

Donc R est un système de racines dans V_0 ; de plus, la racine inverse α^* de α n'est autre que l'image de $\alpha^* \in V^*$ par l'homomorphisme de restriction $V^* \longrightarrow \text{Hom}(V_0, \mathbb{C})$.

Démonstration de (b) Puisque R engendre V , l'homomorphisme $i : V_0 \otimes \mathbb{C} \longrightarrow V$ est surjectif. D'autre part on vient de voir que sa transposée ${}^t i : V^* \longrightarrow V_0 \otimes \mathbb{C}$ applique α^* sur α_0^* pour tout $\alpha \in R$. Mais d'après la proposition 2 les α_0^* forment

un système de racines dans V_0^* , et en particulier ils engendrent V_0^* . Il s'en suit que ${}^t i$ est *surjectif*, donc i est *injectif*, ce qui démontre (b).

Démonstration de (c) Enfin (c) résulte de ce qui a été vu plus haut.

Le théorème 2 ramène entièrement la théorie des systèmes de racines complexes à celle des systèmes de racines réels.

Toutes les définitions et tous les résultats des paragraphes précédents sont applicables au cas complexe.

3.4 Structure des algèbres de Lie semi-simples

Dans cette partie, \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple complexe et \mathfrak{h} une sous-algèbre Cartan de \mathfrak{g} .

3.4.1 Décomposition de \mathfrak{g}

Si α est un élément du dual \mathfrak{h}^* de \mathfrak{h} , \mathfrak{g}^α est l'ensemble des éléments $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[H, x] = \alpha(H)x$, pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [H, x] = \alpha(H)x, \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Un élément de \mathfrak{g}^α est dit de *poide* α

En particulier \mathfrak{g}^0 est l'ensemble des éléments $x \in \mathfrak{g}$ qui commutent à \mathfrak{h} : d'après le « théorème 3 du chapitre 3 de [S] » on a donc $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$.

On appellera *racine* de \mathfrak{g} (relativement à \mathfrak{h}) tout élément α de \mathfrak{h}^* tel que $\alpha \neq 0$ et $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$. L'ensemble des racines sera noté R .

Théorème 1. *On a*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha \text{ (somme directe)}$$

Théorème 2. (a) *R est un système de racines dans \mathfrak{h}^* ; ce système est réduit.*

- (b) Soit $\alpha \in R$. Alors \mathfrak{g}^α est de dimension 1 ; il en est de même du sous espace $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ de \mathfrak{h} . Il existe un élément $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ et un seul tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$; c'est la racine inverse de α .
- (c) Soit $\alpha \in R$. Pour tout élément non nul X_α de \mathfrak{g}^α , il existe un élément Y_α de $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ et un seul tel que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$. On a $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$ et $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$. La sous algèbre $\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ est isomorphe à $sl(2)$.
- (d) Si $\alpha, \beta \in R$ et si $\alpha + \beta \neq 0$ on a $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Pour la preuve (voir par exemple [S] p VI4)

Dans le théorème suivant on désignera par \langle, \rangle une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante sur \mathfrak{g} , par exemple la forme de Killing

Théorème 3. (a) Les sous espaces \mathfrak{g}^α et \mathfrak{g}^β sont orthogonaux lorsque $\alpha + \beta \neq 0$.

La forme \langle, \rangle met en dualité \mathfrak{g}^α et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. Sa restriction à \mathfrak{h} est non dégénérée.

(b) Si $x \in \mathfrak{g}^\alpha, y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}, H \in \mathfrak{h}$, on a :

$$\langle H, [x, y] \rangle = \alpha(H) \langle x, y \rangle$$

(c) Soit $\alpha \in R$, et soit h_α l'élément de \mathfrak{h} correspondant à α par l'isomorphisme

$\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ associée à la forme bilinéaire considérée. On a

$$[x, y] = \langle x, y \rangle h_\alpha \text{ si } x \in \mathfrak{g}^\alpha, y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

Preuve

Démonstration de (a)

Si $x \in \mathfrak{g}^\alpha, y \in \mathfrak{g}^\beta$ et $H \in \mathfrak{h}$, on a $\langle [H, x], y \rangle = \langle x, [H, y] \rangle = 0$ puisque \langle, \rangle est invariante cela s'écrit aussi

$$\alpha(H) \langle x, y \rangle + \beta(H) \langle x, y \rangle = 0$$

Si $\alpha + \beta \neq 0$, on peut choisir H de telle sorte que $\alpha(H) + \beta(H) \neq 0$, et l'on obtient alors $\langle x, y \rangle = 0$, ce qui prouve bien que \mathfrak{g}^α et \mathfrak{g}^β sont orthogonaux.

La décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha})$$

est donc une décomposition de \mathfrak{g} en sous espaces deux à deux orthogonaux ; comme \langle, \rangle est non dégénérée, sa restriction à chacun des sous espaces est également non dégénérée ; les deux assertions de (a) en résultent.

Démonstration de (b) L'invariance de \langle, \rangle permet d'écrire ;

$$\langle H, [x, y] \rangle = \langle [H, x], y \rangle = \alpha(H) \langle x, y \rangle .$$

Démonstration de (c) Si $H \in \mathfrak{h}$ on a $\alpha(H) = \langle H, h_\alpha \rangle$ d'après la définition de h_α . La formule (b) peut s'écrire

$$\langle H, [x, y] \rangle = \langle H, \langle x, y \rangle h_\alpha \rangle$$

. Comme la restriction de \langle, \rangle à \mathfrak{h} est non dégénérée on en déduit bien que $[x, y] = \langle x, y \rangle h_\alpha$

3.4.2 Bases de Weyl

Soit R le système de racines associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et choisissons une base S de R . Soit R^+ l'ensemble des racines positives par rapport à S . On pose

$$\eta = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha, \eta^- = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^{-\alpha} \quad , \quad b = \mathfrak{h} \oplus \eta$$

on a $\mathfrak{g} = \eta^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \eta = \eta^- \oplus b$.

On note $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la base S ; $n = \dim \mathfrak{h}$ est le rang de \mathfrak{g} . Pour tout i , on pose $H_i = H_{\alpha_i}$ et on se donne des éléments $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}, Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ tels que $[X_i, Y_i] = H_i$.

Posons $n(i, j) = \alpha(H_i)$. On rappelle que $n(i, j)$ est la *matrice de Cartan* du système considéré. On sait que $n(i, j)$ est un entier inférieur ou égal à 0 si $i \neq j$

Théorème 4. (a) η est engendrée par les X_i, η^- par les Y_i et \mathfrak{g} par les X_i, Y_i, H_i .

(b) Ces éléments vérifient les relations (dites de « Weyl »)

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [X_i, Y_i] &= H_i, [X_i, Y_j] = 0 \text{ si } i \neq j, \\ [H_i, X_j] &= n(i, j)X_j, [H_i, Y_j] = -n(i, j)Y_j \end{aligned}$$

(c) Ils vérifient aussi les relations suivantes :

$$(\theta_{ij}) \quad ad(X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

$$(\theta_{ij}^-) \quad ad(Y_i)^{-n(i,j)+1}(Y_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

Démonstration de(a) Il suffit de montrer que η est engendré par les X_i . Pour cela, soit $\alpha \in R^+$; on sait que l'on peut décomposer α en somme des α_i ;

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}$$

de telle sorte que les sommes partielles $\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_h}$ appartiennent à R^+ pour tout $h \leq k$. Choisissons une telle décomposition, et posons

$$X_\alpha = [X_{i_k}, [X_{i_{k-1}}, \dots, [X_{i_2}, X_{i_1}] \dots]].$$

D'après le théorème 2, X_α est un élément non nul de \mathfrak{g}^α . Comme η est somme des \mathfrak{g}^α , $\alpha \in R^+$, cela montre bien que η est engendré par les X_i .

Démonstration de(b) La relation $[X_i, Y_j] = 0$ pour $i \neq j$ provient de ce que $[X_i, Y_j]$ est de poids $\alpha_i - \alpha_j$ et l'on sait que $\alpha_i - \alpha_j$ n'est pas une racine (puisque toute racine est combinaison linéaire des α_i à coefficients de même signe). Les autres relations sont évidentes.

Démonstration de(c)

L'élément $\theta_{ij} = ad(X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j)$ est de poids $\alpha_j - n(i,j)\alpha_i + \alpha_i = s_i(\alpha_j - \alpha_i)$ où s_i désigne la symétrie relative à α_i . Comme $\alpha_j - \alpha_i$ n'est pas racine il en est de même de $s_i(\alpha_j - \alpha_i)$, d'où $\theta_{ij} = 0$.

La relation θ_{ij}^- se démontre de la même manière.

Théorème 5. (i) L'algèbre η peut être définie par les générateurs X_i et les relations θ_{ij} , $i \neq j$.

(ii) L'algèbre \mathfrak{g} peut être définie par les générateurs X_i, Y_i, H_i , les relations de Weyl et les relations θ_{ij} , θ_{ij}^- .

Théorème 6. Soient \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{g}') une algèbre de Lie semi-simple, \mathfrak{h} (resp. \mathfrak{h}') une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{g}'), S (resp. S') une base du système de racines correspondant et $r : S \rightarrow S'$ une bijection transformant la matrice de Cartan de S en celle de S' . Pour tout $i \in S$ (resp $j \in S'$) Soit X_i (resp X'_j) un élément non nul de \mathfrak{g}^i (resp \mathfrak{g}'^j), il existe alors un isomorphisme $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ et un seul qui applique H_i sur $H'_{r(i)}$ et X_i sur $X'_{r(i)}$ pour tout $i \in S$.

