UNIVERSITÉ DE OUAGADOUGOU

École Doctorale
Sciences et Technologies

Laboratoire de
«Théorie des Nombres, Algèbre,
Géométrie Algébrique et Topologie»
(TN - AGATA)

N° d'ordre

Thèse présentée par

Nakelgbamba Boukary PILABRÉ

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Ouagadougou

Option : Mathématiques et Applications

Spécialité : Algèbre

T I T R E

Dupliquée et quelques structures algébriques

Soutenue le 15 décembre 2011

Devant le jury composé de :

Président : Moussa OUATTARA, Professeur titulaire, Université de Ouagadougou, Directeur de thèse

Membres : Marie Yves Théodore TAPSOBA, Professeur titulaire, Université polytechnique de Bobo-Dioulasso, Rapporteur

Issoufou KATAMBÉ, Maître de Conférences, Université Abdou Moumouni

Gérard KIENTEGA, Maître de Conférences, Université de Ouagadougou

Dédicace

Au Professeur Akry Koulibaly ; paix à son âme.

À mon épouse ; à mes enfants.

MATHÉMATIQUES :

ANALYSER LE PASSÉ ;

OBSERVER LE PRÉSENT ;

PRÉVOIR L'AVENIR.

MATEMATIK :

N TIING ZAAME ;

N GESS RUNDA ;

N BAO BEOG 'NA YILA.

Remerciements

Toute ma réconnaissance va au Professeur Moussa Ouattara qui a accepté présider le jury.

Mes remerciements vont au Professeur Artibano Micali qui a accepté rapporter sur ma thèse.

Je remercie le Professeur Fouad Zitan de l'université Abdelmalek Essâadi de Tétouan (Maroc) pour avoir rapporté sur ma thèse.

Je remercie le Professeur Marie Yves Théodore Tapsoba de l'université Polytechnique de Bobo-Dioulasso (Burkina Faso) pour avoir rapporté sur ma thèse et pour avoir accepté faire partie du jury.

Je remercie les Professeurs Issoufou Katambé de l'université Abdou Moumouni de Niamey (Niger) et Gérard Kientéga de l'université de Ouagadougou (Burkina Faso) pour avoir accepté faire partie du jury.

Ce travail s'est effectué sous la direction des Professeurs Akry Koulibaly et Moussa Ouattara. Malheureusement le Professeur Akry Koulibaly nous a quitté le jeudi 18 novembre 2010 pratiquement un an avant la présentation de cette thèse. Il a été celui qui m'a donné le goût de faire des Mathématiques et particulièrement l'Algèbre ; il a insisté pour que je m'inscrive pour un troisième cycle alors que j'étais Professeur de Lycée et Collège à Kaya en 1988. C'est lui qui m'a encadré pour mon mémoire de DEA et pour ma thèse de troisième cycle. Il n'a jamais ménagé ses efforts pour le suivi de ce travail. Je remercie Madame Koulibaly qui n'a cessé de m'encourager depuis ce temps.

Le Professeur Ouattara, plus qu'un directeur de thèse, est pour moi un frère qui m'a toujours encouragé. Ses remarques et suggestions pertinentes m'ont permis d'avancer de façon déterminante dans mon travail. Qu'il en soit remercié.

J'ai eu l'occasion de travailler avec le Professeur Artibano Micali qui m'a reçu plusieurs fois à Montpellier dans le cadre de ma thèse. Infatigable travailleur et toujours disponible, il est un guide pour moi. Je garde de bons souvenirs de nos discussions au café de l'université ou en son bureau. Je le remercie lui et sa famille pour tout ce qu'ils ont fait pour moi lors de mes séjours à Montpellier.

J'adresse ma reconnaissance au projet RESEAU qui m'a permis de faire deux séjours à Montpellier. Aux Professeurs Joseph Paré, Ambassadeur à Paris (France), ancien Ministre des Enseignements Secondaire, Supérieur et de la Recherche Scientifique, Jean Koulidiati, Ministre de l'Environnement et du Développemt Durable, ancien Président de l'université de Ouagadougou, je dis que leurs aides m'ont été précieuses et déterminantes. Qu'ils en soient remerciés

Le Professeur Karfa Traoré, directeur de l'UFR/SEA est celui qui m'a sollicité en 2006 pour être son adjoint à la direction de l'UFR/SEA. Je le remercie pour la confiance qu'il a portée en ma personne et pour tous ses encouragements et son aide dans le cadre de mes recherches. Je remercie mes collègues et les agents techniques, ouvriers et de soutien de l'UFR/SEA qui nous ont portés deux fois de suite à la tête de l'UFR/SEA et pour tous les encouragements qu'ils m'ont apportés.

Le Professeur Dembo Gadiaga a été mon support pendant les temps durs et demeure un refuge pour moi ; je n'ai pas de mots pour témoigner, à lui et à son épouse ma gratitude dans le cadre présent. Je remercie Harouna Bèlèm, Maire de la commune rurale de Thiou, Messieurs Guédo Diallo et Amadou Gadiaga, fontionnaires à la retraite pour leurs soutiens matériel et moral.

Toute ma reconnaissance aux collègues du Laboratoire Théorie des Nombres, Algèbre, Géométrie Algébrique et Topologie Algébrique (TN-AGATA) pour leurs soutiens de toute sorte.

Enfin, j'adresse toute ma reconnaissance et mes remerciements à mon épouse et à mes enfants qui m'ont tout le temps supporté.

Table des matières

Introduction **3**

1 Généralités sur les algèbres **5**
1.1 Rappels de quelques définitions et exemples . . . 5
1.2 Quelques constructions . . . 7
1.3 Nilpotence et résolubilité . . . 12
1.4 Quelques algèbres à patronymes . . . 13

2 Généralités sur la dupliquée **16**
2.1 Sur la Dupliquée commutative . . . 16
2.1.1 La dupliquée commutative . . . 16
2.1.2 Sur la décomposition de Peirce et la dupliquée commutative d'une algèbre de Bernstein. . . . 18
2.2 D'autres types de dupliquées commutatives . . . 23
2.2.1 Dupliquée liée au sexe . . . 23
2.2.2 Dupliquée liée au "sex-linkage" . . . 24
2.3 De la Dupliquée non commutative . . . 24
2.3.1 Définition . . . 24
2.3.2 Théorème d'Etherington . . . 25
2.3.3 Exemple . . . 25
2.3.4 Du produit semi-direct . . . 26
2.3.5 Propriétés de la dupliquée non commutative . . . 26

3 Dupliquée Lie-admissible **31**
3.1 Dupliquée non commutative et Lie-admissibilité . . . 31
3.2 Conséquences de la décomposition de Levy . . . 36
3.3 Dupliquée non commutative et algèbres à puissances associatives 38

4 Dupliquée et algèbres non associatives **43**
4.1 Préliminaires . . . 43
4.2 Algèbres non associatives . . . 44
4.3 Dupliquée et n-associativité . . . 49
4.4 Sur le noyau de $D^k_{K,nc}(A) \twoheadrightarrow D^k_K(A)$ . . . 54

5 Dupliquée et algèbres n-Leibniz **56**
5.1 Dupliquée et algèbres de Leibniz 56
5.2 Dupliquée non commutative et algèbres de Leibniz d'ordre n . . 57
5.2.1 Rappels 57
5.2.2 Dupliquée non commutative et algèbres de Leibniz d'ordre 3 59
5.2.3 Dupliquée non commutative et algèbres de Leibniz d'ordre n 60
5.3 Dupliquée non commutative et Leibniz-admissibilité 61

6 Dupliquée et superalgèbres **66**
6.1 Espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués ; superalgèbres 66
6.1.1 Espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués 66
6.1.2 Superalgèbre 67
6.1.3 Quelques superalgèbres à patronyme 67
6.2 Dupliquée et superalgèbres 68
6.3 Dupliquée et superalgèbres de Lie 69
6.4 Dupliquée et superalgèbres de Leibniz 73

Conclusion **76**

Bibliographie **77**

Introduction

Jusqu'aux années mille neuf cent trente, la théorie des anneaux s'est développée surtout en tant que théorie des anneaux associatifs. Cependant, dès la deuxième moitié du 19^e siècle, il existait des systèmes algébriques répondant à tous les axiomes d'un anneau à l'exception de l'associativité : par exemple l'algèbre des nombres de Cayley, construite en 1845 par le mathématicien anglais Arthur Cayley (1821-1895). Dans l'étude des structures non associatives, signalons les rôles proéminents des mathématiciens Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882-1948) qui étudia les structures algèbriques et est auteur du théorème : *tout corps fini est commutatif*, Emil Artin (1898-1962) un des fondateurs de la théorie des groupes de tresses, Marius Sophus Lie (1842-1899) créateur des algèbres de Lie, Pascual Jordan (18 Octobre 1902-31 Juillet 1980) créateur des algèbres de Jordan et Jean-Louis Loday découvreur des algèbres de Leibniz. Les algèbres de Lie sont un important système algébrique non associatif qui embrassent des domaines variés tels que la Géométrie différentielle et la Physique. Les algèbres de Leibniz, généralisation des algèbres de Lie, sont introduites dans les années 1980 par Jean-Louis Loday.

Dans un article paru en 1881, après sa mort, portant sur la structure générale des algèbres associatives de dimension finie, Benjamin Peirce (1809-1880) introduit les notions d'idempotents et de nilpotents. Il démontre que dans une algèbre associative, possédant un élément non nilpotent, il existe un idempotent non nul et en déduit l'identité

$$x = exe + (ex - exe) + (xe - exe) + (x - ex - xe + exe)\,,$$

identité valable dans toute algèbre associative et pour tout idempotent e de cette algèbre. Cette identité est encore vraie pour une algèbre flexible où l'on pose $e(xe) = (ex)e = exe$.

La notion de dupliquée d'une algèbre apparait pour la première fois en 1939 dans un article ([21]) d'Etherington à propos du symbolisme de la Génétique. Gonshor (1960) ([25]) et Boers (1982) ([10]) ont repris l'étude de la dupliquée d'un point de vue essentiellement mathématique en étudiant des propriétés de transfert.

Les auteurs Micali de l'Université Montpellier II, Koulibaly et Ouattara de l'Université de Ouagadougou ont étudié la dupliquée sous divers angles ([35], [36], [46], [47] [37], [38]) ; ils ont notamment vu la dupliquée comme étant un produit semi-direct. Nous utiliserons largement ce point de vue dans notre travail.

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de deux. Soient A une algèbre de dimension finie sur K et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative ; nous savons que si $\dim_K A^2 = 1$ ou A^2 est une zéro algèbre, $D_{K,nc}(A)$ est alors associative et, par suite Lie-admissible. Par conséquent, la question de caractériser A^2 lorsque $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible se pose. Il est également intéressant de se poser le même type de question lorsque $D_{K,nc}(A)$ est de Jordan ou de Leibniz. L'étude de ces problèmes constitue l'objet de ce travail.

Dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions fondamentales sur lesquelles repose cette recherche.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la dupliquée d'une algèbre, rappelons quelques résulats obtenus dans notre thèse de troisième cycle et donnons quelques résultats nécessaires pour la suite.

Dans le troisième chapitre nous donnons une autre démonstration d'un résultat obtenu dans notre thèse de troisième cycle ([51]) tout en améliorant ce résultat et donnons une caractérisation de la sous-algèbre A^2 de A dans le cas où $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible et A^2 est non nil, flexible et à puissances associatives.

Au quatrième chapitre, après quelques théorèmes de caractérisations sur la dupliquée non commutative et la dupliquée commutative, il est analysé la n-associativité de la dupliquée non commutative. Enfin, la dimension du noyau du morphisme surjectif $D^k_{K,nc}(A) \twoheadrightarrow D^k_K(A)$ est calculée.

Dans le cinquième chapitre, nous étudions la dupliquée non commutative des algèbres de Leibniz d'ordre n et nous donnons une caractérisation de la sous-algèbre A^2 de A dans le cas où $D_{K,nc}(A)$ est Leibniz-admissible.

Enfin, dans le sixième chapitre nous introduisons la notion de dupliquée non commutative d'une superalgèbre et nous analysons le cas des superalgèbres de Lie et de Leibniz.

Chapitre 1

Généralités sur les algèbres

1.1 Rappels de quelques définitions et exemples

Dans tout ce chapitre K est un corps commutatif.

Une K-*algèbre* est la donnée d'un K-espace vectoriel A et d'une application K-bilinéaire $A \times A \longrightarrow A, (x, y) \longmapsto xy$.

Soit A une K-algèbre. Le *commutateur* du couple (x, y) d'éléments de A est défini par $xy - yx$ et est noté $[x, y]$ et l'*associateur* du triplet (x, y, z) d'éléments de A est défini par $(xy)z - x(yz)$ et est noté $\{x, y, z\}$.

On dit que A est une K-algèbre *commutative* si $[x, y] = 0$ pour tous x, y dans A.

On dit que A est une K-algèbre *associative* si $\{x, y, z\} = 0$ pour tous x, y, z dans A.

On dit qu'un élément u de A est une unité de A si $ux = x = xu$ pour tout x dans A. Par exemple pour tout entier naturel non nul n, l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est une algèbre associative, à élément unité et non commutative dès que $n \geq 2$.

Considérons l'algèbre de dimension deux dont la multiplication relative à une base e_0, e_1 est donnée par le tabeau ci-dessous ([25]).

$\curvearrowright$	e_0	e_1
e_0	e_0	$\frac{1}{2}e_1$
e_1	$\frac{1}{2}e_1$	0

Il s'agit d'une algèbre commutative non associative. En effet $(e_0e_0)e_1 = e_0e_1 = \frac{1}{2}e_1$ et $e_0(e_0e_1) = \frac{1}{2}e_0e_1 = \frac{1}{4}e_1$. De plus, elle n'a pas d'élément unité.

Soient $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes ; $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, associative à élément unité 1, de dimension deux dont la table de multiplication relative à la base $1, i$ est $1 \times 1 = 1,\ 1 \times i = i,\ i \times i = -1$.

Considérons la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions dont la multiplication relative à la base $1, e_1, e_2, e_3$ est donnée par le tableau ci-dessous.

$\curvearrowright$	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

$\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre qui contient $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-sous-algèbre ; c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel mais n'est pas une $\mathbb{C}$-algèbre ; enfin $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre associative non commutative et à élément unité 1.

On dit qu'une K-algèbre A est *alternative* si $\{x, x, z\} = 0$ et $\{x, y, y\} = 0$ pour tous x, y, z dans A. Une K-algèbre A est dite *flexible* ou *élastique* si $\{x, y, x\} = 0$ pour tous x, y dans A et on dit qu'elle vérifie *l'identité de la puissance troisième* si $x^2x = xx^2$ pour tout x dans A.

On note immédiatement que toute K-algèbre associative est alternative. Toute K-algèbre alternative est flexible et toute algèbre flexible vérifie l'identité de la puissance troisième. Voici un exemple d'une algèbre qui vérifie l'identité de la puissance troisième mais qui n'est pas flexible : on considère A la K-algèbre de dimension deux dont la table de multiplication relative à une base e, f est donnée par le tableau suivant ([28]) :

$\curvearrowright$	e	f
e	e	$e+f$
f	0	f

Le calcul nous montre que $xx^2 = x^2x = (\alpha+\beta)^2x$ pour tout $x = \alpha e + \beta f$ dans A mais cette algèbre n'est pas flexible car $(ef)e = e$ et $e(fe) = 0$.

Considérons la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{O}$ des octonions dont la multiplication relative à la base $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ est donnée par le tableau ci-dessous.

$\curvearrowright$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

$\mathbb{O}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre qui contient $\mathbb{H}$ en tant que $\mathbb{R}$- sous-algèbre ; c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel mais n'est pas une $\mathbb{C}$-algèbre ; de même, $\mathbb{O}$ est un $\mathbb{H}$-espace vectoriel mais n'est pas une $\mathbb{H}$-algèbre ; enfin $\mathbb{O}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre alternative non associative ni commutative à élément unité 1.

Soit A une K-algèbre et x un élément de A. On définit de façon inductive les puissances principales de x par :

$$x^1 = x \text{ et pour } j = 1, 2, \cdots, \; x^{j+1} = x^j x.$$

La K-algèbre A est dite *à puissances associatives* si pour x dans A,

$$x^m x^n = x^{m+n}, \; m, n = 1, 2, \cdots.$$

Il est immédiat qu'une algèbre associative est à puissances associatives.

Soit A la K-algèbre dont la multiplication relative à la base e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 est donnée par le tableau ci-dessous.

$\curvearrowright$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	0	0	0	0
e_3	e_3	0	0	e_5	0
e_4	e_4	0	$-e_5$	0	e_3
e_5	e_5	0	0	$-e_3$	0

Soit $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 = \alpha_1 e_1 + \sum\limits_{j=2}^{5} \alpha_j e_j$; on note que e_1 est un élément unité ; $(\sum\limits_{j=2}^{5} \alpha_j e_j)^2 = 0$; par conséquent $x^2 = \alpha_1(\alpha_1 e_1 + 2 \sum\limits_{j=2}^{5} \alpha_j e_j)$ puis $x^3 = (\alpha_1)^2(\alpha_1 e_1 + 3 \sum\limits_{j=2}^{5} \alpha_j e_j)$; on montre par récurrence sur n que $x^n = (\alpha_1)^{n-1}(\alpha_1 e_1 + n \sum\limits_{j=2}^{5} \alpha_j e_j)$ pour tout entier naturel non nul n ; on vérifie alors que $x^m x^n = x^{m+n}$ pour tous entiers naturels non nuls m et n ; ainsi A est une algèbre à puissances associatives. On note que $(e_4 e_4)e_3 = 0e_4 = 0$ et $e_4(e_4 e_3) = -e_4 e_5 = -e_3$; ceci nous dit que A n'est pas alternative.