Théorème 7. Soit R un système de racines réduit. Il existe une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} dont le système de racines est isomorphe à R .

corollaire 1. Pour que \mathfrak{g} soit semi-simple, il faut et il suffit que R soit irréductible.

3.4.3 La normalisation de Chevalley

Choisissons, pour tout $\alpha \in R$, un élément non nul $X_\alpha \in \mathfrak{g}^{\alpha}$. On a alors

$$[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} \text{ si } \alpha + \beta \in R$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0 \text{ si } \alpha + \beta \notin R, \alpha + \beta \neq 0.$$

où $N_{\alpha,\beta}$ est un scalaire nul. Les $N_{\alpha,\beta}$ déterminent la « table de multiplication » de \mathfrak{g} . toute fois ils dépendent du choix des X_α .

Théorème 8. On peut choisir les X_α de telle sorte que l'on ait :

$$[X_\alpha, X_\alpha] = H_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in R.$$

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \text{ pour } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in R.$$

Soit \mathfrak{k} le \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} engendré par les iH_α , les $X_\alpha - X_{-\alpha}$ et les $i(X_\alpha + X_{-\alpha})$. On vérifie facilement que \mathfrak{k} est une \mathbb{R} -sous algèbre de Lie de \mathfrak{g} et que la forme de Killing de \mathfrak{k} est *négative* ; de plus, \mathfrak{g} s'identifie à la complexifiée $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ de \mathfrak{k} . On dit que \mathfrak{k} est la *forme compacte* de \mathfrak{g} .

3.4.4 Construction des algèbres de Lie semi-simples par générateurs et relations

Soit R un système de racines dans un espace vectoriel complexe V . En liaison avec les paragraphes précédents, le dual de V sera noté \mathfrak{h} , de sorte que $V = \mathfrak{h}^*$. Soit $S = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une base de R , Soient $H_1, \dots, H_n \in \mathfrak{h}$ les racines inverses des α_i et

$$n(i, j) = \langle \alpha_i, H_j \rangle .$$

Les $n(i, j)$ constituent la *matrice de Cartan* de R relativement à la base S .

Nous avons le théorème fondamental suivant dont la démonstration se trouve dans [S] p VI20.

Théorème 9. *Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie définie par $3n$ générateurs X_i, Y_i, H_i et par les relations :*

$$(W1) \quad [H_i, H_j] = 0$$

$$(W2) \quad [X_i, Y_i] = H_i, \quad [X_i, Y_j] = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$(W3) \quad [H_i, X_j] = n(i, j)X_j, \quad [H_i, Y_j] = -n(i, j)Y_j$$

$$(\theta_{ij}) \quad ad(X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

$$(\theta_{ij}^-) \quad ad(Y_i)^{-n(i,j)+1}(Y_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

Alors \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple, admettant pour sous algèbre de Cartan la sous algèbre \mathfrak{h} engendrée par les H_i ; son système de racines est R .

3.5 Rappels sur $P^2\mathbb{C}a$

3.5.1 Doublage d'algèbres, Octaves ou nombres de Cayley

La construction des quaternions à partir des nombres complexes est entièrement calquée sur celle des nombres complexes à partir des nombres réels. Mais ces deux

constructions sont des cas particuliers d'une même construction générale.

Soit \mathcal{A} une algèbre (de dimension finie) sur le corps \mathbb{R} , sur laquelle est définie la conjugaison, c'est à dire un automorphisme involutif $a \rightarrow \bar{a}$.

Soit \mathcal{A}^2 l'espace vectoriel somme directe de deux exemplaires d'un espace vectoriel \mathcal{A} . Munissons \mathcal{A}^2 de la multiplication suivante :

$$(a, b)(u, v) = (au - \bar{v}b, b\bar{u} - va).$$

Munie de cette multiplication; \mathcal{A}^2 est une algèbre de dimension $2n$ (si $\dim \mathcal{A} = n$). Cette algèbre est appelée *doublage* de l'algèbre \mathcal{A} .

La correspondance $a \rightarrow (a, 0)$ est un monomorphisme de l'algèbre \mathcal{A} dans \mathcal{A}^2 . Nous identifierons a et $(a, 0)$. Ainsi \mathcal{A} peut être considérée comme une sous algèbre de \mathcal{A}^2 .

Soit $e = (0, 1)$ alors $be = (0, b)$ et par suite $(a, b) = a + be$ quels que soient $a, b \in \mathcal{A}$. Tout élément de l'algèbre \mathcal{A}^2 se présente d'une seule façon sous la forme $a + be$. Nous avons les relations

$$(1) \quad a(be) = (ba)e \quad (ae)b = (a\bar{b})e \quad (ae)(be) = \bar{b}a.$$

ce qui, combiné à la condition de distributivité, définit de façon unique la multiplication sur \mathcal{A}^2 . En particulier $e^2 = -1$ le doublage de \mathbb{R} c'est \mathbb{C} , celui de \mathbb{C} c'est \mathbb{H} , l'algèbre des quaternions. Les éléments $1, i, j, k = ij$, constituent une base de \mathbb{H}

Le doublage \mathbb{H}^2 de \mathbb{H} est appelé *algèbre des octaves* ou *algèbre des nombres de Cayley* et noté \mathbb{Ca} . Ses éléments sont appelés octaves ou nombres de Cayley.

Par définition, tout ξ appartenant à \mathbb{Ca} est de la forme $\xi = a + be$ où $a, b \in \mathbb{H}$. L'algèbre \mathbb{Ca} est munie de la conjugaison : si $\xi = a + be$ alors $\bar{\xi} = \bar{a} - be$. Une base de l'algèbre \mathbb{Ca} est composée de 1 et des 7 éléments $i, j, k, e, f = ie, g = je, h = ke$ dont le carré est égal à -1 .

enfin l'algèbre \mathbb{Ca} n'est associative mais *alternative* c'est à dire $\forall \xi, \eta \in \mathbb{Ca}$ on a :

$$(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta) \quad , \quad \xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta$$

3.5.2 Le plan projectif de Cayley $P^2\mathbb{C}a$

Considérons les matrices d'ordre n dont les éléments sont des octaves c'est à dire des nombres de Cayley. Etant donné que l'algèbre $\mathbb{C}a$ est munie de la conjugaison, toute matrice d'octaves X d'ordre n possède une matrice transposée conjuguée X^* . Par analogie au cas complexe une matrice d'octaves X est hermitienne si et seulement si $X^* = X$. Définissant le produit XY des matrices d'octaves X et Y par la formule usuelle, on déduit que $(XY)^* = Y^*X^*$. Cela entraîne que les matrices hermitienne d'octaves d'ordre n forment une algèbre pour la multiplication jordanienne définie par : $X \circ Y = \frac{XY+YX}{2}$. Cette algèbre est commutative et unitaire. Son élément unité sera désignée par E .

Pour $n = 3$ cette algèbre est appelée algèbre d'Albert et noté AL. Tout élément X de l'algèbre AL se représente d'une et d'une seule façon sous la forme :

$$X = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3)$$

où

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X_1(\xi_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & \bar{\xi}_1 & 0 \end{pmatrix} & X_2(\xi_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\xi}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \xi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & X_3(\xi_3) &= \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & 0 \\ \bar{\xi}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un calcul immédiat montre que :

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad E_i \circ E_j &= \begin{cases} E_j & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \\ (\beta) \quad E_i \circ X_j(\xi) &= \begin{cases} 0 & \text{pour } i = j \\ \frac{1}{2}X_j(\xi) & \text{pour } i \neq j \end{cases} \\ (\gamma) \quad X_i(\xi) \circ X_j(\eta) &= \begin{cases} \langle \xi, \eta \rangle (E - E_i) & \text{pour } i = j \\ X_{i+2}(\bar{\xi}\eta) & \text{pour } j = i + 1 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Dans (*) les indices sont considérés comme des résidus modulo 3.

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{\xi \bar{\eta} + \eta \bar{\xi}}{2}$$

Les relations précédentes définissent entièrement la structure de l'algèbre AL .

Considérons maintenant l'ensemble des idempotents primitifs de AL . C'est l'ensemble des vecteurs $X \in AL$ vérifiant $X^2 = X$ et trace de $X = \text{tr}X = 1$. On montre voir ([P] p283-284) qu'un élément $X = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3)$ de Al est un idempotent primitif si et seulement si

$$\begin{cases} (a) & a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ (b) & a_i \bar{\xi}_i = \xi_{i+1} \xi_{i+2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ modulo } 3 \\ (c) & |\xi_i|^2 = a_{i+1} a_{i+2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ modulo } 3 \end{cases}$$

On démontre sans peine (voir [P] p 184) que pour $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C}$ les équations (a), (b), (c) définissent une variété difféomorphe au plan projectif complexe $P^2\mathbb{C}$, le difféomorphisme $[(z_1, z_2, z_3)] \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3, a_1, a_2, a_3)$ est définie par les formules

$$\xi = \frac{z_{i+1} \bar{z}_{i+2}}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2}, \quad a_i = \frac{|z_i|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2}$$

où $i = 1, 2, 3$ modulo 3.

De même pour $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{H}$ les équations (a), (b), (c) définissent une variété difféomorphe au plan projectif quaternionique $P^2\mathbb{H}$.

L'ensemble des idempotents primitifs de AL est appelé le plan projectif de Cayley (ou plan projectif des octaves) et noté $P^2\mathbb{Ca}$.

Soit $U_i; i = 1, 2, 3$ un sous ensemble ouvert du plan projectif $P^2\mathbb{Ca}$, composé des points $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, a_1, a_2, a_3)$ tels que $a_i \neq 0$. Il est aisé de voir que cet ensemble est difféomorphe au produit $\mathbb{Ca} \times \mathbb{Ca} \simeq \mathbb{R}^{16}$. Par exemple pour $i = 3$, le difféomorphisme $\mathbb{Ca} \times \mathbb{Ca} \rightarrow U^3$ est défini par les formules :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\eta_2}{1 + |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}, & \xi_2 &= \frac{\eta_1}{1 + |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}, & \xi_3 &= \frac{\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2}{1 + |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2} \\ a_1 &= \frac{|\eta_1|^2}{1 + |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}, & a_2 &= \frac{|\eta_2|^2}{1 + |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}, & a_3 &= \frac{1}{1 + |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2} \end{aligned}$$

où $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}a$ et par suite simplement connexe . Comme les intersections $U_1 \cap U_2$ et $(U_1 \cap U_2) \cap U_3$ sont visiblement connexe (la première est difféomorphe au produit $\mathbb{C}a \times (\mathbb{C}a \setminus \{0\})$, la seconde au produit $((\mathbb{C}a \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}a \setminus \{0\}))$, $P^2\mathbb{C}a = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ d'où il découle que le plan projectif des octaves a une structure de variété différentielle connexe et simplement connexe de dimension 16.

3.6 Les groupes F_4 et $\text{Spin}(n)$

3.6.1 Le groupe de Lie F_4

Sur l'algèbre AL on définit le produit scalaire de deux éléments X, Y par

$$(1) \quad \langle X, Y \rangle = \text{tr}(X \circ Y)$$

où $X \circ Y$ désigne le produit jordanien des éléments X et Y . le triproduit scalaire sur AL est défini par

$$(2) \quad \langle X, Y, Z \rangle = \text{tr}((X \circ Y) \circ Z).$$

Si un automorphisme $\Phi : AL \rightarrow AL$ de l'algèbre AL préserve la trace, c'est à dire que $\text{tr}(\Phi X) = \text{tr}(X)$ pour tout AL , alors il préservera de toute évidence les produits scalaires, c'est à dire

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle \text{ et } \langle \Phi X, \Phi Y, \Phi Z \rangle = \langle X, Y, Z \rangle$$

quels que soient les éléments $X, Y, Z \in AL$.

De là il résulte en particulier, que le groupe des automorphismes de l'algèbre AL préservant la trace est un sous groupe fermé du groupe orthogonal $O(27)$ et donc un sous groupe de lie compact. Nous désignerons ce groupe par F_4 .

On montre (voir [P]) que tout automorphisme de AL préserve la trace, de sorte qu'en réalité le groupe F_4 est le groupe des automorphismes de l'algèbre AL .

Réciproquement on peut remarquer que toute opérateur linéaire respectant

$\Phi : AL \rightarrow AL$ ces produits scalaires est un automorphisme de l'algèbre AL préservant la trace.

En effet

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi X \circ \Phi Y - \Phi(X \circ Y), \Phi(Z) \rangle &= \langle \Phi X, \Phi Y, \Phi Z \rangle - \langle \Phi(X \circ Y), \Phi(Z) \rangle \\
 &= \langle X, Y, Z \rangle - \langle X \circ Y, Z \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

quels que soient $X, Y, Z \in AL$ et donc $\Phi X \circ \Phi Y = \Phi(X \circ Y)$, car étant une isométrie pour le produit scalaire (1) l'opérateur Φ n'est pas dégénéré et par suite, tout élément de l'algèbre AL peut être mis sous la forme ΦZ . Ceci prouve que l'opérateur Φ est un automorphisme de l'algèbre AL . Donc $\Phi E = E$ et par suite $tr(\Phi X) = tr(X)$, car $tr(X) = \langle X, E \rangle$ pour tout $X \in AL$

Proposition 1. *Théorème de Freudenthal (voir [P] p291)*

Pour tout élément X de AL , il existe un automorphisme $\Phi \in (F_4)_e$ tel que

$$\Phi X = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3$$

où $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ sont définis de façon unique par élément X .

Deux éléments de l'algèbre AL peuvent être associés par un automorphisme de $(F_4)_e$ si et seulement si les nombres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ qui leur correspondent sont confondus.

$(F_4)_e$ désigne la composante de l'unité du groupe F_4

3.6.2 Algèbres de Clifford

Soit $C_0 = \mathbb{R}, C_1$ l'espace vectoriel de dimension 2, de base $1, e$ et $e^2 = -1$, la multiplication sur C_1 est définie par :

$$(a + be)(c + de) = (ac - bd) + (ad + bc)e.$$

Nous voyons que $C_1 \simeq \mathbb{C}$, comme algèbre réelle de dimension 2.

L'espace vectoriel C_2 est le \mathbb{R} espace vectoriel de dimension 4 de base $1, e_1, e_2, e_1 e_2$ et posons : $e_1^2 = -1, e_2^2 = -1$ et $e_1 e_2 = -e_2 e_1$. cela définit la multiplication et la

correspondance :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 1 \\ e_1 &\rightarrow i \\ e_2 &\rightarrow j \\ e_1e_2 &\rightarrow k \end{aligned}$$

donne un isomorphisme entre C_2 et \mathbb{H} (algèbre des quaternions)

Définition 1

C_k est l'algèbre qui est engendrée comme algèbre par les e_1, e_2, \dots, e_k assujettis aux conditions $e_i^2 = -1$ et $e_i e_j = -e_j e_i$ si $i \neq j$.

L'ensemble $\{e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_r, \quad 0 \leq r \leq k\}$ est une base de vectoriel C_k ($r = 0$ désigne l'éléments 1 de la base). On voit sans peine que C_k est de dimension 2^k .

L'élément e_i dans C_{k-1} correspond à e_i dans C_k , cela permet d'identifier C_{k-1} à une sous algèbre de C_k . Ainsi

$$C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_{k-1} \subset C_k \subset \dots$$

C_0, C_1, C_2 sont des corps. Par contre pour $k > 2, C_k$ n'est pas intègre. En effet,

Proposition 2. *Pour tout $k > 2, C_k$ a des diviseurs de zéro.*

Preuve : Il suffit de trouver des diviseurs de zéro dans C_3 , c'est à dire un $x \neq 0$ tel qu'il existe $y \neq 0$ et $xy = 0$. $x = 1 + e_1 e_2 e_3$ et $y = 1 - e_1 e_2 e_3$ sont des diviseurs de zéro.

3.6.3 Groupes $Pin(k)$ et $Spin(k)$

Soit \mathbb{R}^k le \mathbb{R} espace vectoriel dans C_k engendré par e_1, \dots, e_k et soit S^{k-1} la sphère unité de \mathbb{R}^k .

Proposition 3. *Si C_k^* désigne le groupe des unités de C_k , alors $S^{k-1} \subset C_k^*$, c'est à dire chaque $x \in S^{k-1}$ est une unité.*

Preuve : Soit $x = a_1e_1 + \dots + a_ke_k$ avec $a_1^2 + \dots + a_k^2 = 1$, alors $(a_1e_1 + \dots + a_ke_k)((-a_1)e_1 + \dots + (-a_k)e_k) = a_1^2 + \dots + a_k^2 = 1$

Définition 2

$Pin(k)$ est le sous groupe de C_k^* engendré par S^{k-1} .
Chaque élément de $Pin(k)$ est un produit fini d'éléments de S^{k-1} . Définissons une *conjugaison* dans C_k . Pour cela il suffit de la définir sur des éléments d'une base .
Posons

$$(e_{i_1} \cdots e_{i_r})^* = (-e_{i_r}) \cdots (-e_{i_1}) = (-1)^r e_{i_r} \cdots e_{i_1}$$

Nous avons $(x^*)^* = x$ et $(xy)^* = y^*x^*$

Nous définissons aussi un *automorphisme* α de C_k par $\alpha(e_i) = -e_i$

Définition 3

Pour $u \in Pin(k)$ et $x \in \mathbb{R}^k$ posons $\rho(u)(x) = \alpha(u)xu^*$.

Il n'est pas évident que $\rho(u)x$ appartienne à \mathbb{R}^k . Mais cela est une conséquence des deux propositions suivantes :

Proposition 4. Si $u \in S^{k-1} \subset Pin(k)$, alors $\rho(u)$ est une réflexion dans \mathbb{R}^k dans l'hyperplan perpendiculaire à u .

Preuve : Prenons une base orthonormale u_1, \dots, u_k dans \mathbb{R}^k avec $u_1 = u$. On a :

$$\rho(u_1)u_i = \alpha(u_1)u_iu_1^* = -(u_1)u_i(-u_1) = u_1u_iu_1$$

Si $i \neq 1$ cela est égal à u_i , et si $i = 1$ cela est égal $-u_1$ ce qui prouve notre proposition.

Proposition 5. ρ est un homomorphisme de $Pin(k)$ dans $O(k)$ et $\ker \rho = \{1, -1\}$

Preuve : Chaque élément de $Pin(k)$ étant un produit fini d'éléments de S^{k-1} , pour prouver que ρ est un homomorphisme il suffit de prendre $u, v \in S^{k-1}$ et $x \in \mathbb{R}^k$. Alors

$$\rho(uv)(x) = \alpha(uv)x(uv)^* = \alpha(u)(\alpha(v)xv^*)u^* = \rho(u)(\rho(v)x)$$

Il s'en suit que pour chaque $u \in Pin(k)$, $\rho(u)$ applique \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}^k et il est orthogonal puisque c'est un produit de réflexions. On sait que $O(k)$ est engendré par des réflexions, ainsi ρ est surjective. Il est clair que 1 et -1 sont dans le noyau de ρ . Si nous avons $e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ dans le noyau de ρ avec $r > 1$ (nous ne pouvons pas avoir $r = 1$) nous avons une contradiction; en effet si $\rho(e_{i_1} \cdots e_{i_r})$ est l'identité, alors pour chaque $x \in \mathbb{R}^k$ nous devons avoir

$\alpha(e_{i_1} \cdots e_{i_r})x(e_{i_1} \cdots e_{i_r})^* = x$ où $e_{i_1} \cdots e_{i_r}x = xe_{i_1} \cdots e_{i_r}$ prenant $x = e_{i_1}$ on a $(-1)^{r-1}e_{i_1} \cdots e_{i_r} = e_{i_1}e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ et cela donne $e_{i_2} \cdots e_{i_r} = 0$ puisque r doit être pair (le produit d'un nombre pair de réflexions ne peut être l'identité).