1.2 Quelques constructions

Construction 1 ([34])

Considérons la $\mathbb{R}$-algèbre notée $\mathbb{C}^{(*)}$ définie par $\mathbb{C}^{(*)} = \mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace-vectoriel et dont la multiplication est donnée par $x * y = \overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy}$. Examinons quelques propriétés de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C}^{(*)}$.
L'algèbre $\mathbb{C}^{(*)}$ est commutative donc flexible.

Soient x, y, z dans $\mathbb{C}^{(*)}$: $(x*y)*z = \overline{xy}*z = xy\overline{z}$ et $x*(y*z) = x*\overline{yz} = \overline{x}yz$; mais en général, $xy\overline{z} \neq \overline{x}yz$; ainsi $\mathbb{C}^{(*)}$ n'est pas associative. D'autre part, $(x*x)*y = \overline{xx}*y = x^2\overline{y}$ et $x*(x*y) = x*\overline{xy} = \overline{x}xy$; et en général, $x^2\overline{y} \neq \overline{x}xy$; ainsi $\mathbb{C}^{(*)}$ n'est pas alternative. Par ailleurs, $\mathbb{C}^{(*)}$ n'a pas d'élément unité. En effet si e est une unité de $\mathbb{C}^{(*)}$ alors $x = x*e = \overline{xe} = \overline{x}$, mais en général, $\overline{x} \neq x$.
Posons $x^{*2} = x*x$ pour tout entier $n \geq 2$, $x^{*n+1} = x^{*n}*x$ puis $N(x) = x\overline{x} = \overline{x}x$. On a :

$$x^{*2} = x*x = \overline{x}\,\overline{x} = \overline{x}^2;$$
$$x^{*3} = (x*x)*x = x^{*2}*x = x^2\overline{x} = \overline{x}x^2 = (\overline{x}x)x = N(x)x;$$
$$x^{*4} = x^{*3}*x = N(x)x*x = N(x)x^{*2};$$
$$x^{*2}*x^{*2} = \overline{x}^2*\overline{x}^2 = x^4;$$

en général $x^4 \neq N(x)x^{*2}$; ainsi $\mathbb{C}^{(*)}$ n'est pas à puissances associatives.
Rappelons qu'un élément idempotent d'une algèbre est un élément x vérifiant $x^2 = x$. Ecrivons $x = \alpha + \beta i$; alors $x*x = (\overline{x})^2 = \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta i$; la relation $x*x = x$ conduit à $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha$ et $-2\alpha\beta = \beta$; ce qui donne les solutions $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; ainsi $\mathbb{C}^{(*)}$ n'a que trois idempotents non nuls qui sont $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ les racines, dans $\mathbb{C}$, du polynôme $x^2 + x + 1$.

Ce qui est fait pour $\mathbb{C}^{(*)}$ peut être fait pour $\mathbb{H}^{(*)}$ ou pour $\mathbb{O}^{(*)}$.

Construction 2 ([34])

Nous supposons ici que K est de caractéristique différente de deux. Une *pondération* ω sur une K-algèbre commutative A est un morphisme surjectif d'algèbres de A sur K ; le couple (A, ω) est alors une algèbre pondérée. Soit (A, ω) une *K-algèbre pondérée* dont la multiplication s'écrit

$$xy = \frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x), \text{ pour tous } x, y \text{ dans } A.$$

On considère la K-algèbre $A^{(*)}$ qui coïncide avec A en tant que K-espace vectoriel et dont la multiplication s'effectue d'après la règle suivante

$$x*y = \frac{1}{4}(\omega(x)y - \omega(y)x), \text{ pour tous } x, y \text{ dans } A^{(*)};$$

ω n'est pas une pondération de $A^{(*)}$; en effet bien que ω soit une forme linéaire sur A, on a $\omega(x*y) = 0$ pour tous x, y dans $A^{(*)}$; mais comme ω est surjective, il existe a dans $A^{(*)}$ tel que $\omega(a) = 1$; pour cet élément, on a $\omega(a*a) = 0$ et $\omega(a)\omega(a) = 1$.

Il est clair que $x * x = 0$ et donc $x * y = -y * x$ pour tous x, y dans A et par suite $A^{(*)}$ est anticommutative ; de plus

$$(x * y) * x = -(y * x) * x \text{ et } x * (y * x) = -(y * x) * x$$

et donc

$$(x * y) * x = x * (y * x),$$

c'est-à-dire, $A^{(*)}$ est une K-algèbre flexible.
Enfin

$$\begin{aligned} x * (x * y) =& x * (\frac{1}{4}(\omega(y)x - \omega(x)y)) \\ =& \frac{1}{4}\omega(y)x * x - \frac{1}{4}\omega(x)x * y \\ =& -\frac{1}{4}\omega(x)x * y \end{aligned}$$

et $(x * x) * y = 0$ donc en général $x * (x * y) \neq (x * x) * y = 0$; de même $(x * y) * y \neq x * (y * y) = 0$ et, par suite, $A^{(*)}$ n'est pas alternative.

Remarque :

$$\begin{aligned} (x * y) * z =& \frac{1}{4}(\omega(y)x - \omega(x)y) * z \\ =& \frac{1}{4}(\omega(y)x * z - \omega(x)y * z) \\ =& \frac{1}{8}((\omega(y)(\omega(z)x - \omega(x)z) - (\omega(x)(\omega(z)y - \omega(y)z)) \\ =& \frac{1}{8}(\omega(y)\omega(z)x - \omega(y)\omega(x)z - \omega(x)\omega(z)y + \omega(x)\omega(y)z) \\ =& \frac{1}{8}(\omega(y)(\omega(z)x + \omega(x)z) - \omega(x)(\omega(y)z + \omega(z)y)) \\ =& \frac{1}{4}(\omega(y)xz - \omega(x)yz) \end{aligned}$$

donc

$$(y * z) * x = \frac{1}{4}(\omega(z)yx - \omega(y)zx)$$

et

$$(z * x) * y = \frac{1}{4}(\omega(x)zy - \omega(z)xy).$$

Le *jacobien* dans $A^{(*)}$ de x, y, z est

$$\mathfrak{J}(x, y, z) = (x * y) * z + (y * z) * x + (z * x) * y.$$

On obtient donc

$$\mathfrak{J}(x,y,z) = \frac{1}{4}(\omega(x)[z,y] + \omega(y)[x,z] + \omega(z)[y,x]).$$

Ainsi (A,ω) étant commutative, $A^{(*)}$ est une algèbre de Lie.

Construction 3 ([34])

Une K-algèbre pondérée (A,ω) de dimension $n+1$ est appelée *algèbre génétique* (au sens de Gonshor) s'il existe une base $e_0, e_1, \cdots, e_n$ de A sur K telle que si

$$e_j e_k = \sum_{l=0}^{n} \gamma_{jkl} e_l, \quad j,k,l = 0,1,\cdots,n$$

est sa table de multiplication relativevement à la base citée, alors

$$\gamma_{000} = 1,$$

$$\gamma_{0kl} = 0 \text{ si } l < k,$$

$$\gamma_{jkl} = 0 \text{ si } l \leq max(j,k) \text{ pour } j \geq 1 \text{ et } k \geq 1.$$

Sur cette base, la pondération de $\omega : A \longrightarrow K$ opère comme suit : $\omega(e_0) = 1$ et $\omega(e_j) = 0, j = 1,\cdots,n$.
Nous allons partir de ces relations pour définir la notion d'*algèbre génétique non commutative*. Une K-algèbre pondérée (A,ω) non commutative de dimension $n+1$ est dite une *algèbre génétique non commutative* s'il existe une base $e_0, e_1, \cdots, e_n$ de A sur K telle que si

$$e_j e_k = \sum_{l=0}^{n} \gamma_{jkl} e_l, \quad j,k,l = 0,1,\cdots,n$$

est sa table de multiplication relativevement à la base citée, alors

$$\gamma_{000} = 1,$$

$$\gamma_{0kl} = 0 \text{ et } \gamma_{k0l} = 0, \text{ si } l < k,$$

$$\gamma_{jkl} = 0, \text{ si } l \leq max(j,k), \text{ pour } j \geq 1 \text{ et } k \geq 1.$$

Comme l'algèbre n'est pas commutative, c'est-à-dire, comme il existe des indices j,k tels que $\gamma_{jkl} \neq \gamma_{kjl}$, on ajoute une condition supplémentaire par rapport au cas commutatif, à savoir, $\gamma_{k0l} = 0$ pour $l < k$. Par la suite, nous donnons un exemple d'algèbre génétique non commutative en nous servant de la (r,s)-mutation d'une algèbre génétique commutative définie ci-dessous.
Soit (A,ω) une algèbre génétique commutative (les notations utilisées sont

celles ci-dessus), r et s deux vecteurs de A. Définissons la (r,s)-*mutation* de (A,ω) par la multiplication $x*y=(xr)y-(ys)x$ pour x,y parcourant A ; la (r,s)-mutation de A est notée $A(r,s)$ en tant qu'algèbre mais il est clair que $A(r,s)=A$ en tant que K-espace vectoriel. Dans la base ci-dessus mentionnée de la K-algèbre A, écrivons $r=\sum\limits_{j=0}^{n} r_j e_j$, $s=\sum\limits_{j=0}^{n} s_j e_j$ donc

$e_j*e_k=(e_jr)e_k-(e_ks)e_j=\sum\limits_{l=0}^{n}\Gamma_{jkl}e_l$

où les $\Gamma_{jkl}=\sum\limits_{p,q=0}^{n}(r_p\gamma_{jpq}\gamma_{qkl}-s_q\gamma_{kpq}\gamma_{qjl}), j,k,l=0,1,\cdots,n$ sont les constantes de structure de la K-algèbre mutée $A(r,s)$ en la base $e_0,e_1,\cdots,e_n$.

On montre que :

$$\Gamma_{000}=r_0-s_0=\omega(r-s),$$

$$\Gamma_{0kl}=0,$$

$$\Gamma_{k0l}=0 \text{ pour } l<k$$

et

$$\Gamma_{jkl}=0 \text{ pour } l\leq max(j,k) \text{ avec } j\geq 1 \text{ et } k\geq 1.$$

Pour compléter les conditions de généticité, il suffira de choisir $r\neq s$.

Notons que l'application K-linéaire $\overline{\omega}: A(r,s)\longrightarrow K$ définie par $x\longmapsto \omega(r-s)\omega(x)$ vérifie la condition $\overline{\omega}(x*y)=\overline{\omega}(x)\overline{\omega}(y)$, quels que soient x,y dans $A(r,s)$; donc $(A(r,s),\overline{\omega})$ est une K-algèbre pondérée si $r-s$ n'est pas dans $Ker(\omega)$ et, en particulier, on doit avoir $r\neq s$. Ces considérations se trouvent déjà dans [17].

Pour montrer que la K-algèbre $A(r,s)$ est pondérée, il faut montrer qu'il existe un idéal bilatère $\overline{N}$ de $A(r,s)$ de codimention 1 tel que

$$A(r,s)^2\nsubseteq \overline{N} \qquad (R).$$

En effet, posons $\overline{N}=\ker(\overline{\omega})$ et $N=\ker(\omega)$.

L'application K-linéaire $\varphi: A\longrightarrow A(r,s)$ définie par $x\longmapsto \frac{1}{\omega(r-s)}x$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels vérifiant $\overline{\omega}\circ\varphi=\omega$; de plus, $\varphi(N)\subseteq\overline{N}$ donc, par passage aux quotients cela nous fournit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A(r,s) \arrow[d] \\ A/N \arrow[r] & A(r,s)/\overline{N} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont canoniques. Cela nous dit que $\overline{N}$ est un idéal bilatère de $A(r,s)$ de codimension 1 car N est lui même de codimension 1. De plus, la condition (R) vient du fait que $A(r,s)^2$ est un idéal bilatère de $A(r,s)$

engendré par les vecteurs $x * y$, x, y parcourant $A(r,s)$ et de l'analyse de la formule $\varpi(x*y) = \omega(r-s)^2\omega(x)\omega(y)$, pour tous x, y dans $A(r,s) = A$ (en tant qu'espaces vectoriels).

1.3 Nilpotence et résolubilité

Soit A une K-algèbre. On définit de façon inductive, les puissances principales de A par :

$$A^1 = A \quad \text{et} \quad A^{n+1} = A^n A, \ n = 1, 2, \cdots .$$

On dit que A est *nilpotente à droite* s'il existe un entier naturel non nul k tel que $A^k = 0$. Si A est nilpotente, le plus petit entier naturel non nul p tel que $A^p = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de A. Notons qu'en posant

$$A^1 = A \quad \text{et} \quad A^{n+1} = AA^n, \ n = 1, 2, \cdots ,$$

on définit la notion de *nilpotence à gauche.* Pour une algèbre associative, les deux notions coïncident. On dira que A est *nilpotente* s'il existe un entier naturel non nul k tel que tout produit $x_1 \cdots x_k$ d'éléments de A soit nul quel que soit la façon de placer les parenthèses dans le produit.

On définit de façon inductive, les puissances pleines de A par :

$$A^{[1]} = A \quad \text{et} \quad A^{[n+1]} = A^{[n]}A^{[n]}, \ n = 1, 2, \cdots .$$

On dit que A est *résoluble* s'il existe un entier naturel non nul k tel que $A^{[k]} = 0$. Si A est résoluble, le plus petit entier naturel non nul p tel que $A^{[p]} = 0$ est appelé *indice de résolubilité* de A. Il est clair que toute algèbre nilpotente est résoluble.

Soit A une K-algèbre à puissances associatives et x un élément de A. On dit que x est *nilpotent* s'il existe un entier naturel non nul k tel que $x^k = 0$. Si x est nilpotent, le plus petit entier naturel non nul p tel que $x^p = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de x. On dira que A est une *nilalgèbre* si tout élément de A est nilpotent.

Soit A la $\mathbb{R}$-algèbre de Suttles ([39], [65]) dont la multiplication relative à la base u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 est donnée par le tableau ci-dessous.

$\curvearrowright$	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3
u_1	0	0	v_2	v_3	0
u_2	0	0	0	v_1	$-v_2$
v_1	v_2	0	0	0	0
v_2	v_3	v_1	0	0	0
v_3	0	$-v_2$	0	0	0

Soit $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$. Alors

$$x^2 = 2\alpha_2\beta_2 v_1 + (2\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_3)v_2 + 2\alpha_1\beta_2 v_3;$$

$$x^3 = x^2 x = 2\alpha_2(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_3)v_1 + 2\alpha_1(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_3)v_3$$

et

$$x^4 = x^3 x = 0.$$

Ainsi N est une nil-algèbre de nilindex 4.
On a $N^2 =< v_1, v_2, v_3 >$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à trois, $N^n =< v_1, v_2, v_3 >= N^2$; par conséquent N n'est pas nilpotent. D'autre part $N^2N^2 = \{0\}$ et donc N est résoluble.

Il est montré qu'en dimension finie, toute algèbre alternative qui est une nilalgèbre est nilpotente ; de plus pour des algèbres à puissances associatives de dimension finie, les notions d'algèbre résoluble et de nilalgèbre coïncident ([63]).

Une classe d'algèbres est constituée d'algèbres dans laquelle est définie une ou plusieurs relations entre les éléments. Certaines de ces classes portent des noms de mathématiciens, qui sont en général leurs créateurs ou découvreurs, à titre d'hommage. Parlons de quelques unes d'entre elles.

1.4 Quelques algèbres à patronymes

Nous disons ici quelques mots historiques sur les algèbres qui seront étudiées par la suite.

Soient A une K-algèbre et x, y, z des éléments de A. Rappelons que le *jacobien* de x, y, z dans A est $\mathfrak{J}(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$; posons maintenant $\mathfrak{L}(x, y, z) = (xz)y - (xy)z + x(yz)$ puis désignons par R_x la multiplication à droite par x, c'est-à-dire, $R_x : A \longrightarrow A,\ y \longmapsto yx$ et par $L_x : A \longrightarrow A,\ y \longmapsto xy$ la multiplication à gauche par x. La relation $\mathfrak{L}(x, y, z) = 0$ s'écrit aussi $R_z(xy) = R_z(x)y + xR_z(y)$, c'est-à-dire, R_z est une dérivation de A. Ainsi, les fonctions $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{L}$ peuvent s'écrire, en termes de multiplications comme suit :
$\mathfrak{L}(x, y, z) = (R_yR_z - R_zR_y + R_{yz})(x) = R_z(x)y - R_z(xy) + xR_z(y)$ et
$\mathfrak{J}(x, y, z) = (R_zR_y + L_{yz} + R_yL_z)(x)$.

Algèbre de Jordan

On dit que A est une *algèbre de Jordan non commutative* si A est flexible et pour tous x, y dans A, $\{x, y, x^2\} = 0$ ([63] p.141). Ce nom de "algèbre de Jordan" a été donné en hommage à Pascual Jordan. *Pascual Jordan (né le 18 Octobre 1902 à Hanovre ; décédé le 31 Juillet 1980 à Hambourg , Allemagne)* *a été un physicien et mathémacien qui a fait d'importantes contributions à la mécanique quantique et la théorie quantique des champs. Il a beaucoup contribué à la formulation mathématique de la mécanique matricielle et a développé des relations anticommutations canoniques pour les fermions. Alors que l'algèbre de Jordan qu'il a construite n'est plus employé dans la mécanique quantique, il a trouvé d'autres applications en mathématiques.* Toute algèbre alternative est de Jordan ([63]). De même toute algèbre de Jordan est à puissances associatives ([63]).

Algèbre de Lie

On dit que A est une *algèbre de Lie* si pour tous x, y, z dans A, $x^2 = 0$ et $\mathfrak{J}(x, y, z) = 0$. *Sophus Lie (17 décembre 1842 à Nordfjordeid, Norvège - 18 février 1899 en Norvège) est un mathématicien norvégien. Il a participé activement à la création de la théorie des symétries continues et l'a appliquée à la géométrie et aux équations différentielles. On lui doit la création des algèbres de Lie, ainsi que des groupes de Lie.* Une classification des algèbres de Lie de dimension inférieure ou égale à trois est donnée dans [26]. Notons A^- l'algèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent est A et dont la multiplication est donnée par $[x, y] = xy - yx$, appelé aussi *crochet de Lie*. On dira que A est *Lie-admissible* si A^- est une algèbre de Lie. Par exemple, toute algèbre associative est Lie-admissible.