Définition 4

$$Spin(k) = \rho^{-1}(SO(k))$$

Si $e_{i_1} \cdots e_{i_r} \in Spin(k)$ alors r est pair et dans ce cas nous avons $(e_{i_1} \cdots e_{i_r})(e_{i_1} \cdots e_{i_r})^* = 1$

3.6.4 $P^2\mathbb{C}a$ est un espace homogène sous F_4

Du théorème de Freudental, il résulte immédiatement que le groupe F_4 opère transitivement sur le plan projectif des octaves $P^2\mathbb{C}a$, des idempotents primitifs de l'algèbre AL , c'est à dire que tout idempotent primitif peut être envoyé par un automorphisme dans un idempotent primitif. En effet il est clair qu'une matrice diagonale est idempotente si et seulement si ses éléments diagonaux sont égaux à 0 ou à 1. Donc les valeurs propres d'un idempotent primitif sont égales à 0, 0, 1 et par suite, un tel idempotent est envoyé dans l'idempotent E_3 par un certain automorphisme.

Cela signifie que le plan projectif des octaves $P^2\mathbb{C}a$ est homéomorphe à la variété quotient F_4/K du groupe F_4 par un sous groupe K qui laisse invariant un idempotent primitif, pour fixer les idées, l'idempotent E_1 .

Soit $\Phi \in K$. Comme $\Phi E_1 = E_1$, Φ envoie dans lui même l'annulateur $Ann E_1$ de l'élément E_1 , c'est à dire l'espace vectoriel des éléments $X \in AL$ tels que $X \circ E_1 = 0$.

Mais $AnnE_1$ est composé des éléments (1) pour lesquels $a_1 = 0$ et $\xi_2 = \xi_3 = 0$ et donc est somme directe du sous-espace à une dimension des matrices de la forme $a(E_1 + E_2)$ et du sous-espace $Ann^\circ E_1$ des matrices de la forme

$$X = r(E_2 - E_3) + X_1(\rho) \text{ où } r \in \mathbb{R}, \rho \in \mathbb{C}a.$$

L'opérateur Φ étant orthogonal et $\Phi(E_2 + E_3) = \Phi(E - E_1) = E - E_1 = E_2 + E_3$, on en déduit que l'automorphisme Φ laisse stable le $Ann^\circ E_1$, donc induit un opérateur orthogonal

$$\Phi^\circ : Ann^\circ E_1 \longrightarrow Ann^\circ E_1$$

De façon analogue l'automorphisme Φ envoie dans lui-même l'espace vectoriel \mathcal{E} des éléments $X \in AL$ tels que $2E_1 \circ X = X$ et par suite, induit un opérateur orthogonal

$$\Phi' : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

D'après les formules $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ du 5. 2.) l'espace vectoriel \mathcal{E} est composée des matrices de la forme $X_2(\xi) + X_3(\eta)$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}a$. L'algèbre AL se décompose en somme directe de l'espace vectoriel \mathcal{E} , de l'espace $Ann^\circ E_1$ et des deux espaces vectoriels à une dimension engendrés par les éléments E_1 et $E_2 + E_3$. L'automorphisme Φ est donc défini de façon unique par les opérateurs Φ° et Φ' .

Par ailleurs l'espace \mathcal{E} est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathbb{C}a^2$ des couples d'octaves (ξ, η) et de l'espace $Ann^\circ E_1$ à l'espace $\mathbb{C}a^\oplus$ des couples (r, ρ) où $r \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{C}a$. Donc les opérateurs Φ' et Φ° peuvent être traités comme des opérateurs de $\mathbb{C}a^2$ dans $\mathbb{C}a^2$ et $\mathbb{C}a^\oplus$ dans $\mathbb{C}a^\oplus$ respectivement.

L'élément $xu = (-r\xi + \bar{\rho}\eta, r\eta + \bar{\xi}\rho)$ de $\mathbb{C}a^2$ où $x = (\xi, \eta) \in \mathbb{C}a^2$ et $u = (r, \rho) \in \mathbb{C}a^\oplus$ sera associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & r\eta + \bar{\xi}\rho & -r\bar{\xi} + \eta\rho \\ r\bar{\eta} + \rho\xi & 0 & 0 \\ -r\xi + \bar{\rho}\eta & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \eta & \bar{\xi} \\ \bar{\eta} & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & \rho \\ 0 & \bar{\rho} & -r \end{pmatrix}$$

de \mathcal{E} qui est le produit jordanien des matrices de \mathcal{E} et de $Ann^\circ E_1$ associés aux éléments x et u . Les opérateurs Φ' et Φ° étant induits par l'automorphisme Φ de l'algèbre AL , on en déduit que ces opérateurs, traités comme des opérateurs de $\mathbb{C}a^2$ dans $\mathbb{C}a^2$ et

$\mathbb{C}a^\oplus$ dans $\mathbb{C}a^\oplus$ satisfont l'identité

$$(d) \quad \Phi'(xu) = \Phi'x \cdot \Phi^\circ u, \quad x \in \mathbb{C}a^2, \quad u \in \mathbb{C}a^\oplus$$

En vertu de la proposition 5 (Voir [P] p280), Φ' correspond à un élément et un seul de $Spin(9)$, donc à tout élément de $\Phi \in K$ est associé un élément de $Spin(9)$. Cette application est un homomorphisme. C'est même un isomorphisme, car l'identité (d) est une condition nécessaire et suffisante pour que l'application correspondante Φ soit un automorphisme de l'algèbre AL . Le sous groupe K est donc canoniquement isomorphe au groupe spinoriel $Spin(9)$. En identifiant le sous groupe K au groupe $Spin(9)$ au moyen de cet isomorphisme on trouve en définitive que le groupe $Spin(9)$ est un sous groupe de F_4 . On a de plus (voir [P] p295);

Proposition 6. *La variété quotient $F_4/Spin(9)$ est difféomorphe au plan projectif de Cayley*

$$P^2\mathbb{C}a \simeq F_4/Spin(9)$$

De là il résulte en particulier, que $dim F_4 = dim Spin(9) + dim P^2\mathbb{C}a = 36 + 16 = 52$

Nous avons aussi (voir [P] p 296)

Proposition 7. *Le groupe F_4 est connexe et simplement connexe. Tout groupe de Lie localement isomorphe au groupe F_4 est isomorphe à F_4 .*

3.7 Le fibré unitaire de $P^2\mathbb{C}a$ vu comme espace homogène sous F_4

Avant de définir le fibré unitaire de $P^2\mathbb{C}a$, nous allons d'abord déterminer l'espace tangent en un point de $P^2\mathbb{C}a$.

Soit $X \in P^2\mathbb{C}a$. Il vérifie les relations $X \circ X = X^2 = X$ et $tr X = 1$.

Rappelons que si $X = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3)$

les relations précédentes équivalent à :

$$\begin{cases} (a) & a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ (b) & a_i \bar{\xi}_i = \xi_{i+1} \xi_{i+2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ modulo } 3 \\ (c) & |\xi_i|^2 = a_{i+1} a_{i+2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ modulo } 3 \end{cases}$$

Soit $Y = b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3 + Y_1(\eta_1) + Y_2(\eta_2) + Y_3(\eta_3)$ un élément de AL . $Y \in T_X P^2 \mathbb{C}a$ si et seulement si

$$(T) \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ b_i \bar{\xi}_i + a_i \bar{\eta}_i = \eta_{i+1} \xi_{i+2} + \xi_{i+1} \eta_{i+2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ modulo } 3 \\ \eta_i \bar{\xi}_i + \xi_i \bar{\eta}_i = b_{i+1} a_{i+2} + a_{i+1} b_{i+2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ modulo } 3 \end{cases}$$

Un tel vecteur tangent est unitaire si et seulement si $tr(Y \circ Y) = 1$.

Le fibré unitaire de $P^2 \mathbb{C}a$ est l'ensemble des vecteurs tangents à $P^2 \mathbb{C}a$ de norme un.