Algèbre de Leibniz

On dit que A est une *algèbre de Leibniz* si pour tous x, y, z dans A, on a $\mathfrak{L}(x, y, z) = 0$, en d'autres termes, R_z est une dérivation de A pour tout z dans A. Ces algèbres ont été découvertes par Jean-Louis Loday dans les années 1980. Le nom "algèbre de Leibniz" a été donné en hommage à Leibniz. *Gottfried Wilhelm Leibniz parfois von Leibniz ; anciennement francisé en Leibnitz (Leipzig, 1er juillet 1646 - Hanovre, 14 novembre 1716) est un philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et homme de loi allemand qui a écrit en latin, français et allemand.* Une classification des algèbres de Leibniz de dimension inférieure ou égale à trois est donnée dans [6]. Nous dirons que A est *Leibniz-admissible* si A^- est une algèbre de Leibniz.

Remarque 1.4.1. Si pour tout x dans A, $x^2 = 0$ alors $\mathfrak{J}(x, y, z) = -\mathfrak{L}(x, y, z)$. Ainsi toute algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz. En fait les algèbres de Leibniz sont une forme non (anti)commutative des algèbres de Lie ([31]).

Proposition 1.4.2. *Soit A une algèbre de Leibniz. Alors les relations suivantes sont satisfaites pour tous x, y, z dans A.*

1) $(xy)z = (xz)y + x(yz)$ et $(xy)z = (xz)y - x(zy)$

2) $\mathfrak{L}(x,y,z) = -\mathfrak{L}(x,z,y)$ *et* $x(yz) = -x(zy)$

Démonstration. Soient x, y, z des éléments d'une algèbre de Leibniz A. Les relations $\mathfrak{L}(x,y,z) = 0$ et $\mathfrak{L}(x,z,y) = 0$ conduisent à $(xy)z = (xz)y + x(yz)$ et $(xy)z = (xz)y - x(zy)$. De ces dernières relations, il vient
$x(yz) = (xy)z - (xz)y$ et $x(zy) = (xz)y - (xy)z$, donc $x(yz) = -x(zy)$, puis $\mathfrak{L}(x,y,z) = -\mathfrak{L}(x,z,y)$. □

Proposition 1.4.3. *Soit* A *une algèbre de Leibniz. Alors :*
1) $xy^2 = 0$ *pour tous* x, y *dans* A.
2) $x^2y = (xy)x - x(xy)$ *pour tous* x, y *dans* A.

Démonstration. En effet, la relation $0 = \mathfrak{L}(x,y,y)$ conduit à $xy^2 = 0$; la relation $0 = \mathfrak{L}(x,x,y)$ permet d'avoir $x^2y = (xy)x - x(xy)$. □

Corollaire 1.4.4. *Une algèbre de Leibniz n'a pas d'idempotent non nul.*

Un lien entre algèbre de Leibniz et algèbre associative.

On suppose ici que la caractéristique du corps K est différente de deux.
Soit A une K-algèbre de Leibniz commutative. Comme $xy^2 = 0$ pour tous x et y dans A alors $x(y+z)^2 = 0$ pour tous x, y et z dans A et $x(yz)+x(zy) = 0$; A étant commutative on a $2x(yz) = 0$ puis $x(yz) = 0$ pour tous x, y et z dans A. On peut alors énoncer :

Proposition 1.4.5. *Toute* K*-algèbre de Leibniz commutative est une algèbre associative.*

Chapitre 2

Généralités sur la dupliquée

Nous donnons ici la définition de la dupliquée commutative et celle de la dupliquée non commutative d'une algèbre. D'autre part, nous rappelons quelques résultats obtenus dans notre thèse de troisième cycle. Enfin des résultats généraux sont donnés.

2.1 Sur la Dupliquée commutative

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre commutative.

2.1.1 La dupliquée commutative

Soient I l'idéal du produit tensoriel $A \otimes A$ engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$ et $S^2(A) = (A \otimes A)/I$ la seconde puissance symétrique de A. Posons $D_K(A) = S^2(A)$. Ce K-espace vectoriel est linéairement engendré par les vecteurs $x \vee y$ (produit symétrique de x et y) pour x et y parcourant A. On définit sur $D_K(A)$ une structure de K-algèbre commutative en posant

$$(x \vee y)(x' \vee y') = xy \vee x'y', \text{pour tous } x, y, x', y' \text{ dans } A$$

où $\vee$ désigne le *produit symétrique* (que l'on peut nommer aussi de *produit tensoriel commutatif*) ; $D_K(A)$ est appelée la *dupliquée commutative* de A.

L'application $\mu : D_K(A) \to A^2, x \vee y \mapsto xy$ est un morphisme surjectif de K-algèbres appelé *morphisme d'Etherington*. Soit $N_{D_K}(A)$ le noyau de μ. On a alors la suite exacte

$$0 \to N_{D_K}(A) \hookrightarrow D_K(A) \to A^2 \to 0.$$

On note immédiatement que $D_K(A)N_{D_K}(A) = 0$.
On a donc $D_K(A) \simeq A^2 \underset{s.d}{\times} N_{D_K}(A)$ (s.d pour produit semi-direct) où le *produit semi-direct s.d* est défini par

$$(x, m)(y, n) = (xy, \varphi(x, y)),$$

où $\varphi : A^2 \times A^2 \to N_{D_K}(A)$ est une application K-bilinéaire symétrique, c'est-à-dire, $D_K(A)$ est une extension nulle de (A^2, μ) et φ un *factor set* de cette extension. On note alors $D_K(A) = A^2 \underset{s.d}{\times} N_{D_K}(A)$. On dira que deux applications $\varphi, \varphi' : A^2 \times A^2 \to N_{D_K}(A)$ sont équivalentes s'il existe une application K-linéaire $h : A^2 \to N_{D_K}(A)$, telle que

$$\varphi' = \varphi + \delta h$$

où

$$\delta h : A^2 \times A^2 \to N_{D_K}(A), (x, y) \mapsto h(x)y - h(xy) + xh(y).$$

De la structure de $D_K(A)$, il vient que

$$\delta h(x, y) = -h(xy).$$

Ainsi φ et φ' sont équivalentes si et seulement si

$$A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_K}(A) \simeq A^2 \underset{\varphi'}{\times} N_{D_K}(A) \text{ (isomorphisme de } K\text{-algèbres).}$$

L'isomorphisme mentionné s'écrit

$$A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_K}(A) \to A^2 \underset{\varphi'}{\times} N_{D_K}(A), (x, m) \mapsto (x, m - h(x)).$$

Notons que $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_K}(A)$ est une autre notation pour $A^2 \underset{s.d}{\times} N_{D_K}(A)$ dans laquelle on met en évidence l'application φ.

L'algèbre A étant de dimension finie, il existe $\eta : A^2 \to D_K(A)$, K-linéaire, telle que $\mu \circ \eta = id_{A^2}$. Considérons l'application bilinéaire

$$\varphi : A^2 \times A^2 \to N_{D_K}(A), (x, y) \mapsto \eta(x)\eta(y) - \eta(xy).$$

Soit η' une application linéaire de A^2 dans $D_K(A)$ telle que $\mu \circ \eta' = id_{A^2}$. Posons alors $h = \eta' - \eta$. On obtient immédiatement $\varphi' = \varphi + \delta h$. Il en résulte donc qu'à isomorphisme près, la structure de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_K}(A)$ est indépendante du choix de η et de φ (cf [36], [38]).

Il est démontré ([36], [45], [47]) le résultat suivant :

Théorème 2.1.1. *(d'Etherington) Soient $N_{D_K}(A)$ le noyau du morphisme d'Etherington μ, $\eta : A^2 \longrightarrow D_K(A)$ une application K-linéaire vérifiant $\mu \circ \eta = id_{A^2}$ et $\varphi : A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_K}(A)$ l'application K-bilinéaire définie par :*

$$\varphi(x, y) = \eta(x)\eta(y) - \eta(xy).$$

Alors $D_K(A)$ est isomorphe à $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_K}(A)$ (isomorphisme de K-algèbres).

On notera que φ est K-bilinéaire symétrique. La multiplication de $D_K(A) \simeq A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_K}(A)$ est alors définie par $(x, m)(y, n) = (xy, \varphi(x, y))$ pour tous x, y dans A^2 et tous m, n dans $N_{D_K}(A)$.

Lemme 2.1.2. *Soit $\eta : A^2 \to D_K(A)$ une application K-linéaire vérifiant $\mu \circ \eta = id_{A^2}$ où $\mu : D_K(A) \longrightarrow A^2, x \vee y \mapsto xy$. Alors*

$$\eta(x)\eta(y) = x \vee y \quad \textit{pour tous } x, y \textit{ dans } A^2.$$

De plus

$$\varphi(x, y) = \eta(x)\eta(y) - \eta(xy) = x \vee y - \eta(xy) \textit{ pour tous } x, y \textit{ dans } A^2.$$

Conséquences :
(a) Pour tous x, y dans A^2, si $xy = 0$ alors $\varphi(x, y) = x \vee y$.
(b) Si e est une unité de A^2 alors $\varphi(e, y) = 0$ pour tout x dans A^2.

2.1.2 Sur la décomposition de Peirce et la dupliquée commutative d'une algèbre de Bernstein.

L'objet de cette partie est de montrer que l'ordre de la dupliquée commutative d'une algèbre de Bernstein d'ordre n est au plus $n + 1$ et établir la décomposition de Peirce de la dupliquée d'une *algèbre de Bernstein* d'ordre n relativement à un idempotent non nul. Nous généraliserons ainsi un résultat obtenu dans [47] (voir aussi [45])

Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A une K-algèbre commutative.

Pour tout x dans A, on définit de façon inductive les puissances pleines de x en posant :

$$x^{[1]} = x \quad \text{et} \quad x^{[k+1]} = x^{[k]}x^{[k]}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

Une K-algèbre pondérée (A, ω) est une K-algèbre de Bernstein d'ordre n ($n \geq 0$) si pour tout x dans A,

$$x^{[n+2]} = \omega(x)^{2^n} x^{[n+1]}$$

et n est le plus petit entier vérifiant cette condition.

Soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein d'ordre n. Comme ω est surjective, il existe x dans A tel que $x \neq 0$ et $\omega(x) = 1$; par suite

$$(x^{[n+1]})^2 = x^{[n+2]} = (\omega(x))^{2^n} x^{[n+1]} = x^{[n+1]},$$

c'est à dire, $x^{[n+1]}$ est un idempotent de A.

Soit alors e un idempotent de A.

On a $A = Ke \oplus N$ où N est le noyau de ω. En posant

$$e_0 = id_N, \ e_{k+1} = L_e \circ e_k$$

où $L_e(x) = ex$ pour tout x dans N et

$$V_k = \{x \in N, e_k(x) = 0\}, \ k \geq 0,$$

on a une suite croissante

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{n-1} \subseteq V_n$$

de K-espaces vectoriels.

On a $N = U \oplus V_n$ où $U = \{x \in N, ex = \frac{1}{2}x\}$.

Soit m le plus grand entier tel que $V_{m-1} \neq V_m$. Alors $V_m = V_n$. Si $k \in [1, m]$, il existe un sous-espace vectoriel C_k de N tel que $V_k = V_{k-1} \oplus C_k$.

Alors $V_k = \bigoplus_{i=1}^{i=k} C_i$ et finalement

$$A = Ke \oplus U \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_n \quad ([45], [47]).$$

Ceci est la *décomposition de Peirce* de l'algèbre de Bernstein d'ordre n A relativement à l'idempotent e.

Lemme 2.1.3. *([47], [52]) Si $\omega : A^2 \to K$ est une pondération, alors*

$$\omega_{D_K} : D_K(A) \simeq A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_K}(A)) \to K, \ (x, m) \mapsto \omega_{D_K}(x, m) = (\omega \circ \mu)(x, m)$$

est une pondération et $\omega_{D_K}(x, m) = \omega(x)$.

Lemme 2.1.4. *Soit $\omega : A^2 \to K$ une pondération. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $(D_K(A), \ \omega_{D_K})$ est une K-algèbre de Bernstein d'ordre $n, n \geq 0$.

2) Pour tout x dans A^2 on a

(a) $x^{[n+2]} = (\omega(x))^{2^n} x^{[n+1]}$

et

(b) $\varphi(x^{[n+1]}, x^{[n+1]}) = (\omega(x))^{2^n} \varphi(x^{[n]}, x^{[n]})$.

Démonstration. En effet, pour tout (x, m) dans $D_K(A)$,

$$(x, m)^{[1]} = (x, m), (x, m)^{[2]} = (x^2, \varphi(x, x)) = (x^2, \varphi(x^{[1]}, x^{[1]}))$$

et plus généralement

$$(x, m)^{[n+1]} = (x^{[n+1]}, \varphi(x^{[n]}, x^{[n]})).$$

Ainsi, $(x,m)^{[n+2]} = (\omega_{D_K}(x,m))^{2^n})(x,m)^{[n+1]}$ équivaut à

$$(x^{[n+2]}, \varphi(x^{[n+1]}, x^{[n+1]})) = (\omega_{D_K}(x,m))^{2^n}(x^{[n+1]}, \varphi(x^{[n]}, x^{[n]}))$$

et par suite

$$x^{[n+2]} = (\omega_{D_K}(x,m))^{2^n} x^{[n+1]}$$

et

$$\varphi(x^{[n+1]}, x^{[n+1]}) = (\omega_D(x,m))^{2^n} \varphi(x^{[n]}, x^{[n]}).$$

Le lemme est ainsi prouvé. □

Exemple 2.1.5. ([47], [52]) Soit A la K-algèbre commutative de dimension 4 dont la table de multiplication relativement à la base e_0, e_1, e_2, e_3 est donnée par :

$$e_0^2 = e_0,\ e_0e_1 = \frac{1}{2}e_1 = e_1e_0,\ e_0e_3 = e_2 = e_3e_0,$$

tous les autres produits étant nuls. L'élément e_0 est un idempotent de A. Soit ω l'application de A dans K définie par $\omega(e_0) = 1$ et $\omega(e_i) = 0, i = 1,2,3$; ω est alors une pondération de A. Soit $x = \sum\limits_{i=0}^{i=3} x_ie_i, x_i \in K$; on a :

$$x^2 = x^{[2]} = x_0^2e_0 + x_0x_1e_1 + 2x_0x_3e_2,$$

$$x^{[2]}x^{[2]} = x^{[3]} = x_0^4e_0 + x_0^3x_1e_1,$$

$$x^{[3]}x^{[3]} = x^{[4]} = x_0^4(x_0^4e_0 + x_0^3x_1e_1) = x_0^4x^{[3]}.$$

Ainsi pour tout x dans A, $x^{[4]} = (\omega(x))^{2^2}x^{[3]}$ et par suite A est une K-algèbre de Bernstein d'ordre 2. De plus, A^2 est engendré par e_0, e_1, e_2. Pour tout $x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2$ dans A^2, on a :

$$x^2 = x_0^2e_0 + x_0x_1e_1 = x^{[2]},$$

$$x^{[3]} = x_0^4e_0 + x_0^3x_1e_1 = (\omega(x))^2x^{[2]}.$$

Donc, A^2 est de Bernstein d'ordre 1. Les $a_{ij} = e_i \vee e_j$, $0 \le i \le j \le 3$ constituent une base de la dupliquée commutative $D_K(A)$ de A.
Soit η l'application de A^2 dans $D_K(A)$ définie par :
$\eta(e_0) = e_0 \vee e_0 = a_{00},\ \eta(e_1) = 2e_0 \vee e_1 = 2a_{01},\ \eta(e_2) = e_0 \vee e_3 = a_{03}$.
On a $D_K(A) \simeq A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_K}(A))$.
Pour tout x dans A^2, on a :

$$\varphi(x^{[2]}, x^{[2]}) = \varphi(x_0^2e_0 + x_0x_1e_1, x_0^2e_0 + x_0x_1e_1)$$

qui est différent de $\varphi(x, x)$ et

$$\varphi(x^{[3]}, x^{[3]}) = \varphi((\omega(x))^2 x^{[2]}, (\omega(x))^2 x^{[2]}) = ((\omega(x))^2)^2 \varphi(x^{[2]}, x^{[2]}).$$

Par suite, d'après le lemme 2.1.4, $D_K(A)$ est une K-algèbre de Bernstein d'ordre 2.

Remarque 2.1.6. Dire que e est un idempotent de A^2 équivaut à dire que $e_D = (e, o)$ est un idempotent de $D_K(A)$.

Soient

$$(L_e)^0 = id_{A^2}, \quad (L_e)^1 = L_e : A^2 \to A^2, x \mapsto ex$$

et

$$(L_e)^n = L_e \circ (L_e)^{n-1}, \ n = 2, 3, \cdots .$$

Posons alors

$$(L_{e_D})^0 = id_{D_K(A)}, \quad (L_{e_D})^1 = L_{e_D} : D_K(A) \to D(A), (x, m) \mapsto e_D(x, m)$$

et

$$(L_{e_D})^n = L_{e_D} \circ (L_{e_D})^{n-1}, \ n = 2, 3, \cdots .$$

On a : $L_{e_D}(x, m) = e_D(x, m) = (e, 0)(x, m) = (ex, \varphi(e, x))$,

$$\begin{aligned} L^2_{e_D}(x, m) =& L_{e_D}(L_{e_D}(x, m)) \\ =& e_D(ex, \varphi(e, x)) \\ =& (e, 0)((ex, \varphi(e, x))) \\ =& (e(ex), \varphi(e, ex)) \\ =& ((L_e)^2(x), \varphi(e, (L_e)^1(x))) \end{aligned}$$

et plus généralement

$$(L_{e_D})^k(x, m) = ((L_e)^k(x), \varphi(e, (L_e)^{k-1}(x))), \ k = 1, 2, \cdots .$$

Théorème 2.1.7. *Si A est une K-algèbre de Bernstein d'ordre $n \geq 1$, alors la dupliquée commutative $D_K(A)$ de A est une K-algèbre de Bernstein d'ordre au plus $n+1$. De plus, la décomposition de Peirce de $D_K(A)$ relativement à un idempotent $e_D = (e, 0)$ où e est un idempotent de A^2 est donnée par :*

$$D_K(A) = Ke \oplus U_D \oplus C_{D,1} \oplus \cdots \oplus C_{D,n} \oplus C_{D,n+1} \text{ avec}$$

$$U_D = \{(x, 2\varphi(e, x)), \ x \in U\};$$

$$C_{D,1} = \{0\} \times N_{D(A)} \text{ et}$$

$$C_{D,k} = C_{k-1} \times \{0\}, \ k = 2, \cdots, n+1$$

où

$$A^2 = Ke \oplus U \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$$

est la décomposition de Peirce de A^2 relativement à l'idempotent e.

Démonstration. En effet, si A est une K-algèbre de Bernstein d'ordre n, alors il résulte du lemme 2.1.4 ci-dessus que $D_K(A)$ est une K-algèbre de Bernstein d'ordre au plus $n+1$. Comme A^2 est de Bernstein d'ordre au plus n (car A est de Bernstein d'ordre n), écrivons

$$A^2 = Ke \oplus U \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$$

décomposition de Peirce de A^2 relativement à l'idempotent e et

$$D_K(A) = Ke \oplus U_D \oplus C_{D,1} \oplus \cdots \oplus C_{D,n} \oplus C_{D,n+1}$$

décomposition de Peirce de $D_K(A)$ relativement à l'idempotent $e_D = (e, 0)$.
Si $(x, m) \in U_D$ alors $e_D(x, m) = (ex, \varphi(e, x)) = \frac{1}{2}(x, m)$ et par suite $U_D \subseteq \{(x, 2\varphi(e, x)),\ x \in U\}$. Pour tout $x \in U$, on a :

$$e_D(x, 2\varphi(e, x)) = (ex, \varphi(e, x)) = (\frac{1}{2}x, \varphi(e, x)) = \frac{1}{2}(x, 2\varphi(e, x)).$$

Par suite $U_D = \{(x, 2\varphi(e, x)), x \in U\}$.
Si $(x, m) \in C_{D,1}$ alors $e_D(x, m) = (ex, \varphi(e, x)) = (0, 0)$. Ainsi

$$C_{D,1} \subseteq \{(x, m) \in D_K(A), x \in C_1, \varphi(e, x) = 0\}.$$

Posons $C_1^\circ = \{x \in A^2, x \in C_1, \varphi(e, x) = 0\}$. On a : $C_{D,1} \subseteq C_1^\circ \times N_{D_K}(A)$. Soit $(x, m) \in C_1^\circ \times N_{D_K}(A)$. Alors $e_D(x, m) = (ex, \varphi(e, x)) = (0, 0)$. Par suite $C_{D,1} = C_1^\circ \times N_{D_K}(A)$. Soit $x \in C_1^\circ$; alors $ex = 0$ et par suite, d'après les conséquences 2.1.1, $0 = \varphi(e, x) = ex$; ce qui conduit à $x = 0$ ([46], [47]). Ainsi $C_1^\circ = \{0\}$ et $C_{D,1} = \{0\} \times N_{D_K}(A)$.
Soit $(x, m) \in C_{D,k}$ $(k \geq 2)$. On a :

$$(L_{e_D})^k(x, m) = ((L_e)^k(x), \varphi(e, (L_{e_D})^{k-1}(x)) = (0, 0).$$

D'où $x \in C_k^\circ = \{x \in A^2, x \in C_k, \varphi(e, (L_{e_D})^{k-1}(x)) = 0\}$.
Ainsi $C_{D,k} \subseteq C_k^\circ \times N_{D_K}(A)$.
Si $x \in C_k^\circ$ alors $(L_{e_D})^k(x, 0) = ((L_e)^k(x), \varphi(e, (L_{e_D})^{k-1}(x)) = (0, 0)$. D'où $C_k^\circ \times \{0\} \subseteq C_{D,k}$.
Soit $(x, m) \in C_{D,k}$; alors $x \in C_k^\circ$ et $(x, 0) \in C_{D,k}$. Ainsi $(x, m) - (x, 0)$ est dans $C_{D,k}$.
Comme $C_{D,1} = \{0\} \times N_{D_K}(A)$, on a : $(0, m) \in C_{D,k} \cap C_{D,1} = (0, 0), (k \geq 2)$. D'où $m = 0$. Par suite $C_{D,k} = C_k^\circ \times \{0\}$. Si $(x, 0) \in C_{D,k} = C_k^\circ \times \{0\}$ alors $(L_e)^k(x) = 0 = e(L_e)^{k-1}(x)$ et $\varphi(e, (L_e)^{k-1}(x)) = 0$.
Comme $e(L_e)^{k-1}(x) = 0$, on a : $0 = \varphi(e, (L_e)^{k-1}(x)) = e(L_e)^{k-1}(x)$ et $\varphi(e, (L_e)^{k-1}(x)) = e(L_e)^{k-1}(x)$.
D'où $(L_e)^{k-1}(x) = 0$. Ainsi $C_{D,k} \subseteq C_{k-1} \times \{0\}$.

Réciproquement si $(x, 0) \in C_{k-1} \times \{0\}$, alors $(L_e)^k(x) = e(L_e)^{k-1}(x) = 0$ et $\varphi(e, (L_e)^{k-1}(x)) = \varphi(e, 0)$; ainsi $C_{k-1} \times \{0\} \subseteq C_{D,k}$. D'où $C_{k-1} \times \{0\} = C_{D,k}$ pour $k = 2, \cdots, n$. De ce fait $C_{D,n+1} = C_n \times \{0\}$.
Le théorème est ainsi démontré. □

Corollaire 2.1.8. *Soient A une K-algèbre de Bernstein d'ordre n $(n \geq 1)$ et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. $D_K(A)$ est une K-algèbre de Bernstein d'ordre n si et seulement si A^2 est une K-algèbre de Bernstein d'ordre $n-1$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 2.1.7 ci-dessus. □

Le Corollaire 2.1.8 généralise le résultat suivant obtenu dans ([46], [47]).

Théorème 2.1.9. *$D_K(A)$ est une K-algèbre de Bernstein (d'ordre 1) si et seulement si $A^2 = Ke \oplus U$.*

2.2 D'autres types de dupliquées commutatives

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre commutative.

2.2.1 Dupliquée liée au sexe

Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Sur le K-espace vectoriel $S^2_K(A) \oplus A$ on définit la multiplication

$$\begin{aligned}(x \vee y + z)(x' \vee y' + z') =& \frac{1}{2}(xy \vee z' + \omega(z')xy) \\ &+ \frac{1}{2}(x'y' \vee z + \omega(z)x'y')\end{aligned}$$

pour x, y, z, x', y', z' parcourant A.
Cette nouvelle algèbre notée $D_{K,S}(A)$ est appelée *dupliquée liée au sexe de A* ([29]). Si l'on identifie $x \vee y$ avec $(x \vee y, 0)$ et z avec $(0, z)$, la table de multiplication de $D_{K,S}(A)$ s'écrit

$$\begin{aligned}(x \vee y)(x' \vee y') =& 0 \\ zz' =& 0 \\ (x \vee y)z =& z(x \vee y) \\ =& \frac{1}{2}(xy \vee z + \omega(z)xy)\end{aligned}$$

pour x, y, z, x', y', z' parcourant A. Cette table de multiplication porte sur les générateurs de la K-algèbre commutative $D_{K,S}(A)$. Sur cette algèbre, on peut se poser les mêmes questions que pour la dupliquée habituelle comme par exemple le fait d'être de Jordan.

2.2.2 Dupliquée liée au "sex-linkage"

Soient (A, ω) une K-algèbre pondérée et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Sur le K-espace vectoriel $(A \otimes A) \oplus S_K^2(A)$ on définit la multiplication

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = 0$$
$$(x \vee y)(x' \vee y') = 0$$

et

$$\begin{aligned}(x \otimes y)(x' \vee y') =& (x' \vee y')(x \otimes y) \\ =& \frac{1}{2}(1-\theta)(\omega(y)(x'y') \vee x + \omega(x)(x'y') \otimes y) \\ &+ \frac{1}{2}(\omega(y)(x'y') \otimes x + \omega(x)(x'y') \vee y)\end{aligned}$$

pour x, y, z, x', y', z' parcourant A et où θ est un scalaire vérifiant $0 \leq \theta \leq 1$ si $K = \mathbb{R}$.
Pour $\theta = 0$, on a le *complete sex-linkage* et pour $\theta = \frac{1}{2}$, cela correspond à l'absence de "linkage". Pour plus de détails, voir le paragraphe 4.4 de [29]. Encore sur cette algèbre $(A \otimes A) \oplus S_K^2(A)$ on peut se poser les questions habituelles.

2.3 De la Dupliquée non commutative

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre non nécessairement commutative de dimension finie.

2.3.1 Définition

La dupliquée non commutative de A est le K-espace vectoriel $A \otimes A$ muni de la multiplication donnée par :

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y', \text{quels que soient } x, y, x', y' \text{ dans } A.$$

On la notera $D_{K,nc}(A)$.
Si la dimension de A est n alors la dimension de $D_{K,nc}(A)$ est n^2.
Si les vecteurs $e_i,\ i = 0, 1, 2, \cdots$ constituent une base de A alors les $a_{ij} = e_i \otimes e_j,\ i, j = 0, 1, \cdots$ forment une base de $D_{K,nc}(A)$.
Citons le résultat essentiel suivant ([45], [47]).

2.3.2 Théorème d'Etherington

Soient A une K-algèbre non nécessairement commutative et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative.

L'application $\mu : D_{K,nc}(A) \longrightarrow A^2, x \otimes y \longmapsto xy$ est un morphisme de K-algèbres appelé *morphisme d'Etherington* et si $N_{D_{K,nc}}(A)$ est son noyau alors $N_{D_{K,nc}}(A)D_{K,nc}(A) = \{0\}$, $D_{K,nc}(A)N_{D_{K,nc}}(A) = \{0\}$ et $D_{K,nc}(A)/N_{D_{K,nc}}(A) \cong A^2$ (isomorphisme de K-algèbres).

$D_{K,nc}(A)$ est isomorphe à $A^2 \underset{s.d.}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ (produit semi-direct) et la multiplication de $A^2 \underset{s.d.}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ est donnée par :

$$(x,m)(y,n) = (xy, \varphi(x,y)),\ x,y \text{ dans } A^2 \text{ et } m,n \text{ dans } N_{D_{K,nc}}(A)$$

où $\varphi : A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$ est une application K-bilinéaire convenable ; on note alors $D_{K,nc}(A) = A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$.

2.3.3 Exemple

Soit $\mathbb{C}$ la $\mathbb{R}$-algèbre de nombres complexes ; 1 et i formant une base de $\mathbb{C}$, alors

$$a_{00} = 1 \otimes 1,\ a_{01} = 1 \otimes i,\ a_{10} = i \otimes 1,\ a_{11} = i \otimes i$$

est une base de $D_{\mathbb{R},nc}(\mathbb{C})$ et la multiplication de $D_{\mathbb{R},nc}(\mathbb{C})$ est donnée par le tableau suivant :

$\curvearrowright$	a_{00}	a_{01}	a_{10}	a_{11}
a_{00}	a_{00}	a_{01}	a_{01}	$-a_{00}$
a_{01}	a_{10}	a_{11}	a_{11}	$-a_{10}$
a_{10}	a_{10}	a_{11}	a_{11}	$-a_{10}$
a_{11}	$-a_{00}$	$-a_{01}$	$-a_{01}$	a_{00}

Posons $a'_{10} = a_{10} - a_{01}$ et $a'_{11} = a_{00} + a_{11}$. On obtient $N_{D_{\mathbb{R},nc}}(\mathbb{C}) =< a'_{10}, a'_{11} >$ et $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}$. Identifiant a_{00} et 1, a_{01} et i, la multiplication de $D_{\mathbb{R},nc}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \times N_{D_{\mathbb{R},nc}}(\mathbb{C})$ est donnée par le tableau suivant :

$\curvearrowright$	$a_{00} = 1$	$a_{01} = i$	a'_{10}	a'_{11}
$a_{00} = 1$	$a_{00} = 1$	$a_{01} = i$	0	0
$a_{01} = i$	$a_{10} = a_{01} + a'_{10}$ $= i + a'_{10}$	$a_{11} = -a_{00} + a'_{11}$ $= -1 + a'_{11}$	0	0
a'_{10}	0	0	0	0
a'_{11}	0	0	0	0

Il en résulte que $\varphi(1,1) = 0,\ \varphi(1,i) = 0, \varphi(i,1) = a'_{10}$ et $\varphi(i,i) = a'_{11}$.

2.3.4 Du produit semi-direct

Soient A une K-algèbre et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Soit $N_{D_{K,nc}}(A)$ le noyau de $\mu : D_{K,nc}(A) \longrightarrow A^2, x \otimes y \longmapsto xy$.

On dira que deux applications K-bilinéaires $\varphi, \varphi' : A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$ sont *équivalentes* ([38]) s'il existe une application $h : A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$, K-linéaire, telle que $\varphi' = \varphi + \delta h$ où $\delta h : A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$ est définie par $\delta h(x,y) = h(x)y + xh(y) - h(xy)$ pour tous x, y dans A^2. De la structure de l'algèbre $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$, il vient que $\delta h(x,y) = -h(xy)$ pour tous x, y dans A^2. Ainsi φ et $\varphi^{'}$ sont équivalentes si et seulement si $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A) \cong A^2 \underset{\varphi'}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$. L'isomorphisme mentionné est donnée par $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A) \to A^2 \underset{\varphi'}{\times} N_{D_{K,nc}}(A), (x,m) \mapsto (x, m - h(x))$.

Comme A est une K-algèbre de dimension finie, il existe une application K-linéaire $\eta : A^2 \longrightarrow D_{K,nc}(A)$ telle que $\mu \circ \eta = id_{A^2}$. Considérons l'application $\varphi : A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$ définie par $\varphi(x,y) = \eta(x)\eta(y) - \eta(xy)$.

Si $\eta' : A^2 \longrightarrow D_{K,nc}(A)$ est une application K-linéaire vérifiant $\mu \circ \eta' = id_{A^2}$, posons $h = \eta' - \eta$. Alors $h : A^2 \longrightarrow D_{K,nc}(A)$ est une application K-linéaire vérifiant $\varphi' = \varphi + \delta h$, c'est-à-dire, φ et φ' sont équivalentes et $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A) \cong A^2 \underset{\varphi'}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$.

Dans la suite nous considérons que la dupliquée non commutative d'une K-algèbre A de dimension finie est $D_{K,nc}(A) = A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$, la structure de K-algèbre de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ étant donnée par $(x,m)(y,n) = (xy, \varphi(x,y))$ et où φ est définie comme ci-dessus. On notera qu'à isomorphisme près, la structure de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ est indépendante du choix de η.

2.3.5 Propriétés de la dupliquée non commutative

Rappelons quelques propriétés de la dupliquée non commutative ([36]).

Soient A une K-algèbre de dimension finie et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Les trois propositions suivantes découlent du lemme 4.1 de [36]

Proposition 2.3.1. *$D_{K,nc}(A)$ est associative si et seulement si A^2 est associative et $\varphi(xy,z) = \varphi(x,yz)$ pour tous x, y, z dans A^2.*

Proposition 2.3.2. *$D_{K,nc}(A)$ est alternative si et seulement si A^2 est alternative et*

$$\begin{aligned}\varphi(x,xy) &= \varphi(x^2,y)\\ \varphi(xy,y) &= \varphi(x,y^2)\end{aligned}$$

pour tous x, y dans A^2.

Proposition 2.3.3. *$D_{K,nc}(A)$ est une K-algèbre de Jordan si et seulement si A^2 est de Jordan et $\varphi(x, yx) = \varphi(xy, x)$ et $\varphi(x^2y, x) = \varphi(x^2, yx)$ pour tous x, y dans A^2.*

Les résultats précédents montrent qu'une algèbre A peut être dans une classe de K-algèbres (associatives, alternatives, de Jordan etc) sans que sa dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A)$ ne soit dans cette classe et inversement.

Exemple 2.3.4. Considérons la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C}$ des nombres complexes qui est associative donc alternative. On a : $\varphi(i^2, 1) = \varphi(-1, 1) = 0$ et $\varphi(i, i \times 1) = \varphi(i, i) \neq 0$ et $D_{\mathbb{R},nc}(\mathbb{C})$ n'est pas alternative.

Exemple 2.3.5. Soit A une K-algèbre de dimension trois dont la table de multiplication relativement à une base e_0, e_1, e_2 est donnée par :
$e_0e_1 = e_2, e_1e_0 = e_0, e_1^2 = 0$, tous les autres produits étant nuls.
On a $A^2 =< e_0, e_2 >$ et $(A^2)^2 = \{0\}$. Il est alors évident que A^2 est alternative et
$\varphi(x^2, y) = \varphi(x, xy), \varphi(xy, y) = \varphi(x, y^2)$ pour tous x, y dans A^2 et $D_{K,nc}(A)$ est alternative. Mais $(e_0, e_1, e_2) = e_1^2e_0 - e_1(e_1e_0) = e_2e_0 - e_1e_0 = -e_0$ et donc A n'est pas alternative.