Nous le noterons $UP^2 \mathbb{C}a$. Autrement dit,

$$UP^2 \mathbb{C}a = \{(X, Y) \in P^2 \mathbb{C}a \times AL \text{ vérifiant } (T) \text{ et } tr(Y \circ Y) = 1\}.$$

Remarquons que

$$Y \in T_X P^2 \mathbb{C}a \implies tr(X \circ Y) = 0.$$

$$F_4 \times UP^2 \mathbb{C}a \longrightarrow UP^2 \mathbb{C}a$$

$$(\Phi, (X, Y)) \longrightarrow (\Phi X, \Phi Y)$$

Soit $(A_1, A_2) \in UP^2 \mathbb{C}a$ et $(B_1, B_2) \in UP^2 \mathbb{C}a$

$(A_1, A_2) \in UP^2 \mathbb{C}a \implies 2A_1 \circ A_2 = A_2$ et $tr(A_2) = 0$, $tr(A_2 \circ A_2) = 1$. Donc $\forall \phi \in F_4$ on a $(\phi(A_1), \phi(A_2)) \in UP^2 \mathbb{C}a$. Soit $\mathcal{E} = \{X \in AL \mid 2E_3 \circ X = X\} = \{X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2), \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}a\}$. Comme F_4 agit transitivement sur $P^2 \mathbb{C}a$ il existe $\Phi \in F_4$ tel que $\Phi(A_1) = E_3$. De la relation $2A_1 \circ A_2 = A_2$ on déduit $2E_3 \circ \Phi(A_2) = \Phi(A_2)$, donc $\Phi(A_2) \in \mathcal{E}$. De même il existe $\Phi' \in F_4$ tel que $\Phi'(B_1) = E_3$ et $\Phi'(B_2) \in \mathcal{E}$. D'après le théorème de Freudenthal il existe $\Phi_1 \in (F_4)_e$ tel que $\Phi_1(\Phi(A_2)) = \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3$, avec $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3$. Du lemme 1(p292 [P]) les nombres $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ vérifient les identités :

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \\ \beta_1^3 + \beta_2^3 + \beta_3^3 = 0 \end{cases}$$

De la théorie des polynômes symétriques , ce système admet une solution unique satisfaisant la relation $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3$. Cette solution est $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, ie $\phi_1(\phi(A_2)) = -\frac{\sqrt{2}}{2}E_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}E_3$. Cela prouve qu'il existe un $\Phi_2 \in (F_4)_e$ tel que $\phi_2(\phi(A_2)) = \phi'(B_2)$. Désignons par $AnnE_3$ l'ensemble des $X \in AL$ tels que $X \circ E_3 = 0$.

$$AnnE_3 = \{a_1E_1 + a_2E_2 + X_3(\xi_3), a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \xi_3 \in \mathbb{C}a\}.$$

Comme ϕ_2 transforme \mathcal{E} en \mathcal{E} , il transforme aussi $AnnE_3$ en $AnnE_3$. Donc ϕ_2 vérifie $\forall X \in \mathcal{E} \quad \phi_2(X) \circ E_3 = 0 \quad \phi_2(X) \circ \phi(E_3) = 0$. Cela entraine $\phi_2(X)[\phi_2(E_3) - E_3] = 0 \quad \forall X \in \mathcal{E}$. Cela prouve que $\phi_2(E_3) = E_3$. D'où $(B_1, B_2) = (\phi')^{-1} \circ \phi_2 \circ \phi(A_1, A_2)$.

Déterminons maintenant le sous groupe d'isotropie d'un point de $UP^2\mathbb{C}a$.

Le point $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un point de $P^2\mathbb{C}a$.

La courbe

$$C'(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \sin t \cos t & 0 \\ \sin t \cos t & \sin^2 t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C'(t) = a_1(t)E_1 + a_2(t)E_2 + a_3(t)E_3 + X_1(\xi_1(t)) + X_2(\xi_2(t)) + X_3(\xi_3(t))$ est une courbe de $P^2\mathbb{C}a$ passant par E_1 .

En effet on a $c(0) = E_1$

$$a_1(t) = \cos^2 t \quad \xi_3(t) = \sin t \cos t = X_3(\sin t \cos t)$$

$$a_2(t) = \sin^2 t \quad \xi_2(t) = 0 = X_2(0)$$

$$a_3(t) = 0 \quad \xi_1(t) = 0 = X_3(0)$$

Le vecteur $C'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_3(1)$ est un vecteur tangent en E_1 à $P^2\mathbb{C}a$ et

$\langle X_3(1), X_3(1) \rangle = 2$. Le vecteur $\frac{C'(0)}{\sqrt{2}}$ est donc un vecteur unitaire de $T_{E_1}P^2\mathbb{C}a$. $\frac{C'(0)}{\sqrt{2}}X_3(1)$.

Soit $(E_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3(1)) \in UP^2\mathbb{C}a$. Cherchons l'ensemble des $\Phi \in F_4$ tels que

$$\Phi(E_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3(1)) = (E_1, \frac{1}{\sqrt{2}}X_3(1))$$

i. e. $\Phi(E_1) = E_1$ et $\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}}X_3(1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}X_3(1) \Leftrightarrow \Phi(E_1) = E_1$ et $\Phi(X_3(1)) = X_3(1)$

On a $\Phi(E_1 + E_2) = \Phi(E - E_1) = E_2 + E_3$.

Φ est stable sur l'annulateur de E_1 , noté $(AnnE_1)$ et stable sur l'annulateur de $X_3(1)$. Donc Φ est stable sur $AnnE_1 \cap AnnX_3(1)$. Cela entraîne que Φ est stable sur $vectE_3$ et par conséquent Φ est stable sur $vectE_2$. Donc Φ appartient à l'ensemble des automorphismes de l'algèbre Al laissant fixes les idempotents $E_i, i = 1, 2, 3$. Or $Aut^\circ Al \simeq Spin(8)$ (cf [P] p296). Autrement dit le sous groupe d'isotropie d'un point (ici $(E_1, \frac{1}{2}X_3(1))$) est l'ensemble des éléments de $Aut^\circ Al$ laissant fixe $\frac{1}{2}X_3(1)$. Mais l'ensemble des éléments de $Spin(8)$ laissant fixe un vecteur de \mathbb{R}^8 est difféomorphe à $Spin(7)$. ($X_3(1)$ peut s'identifier à un vecteur de \mathbb{R}^8) (voir [BZ] p36 ou [L-M] p33). Nous pouvons résumer la discussion suivante en le théorème suivant :

Théorème 1. *Le groupe de Lie F_4 opère transitivement sur UP^2Ca , le fibré unitaire de P^2Ca . Le sous groupe d'isotropie d'un point est $Spin(7)$ et UP^2Ca est difféomorphe à $F_4/Spin(7)$*

3.8 Métriques homogènes de UP^2Ca sous F_4

Maintenant UP^2Ca est considéré comme le quotient $F_4/Spin(7)$. Déterminons l'espace tangent à $F_4/Spin(7)$ en un point.

Soit $f_4^{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie semi-simple complexe construite à partir de son système de racines irréductibles R . On a $V = \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^4$. Désignons par e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonique de \mathbb{R}^4 . On prend pour R les $\pm e_i$, les $\pm e_i \pm e_j$, ($i \neq j$) et les $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3) \pm e_4$ soit 48 racines. Désignons par $V^* = \mathfrak{h}$ le dual de V et $S = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ une base de R avec $\beta_1 = e_2 - e_3$, $\beta_2 = e_3 - e_4$, $\beta_3 = e_4$ et $\beta_4 = \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$. Soient $H_1 = H_{\beta_1}, H_2 = H_{\beta_2}, H_3 = H_{\beta_3}, H_4 = H_{\beta_4} \in \mathfrak{h}$, les racines inverses respectives des $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et β_4 .

La matrice de Cartan de R relativement à S est formée par les

$n(i, j) = \langle \beta_j, H_i \rangle = \beta_j(H_i) \quad 1 \leq i, j \leq 4$. Cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les H_1, H_2, H_3, H_4 constituent une base de \mathfrak{h} . Donc les

$$\{H_1, H_2, H_3, H_4\} \cup \{X_\beta\}_{\beta \in R}$$

constituent une base de $f_4^{\mathbb{C}}$; avec $X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$ (Voir notation du $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et D) .

Considérons maintenant la forme compacte de cette algèbre de lie semi-simple complexe. C'est le \mathbb{R} sous espace vectoriel de $f_4^{\mathbb{C}}$ que nous noterons simplement f_4 , engendré par iH_β , les $X_\beta - X_{-\beta}$ et les $i(X_\beta + X_{-\beta}), \beta \in R$. Il est de dimension 52. Cette forme compacte est une sous algèbre de Lie de $f_4^{\mathbb{C}}$. Sa forme de killing que nous désignerons par B est négative. De plus $f_4^{\mathbb{C}}$ s'identifie à la complexifiée $f_4 \otimes \mathbb{C}$ de f_4 (cf $\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}$). Rappelons que

$$B(X, Y) = \text{tr}(adX \circ AdY), \quad X, Y \in f_4.$$

L'espace tangent à UP^2Ca au point base s'identifie à l'orthogonal de l'algèbre de Lie de $Spin(7)$ dans f_4 pour la forme de Killing. Nous noterons \mathfrak{m} cet espace tangent, d'où $f_4 = so(7) \oplus \mathfrak{m}$ car l'algèbre de Lie de $Spin(7)$ est isomorphe à celle $SO(7)$.

Considérons l'algèbre de Lie semi-simple complexe de $SO(7)$ (soit $so(7)^{\mathbb{C}}$) construite à partir de son système de racines irréductibles R' . Ici on a $V_1 = \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^3$. Désignons par e'_1, e'_2, e'_3 la base canonique de \mathbb{R}^3 . On prend pour R' les $\pm e'_i$ et les $\pm e'_i \pm e'_j, (i \neq j)$, soit 18 racines. Soit $V_1^* = \mathfrak{h}'$ le dual de V_1 et $S' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3\}$ une base de R' , avec $\alpha'_1 = e'_1 - e'_2, \alpha'_2 = e'_2 - e'_3, \alpha'_3 = e'_3$. Les $H'_1 = H_{\alpha'_1}, H'_2 = H_{\alpha'_2}, H'_3 = H_{\alpha'_3} \in \mathfrak{h}'$ désignent les racines inverses respectives des α'_1, α'_2 et α'_3 . \mathbb{R}^3 peut être considéré comme un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 en identifiant e'_1 à e_1, e'_2 à e_2 et e'_3 à e_3 . On peut ainsi considérer ce système de racines R' comme un sous système de R . Dans ce cas R' admet pour base $S' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3\}$ avec $\alpha'_1 = e_1 - e_2, \alpha'_2 = e_2 - e_3, \alpha'_3 = e_3$. On a

9 racines positives et 9 racines négatives par rapport à cette base. Voici les racines positives ce sont :

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= e_1 - e_2 & \alpha'_2 &= e_2 - e_3 & \alpha'_3 &= e_3 & \alpha'_4 &= e_1 \\ \alpha'_5 &= e_2 & \alpha'_6 &= e_1 + e_2 & \alpha'_7 &= e_1 - e_3 \\ \alpha'_8 &= e_1 + e_3 & \alpha'_9 &= e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Les racines négatives sont les $-\alpha'_i$ $1 \leq i \leq 9$.

De même les $\{H'_1, H'_2, H'_3\} \cup \{X_{\alpha'}\}_{\alpha' \in R'}$ constituent une base $so(7)^{\mathbb{C}}$. Le \mathbb{R} sous espace vectoriel de $so(7)^{\mathbb{C}}$ engendré par les $iH_{\alpha'}$, les $X_{\alpha'} - X_{-\alpha'}$ et les $i(X_{\alpha'} + X_{-\alpha'})$ avec $\alpha' \in R'$ est de dimension 21, c'est la forme compacte de $so(7)^{\mathbb{C}}$. Il est une sous algèbre de $so(7)^{\mathbb{C}}$ que nous noterons $so(7)$. Compte tenu de l'identification précédente, rangeons les racines positives de R de telle sorte que les 9 premières soient les racines positives de R' . On a ainsi :

$$\begin{array}{l|l|l|l} \alpha_1 = e_1 - e_2 & \alpha_2 = e_2 - e_3 & \alpha_3 = e_3 & \alpha_4 = e_1 \\ \alpha_5 = e_2 & \alpha_6 = e_1 + e_2 & \alpha_7 = e_1 - e_3 & \alpha_8 = e_1 + e_3 \\ \alpha_9 = e_2 + e_3 & \alpha_{10} = e_3 - e_4 & \alpha_{11} = e_4 & \alpha_{12} = e_1 - e_4 \\ \alpha_{13} = e_1 + e_4 & \alpha_{14} = e_2 - e_4 & \alpha_{15} = e_2 + e_4 & \alpha_{16} = e_3 + e_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \alpha_{17} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) & \alpha_{18} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4) \\ \alpha_{19} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4) & \alpha_{20} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4) \\ \alpha_{21} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) & \alpha_{22} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4) \\ \alpha_{23} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) & \alpha_{24} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \end{array}$$

La base S de R est donc $S = \{\alpha_2, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{24}\}$, la base S' de R' est $S' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Dans ce cas

$$H_1 = H_{\alpha_2} \quad , \quad H_2 = H_{\alpha_{10}} \quad , \quad H_3 = H_{\alpha_{11}} \quad , \quad H_4 = H_{\alpha_{24}}$$

Racines positives	Racines négatives
$\alpha_1 = e_1 - e_2$	$-\alpha_1 = -e_1 + e_2$
$\alpha_2 = e_2 - e_3$	$-\alpha_2 = -e_2 + e_3$
$\alpha_3 = e_3$	$-\alpha_3 = -e_3$
$\alpha_4 = e_1$	$-\alpha_4 = -e_1$
$\alpha_5 = e_2$	$-\alpha_5 = -e_2$
$\alpha_6 = e_1 + e_2$	$-\alpha_6 = -e_1 - e_2$
$\alpha_7 = e_1 - e_3$	$-\alpha_7 = -e_1 + e_3$
$\alpha_8 = e_1 + e_3$	$-\alpha_8 = -e_1 - e_3$
$\alpha_9 = e_2 + e_3$	$-\alpha_9 = -e_2 - e_3$
$\alpha_{10} = e_3 - e_4$	$-\alpha_{10} = -e_3 + e_4$
$\alpha_{11} = e_4$	$-\alpha_{11} = -e_4$
$\alpha_{12} = e_1 - e_4$	$-\alpha_{12} = -e_1 + e_4$
$\alpha_{13} = e_1 + e_4$	$-\alpha_{13} = -e_1 - e_4$
$\alpha_{14} = e_2 - e_4$	$-\alpha_{14} = -e_2 + e_4$
$\alpha_{15} = e_2 + e_4$	$-\alpha_{15} = -e_2 - e_4$
$\alpha_{16} = e_3 + e_4$	$-\alpha_{16} = -e_3 - e_4$
$\alpha_{17} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$	$-\alpha_{17} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$
$\alpha_{18} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$	$-\alpha_{18} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$
$\alpha_{19} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4)$	$-\alpha_{19} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4)$
$\alpha_{20} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4)$	$-\alpha_{20} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$
$\alpha_{21} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4)$	$-\alpha_{21} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4)$
$\alpha_{22} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$	$-\alpha_{22} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4)$
$\alpha_{23} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$	$-\alpha_{23} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$
$\alpha_{24} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$	$-\alpha_{24} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$

Un calcul immédiat donne :

$$\begin{aligned}
 & B(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_{11}}) = 0 \quad B(H_{\alpha_2}, H_{\alpha_{11}}) = 0 \quad B(H_{\alpha_3}, H_{\alpha_{11}}) = 0, \\
 & B(H_{\alpha_1}, X_{\alpha_j}) = B(H_{\alpha_2}, X_{\alpha_j}) = B(H_{\alpha_3}, X_{\alpha_j}) = 0 \text{ pour } j = 10 \text{ à } 24 \\
 & B(H_{\alpha_1}, X_{-\alpha_j}) = B(H_{\alpha_2}, X_{-\alpha_j}) = B(H_{\alpha_3}, X_{-\alpha_j}) = 0 \text{ pour } j = 10 \text{ à } 24.
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$B(X_{\alpha_j}, X_{\alpha_i}) = 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } 9 \text{ et } j = 10 \text{ à } 24, \text{ car } \alpha_j + \alpha_i \neq 0$$

$$B(X_{-\alpha_j}, X_{\alpha_i}) = 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } 9 \text{ et } j = 10 \text{ à } 24 \text{ car } -\alpha_j + \alpha_i \neq 0$$

$$B(X_{\alpha_j}, X_{-\alpha_i}) = 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } 9 \text{ et } j = 10 \text{ à } 24 \text{ car } \alpha_j - \alpha_i \neq 0$$

$$B(X_{-\alpha_j}, X_{-\alpha_i}) = 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } 9 \text{ et } j = 10 \text{ à } 24 \text{ car } -\alpha_j + (-\alpha_i) \neq 0.$$

Par conséquent le \mathbb{R} sous-espace vectoriel de f_4 engendré par la famille

$\{iH_{\alpha_{11}}; X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}; i(X_{\alpha_j} + X_{-\alpha_j}) \mid j = 1, \dots, 24\}$ est le supplémentaire orthogonal de $so(7)$ dans f_4 pour la forme de Killing. On en déduit :

Proposition 1. *L'espace tangent au point base à $F_4/Spin(7) \simeq UP^2\mathbb{C}a$ est le sous espace vectoriel de f_4 engendré par les vecteurs $iH_{\alpha_{11}}$, $X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}$, $i(X_{\alpha_j} + X_{-\alpha_j})$ pour $j = 1$ à 24 . Il est de dimension 31.*

Cherchons à présent les sous espaces invariants par l'action d'isotropie.

L'action d'isotropie, c'est la représentation adjointe. En désignant par α_σ l'automorphisme intérieur de F_4 , et ε son élément neutre, l'action d'isotropie est donnée par :

$$\begin{aligned} Spin(7) \times \mathfrak{m} &\longrightarrow \mathfrak{m} \\ (\sigma, M) &\longrightarrow \alpha'_\sigma(\varepsilon) \cdot M = Ad(\sigma) \cdot M \end{aligned}$$

Pour $\sigma = exp(L) = e^L$, L appartenant à l'algèbre de Lie de $Spin(7)$,

$$Ad(e^L) = e^{adL} = Id + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(adL)^n}{n!} \right)$$

Pour chaque vecteur de base de \mathfrak{m} nous allons chercher le sous espace invariant qui le contient.

Cherchons un le sous espace qui contient $iH_{\alpha_{11}}$.

$$[iH_{\alpha_1}, iH_{\alpha_{11}}] = 0 \quad [iH_{\alpha_2}, iH_{\alpha_{11}}] = 0 \quad [iH_{\alpha_3}, iH_{\alpha_{11}}] = 0$$

Car la sous algèbre de Cartan de \mathfrak{h} de f_4 est abélienne puisque f_4 est semi-simple.

D'autre part

$$[X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}, iH_{\alpha_{11}}] = \alpha_j(H_{\alpha_{11}})[i(X_{\alpha_j} + X_{-\alpha_j})] = 0$$

pour $j = 1$ à 9 .

De même pour les mêmes raisons

$$[i(X_{\alpha_j} + X_{-\alpha_j}), iH_{\alpha_{11}}] = -\alpha_j(H_{\alpha_{11}})(X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}) = 0$$

pour $j = 1$ à 9 .

Le groupe $Spin(7)$ peut être considéré comme un sous groupe de $GL(n, \mathbb{R})$, fermé et connexe, il est donc engendré par $expso(7)$ (Voir [M-T] p68) et ([P] p241). Le sous espace stable qui contient $iH_{\alpha_{11}}$ est $\mathfrak{m}_1 = vect\{iH_{\alpha_{11}}\}$.