Proposition 2.3.6. *$D_{K,nc}(A)$ est nilpotente à droite (respectivement à gauche) (respectivement nilpotente) si et seulement si A^2 est nilpotente à droite (respectivement à gauche) (respectivement nilpotente).*

Démonstration. En effet, comme

$$\begin{aligned}(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A))^2 =& \left\{(x,m)(y,n), x,y \in A^2,\ m,n \in N_{D_{nc}}(A)\right\}\\ =& \{(xy, \varphi(x,y)),\ x,y \in A^2\},\end{aligned}$$

en notant

$$(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A))^2 = \left\{(A^2)^2, \varphi(A^2, A^2)\right\},$$

on montre, par récurrence sur k, que

$$(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A))^k = \left\{(A^2)^k, \varphi((A^2)^{k-1},(A^2)^{k-1})\right\},\ k \geq 2.$$

Cette égalité nous dit que $D_{K,nc}(A)$ est nilpotente à droite si et seulement si A^2 est nilpotente à droite. Les autres cas se démontrent de la même façon. □

Proposition 2.3.7. *$D_{K,nc}(A)$ est résoluble si et seulement si A^2 est résoluble.*

Démonstration. En effet, on montre par récurrence sur k que

$$(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A))^{[n]} = \left\{(A^2)^{[n]}, \varphi((A^2)^{[n-1]}, (A^2)^{[n-1]})\right\},\ n \geq 2$$

et la proposition s'en suit. □

Proposition 2.3.8. *([38], Théorème 5.2) Si A^2 est nilpotente (resp résoluble) d'indice k alors $D_{K,nc}(A)$ est nilpotente (resp résoluble) d'indice au plus $k+1$.*

Démonstration. En effet, on montre par récurrence sur n que

$$(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A))^n = ((A^2)^n, \varphi((A^2)^{n-1}, (A^2)^{n-1}))$$

et

$$(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A))^{[n]} = ((A^2)^{[n]}, \varphi((A^2)^{[n-1]}, (A^2)^{[n-1]})),\ n \geq 2$$

et la proposition s'en suit. □

Proposition 2.3.9. *$D_{K,nc}(A)$ est à puissances associatives si et seulement si A^2 est à puissances associatives et*

$$\varphi(x^p, x^q) = \varphi(x^{p+q-1}, x),\ p, q = 1, 2, \cdots .$$

Démonstration. En effet,

$$(x,m)^2 = (x^2, \varphi(x,x)),$$

$$\begin{aligned}(x,m)^3 =& (x,m)^2(x,m)\\ =& (x^2x, \varphi(x^2, x))\end{aligned}$$

et plus généralement

$$(x,m)^n = (x^n, \varphi(x^{n-1}, x)),\ n = 1, 2, \cdots .$$

Par suite

$$\begin{aligned}(x,m)^p(x,m)^q =& (x^p, \varphi(x^{p-1}, x))(x^q, \varphi(x^{q-1}, x))\\ =& (x^{p+q}, \varphi(x^p, x^q))\end{aligned}$$

$p, q = 2, 3, \cdots$ et (x,m) parcourant $D_{K,nc}(A)$. Ainsi $D_{K,nc}(A)$ est à puissances associatives si et seulement si A^2 est à puissances associatives et $\varphi(x^p, x^q) = \varphi(x^{p+q-1}, x)$ pour tout x dans A^2. □

Enfin dans [45], il est démontré le résultat suivant :

Proposition 2.3.10. *Soient A une K-algèbre et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative.*

1) $D_{K,nc}(A)$ est alternative si et seulement si $(A^2)^2 = 0$ ou $\dim_K A^2 = 1$.

2) $D_{K,nc}(A)$ est à puissances associatives si et seulement si $(A^2)^+$ est une K-algèbre possédant la propriété suivante : tout sous-espace vectoriel de A^2 est une sous-algèbre de $(A^2)^+$ où $(A^2)^+ = (A^2, \circ)$ avec $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.

En fait, on a le résultat suivant.

Proposition 2.3.11. *([19]) Soient C une classe d'algèbres et A une K-algèbre. La dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A) = A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ de A est dans la classe C si et seulement si l'algèbre A^2 est dans la classe C et φ est un 2-cocycle à coefficients dans $N_{D_{K,nc}}(A)$.*

Les deux lemmes suivants seront largement utilisés par la suite.

Lemme 2.3.12. *Pour tous z, z' dans $D_{K,nc}(A)$, $zz' = \mu(z) \otimes \mu(z')$.*

Démonstration. En effet, l'assertion est vraie si $z = x \otimes y$ et $z' = x' \otimes y'$ sont des générateurs du produit tensoriel $A \underset{K}{\otimes} A$ car alors

$$\begin{aligned} zz' =& (x \otimes y)(x' \otimes y') \\ =& (xy) \otimes (x'y') \\ =& \mu(z) \otimes \mu(z'). \end{aligned}$$

Si $z = \sum\limits_j x_j \otimes y_j$ et $z' = \sum\limits_k x'_k \otimes y'_k$ (sommes finies), alors

$$\begin{aligned} zz' =& \left(\sum_j x_j \otimes y_j\right)\left(\sum_k x'_k \otimes y'_k\right) \\ =& \sum_{j,k} x_j y_j \otimes x'_k y'_k \\ =& \left(\sum_j x_j y_j\right) \otimes \left(\sum_k x'_k y'_k\right) \\ =& \mu(z) \otimes \mu(z'). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.13. *Soit $\eta : A^2 \longrightarrow D_{K,nc}(A)$ une application K-linéaire telle que $\mu \circ \eta = id_{A^2}$ et $D_{K,nc}(A) = A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ où $\varphi(x, y) = \eta(x)\eta(y) - \eta(xy)$. Alors pour tous $x, y \in A^2$, $\eta(x)\eta(y) = x \otimes y$.*

Démonstration. En effet, d'après le lemme 2.3.12, $zz' = \mu(z) \otimes \mu(z')$ pour tous z et z' dans $D_{K,nc}(A)$ et puisque $\eta(x)$ et $\eta(y)$ sont dans $D_{K,nc}(A)$, on a $\eta(x)\eta(y) = \mu(\eta(x)) \otimes \mu(\eta(y)) = x \otimes y$. □

Proposition 2.3.14. *Si $dim_K(A^2) \geq 2$ et e_0 est une unité de A^2, alors pour tout x de A^2 non colinéaire à e_0, $\varphi(e_0, x) \neq \varphi(x, e_0)$.*

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned}\varphi(e_0,x)-\varphi(x,e_0) =&(\eta(e_0)\eta(x)-\eta(e_ox))-(\eta(x)\eta(e_0)-\eta(xe_o))\\ =&\eta(e_0)\eta(x)-\eta(x)\eta(e_0).\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3.13, on a $\varphi(e_0,x)-\varphi(x,e_0)=e_0\otimes x-x\otimes e_0$. Comme x et e_0 sont linéairement indépendants alors $\varphi(e_0,x)-\varphi(x,e_0)$ est non nul. $\square$

Chapitre 3

Dupliquée Lie-admissible

Soient K un corps commutatif, A une K-algèbre non nécessairement commutative de dimension finie et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Il s'agit ici de caractériser la sous-algèbre A^2 de A dans le cas où $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible et A^2 non nil, flexible et à puissances associatives.

Rappelons que A est une K-algèbre non nécessairement commutative, ni associative, de dimension finie dont la multiplication est notée xy et que A^- désigne le K-espace vectoriel A muni du crochet de Lie $[x, y] = xy - yx$. On dit que A est *Lie-admissible* si A^- est une algèbre de Lie.

3.1 Dupliquée non commutative et Lie-admissibilité

Théorème 3.1.1. *$D_{K,nc}(A)^-$ est isomorphe à $(A^2)^- \underset{\varphi^-}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ où*

$$\varphi^-(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(y, x)$$

pour tous x, y dans A^2.

Démonstration. En effet, l'idéal $N_{D_{K,nc}}(A)$ étant le noyau de μ, d'une part on a un isomorphisme de K-algèbres

$$D_{K,nc}(A)^-/N_{D_{K,nc}}(A) \xrightarrow{\sim} (A^2)^-$$

et d'autre part

$$[N_{D_{K,nc}}(A), D_{K,nc}(A)] = \{0\} \text{ et } [D_{K,nc}(A), N_{D_{K,nc}}(A)] = \{0\}.$$

Comme $[(x, m), (y, n)] = ([x, y], \varphi(x, y) - \varphi(y, x))$ quels que soient x, y dans A^2 alors $D_{K,nc}(A)^- \approx (A^2)^- \underset{\varphi^-}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ (isomorphime de K-algèbres). □

Théorème 3.1.2. *L'algèbre $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible si et seulement si A^2 est Lie-admissible et $\Phi(x, y, z) = 0$ pour tous x, y, z dans A^2, où*

$$\Phi(x, y, z) = \varphi^-([x, y], z) + \varphi^-([y, z], x) + \varphi^-([z, x], y).$$

Démonstration. En effet, pour $X = (x, m), Y = (y, n), Z = (z, p)$ dans $D_{K,nc}(A)$, le jacobien dans $D_{K,nc}(A)^-$ du triplet (X, Y, Z) s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_{D_{K,nc}(A)^-}(X, Y, Z)) =& [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \\
=& [([x, y], \varphi^-(x, y)), Z] + [([y, z], \varphi^-(y, z)), X] \\
&+ [([z, x], \varphi^-(z, x)), Y] \\
=& ([[x, y], z], \varphi^-([x, y], z)) \\
&+ ([[y, z], x], \varphi^-([y, z], x)) \\
&+ ([[z, x], y], \varphi^-([z, x], y)) \\
=& (\mathfrak{J}_{(A^2)^-}(x, y, z), 0) \\
&+ (0, \varphi^-([x, y], z) + \varphi^-([y, z], x) + \varphi^-([z, x], y))
\end{aligned}$$

où $\mathfrak{J}_{(A^2)^-}(x, y, z)$ est le jacobien dans $(A^2)^-$ du triplet (x, y, z).
Comme φ^- est antisymétrique, alors pour tout (x, m) dans $D_{K,nc}(A)$, on a : $[(x, m), (x, m)] = ([x, x], \varphi^-(x, x)) = 0$.
Ainsi $D_{K,nc}(A)^-$ est de Lie si et seulement si

$$\mathfrak{J}_{D_{K,nc}(A)^-}((x, m), (y, n), (z, p)) = 0$$

pour tous x, y, z dans A^2 et pour tous m, n, p dans $N_{D_{K,nc}}(A)$; autrement dit

$$\mathfrak{J}_{(A^2)^-}(x, y, z) = 0$$

et

$$\varphi^-([x, y], z) + \varphi^-([y, z], x) + \varphi^-([z, x], y) = 0$$

pour tous x, y, z dans A^2. $\square$

Proposition 3.1.3. *Si A^2 est Lie-admissible, l'application $\Phi : A^2 \times A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$, définie par*

$$\Phi(x, y, z) = \varphi^-([x, y], z) + \varphi^-([y, z], x) + \varphi^-([z, x], y)$$

est K-trilinéaire antisymétrique et

$$\Phi(x, y, z) = [x, y] \otimes z - z \otimes [x, y] + [y, z] \otimes x - x \otimes [y, z] + [z, x] \otimes y - y \otimes [z, x]$$

pour tous x, y, z dans A^2.

Démonstration. En effet, l'application $(x, y, z) \longmapsto \Phi(x, y, z)$ définie par $\Phi(x, y, z) = \varphi^-([x, y], z)+\varphi^-([y, z], x)+\varphi^-([z, x], y)$ est trivialement K-trilinéaire antisymétrique.

Soient x, y, z dans A^2 ;

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) =&\varphi^-([x,y],z)+\varphi^-([y,z],x)+\varphi^-([z,x],y)\\ =&\varphi([x,y],z)-\varphi(z,[x,y])+\varphi([y,z],x)-\varphi(x,[y,z])\\ &+\varphi([z,x],y)-\varphi(y,[z,x])\\ =&\eta([x,y])\eta(z)-\eta([x,y]z)-\eta(z)\eta([x,y])+\eta\,(z[x,y])\\ &+\eta([y,z])\eta(x)-\eta([y,z]x)-\eta(x)\eta([y,z])+\eta(x[y,z])\\ &+\eta([z,x])\eta(y)-\eta([z,x]y)-\eta(y)\eta([z,x])+\eta(y[z,x])\\ =&\eta([x,y])\eta(z)-\eta(z)\eta([x,y])+\eta([y,z])\eta(x)-\eta(x)\eta([y,z])\\ &+\eta([z,x])\eta(y)-\eta(y)\eta([z,x])-\eta([x,y]z)+\eta(z[x,y])\\ &-\eta([y,z]x)+\eta(x[y,z])-\eta([z,x]y)+\eta(y[z,x])\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) =&[x,y]\otimes z-z\otimes[x,y]+[y,z]\otimes x-x\otimes[y,z]\\ &+[z,x]\otimes y-y\otimes[z,x]+\eta(-[[x,y],z]-[[y,z],x]-[[z,x],y])\\ =&[x,y]\otimes z-z\otimes[x,y]+[y,z]\otimes x-x\otimes[y,z]\\ &+[z,x]\otimes y-y\otimes[z,x]+\eta(0)\\ =&[x,y]\otimes z-z\otimes[x,y]+[y,z]\otimes x-x\otimes[y,z]+[z,x]\otimes y-y\otimes[z,x].\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.4. *Si* $\dim_K A^2 \leq 2$ *alors* $D_{K,nc}(A)$ *est Lie-admissible si et seulement si* A^2 *est Lie-admissible.*

Démonstration. Ceci vient du théorème 3.1.2 et du fait que pour $\dim_K A^2 \leq 2$ l'application K-trilinéaire antisymétique $\Phi : A^2 \times A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$ de la proposition 3.1.3 est nulle. □

Remarque 3.1.5. Si A^2 est commutative alors $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible. En effet, A^2 est trivialement Lie-admissible et pour tous x, y, z dans A^2,

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) =&[x,y]\otimes z-z\otimes[x,y]+[y,z]\otimes x-x\otimes[y,z]\\ &+[z,x]\otimes y-y\otimes[z,x].\end{aligned}$$

En appliquant le théorème 3.1.2 et la proposition 3.1.3, on obtient $\Phi(x,y,z) = 0$.

Théorème 3.1.6. *de Koulibaly* *Si l'idéal* A^2 *est non commutatif et si* $\dim_K((A^2)^2) \geq 4$ *alors* $D_{K,nc}(A)$ *n'est pas Lie-admissible ; en d'autres termes si l'idéal* A^2 *est non commutatif et si* $D_{K,nc}(A)$ *est Lie-admissible alors* $\dim_K((A^2)^2) \leq 3$.

Démonstration. Supposons que l'idéal A^2 soit non commutatif et que $\dim_K((A^2)^2) \geq 4$. Tout vecteur de $(A^2)^2$ étant une somme finie de produits finis de vecteurs de A^2 et comme $\dim_K(A^2)^2 \geq 4$, il existe une base $x_1, \cdots, x_r$ de A^2 telle qu'au moins quatre des produits $x_i x_j$, $i, j = 1, \cdots, r$ soient linéairement indépendants ; de plus, comme A^2 est non commutatif, au moins un des produits $x_i x_j$ vérifie $x_i x_j \neq x_j x_i$. Soient alors $e_1 = x_i x_j, e_2 = x_k x_l, e_3 = x_m x_n, e_4 = x_p x_q$ des vecteurs linéairement indépendants de $(A^2)^2$ avec $x_i x_j \neq x_j x_i$ où les $x_i, x_j, x_k, x_l, x_m, x_n, x_p, x_q$ sont dans $\{x_1, \cdots, x_r\}$. De la définition des vecteurs $e_i, i = 1, 2, 3, 4$, il vient qu'au moins un des entiers k, l, m, n, p, q est distinct de i et de j. Supposons par exemple que $k \notin \{i, j\}$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(x_i, x_j, x_k) =& [x_i, x_j] \otimes x_k - x_k \otimes [x_i, x_j] + [x_j, x_k] \otimes x_i - x_i \otimes [x_j, x_k] \\ &+ [x_k, x_i] \otimes x_j - x_j \otimes [x_k, x_i] \\ =& (e_1 - x_j x_i) \otimes x_k - x_k \otimes (e_1 - x_j x_i) + [x_j, x_k] \otimes x_i - x_i \otimes [x_j, x_k] \\ &+ [x_k, x_i] \otimes x_j - x_j \otimes [x_k, x_i]\end{aligned}$$

Si $x_j x_i = \alpha e_1, \alpha \neq 1$ alors

$$\begin{aligned}\Phi(x_i, x_j, x_k) =& (1 - \alpha)(e_1 \otimes x_k - x_k \otimes e_1) + [x_j, x_k] \otimes x_i - x_i \otimes [x_j, x_k] \\ &+ [x_k, x_i] \otimes x_j - x_j \otimes [x_k, x_i].\end{aligned}$$

Les vecteurs e_i, e_j, e_k étant linéairement indépendants dans A^2, le vecteur $e_1 \otimes x_k - x_k \otimes e_1$ n'est pas une combinaison linéaire de $[x_j, x_k] \otimes x_i - x_i \otimes [x_j, x_k]$ et $[x_k, x_i] \otimes x_j - x_j \otimes [x_k, x_i]$; par suite $\Phi(x_i, x_j, x_k)$ est non nul.
Si $x_j x_i$ et e_1 sont linéairement indépendants alors

$$\begin{aligned}\Phi(x_i, x_j, x_k) =& (e_1 \otimes x_k - x_k \otimes e_1) \\ &- (x_j x_i \otimes x_k - x_k \otimes x_j x_i) \\ &+ ([x_j, x_k] \otimes x_i - x_i \otimes [x_j, x_k]) \\ &+ ([x_k, x_i] \otimes x_j - x_j \otimes [x_k, x_i]).\end{aligned}$$

Utilisant des arguments analogues aux précédents on conclut que $\Phi(x_i, x_j, x_k)$ est non nul. Ainsi d'après le théorème 3.1.2 et la proposition 3.1.3, la dupliquée non commutative de A n'est pas Lie-admissible. □

Remarque 3.1.7. Il est clair que si A^2 n'est pas Lie-admissible alors $D_{K,nc}(A)$ aussi n'est pas Lie-admissible (cf théorème 3.1.2).

Exemple 3.1.8. Exemple d'une algèbre A telle que A^2 soit de Lie de dimension trois dont la dupliquée non commutative n'est pas Lie-admissible.
Soit A_α la K-algèbre de dimension quatre dont la multiplication relative à une base e_0, e_1, e_2, e_3 est donnée par : $e_0 e_2 = e_0 = -e_2 e_0$, $e_0 e_3 = e_2 = -e_3 e_0$, $e_1 e_2 = \alpha e_1 = -e_2 e_1$, les autres produits étant nuls.
Si $\alpha = 0$ alors $A_0^2 = < e_0, e_2 >$ est une algèbre de Lie de dimension deux.
Sinon $A_\alpha^2 = < e_0, e_1, e_2 >$ est l'algèbre de Lie de dimension trois dont la multiplication relative à la base (e_0, e_1, e_2) est donnée par : $e_0 e_2 = e_0 =$

$-e_2e_0,\ e_1e_2 = \alpha e_1 = -e_2e_1$, les autres produits étant nuls. On a :

$$\begin{aligned}\Phi(e_0, \alpha e_1, e_2) =&[e_0, \alpha e_1] \otimes e_2 - e_2 \otimes [e_0, \alpha e_1]\\ &+ [\alpha e_1, e_2] \otimes e_0 - e_0 \otimes [\alpha e_1, e_2]\\ &+ [e_2, e_0] \otimes \alpha e_1 - \alpha e_1 \otimes [e_2, e_0]\\ =&2\alpha^2 e_1 \otimes e_0 - e_0 \otimes 2\alpha^2 e_1 - 2\alpha e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes 2\alpha e_0\\ =&2\alpha(\alpha + 1)(e_1 \otimes e_0 - e_0 \otimes e_1).\end{aligned}$$

Comme A_α^2 est de Lie pour n'importe quelle valeur de α alors elle est aussi Lie-admissible et pour $\alpha = 0$ ou $\alpha = -1$ l'application Φ est nulle et, par suite $D_{K,nc}(A_0)$ et $D_{K,nc}(A_{-1})$ sont Lie-admissibles.
Pour $\alpha = 1$, $(A^2)^2 =< e_0, e_1 >$ et on a : $\Phi(e_0, e_1, e_2) = 4\,(e_1 \otimes e_0 - e_0 \otimes e_1)$ qui est non nul ; par suite la dupliquée non commutative de cette algèbre A_1 n'est pas Lie-admissible (cf théorème 3.1.2 et proposition 3.1.3).

Exemple 3.1.9. Exemple d'une algèbre A dont l'algèbre A^2 est non commutative, $(A^2)^2$ est de dimension trois et la dupliquée non commutative est Lie-admissible.
Considérons maintenant la K-algèbre A de dimension trois dont la multiplication relative à une base e_0, e_1, e_2 est donnée par : $e_0^2 = e_0,\ e_0e_1 = e_1 = e_1e_0,\ e_0e_2 = e_2 = e_2e_0,\ e_1e_2 = e_0,\ e_2e_1 = 2e_0$, les autres produits étant nuls. On note que $A^2 = A$, qui est engendré par e_0, e_1 et e_2, est non commutative et que $(A^2)^2 = A$.
On vérifie que A^2 est Lie-admissible. On a :

$$\begin{aligned}\Phi(e_0, e_1, e_2) =&[e_0, e_1] \otimes e_2 - e_2 \otimes [e_0, e_1] + [e_1, e_2] \otimes e_0 - e_0 \otimes [e_1, e_2]\\ &+ [e_2, e_0] \otimes e_1 - e_1 \otimes [e_2, e_0]\\ =& - e_0 \otimes e_0 + e_0 \otimes e_0\\ =&0.\end{aligned}$$

Comme $\Phi : A^2 \times A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$ est K-trilinéaire antisymétrique, le théorème 3.1.2 et la proposition 3.1.3 permettent de conclure que la dupliquée non commutative de cette algèbre est Lie-admissible.

Exemple 3.1.10. L'exemple de $sl2$
Considérons la K-algèbre de Lie simple de dimension trois dont la multiplication relative à une base e, f, h est donnée par : $ef = h = -fe,\ eh = 2e = -he,\ fh = -2f = -hf$, les autres produits étant nuls ([26], p. 14).

$$\begin{aligned}\Phi(e, f, h) =&ef \otimes h - h \otimes ef + fh \otimes e - e \otimes fh + he \otimes f - f \otimes he\\ =&h \otimes h - h \otimes h + (-2f) \otimes e - e \otimes (-2f) + (-2e) \otimes f - f \otimes (-2e)\\ =& - 2f \otimes e + 2e \otimes f - 2e \otimes f + 2f \otimes e\\ =&0.\end{aligned}$$

Comme $\Phi : A^2 \times A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$ est K-trilinéaire antisymétrique, le théorème 3.1.2 et la proposition 3.1.3 permettent de conclure que la dupliquée non commutative de cette algèbre est Lie-admissible.

Exemple 3.1.11. L'exemple de L_a^4
Considérons la K-algèbre de Lie résoluble de dimension trois dont la multiplication relative à une base x_1, x_2, x_3 est donnée par : $x_3x_1 = x_2$, $x_3x_2 = ax_1$, $(a \in K)$, les autres produits étant nuls ([20]). On a :

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1, x_2, x_3) =& [x_1, x_2] \otimes x_3 - x_3 \otimes [x_1, x_2] + [x_2, x_3] \otimes x_1 - x_1 \otimes [x_2, x_3] \\
&+ [x_3, x_1] \otimes x_2 - x_2 \otimes [x_3, x_1] \\
=& (-ax_1) \otimes x_1 - x_1 \otimes (-ax_1) + x_2 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_2 \\
=& -ax_1 \otimes x_1 + ax_1 \otimes x_1 \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Comme $\Phi : A^2 \times A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$ est K-trilinéaire antisymétrique, le théorème 3.1.2 et la proposition 3.1.3 permettent de conclure que la dupliquée non commutative de cette algèbre est Lie-admissible.

Remarque 3.1.12. L'hypothèse de non commutativité dans le théorème 3.1.6 entraine que $[(A^2)^-, (A^2)^-] \neq 0$ et donc $1 \leq \dim_K([(A^2)^-, (A^2)^-]) \leq 3$.

3.2 Conséquences de la décomposition de Levy

On suppose ici que K est de caractéristique zéro. Rappelons alors la décomposition de Levy d'une algèbre de Lie.

Proposition 3.2.1. *([26]) Si L est une algèbre de Lie et ∇ est son radical résoluble, alors il existe une sous-algèbre semi-simple $\int$ de L tel que $L = \nabla \oplus \int$.*

Supposons que l'idéal A^2 soit non commutatif et que $(A^2)^-$ soit une K-algèbre de Lie. Nous pouvons alors énoncer :

Proposition 3.2.2. *$(A^2)^- = S_1^- \oplus \cdots \oplus S_s^- \oplus \mathcal{R}$ où les sous-algèbres S_i^- sont simples (s'ils en existent) et $\mathcal{R}$ est le radical résoluble de $(A^2)^-$.*

Démonstration. C'est la décompostion de Levy de l'algèbre de Lie $(A^2)^-$. □

Proposition 3.2.3. *Supposons que $(A^2)^- = \mathcal{R}$ dans la décomposition de Levy de $(A^2)^-$. Alors :*

1) Si $\dim_K(A^2)^- \leq 2$ alors $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible.

2) Si $\dim_K(A^2)^- \geq 3$ alors $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible si seulement si $(A^2)^-$ est isomorphe à L_a^4 (cf exemple 3.1.11).

Démonstration. $(A^2)^- = \mathcal{R}$ est donc résoluble. Si $\dim_K(A^2)^- \leq 2$ alors $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible compte tenu du corollaire 3.1.4. Supposons que $\dim_K(A^2)^- \geq 3$. De la classification de algèbres de Lie résolubles (à isomorphisme près) de W. A. De Graaf ([20]) et celle de J. Patera et H. Zassenhaus ([49]), et par vérification directe, seule la dupliquée non commutative de L_a^4 (cf exemple 3.1.11) est Lie-admissible. □

Proposition 3.2.4. *Si $s \geq 2$ dans la décomposition de Levy de $(A^2)^-$ alors $D_{K,nc}(A)$ n'est pas Lie admissible.*

Démonstration. Comme les S_i sont simples, on a $\dim_K((A^2)^-) \geq 4$ et le théorème 3.1.6 permet de conclure. □

Une vérification directe permet d'avoir les deux propositions suivantes :

Proposition 3.2.5. *Si $s = 1$ dans la décomposition de Levy de $(A^2)^-$ et $\mathcal{R}$ est non nul alors $D_{K,nc}(A)$ n'est pas Lie-admissible.*

Proposition 3.2.6. *Si $s = 1$ dans la décomposition de Levy de $(A^2)^-$ et $\mathcal{R} = \{0\}$ alors $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible si et seulement si $(A^2)^-$ est isomorphe à $sl2$ (cf exemple 3.1.10).*

On peut alors énoncer les corollaires suivants :

Corollaire 3.2.7. *Supposons que l'idéal $(A^2)^-$ soit non commutatif, résoluble et de dimension trois. Alors $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible si et seulement si $A^2 \approx L_a^4$.*

Corollaire 3.2.8. *Si l'idéal A^2 est non commutative et $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible alors* $\dim_K A^2 \leq 3$.

Démonstration. En effet, des remarques ci dessus, si $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible alors dans la décomposition de Levy de $(A^2)^-$, $s \leq 1$ et donc $\dim_K A^2 \leq 3$. □

Comme toute algèbre de Lie est Lie-admissible, le corollaire ci-dessus permet de dire que : *si $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre de Lie alors* $\dim_K A^2 \leq 3$. Un calcul direct permet de dire que seules les algèbres A telles que A^2 soit une zéro-algèbre ont la dupliqée non commutative qui est une algèbre de Lie. Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant.

Corollaire 3.2.9. *$D_{K,nc}(A)$ est une algèbre de Lie si et seulement si A^2 est une zéro-algèbre.*

3.3 Dupliquée non commutative et algèbres à puissances associatives

Rappelons tout d'abord des résultats sur la décomposition de Peirce.

Proposition 3.3.1. *([63]) Soient K un corps commutatif et R une K-algèbre de dimension finie, non nil et à puissances associatives. Alors R possède un idempotent non nul.*

Proposition 3.3.2. *([1]) Si la caractéristique de K est différente de deux et R est une K-algèbre flexible, la décomposition de Peirce de R relative à un idempotent non nul e s'écrit*
$R = R_1 \oplus R_{\frac{1}{2}} \oplus R_0$ où $R_i = \{x \in R, ex = ix = xe\}, i = 0, 1$ et
$R_{\frac{1}{2}} = \{x \in A, ex + xe = x\}$; de plus les $R_i,\ i = 0, \frac{1}{2}, 1$ vérifient les relations suivantes :
1) $R_1R_0 = R_0R_1 = \{0\}$;
2) $R_1R_{\frac{1}{2}} \subseteq R_0 + R_{\frac{1}{2}},\ R_{\frac{1}{2}}R_1 \subseteq R_0 + R_{\frac{1}{2}}$;
3) $R_0R_{\frac{1}{2}} \subseteq R_1 + R_{\frac{1}{2}},\ R_{\frac{1}{2}}R_0 \subseteq R_1 + R_{\frac{1}{2}}$;
4) $R_{\frac{1}{2}}R_{\frac{1}{2}} \subseteq R_0 + R_1$;
5) $R_iR_i \subseteq R_i,\ i = 0, 1$.

Dans tout ce qui suit K est un corps de caractéristique différente de deux, A est une K-algèbre non nécessairement commutative de dimension finie et $D_{K,nc}(A) = A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ est la dupliquée non commutative de A. De plus, nous supposons que $B = A^2$ est non nil, flexible et à puissances associatives et que e est un idempotent non nul de B.

Lemme 3.3.3. *Soit $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ la décomposition de Peirce de B relative à l'idempotent e. Si $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible et B est non commutative alors $\dim_K(B_1) \leq 3$.*

Démonstration. En effet, $B_1 = \{x \in A, ex = x = xe\}$, $B_1 \neq 0$ et $B_1 \subseteq B^2$. D'après le théorème 3.1.6, $\dim_K B^2 \leq 3$ et donc $\dim_K(B_1) \leq \dim_K B^2 \leq 3$. □

Lemme 3.3.4. *Soit $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ la décomposition de Peirce de B relative à l'idempotent e. Si $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible alors la sous-algèbre B_0 est commutative.*

Démonstration. En effet, soit $x_0^1, \cdots, x_0^n$ une base de B_0. Soient $a, b \in B_0$;

écrivons $[a,b] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_0^i$. On a :

$$\begin{aligned} 0 =& \Phi(e,a,b) = [a,b] \otimes e - e \otimes [a,b] \\ =& \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_0^i \otimes e - e \otimes \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_0^i \\ =& \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_0^i \otimes e - e \otimes x_0^i). \end{aligned}$$

Comme les x_0^i sont des vecteurs de bases de B_0, les vecteurs $x_0^i \otimes e - e \otimes x_0^i$ $(i = 1, \cdots, n)$ sont linéairement indépendants dans $D_{K,nc}(A)$, et donc $\alpha_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$. Par conséquent B_0 est une sous-algèbre commutative de B. $\square$

Proposition 3.3.5. *Soit $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ la décomposition de Peirce de B relative à l'idempotent e. Si $\dim_K(B_1) = 3$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admisible.

2) L'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(a) B est commutative;

(b) $B = B_1$ et B possède une base e, e_1, e_2 telle que $[e_1, e_2] \in Ke \setminus \{0\}$.

Démonstration. Supposons que $D_{K,nc}(A)$ soit Lie-admisible et que B ne soit pas commutative.

Si $B_{\frac{1}{2}}$ ou B_0 est non nul alors le corollaire 3.2.7 nous dit que $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ est commutative.

Supposons que $B = B_1$. Soit e, e_1, e_2 une base de B_1. Ecrivons $[e_1, e_2] = x$. On a alors

$$0 = \Phi(e, e_1, e_2) = [e_1, e_2] \otimes e - e \otimes [e_1, e_2] = x \otimes e - e \otimes x$$

et donc $x \otimes e = e \otimes x$. Ceci nous dit que $x \in Ke$ et si x est nul alors B est commutative. Il est ainsi montré que 1) implique 2).

La réciproque se montre par un calcul direct. $\square$

Lemme 3.3.6. *Soit $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ la décomposition de Peirce de B relative à l'idempotent e. Si $\dim_K(B_1) \leq 2$ et $B_{\frac{1}{2}} = 0$ alors $B = B_1 \oplus B_0$ est commutative.*

Démonstration. En effet, B_1 sera trivialement commutative; B_0 est commutative (d'après le lemme 3.3.4) et $B_1 B_0 = \{0\}$ et $B_0 B_1 = \{0\}$. $\square$

Lemme 3.3.7. *Soit $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ la décomposition de Peirce de B relative à l'idempotent e. On suppose que $\dim_K(B_1) = 2$ et que B est non commutative. Si $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible alors $\dim_K(B_{\frac{1}{2}}) \leq 1$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du corollaire 3.2.7. □

Lemme 3.3.8. *Soit $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ la décomposition de Peirce de B relative à l'idempotent e. On suppose que $\dim_K(B_1) = 2$, $\dim_K(B_{\frac{1}{2}}) = 1$. Si $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible alors $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ est commutative.*

Démonstration. En effet, supposons que $D_{K,nc}(A)$ soit Lie-admissible et soient $B_1 =< e, e_1 >, B_{\frac{1}{2}} =< e_2 >$. Si $B_0 = \{0\}$, comme $B_1 B_{\frac{1}{2}} \subseteq B_0 \oplus B_{\frac{1}{2}}$ et $B_{\frac{1}{2}} B_1 \subseteq B_0 \oplus B_{\frac{1}{2}}$, écrivons $[e_1, e_2] = \alpha e_2$ et $[e_2, e] = \beta e_2$. Alors

$$\begin{aligned}
0 =& \Phi(e, e_1, e_2) \\
=& [e, e_1] \otimes e_2 - e_2 \otimes [e, e_1] \\
& + [e_1, e_2] \otimes e - e \otimes [e_1, e_2] + [e_2, e] \otimes e_1 - e_1 \otimes [e_2, e] \\
=& \alpha(e_2 \otimes e - e \otimes e_2) - \beta(e_2 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2).
\end{aligned}$$

Comme les vecteurs $e_2 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2$ et $e_2 \otimes e - e \otimes e_2$ sont linéairement indépendants on a $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
Si $B_0 \neq \{0\}$, en utilisant le corollaire 3.2.8 on déduit que l'algèbre $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ est commutative. □

On déduit des lemmes 3.3.6, 3.3.7 et 3.3.8 le résultat suivant :

Proposition 3.3.9. *Soit $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ la décomposition de Peirce de A relative à l'idempotent e. Si $\dim_K(B_1) = 2$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admisible.
2) B est une sous-algèbre commutative de A.

Lemme 3.3.10. *Soit $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ la décomposition de Peirce de B relative à l'idempotent e. On suppose que $\dim_K(B_1) = 1$ et que B est non commutative. Si $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible alors $\dim_K(B_{\frac{1}{2}}) \leq 2$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du corollaire 3.2.8. □

Proposition 3.3.11. *Soit $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ la décomposition de Peirce de A relative à l'idempotent e.*
Si $\dim_K(B_1) = 1$, les assertions suivantes sont équivalentes :
1) $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admisible.
2) L'une des quatre conditions suivantes est satisfaite :
(a) B est une sous-algèbre commutative de A ;
(b) $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}}$ où $B_1 = Ke, B_{\frac{1}{2}} = Ke_1$ avec $ee_1 = \alpha e_1$, $e_1 e = (1-\alpha)e_1$, $\alpha \in K \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$;
(c) $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}}$ où $B_1 = Ke, B_{\frac{1}{2}} =< e_1, e_2 >$ avec $ee_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$,

$e_1e = (1-\alpha_1)e_1 - \alpha_2e_2, ee_2 = \beta_1e_1 + (1-\alpha_1)e_2, e_2e = -\beta_1e_1 + \alpha_1e_2$ et $[e_1, e_2] \in Ke \setminus \{0\}$;

(d) $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ où $B_1 = Ke, B_{\frac{1}{2}} = Ke_1, B_0 = Ke_2$ avec $[e, e_1] = \alpha_2e_2, [e_1, e_2] \in Ke \setminus \{0\}$.