Cherchons à présent le espace invariant qui $X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}$. Notons \mathfrak{m}_2 ce sous espace.

Nous avons

$$\begin{aligned} [X_{\alpha_i} - X_{-\alpha_i}, X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}] &= [X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}] - [X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_j}] - [X_{-\alpha_i}, X_{\alpha_j}] + [X_{-\alpha_i}, X_{-\alpha_j}] \\ &= [X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}] + [X_{-\alpha_i}, X_{-\alpha_j}] - ([X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_j}] + [X_{-\alpha_i}, X_{\alpha_j}]) \\ &= N_{\alpha_i, \alpha_j}(X_{\alpha_i + \alpha_j} - X_{-\alpha_i - \alpha_j}) + N_{\alpha_i, -\alpha_j}(X_{\alpha_i - \alpha_j} - X_{-\alpha_i + \alpha_j}) \end{aligned}$$

pour $i = 1$ à 9 et $j = 10$ à 24 avec

$$\begin{aligned} [X_{\alpha}, X_{\beta}] &= N_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta} \quad si \quad \alpha + \beta \in R \\ &= 0 \quad si \quad \alpha + \beta \notin R \end{aligned}$$

$$[i(X_{\alpha_k} + X_{-\alpha_k}), X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}] = N_{\alpha_k, \beta_j} i(X_{\alpha_k + \alpha_j} + X_{-\alpha_k - \alpha_j}) + N_{-\alpha_k, \beta_j} i(X_{-\alpha_k + \alpha_j} + X_{\alpha_k - \alpha_j})$$

pour $k = 1$ à 9 et $j = 10$ à 24 . D'autre part

$$\begin{aligned} [iH_{\alpha_k}, X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}] &= [iH_{\alpha_k}, X_{\alpha_j}] - [iH_{\alpha_k}, X_{-\alpha_j}] \\ &= i[H_{\alpha_k}, X_{\alpha_j}] - i[H_{\alpha_k}, X_{-\alpha_j}] \\ &= i\alpha_j(H_{\alpha_k})X_{\alpha_j} + i\alpha_j(H_{\alpha_k})X_{-\alpha_j} \\ &= \alpha_j(H_{\alpha_k})i(X_{\alpha_j} + X_{-\alpha_j}) \end{aligned}$$

pour $k = 1$ à 3 et $j = 10$ à 24 .

$$\begin{aligned} [iH_{\alpha_k}, i(X_{\alpha_j} + X_{-\alpha_j})] &= [iH_{\alpha_k}, iX_{\alpha_j}] + [iH_{\alpha_k}, iX_{-\alpha_j}] \\ &= -[H_{\alpha_k}, X_{\alpha_j}] - [H_{\alpha_k}, X_{-\alpha_j}] \\ &= -\alpha_j(H_{\alpha_k})X_{\alpha_j} + \alpha_j(H_{\alpha_k})X_{-\alpha_j} \\ &= -\alpha_j(H_{\alpha_k})(X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}) \end{aligned}$$

pour $k = 1$ à 3 et $j = 10$ à 24 .

$$[i(X_{\alpha_k} + X_{-\alpha_k}), i(X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j})] = N_{\alpha_k, \alpha_j}(X_{\alpha_k + \alpha_j} - X_{-\alpha_k - \alpha_j}) + N_{\alpha_k, -\alpha_j}(X_{-\alpha_k + \alpha_j} - X_{\alpha_k - \alpha_j})$$

pour $k = 1$ à 9 et $j = 10$ à 24 . Cela étant revenons à la détermination du sous espace invariant contient $X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}$. Posons

$$\mathfrak{m}_2 = \text{vect} \bigcup_{k=10}^{16} \{(X_{\alpha_k} - X_{-\alpha_k}), i(X_{\alpha_k} + X_{-\alpha_k})\}$$

On a pour $L \in so(7)$; $adL(XYX) = adL(X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}})$

$$adL(XYX) \in \text{vect} \left\{ \begin{array}{l} X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}, i(X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}), X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}, i(X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}), \\ X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}, i(X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}), X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}, i(X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}), \\ X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}, i(X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}), X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}, i(X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) \end{array} \right\}$$

$adL(X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) \in \mathfrak{m}_2$ de même $adL(i(X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}})) \in \mathfrak{m}_2$

Compte des crochets ci-dessus, on a pour $L \in so(7)$

$adL(X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}) \in \mathfrak{m}_2$ pour $j = 10$ à 16 .

$adL(i(X_{\alpha_j} + X_{-\alpha_j})) \in \mathfrak{m}_2$ pour $j = 10$ à 16 .

C'est à dire que $adL(\mathfrak{m}_2) \subset \mathfrak{m}_2, \forall L \in so(7)$.

Le sous espace stable par l'action d'isotropie qui contient $X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}$ est \mathfrak{m}_2 . Pour le détail des calculs voir annexe.

Remarque : Ce résultat était prévisible, car pour $k = 1$ à 9 et $j = 10$ à 16 , $\pm\alpha_k \pm \alpha_j$ lorsqu'il appartient à R , ne peut être qu'une racine comprise entre α_{10} et α_{16} ou $-\alpha_{10}$ et $-\alpha_{16}$. En effet e_4 ne figure pas dans l'écriture des α_1 à α_9 . Alors qu'il figure dans l'écriture des α_j et $-\alpha_j$ pour $j = 10$ à 16 . De plus $\pm\alpha_k \pm \alpha_j$ est toujours une combinaison linéaire de coefficients entiers des e_1, e_2, e_3 et e_4 , il ne peut donc être une racine comprise entre α_{17} et α_{24} ou $-\alpha_{17}$ et $-\alpha_{24}$ (Voir liste).

Déterminons maintenant le sous espace stable qui contient $X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}$

Posons

$$\mathfrak{m}_3 = \text{vect} \bigcup_{k=17}^{24} \{(X_{\alpha_k} - X_{-\alpha_k}), i(X_{\alpha_k} + X_{-\alpha_k})\}$$

On a pour $L \in so(7)$

$$adL(X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) \in vect\{Fam\}$$

$$\text{où } Fam = \left\{ \begin{array}{l} X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}, i(X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}), X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}, i(X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}), \\ X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}, i(X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}), X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}, i(X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}), \\ X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}, i(X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}), X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}, i(X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) \end{array} \right\}$$

Compte des crochets ci-dessus, on a

$$adL(X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}) \in \mathfrak{m}_3 \text{ pour } j = 17 \text{ à } 24.$$

$$adL(i(X_{\alpha_j} + X_{-\alpha_j})) \in \mathfrak{m}_3 \text{ pour } j = 17 \text{ à } 24.$$

C'est à dire que $adL(\mathfrak{m}_3) \subset \mathfrak{m}_3, \forall L \in so(7)$.

Le sous espace stable par l'action d'isotropie qui contient $X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}$ est \mathfrak{m}_3 . Pour le détail des calculs voir l'annexe situé à la fin de ce texte.

Dans ce cas aussi on peut faire une remarque similaire à celle que nous venons de faire relative aux sommes $\pm\alpha_k \pm \alpha_j$ lorsqu'ils appartiennent à R pour $k = 1$ à 9 et $j = 17$ à 24. Nous pouvons résumer cette discussion en la proposition suivante :

Proposition 2. *La représentation d'isotropie de $UP^2Ca \simeq F_4/Spin(7)$ se décompose en trois facteurs irréductibles $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ et \mathfrak{m}_3 de dimensions réelles respectives 1, 14 et 16.*

En désignant toujours par \mathfrak{m} le supplémentaire orthogonal de $so(7)$ dans f_4 pour la forme de Killing on a

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1 &= vect\{iH_{\alpha_{11}}\} \\ \mathfrak{m}_2 &= vect \bigcup_{k=10}^{16} \{(X_{\alpha_k} - X_{-\alpha_k}), i(X_{\alpha_k} + X_{-\alpha_k})\} \\ \mathfrak{m}_3 &= vect \bigcup_{k=17}^{24} \{(X_{\alpha_k} - X_{-\alpha_k}), i(X_{\alpha_k} + X_{-\alpha_k})\} \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

Proposition 3. *Toute métrique F_4 -invariante sur $UP^2\mathbb{C}a \simeq F_4/Spin(7)$ est de la forme :*

$$\lambda_1 \langle \rangle |_{\mathfrak{m}_1} + \lambda_2 \langle \rangle |_{\mathfrak{m}_2} + \lambda_3 \langle \rangle |_{\mathfrak{m}_3}.$$

où $\langle \rangle |_{\mathfrak{m}_i} = -B|_{\mathfrak{m}_i}$ (restriction de la forme de Killing à \mathfrak{m}_i) où B est la forme de Killing de f_4 .

Annexe

$$L = \sum_{j=1}^3 a_j + \sum_{k=1}^9 b_k (X_{\alpha_k} - X_{-\alpha_k}) + \sum_{l=1}^9 c_l (X_{\alpha_l} + X_{-\alpha_l})$$

$$\begin{aligned} [L, X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}] &= b_2 N_{\alpha_2, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}) \\ &+ b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) + c_2 N_{-\alpha_3, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) \\ &+ b_7 N_{\alpha_7, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) + c_7 N_{\alpha_7, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) \\ &+ b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) \\ &+ b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [L, i(X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}})] &= b_2 N_{\alpha_2, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}) \\ &+ b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) + c_2 N_{-\alpha_3, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) \\ &+ b_7 N_{\alpha_7, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) + c_7 N_{\alpha_7, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) \\ &+ b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) \\ &+ b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{10}} i (X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{10}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [L, X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}] &= b_3 N_{\alpha_3, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}) + c_3 N_{\alpha_3, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}}) \\ &+ b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}) \\ &+ b_4 N_{\alpha_4, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) + c_4 N_{\alpha_4, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) \\ &+ b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) \\ &+ b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}) \\ &+ b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [L, i(X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}})] &= b_3 N_{\alpha_3, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}}) + c_3 N_{\alpha_3, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}) \\ &+ b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) \\ &+ b_4 N_{\alpha_4, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) + c_4 N_{\alpha_4, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) \\ &+ b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) \\ &+ b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}) \\ &+ b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{11}} i (X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{11}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, X_{\alpha_{12}} - X_{\alpha_{12}}] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}) \\
&\quad + b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{12}} + X_{\alpha_{12}})] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) \\
&\quad + b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{12}} i (X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{12}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}) \\
[L, X_{\alpha_{13}} - X_{\alpha_{13}}] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}}) \\
&\quad + b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{13}} + X_{\alpha_{13}})] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}) \\
&\quad + b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{13}} i (X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{13}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) \\
[L, X_{\alpha_{14}} - X_{\alpha_{14}}] &= b_1 N_{\alpha_1, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) + c_1 N_{\alpha_1, \alpha_{14}} i (X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) \\
&\quad + b_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) + c_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{14}} i (X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}) \\
&\quad + b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{14}} i (X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{14}} i (X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) \\
&\quad + b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{14}} i (X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, i(X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}})] &= b_1 N_{\alpha_1, \alpha_{14}} i(X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) + c_1 N_{\alpha_1, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) \\
&+ b_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{14}} i(X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}) + c_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) \\
&+ b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{14}} i(X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) \\
&+ b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{14}} i(X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) \\
&+ b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{14}} i(X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{14}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}] &= b_1 N_{\alpha_1, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) + c_1 N_{\alpha_1, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) \\
&+ b_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}) + c_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}}) \\
&+ b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) \\
&+ b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) \\
&+ b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, i(X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}})] &= b_1 N_{\alpha_1, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) + c_1 N_{\alpha_1, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) \\
&+ b_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{16}} + X_{-\alpha_{16}}) + c_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}) \\
&+ b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) \\
&+ b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) \\
&+ b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{15}} i(X_{\alpha_{10}} + X_{-\alpha_{10}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{15}} (X_{\alpha_{10}} - X_{-\alpha_{10}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}}] &= b_2 N_{\alpha_2, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) \\
&+ b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) \\
&+ b_7 N_{\alpha_7, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) + c_7 N_{\alpha_7, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) \\
&+ b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) \\
&+ b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, i(X_{\alpha_{16}} - X_{-\alpha_{16}})] &= b_2 N_{\alpha_2, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{15}} + X_{-\alpha_{15}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{15}} - X_{-\alpha_{15}}) \\
&+ b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{11}} + X_{-\alpha_{11}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{11}} - X_{-\alpha_{11}}) \\
&+ b_7 N_{\alpha_7, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{13}} + X_{-\alpha_{13}}) + c_7 N_{\alpha_7, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{13}} - X_{-\alpha_{13}}) \\
&+ b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{12}} + X_{-\alpha_{12}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{12}} - X_{-\alpha_{12}}) \\
&+ b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{16}} i(X_{\alpha_{14}} + X_{-\alpha_{14}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{16}} (X_{\alpha_{14}} - X_{-\alpha_{14}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}] &= b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) \\
&+ b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) \\
&+ b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) \\
&+ b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) \\
&+ b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) \\
&+ b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}})] &= b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) \\
&+ b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) \\
&+ b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) \\
&+ b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) \\
&+ b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) \\
&+ b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{17}} i (X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{17}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) \\
[L, X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) \\
&+ b_2 N_{\alpha_2, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) \\
&+ b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) \\
&+ b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) \\
&+ b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) \\
&+ b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}})] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) \\
&+ b_2 N_{\alpha_2, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) \\
&+ b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) \\
&+ b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) \\
&+ b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) \\
&+ b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{18}} i (X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{18}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}] &= b_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) + c_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_3 N_{\alpha_3, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) + c_3 N_{\alpha_3, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) + c_4 N_{-\alpha_5, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}})] &= b_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) + c_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_3 N_{\alpha_3, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) + c_3 N_{\alpha_3, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) + c_4 N_{-\alpha_5, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{19}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{19}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) \\
[L, X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}] &= b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) \\
&\quad + b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) \\
&\quad + b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}})] &= b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) \\
&\quad + b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) \\
&\quad + b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{20}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) + c_9 N_{-\alpha_9, \alpha_{20}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) \\
&\quad + b_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) \\
&\quad + b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) \\
&\quad + b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) \\
&\quad + b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}})] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) \\
&\quad + b_2 N_{-\alpha_2, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) \\
&\quad + b_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) \\
&\quad + b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) \\
&\quad + b_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{21}} i(X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) + c_8 N_{-\alpha_8, \alpha_{21}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) \\
[L, X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_3 N_{\alpha_3, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) + c_3 N_{\alpha_3, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) \\
&\quad + b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_5, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) \\
&\quad + b_9 N_{\alpha_9, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) + c_8 N_{\alpha_9, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}})] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_3 N_{\alpha_3, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) + c_3 N_{\alpha_3, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) \\
&\quad + b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_5, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) \\
&\quad + b_9 N_{\alpha_9, \alpha_{22}} i(X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) + c_8 N_{\alpha_9, \alpha_{22}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L, X_{\alpha_{23}} - X_{\alpha_{23}}] &= b_2 N_{\alpha_2, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_3 N_{\alpha_3, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) + c_4 N_{\alpha_3, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{23}} + X_{\alpha_{23}})] &= b_2 N_{\alpha_2, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) + c_2 N_{\alpha_2, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_3 N_{\alpha_3, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) + c_4 N_{\alpha_3, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{24}} + X_{-\alpha_{24}}) + c_5 N_{-\alpha_5, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{24}} - X_{-\alpha_{24}}) \\
&\quad + b_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) + c_6 N_{-\alpha_6, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{23}} i (X_{\alpha_{22}} + X_{-\alpha_{22}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{23}} (X_{\alpha_{22}} - X_{-\alpha_{22}}) \\
[L, X_{\alpha_{24}} - X_{\alpha_{24}}] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_3 N_{-\alpha, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) \\
&\quad + b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) \\
&\quad + b_9 N_{\alpha_9, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}}) + c_9 N_{\alpha_9, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) \\
[L, i(X_{\alpha_{24}} + X_{\alpha_{24}})] &= b_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{18}} + X_{-\alpha_{18}}) + c_1 N_{-\alpha_1, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{18}} - X_{-\alpha_{18}}) \\
&\quad + b_3 N_{-\alpha, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{21}} + X_{-\alpha_{21}}) + c_3 N_{-\alpha_3, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{21}} - X_{-\alpha_{21}}) \\
&\quad + b_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{17}} + X_{-\alpha_{17}}) + c_4 N_{-\alpha_4, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{17}} - X_{-\alpha_{17}}) \\
&\quad + b_5 N_{\alpha_5, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{23}} + X_{-\alpha_{23}}) + c_5 N_{\alpha_5, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{23}} - X_{-\alpha_{23}}) \\
&\quad + b_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{19}} + X_{-\alpha_{19}}) + c_7 N_{-\alpha_7, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{19}} - X_{-\alpha_{19}}) \\
&\quad + b_9 N_{\alpha_9, \alpha_{24}} i (X_{\alpha_{20}} + X_{-\alpha_{20}}) + c_9 N_{\alpha_9, \alpha_{24}} (X_{\alpha_{20}} - X_{-\alpha_{20}})
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [B1] A. L. BESSE, Manifolds whose all géodesics are closed, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [B2] A. L. BESSE, Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.
- [BZ] J.C. BAEZ, The octonions, Préprint
- [G-H-L] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, Introduction to riemannian geometry, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987.
- [HN1] S. HELGASON, Differential geometry, Lie groups and Symetric spaces, Academic press, 1966.
- [HN2] S. HELGASON, The Radon transform on euclidean spaces , compact two homogenous spaces and Grassmann manifolds, Acta Math 113, 153 - 180 (1965).
- [K-N1] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, Foundation of Differential Geometry, Vol 1, New York, Interscience Publishers, 1963.
- [K-N2] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, Foundation of Differential Geometry, Vol 2, New York , Interscience Publishers, 1969.
- [L-M] J.M.LANDSBERG, L. MANIVEL, On the projective geometry of homogenous varieties, Préprint
- [M-T] R. MNEIMNÉ, F. TESTARD, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Hermann collectionn.
- [P] M. POSTNIKOV, Leçons de géométrie, Groupes et algèbres de Lie, Editions Mir, Moscou.

- [PC] G. PICHON, Groupes de Lie, Représentations linéaires et Applications, Collection Hermann Méthodes, Paris 1973.
- [S] J. P. SERRE, Algèbres de Lie semi-simples complexes, W. A. BENJAMIN, INC, New York, 1966.
- [TR1] A. TOURE, Géométrie différentielle de certains fibrés unitaires, Thèse de doctorat présenté en 1993 à l'Université de Montpellier II.
- [TR2] A. TOURE, Le fibré unitaire de la sphère standard, vu comme espace homogène. Afrika Matematika (3)6 (1996),113-129.
- [TR3] A. TOURE, Le fibré unitaire et la variété des géodésiques du projectif complexe. Afrika Matematika (3)9 (1998), 87-104.
- [T-V] F. TRICERRI, L. VANHECKE, Homogenous structures on riemannian manifolds, Cambridge University press.