Démonstration. Montrons que 1) $\Longrightarrow$ 2).
Si $B_{\frac{1}{2}} = 0$, alors $B = B_1 \oplus B_0$ est commutative (Cf lemme 3.3.6)
Si $B_{\frac{1}{2}} \neq 0$, alors B est commutative ou $\dim_K B_{\frac{1}{2}} \leq 2$.
La suite de la démonstration se fera en distinguant les quatre cas suivants : $B_0 = \{0\}$ et $\dim_K B_{\frac{1}{2}} = 1$; $B_0 = \{0\}$ et $\dim_K B_{\frac{1}{2}} = 2$; $B_0 \neq \{0\}$ et $\dim_K B_{\frac{1}{2}} = 1$; $B_0 \neq \{0\}$ et $\dim_K B_{\frac{1}{2}} = 2$.
Cas où $B_0 = \{0\}$ et $B_{\frac{1}{2}} =< e_1 >$.
Comme $e_1e + ee_1 = e_1$ et $B_1B_{\frac{1}{2}} \subseteq B_0 \oplus B_{\frac{1}{2}} = B_{\frac{1}{2}}$, on a $ee_1 = \alpha e_1$ et $e_1e = (1-\alpha)e_1$. $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}}$ sera commutative si $\alpha = \frac{1}{2}$.
Cas où $B_0 = \{0\}$ et $B_{\frac{1}{2}} =< e_1, e_2 >$.
Comme $B_{\frac{1}{2}}B_{\frac{1}{2}} \subseteq B_1 + B_0 = B_1$, on peut écrire $[e_1, e_2] = \alpha e$.
Comme $B_1B_{\frac{1}{2}} \subseteq B_{\frac{1}{2}} + B_0 = B_{\frac{1}{2}}$, la relation $e_1e + ee_1 = e_1$ permet d'écrire $ee_1 = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2$ et $e_1e = (1-\alpha_1)e_1 - \alpha_2e_2$.
De même comme $B_{\frac{1}{2}}B_1 \subseteq B_{\frac{1}{2}} + B_0 = B_{\frac{1}{2}}$, la relation $e_2e + ee_2 = e_2$ permet d'écrire $ee_2 = \beta_1e_1 + \beta_2e_2$ et $e_2e = -\beta_1e_1 + (1-\beta_2)e_2$. Alors la relation $0 = \Phi(e, e_1, e_2)$ permet d'avoir

$$\begin{aligned}
0 =& [e, e_1] \otimes e_2 - e_2 \otimes [e, e_1] + [e_1, e_2] \otimes e - e \otimes [e_1, e_2] \\
&+ [e_2, e] \otimes e_1 - e_1 \otimes [e_2, e] \\
=& ((2\alpha_1 - 1)e_1 + 2\alpha_2e_2) \otimes e_2 - e_2 \otimes ((2\alpha_1 - 1)e_1 + 2\alpha_2e_2) \\
&+ [e_1, e_2] \otimes e - e \otimes [e_1, e_2] + (-2\beta_1e_1 \\
&+ (-2\beta_2 + 1)e_2) \otimes e_1 - e_1 \otimes (-2\beta_1e_1 + (-2\beta_2 + 1)e_2) \\
=& (2\alpha_1 + 2\beta_2 - 2)(e_1 \otimes e_2) + (-2\alpha_1 - 2\beta_2 + 2)(e_2 \otimes e_1) \\
&+ [e_1, e_2] \otimes e - e \otimes [e_1, e_2] \\
=& (2\alpha_1 + 2\beta_2 - 2)(e_1 \otimes e_2) + (-2\alpha_1 - 2\beta_2 + 2)(e_2 \otimes e_1) \\
=& 2(\alpha_1 + \beta_2 - 1)(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1).
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de dire que $\alpha_1 + \beta_2 - 1 = 0$ et $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}}$ est commutative si $[e_1, e_2] = 0,\ \alpha_2 = \beta_1 = 0$ et $\alpha_1 = \frac{1}{2} = \beta_2$.
Cas où $B_0 \neq \{0\}$ et $B_{\frac{1}{2}} =< e_1 >$.
D'après le corollaire 3.2.8, B_0 est engendré par un vecteur e_2.
Comme $[B_1, B_{\frac{1}{2}}] \subseteq B_0 + B_{\frac{1}{2}}$, écrivons $[e, e_1] = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2$. De même, comme $[B_0, B_{\frac{1}{2}}] \subseteq B_1 + B_{\frac{1}{2}}$, écrivons $[e_1, e_2] = \beta_0e + \beta_1e_1$.

La relation $0 = \Phi(e, e_1, e_2)$ permet d'avoir

$$\begin{aligned}
0 =& [e, e_1] \otimes e_2 - e_2 \otimes [e, e_1] + [e_1, e_2] \otimes e - e \otimes [e_1, e_2] \\
& + [e_2, e] \otimes e_1 - e_1 \otimes [e_2, e] \\
=& (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \otimes e_2 - e_2 \otimes (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \\
& + (\beta_0 e + \beta_1 e_1) \otimes e - e \otimes (\beta_0 e + \beta_1 e_1) + 0 \\
=& \alpha_1 (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) + \beta_1 (e_1 \otimes e - e \otimes e_1).
\end{aligned}$$

Ceci nous dit que $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 0$.
Ainsi $[e, e_1] = \alpha_2 e_2$ et $[e_1, e_2] \in Ke$.
Cas où $B_0 \neq \{0\}$ et $B_{\frac{1}{2}} =< e_1, e_2 >$.
Comme $\dim_K(B_1) > 3$, le corollaire 3.2.8 nous dit que $B = B_1 \oplus B_{\frac{1}{2}} \oplus B_0$ est commutative.
Il est donc démontré que l'assertion 1) entraine l'assertion 2).
La réciproque se montre par un calcul direct. $\square$

Chapitre 4

Dupliquée et algèbres non associatives

Dans ce chapitre, des théorèmes de caractérisations sur la dupliquée non commutative et la dupliquée commutative sont donnés ; il est analysé la n-associativité de la dupliquée non commutative et enfin la dimension du morphisme naturel $D^k_{K,nc}(A) \twoheadrightarrow D^k_K(A)$ est calculée.

4.1 Préliminaires

Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro, A une K-algèbre de dimension finie, non nécessairement commutative et $D_{K,nc}(A)$ (repectivement $D_K(A)$) la dupliquée non commutative (la dupiquée commutative) de A.

Il est bien connu que la dupliquée d'une algèbre associative n'est pas associative. Toutefois, la dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A)$ d'une K-algèbre associative A de dimension finie est 4-associative ([10], §2, Théorème 1), c'est-à-dire, son 4-associateur est nul où l'on note $\{a, b, c\} = (ab)c - a(bc)$ le 3-associateur et où les éléments écrits ci-dessus sont dans l'algèbre $D_{K,nc}(A)$.

Rappelons que si A est de dimension finie n, la dupliquée commutative $D_K(A)$ a dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et la dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A)$ a dimension n^2. Il est clair que la commutativité de la K-algèbre $D_K(A)$ est évidente même si l'algèbre A n'est pas commutative alors qu'elle n'est en général pas associative même si l'algèbre A est associative. Toutefois, si A est une K-algèbre associative de dimension finie alors l'algèbre $D_K(A)$ est 4-associative ; la démonstration est analogue à celle donnée pour $D_{K,nc}(A)$).

Si $k \geq 0$ est un nombre entier, la k-ième dupliquée non commutative (respectivement commutative) de la K-algèbre A est la K-algèbre $D^k_{K,nc}(A)$ (respectivement $D^k_K(A)$) définie inductivement par : $D^k_{K,nc}(A) = D_{K,nc}(D^{k-1}_{K,nc}(A))$ (respectivement $D^k_K(A) = D_K(D^{k-1}_K(A))$ pour tout entier $k \geq 0$ où l'on pose $D^0_{K,nc}(A) = A$ (respectivement $D^0_K(A) = A$).

Lemme 4.1.1. *Le foncteur $D_{K,nc}$ (respectivement D_K) est covariant défini dans la catégorie des K-algèbres à valeurs dans celle des K-algèbres (respectivement K-algèbres commutatives) et transforme surjection en surjection.*

Démonstration. Cela résulte de la construction de ces foncteurs. □

Dans [36], paragraphe 7, les auteurs ont montré que *le foncteur D_K n'est pas pleinement fidèle.* Cela résulte du fait que pour deux K-algèbres A et B, le fait que les dupliquées $D_K(A)$ et $D_K(B)$ soient isomorphes n'entraîne nécessairement pas que les K-algèbres A et B soient aussi isomorphes.

Nous allons, par la suite, donner un exemple où les notations $D_{K,nc}(A)$ et $D_K(A)$ s'imposent d'elles mêmes. Si l'on veut, par exemple, démontrer que pour une algèbre réelle l'algèbre complexifiée de la dupliquée est la dupliquée de l'algèbre complexifiée ou encore, que si A est une $\mathbb{R}$-algèbre, il existe des isomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} D_{\mathbb{R},nc}(A) \cong D_{\mathbb{C},nc}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A)$ et $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} D_{\mathbb{R}}(A) \cong D_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A)$, on voit que les notations mentionnées jouent un rôle central. Ces isomorphismes découlent du lemme suivant :

Lemme 4.1.2. *Soient K un corps commutatif et $K \longrightarrow K'$ une extension de corps. Pour toute K-algèbre A, il existe des isomorphismes de K'-algèbres $K' \otimes_K D_{K,nc}(A) \cong D_{K',nc}(K' \otimes_K A)$ et $K' \otimes_K D_K(A) \cong D'_K(K' \otimes_K A)$ induits respectivement par les flèches $1 \otimes (x \otimes y) \longmapsto (1 \otimes x) \otimes (1 \otimes y)$ et $1 \otimes (x \vee y) \longmapsto (1 \otimes x) \vee (1 \otimes y)$ pour x et y parcourant A.*

Rappelons ici que si A est une K-algèbre et $K \longrightarrow K'$ une extension de corps, pour la structure de K'-module de $K' \otimes_K A$ on a $\lambda'(\mu' \otimes x) = \lambda'\mu' \otimes x$ pour λ et μ parcourant K' et x parcourant A et que pour la structure de K'-algèbre de $K' \otimes_K A$, sa table de multiplication s'écrit $(\lambda' \otimes x)(\mu' \otimes y) = \lambda' x \otimes \mu' y$ pour λ' et μ' parcourant K' et x et y parcourant A.

4.2 Algèbres non associatives

Le but de ce paragraphe est de caractériser la dupliquée non commutative d'une algèbre appartenant à certaines classes données d'algèbres. Le théorème suivant nécessite le lemme que voici :

Lemme 4.2.1. *Soient K un corps commutatif, A une K-algèbre de dimension finie et x, y, z des éléments de A tels que $x \otimes y = z \otimes x$ avec $x \neq 0$. Il existe alors une forme linéaire $F : A \longrightarrow K$ telle que $z = y = F(y)x$.*

Démonstration. Soit $e_1, \cdots, e_n$ une base de A sur K et écrivons $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $y = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ et $z = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k e_k$ avec les α_i, β_j et γ_k dans K. La condition $x \otimes y =$

$z \otimes x$ équivaut à $\sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_i \beta_j e_i \otimes e_j = \sum_{1 \le i,k \le n} \alpha_i \gamma_k e_i \otimes e_k$, ou encore, $\alpha_i \beta_j = \alpha_j \gamma_i$ quels que soient i, j dans $\{1, \cdots, n\}$. Puisque $x \neq 0$, il existe un indice i_0 tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$, d'où $\beta_j = \alpha_{i_0}^{-1} \gamma_{i_0} \alpha_j$ et, de même, $\gamma_j = \alpha_{i_0}^{-1} \beta_{i_0} \alpha_j$; ce qui nous dit que $\beta_{i_0} = \gamma_{i_0}$, soit $\beta_j = \gamma_j$ $(j = 1, \cdots, n)$. Ainsi $z = y = F(y)x$, avec $F(y) = \alpha_{i_0}^{-1} \beta_{i_0}$. □

Théorème 4.2.2. *Soient K un corps commutatif, A une K-algèbre et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $D_{K,nc}(A)$ est une K-algèbre associative ;
(ii) $D_{K,nc}(A)$ est une K-algèbre alternative ;
(iii) $D_{K,nc}(A)$ est une K-algèbre flexible ;
(iv) $(A^2)^2 = \{0\}$ ou A^2 est un idéal de dimension un sur K.

Démonstration. Il est évident que $(i) \Longrightarrow (ii)$ et $(ii) \Longrightarrow (iii)$. D'autre part, d'après [12], (Theorem 3.2), $(i) \Longleftrightarrow (iv)$ et d'après [46] (Théorème 1.2), $(ii) \Longleftrightarrow (iv)$. Il suffira donc de montrer que $(iii) \Longrightarrow (iv)$. En effet supposons que la K-algèbre $D_{K,nc}(A)$ soit flexible, c'est-à-dire, que $X(YX) = (XY)X$ quels que soient X et Y dans $D_{K,nc}(A)$. Or, on sait que si $\mu(X) = x$ et $\mu(Y) = y$, alors $XY = x \otimes y$ et donc $(xy) \otimes x = x \otimes (yx)$, soit, il existe une forme K-linéaire F sur A^2 telle que $xy = yx = F(xy)x$. De même, $(yx) \otimes y = y \otimes (xy)$ donc il existe une forme K-linéaire G sur A^2 telle que $xy = yx = G(yx)y$. Cela nous dit que x et y sont colinéaires quels que soient x et y dans A^2 Ainsi, ou bien $(A^2)^2 = \{0\}$ ou bien A^2 est un idéal de dimension un sur K. □

Lemme 4.2.3. *Si la K-algèbre $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre de Lie alors elle est une algèbre de Lie abélienne ou une zéro-algèbre.*

Démonstration. Puisque l'on a $X^2 = 0$ pour tout X dans $D_{K,nc}(A)$ alors $x \otimes x = 0$ avec $\mu(X) = x$, donc $x = 0$ pour tout x dans A^2, c'est-à-dire, $A^2 = 0$. Comme $XY = \mu(X) \otimes \mu(Y)$ pour X et Y parcourant $D_{K,nc}(A)$ et que $\mu = 0$ nécessairement $XY = 0$. □

Ce lemme nous conforte à examiner dans certaines conditions, la Lie admissibilité de la K-algèbre $D_{K,nc}(A)$. Dans [9], G.M. Benkart a étudié les algèbres à puissances associatives qui sont Lie-admissibles. En fait, elle les détermine sous une condition plus faible, à savoir, que ces algèbres vérifient l'identité de la puissance troisième (cf Chapitre 1 paragraphe 1).

Exemple 4.2.4. Nous allons nous servir ici de la notion de S-algèbre due à Irving Kaplansky ([28]), c'est-à-dire, une algèbre où tout sous-espace vectoriel est une sous-algèbre. Les S- algèbres ont été caractérisées par I. Kaplansky et parmi celles-là il y a des T-algèbres et des U-algèbres. On dira qu'une algèbre A est une T-algèbre si elle est engendrée par un idéal M de codimension 1 et un élément e, le tout vérifiant les conditions $M^2 = \{0\}$, $e^2 = (r+s)e$, e multiplie M à gauche par r et à droite par s où r et s sont des scalaires non tous nuls. Et on dira qu'une algèbre A est une U-algèbre si A est engendrée par un idéal N de codimension 2 et des éléments e et f, le tout vérifiant les conditions $N^2 = \{0\}$, $e^2 = e$, $f^2 = f$, $ef = e + f$, $fe = 0$ où e est une unité à gauche et un annulateur à droite pour N et f est une unité à droite et un annulateur à gauche pour N. Il n'est pas trop difficile de montrer que toute T-algèbre (respectivement U-algèbre) est une S-algèbre et réciproquement :

Théorème 4.2.5. *([28], Lemma 2.6) Soit A une S-algèbre de dimension $n \geq 3$ vérifiant $A^2 \neq \{0\}$. Alors A est, soit une T-algèbre, soit une U-algèbre.*

Ce bref et partiel résumé de l'article de I. Kaplansky nous permet, aisément, de donner un exemple d'une algèbre vérifiant l'identité de la puissance troisième qui n'est pas flexible . Ainsi, soit A une U-algèbre et considérons le quotient $A/N =< e, f >$; ce quotient est une algèbre vérifiant l'identité de la puissance troisième mais elle n'est pas flexible.

Supposons donc que la dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A)$ d'une K-algèbre A vérifie l'identité de la puissance troisième, c'est-à-dire, que $X^2X = XX^2$ pour tout X dans $D_{K,nc}(A)$. Si l'on écrit $\mu(X) = x$ alors $x^2 \otimes x = x \otimes x^2$ et d'après le lemme 4.2.1, $x^2 \in Kx$ pour tout x dans A. Cela nous montre que l'idéal $B = A^2$ de A est une S-algèbre. Si, de plus, B est une S-algèbre non commutative de dimension $n \geq 3$ et $B^2 \neq 0$, d'après [28] (Lemma 2.6), B est de l'un des types suivants :
(I) B est une T-algèbre engendrée par un idéal M, de codimension 1, et un élément e où $M^2 = \{0\}$, $e^2 = (r+s)e$, $ev = rv$, $ve = sv$, pour tout $v \in M$ avec $(r, s) \neq (0, 0)$;
(II) B est une U-algèbre engendrée par un idéal N, de codimension 2, et des éléments e et f où $N^2 = \{0\}$, $e^2 = e$, $f^2 = f$, $fe = 0$, $ef = e + f$, $ev = v$, $vf = v$, $ve = fv = 0$ pour tout $v \in N$.

Il est clair que si $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible, alors $B = A^2$ est aussi Lie-admissible. Examinons les deux cas suivants :

1^{er} **cas**. L'algèbre B est du type (I). On a alors $[e, v] = (r-s)v$ pour tout v dans M, les autres produits étant nuls. On vérifie aisément que $D_{K,nc}(A)$ n'est pas Lie-admissible dès que $n \geq 3$. En effet, soient X_1, X_2 et X_3 dans $D_{K,nc}(A)$ et $x_i = \mu(X_i)$ dans $B = A^2$, $i = 1, 2, 3$. On a

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 = x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1$$

et le jacobien s'écrit

$$\mathfrak{J}(X_1, X_2, X_3) = x_1 \otimes [x_2, x_3] + x_2 \otimes [x_3, x_1] + x_3 \otimes [x_1, x_2]$$

Prenons les X_i dans $D_{K,nc}(A)$ tels que $x_1 = e,\ x_2 = v_1,\ x_3 = v_2$ où v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. On a

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(X_1, X_2, X_3) =& e \otimes [v_1, v_2] + v_1 \otimes [v_2, e] + v_2 \otimes [e, v_1]\\ =&(s-r)v_1 \otimes v_2 + (r-s)v_2 \otimes v_1\\ =&(r-s)[v_2 \otimes v_1 - v_1 \otimes v_2]\end{aligned}$$

$\mathfrak{J}(X_1, X_2, X_3)$ est non nul car on a supposé que l'algèbre B est non commutative.

2^{me} **cas** L'algèbre B est du type (II). On a alors $[e, f] = e + f,\ [e, v] = v,\ [f, v] = -v$ pour tout v dans N, les autres produits étant nuls. On vérifie que B est Lie-admissible. Soient X_1, X_2, X_3 dans $D_{K,nc}(A)$ tels que $e = \mu(X_1), f = \mu(X_2), v = \mu(X_3)$. On a

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(X_1, X_2, X_3) =& e \otimes [f, v] + f \otimes [v, e] + v \otimes [e, f]\\ =& - e \otimes v - f \otimes v + v \otimes e + v \otimes f\\ =& v \otimes (e + f) - (e + f) \otimes v\end{aligned}$$

et $\mathfrak{J}(X_1, X_2, X_3)$ est non nul. Donc, si $n \geq 3$ alors $D_{K,nc}(A)$ ne peut être Lie-admissible. Ainsi $dim_K B = 2$ et le théorème suivant s'en suit.

Théorème 4.2.6. *Soient A une K-algèbre de dimension finie et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée. On suppose que l'idéal $B = A^2$ est une algèbre non commutative de dimension n et que $D_{K,nc}(A)$ vérifie l'identité de la puissance troisième. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*
(a) $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible ;
(b) L'idéal $B = A^2$ est isomorphe à l'une des deux algèbres de dimension 2 suivantes :
(i) B_T : $e^2 = (r + s)e,\ ee_1 = re_1,\ e_1e = se_1,\ e_1^2 = 0$, avec $r \neq s$ et $(r, s) \neq (0, 0)$, où $\{e; e_1\}$ en est une base ;
(ii) $B_U : e^2 = e,\ f^2 = f,\ ef = e + f,\ fe = 0$.

En ce qui concerne la dupliquée commutative, on rappelle qu'une K-algèbre commutative A est une algèbre de Jordan si $x^2(yx) = (x^2y)x$, que A est une algèbre 3-Jordan si $x^3(yx) = (x^3y)x$ et que A est une algèbre de pseudo-composition s'il existe une forme K-bilinéaire symétrique $\varphi \neq 0$ telle que $x^3 = \varphi(x, x)x$, tout cela pour x, y parcourant A. Toute algèbre de pseudo-composition est une algèbre 3-Jordan et toute algèbre de Jordan est également 3-Jordan ([23]). Le résultat suivant est bien connu.

Proposition 4.2.7. *([46]) Soient A une K-algèbre et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $D_K(A)$ est une algèbre à puissances associatives ;
(ii) $D_K(A)$ est une algèbre de Jordan ;

(iii) la sous-algèbre A^2 de A est, soit une zéro-algèbre, soit elle vérifie $x^2 = \omega(x)x$ où $\omega : A^2 \longrightarrow K$ est un morphisme d'algèbres ($\omega \neq 0$).

Lemme 4.2.8. *Soient A une K-algèbre et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Alors $D_K(A)$ est une algèbre 3-Jordan si, et seulement si, $(x^3y) \vee x = x^3 \vee (yx)$, pour tous x, y dans A^2.*

Démonstration. Supposons que $D_K(A)$ soit une algèbre 3-Jordan et soient X, Y dans $D_K(A)$. La condition $(X^3Y)X = X^3(YX)$ entraîne $\mu(X^3Y) \vee \mu(X) = \mu(X^3) \vee \mu(YX)$. Ainsi $x^3y \vee x = x^3 \vee yx$ où $x = \mu(X),\ y = \mu(Y)$, car μ est un morphisme d'algèbres. La réciproque vient du fait que le morphisme μ est surjectif. $\square$

Lemme 4.2.9. *Pour une K-algèbre A de dimension finie, les conditions suivantes sont équivalentes pour deux vecteurs x et y dans A :*
(i) $f(x) = 0$ pour tout f dans $A^* = Hom_K(A; K)$ (dual algébrique du K-espace vectoriel A) entraîne $f(y) = 0$ pour tout f dans A^* ;
(ii) les vecteurs x et y sont K-linéairement dépendants.

Démonstration. La condition $(ii) \Longrightarrow (i)$ étant triviale même si l'algèbre A n'est pas de dimension finie, démontrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$. Supposons que les vecteurs x et y soient K-linéairement indépendants et complétons $e_1 = x, e_2 = y$ en une base $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ de A sur K. Notons $e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$ la base duale, base de A^*. Cette base vérifie les conditions $e'i(ej) = \delta_{ij},\ i, j = 1, \cdots, n$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker) et, en particulier, cela nous fournit une forme linéaire e'_2 qui satisfait les conditions $e'_2(x) = 0$ et $e'_2(y) = 1$. $\square$

Théorème 4.2.10. *Soient K un corps commutatif, A une K-algèbre commutative et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $D_K(A)$ est une algèbre 3-Jordan ;
(ii) il existe une fonction homogène $g : A^2 \longrightarrow K$ d'ordre 2 vérifiant la condition $x^3 = g(x)x$ pour tout x dans A^2.

Démonstration. Notons, tout d'abord, que la forme K-bilinéaire symétrique $A^2 \times A^2 \longrightarrow K$ définie par $(x, y) \longmapsto f(x)f(y)$, où f est une forme linéaire sur A^2, induit une unique forme linéaire $F : S^2_K(A^2) \longrightarrow K$ vérifiant $F(\sum_i x_i \vee y_i) = \sum_i f(x_i)f(y_i)$ (sommes finies).

Supposons que $D_K(A)$ soit une algèbre 3-Jordan. D'après le Lemme 4.2.8, $(x^3y) \vee x = x^3 \vee (yx)$ pour tous x, y dans A^2. En particulier, en faisant $y = x^2$, on a $(x^3x^2) \vee x = x^3 \vee x^3$ pour tout x dans A^2. Alors, pour toute forme linéaire f sur A^2 on a $f(x^3)f(x^3) = f(x^3x^2)f(x)$, en appliquant F à la relation ci-dessus. Puisque $f(x) = 0$ implique $f(x^3) = 0$, pour toute forme linéaire f sur

A^2, les vecteurs x et x^3 sont colinéaires, ou encore x^3 est dans Kx, c'est-à-dire, il existe une application $g : A^2 \longrightarrow K$ telle que $x^3 = g(x)x$. Soit α un élément de K. Les égalités $(\alpha x)^3 = g(\alpha x)(\alpha x)$ et $\alpha^3 x^3 = \alpha g(\alpha x)x$ conduisent à $\alpha^3 g(x) = \alpha g(\alpha x)$, soit $\alpha^2 g(x) = g(\alpha x)$, pour tout α dans K et pour tout x dans A^2 tel que $g(x) \neq 0$. L'ensemble de tels x étant dense dans A^2 pour la topologie de Zariski, $g(\alpha x) = \alpha^2 x$ pour tout α dans K et g est une fonction homogène d'ordre 2.

Réciproquement, puisque $g(x)xy \vee x = g(x)x \vee yx$ dans $D_K(A)$, on a $(x^3 y) \vee x = x^3 \vee (yx)$, pour tous x, y dans A^2 et cette relation nous dit que $\mu(X^3 Y) \vee \mu(X) = \mu(X^3) \vee \mu(YX)$, soit $(X^3 Y)X = X^3(YX)$, pour tout X, Y dans $D_K(A)$. Donc $D_K(A)$ est une algèbre 3-Jordan. □

Exemple 4.2.11. Il est évident que toute algèbre de pseudo-composition (voir [23], [33]) d'équation $x^3 = \varphi(x,x)x$, $\varphi \neq 0$ vérifie la condition (ii) du Théorème 4.2.10 avec $g(x) = \varphi(x,x)$ pour tout x.

4.3 Dupliquée et n-associativité

Un anneau A est dit n-associatif, pour tout entier $n \geq 3$, si le n-associateur $\{a_1, \cdots, a_n\}$ s'annule pour tout $a_i \in A$ où

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \{a_1, \cdots, a_k a_{k+1}, \cdots, a_n\},\ n \geq 4$$

et $\{a_1, a_2, a_3\} = (a_1 a_2)a_3 - a_1(a_2 a_3)$. Puisque tout anneau n-associatif est (n+k)-associatif, on introduit la notion de n-associativité stricte. Un anneau A est dit strictement n-associatif si A est n-associatif et il existe un $(n-1)$-associateur non nul. Le n-associateur a les propriétés suivantes (cf. [1] et [18] des papiers de Boers) :

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \sum_{k=2}^{n-1} \{a_1, a_2, \cdots, \{a_{k-1}, a_k, a_{k+1}\}, \cdots, a_n\},\ n \geq 4$$

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{2n}\} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \{a_1, \cdots, a_{2n-2k-1}\}\{a_{2n-2k}, \cdots, a_{2n}\},\ n \geq 2;$$

$$\begin{aligned}\{a_1, a_2, \cdots, a_{2n}\} = &\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [\{a_1, \cdots, a_{2n-2k}\}\{a_{2n-2k+1}, \cdots, a_{2n+1}\} \\ &- \{a_1, \cdots, a_{2n-2k-1}\}\{a_{2n-2k}, \cdots, a_{2n+1}\}],\ n \geq 1.\end{aligned}$$

Dans [12] (Theorem 6.3), l'auteur a montré qu'*une algèbre strictement n-associative A ($n \geq 3$) a une dupliquée $D_{K,nc}(A)$ strictement K-associative où*

k est un entier vérifiant $3 \leq k \leq 2n-1$ quand n est pair et $3 \leq k \leq 2n-2$ quand n est impair. Nous donnons ici la valeur exacte de k.

Dans ce paragraphe on suppose que $dim_K A^2 = m \geq 2$. Pour les premières valeurs de n, on a les propositions suivantes :

Proposition 4.3.1. *La dupliquée $D_{K,nc}(A)$ est strictement 4-associative si, et seulement si, l'algèbre A^2 est associative et n'est pas une zéro-algèbre.*

Ce résultat découle du Théorème 4.2.2.

Proposition 4.3.2. *En caractéristique différente de 2 et 3, il n'existe pas d'algèbre dont la dupliquée $D_{K,nc}(A)$ soit strictement 5 ou 6-associative.*

Démonstration. Puisque toute algèbre 5-associative est 6-associative, supposons que $D_{K,nc}(A)$ soit 6-associative. Alors $D_{K,nc}(A)$ est 10-associative et on a

$$\begin{aligned}0 =&\{X_1, \cdots, X_{10}\}\\ =&\binom{5-1}{2}\{X_1, \cdots, X_5\}\{X_6, \cdots, X_{10}\}\\ =&6\{x_1, \cdots, x_5\} \otimes \{x_6, \cdots, x_{10}\}\end{aligned}$$

en particulier, $\{x_1, \cdots, x_5\} \otimes \{x_1, \cdots, x_5\} = 0$, soit $\{x_1, \cdots, x_5\} = 0$ quels que soient x_i dans A^2. Donc A^2 est 5-associative et $\{X_1, \cdots, X_5\}$ est dans $N_{D_{K,nc}}(A)$. On a aussi $0 = \{X_1, \cdots, X_6\} = 2\{X_1, X_2, X_3\}\{X_4, X_5, X_6\} = 2\{x_1, x_2, x_3\}\otimes\{x_4, x_5, x_6\}$ et par suite $\{x_1, x_2, x_3\} = 0$. Ainsi A^2 est 3-associative. Dans ce cas $D_{K,nc}(A)$ est en fait 4-associative. □

Théorème 4.3.3. *Soient K un corps commutatif de caractéristique nulle, A une algèbre et $n = 2p \geq 3$ un entier pair. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) la dupliquée $D_{K,nc}(A)$ est strictement $(2n-1)$-associative ;
(ii) la sous-algèbre A^2 de A est strictement n-associative.

Démonstration. Montrons $(ii) \Longrightarrow (i)$: On sait que si A^2 est n-associative, alors $D_{K,nc}(A)$ est $(2n-1)$-associative. Puisque $\{x_1, \cdots, x_n\} = 0$ dans A^2 entraîne $\{X_1, \cdots, X_n\} \subseteq N_{K,nc}(A)$ et on a

$$\begin{aligned}\{X_1, \cdots, X_{2n-2}\} =&\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\{X_1, \cdots, X_{2n-2k-3}\}\{X_{2n-2k-2}, \cdots, X_{2n-2}\}\\ =&\binom{n-2}{p-1}\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}\{X_n, \cdots, X_{2n-2}\}\\ =&\binom{n-2}{p-1}\{x_1, \cdots, x_{n-1}\} \otimes \{x_n, \cdots, x_{2n-2}\} :\end{aligned}$$

Ainsi, si A^2 est strictement n-associative, $\{x_1, \cdots, x_{n-1}\} \neq 0$ et $D_{K,nc}(A)$ est strictement $(2n-1)$-associative.

Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons que $D_{K,nc}(A)$ soit $(4p-1)$-associative. Alors $D_{K,nc}(A)$ est m-associative, pour tout $m \geq n = 4p-1$. On a

$$\begin{aligned}
0 =& \{X_1, \cdots, X_{2(n-2)}\} \\
=& \binom{n-3}{2p-2}\{X_1, \cdots, X_{n-2}\}\{X_{n-1}, \cdots, X_{2(n-2)}\} \\
=& \binom{n-3}{2p-2}\{x_1, \cdots, x_{n-2}\} \otimes \{x_{n-1}, \cdots, x_{2(n-2)}\};
\end{aligned}$$

par suite $\{x_1, \cdots, x_{n-2}\} = 0$, c'est-à-dire, A^2 est $(n-2)$-associative. De proche en proche, on a

$$0 = \{X_1, \cdots, X_{2(n-2l)}\} = \binom{n-2-1}{2p-l-1}\{x_1, \cdots, x_{n-2l}\} \otimes \{x_{n-2l+1}, \cdots, x_{2(n-2l)}\}.$$

Ce qui implique que $\{x_1, \cdots, x_{n-2l}\} = 0$, donc A^2 est $(n-2l)$-associative où l'entier l est tel que $2(n-2l) \geq n$, ou encore $l \leq p-1$. Alors $\{x_1, \cdots, x_{2p+1}\} = 0$, c'est-à-dire, A^2 est $(2p+1)$-associative. Enfin,

$$\begin{aligned}
0 =& \{X_1, \cdots, X_{4p-1}\} \\
=& \binom{2p-2}{p-l}[\{X_1, \cdots, X_{2p}\}\{X_{2p+1}, \cdots, X_{4p-1}\} \\
& - \{X_1 \cdots, X_{2p-1}\}\{X_{2p}, \cdots, X_{4p-1}\}] \\
=& \binom{2p-2}{p-l}\{x_1, \cdots, x_{2p}\} \otimes \{x_{2p+1}, \cdots, x_{4p-1}\} \\
& - \{x_1, \cdots, x_{2p-1}\} \otimes \{x_{2p}, \cdots, x_{4p-1}\} :
\end{aligned}$$

Donc $\{x_1, \cdots, x_{2p}\} \otimes \{x_{2p+1}, \cdots, x_{4p-1}\} = \{x_1, \cdots, x_{2p-1}\} \otimes \{x_{2p}, \cdots, x_{4p-1}\}$ quels que soient les x_i dans A^2. En particulier,

$$\{x_1, \cdots, x_{2p}\} \otimes \{x_1, \cdots, x_{2p-1}\} = \{x_1, \cdots, x_{2p-1}\} \otimes \{x_{2p}, x_1, \cdots, x_{2p-1}\}$$

et par suite

$$\{x_1, \cdots, x_{2p}\} = \{x_{2p}, x_1, \cdots, x_{2p-1}\} = \lambda\{x_1, \cdots, x_{2p-1}\};$$

(voir Lemme 4.2.1) où $\lambda = \lambda(x_1, \cdots, x_{2p})$ est dans K. Ainsi A^2 est, soit strictement $(2p)$-associative, soit strictement $(2p+1)$-associative vérifiant, dans ce dernier cas, $\{x_1, \cdots, x_{2p}\} = \{x_{2p}, x_1, \cdots, x_{2p-1}\} = \lambda\{x_1, \cdots, x_{2p-1}\}$, pour tout x_i dans A^2. $\square$

Théorème 4.3.4. *Soient K un corps commutatif de caractéristique nulle, A une algèbre et $n = 2p + 1 \geq 3$ un entier impair. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) la sous-algèbre A^2 est strictement n-associative ;
(b) la dupliquée vérifie l'une des deux conditions ci-dessous :
(i) $D_{K,nc}(A)$ est strictement $(2n-2)$-associative ;
(ii) $D_{K,nc}(A)$ est strictement $(2n-3)$-associative et A^2 vérifie $\{x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}\} = \lambda\{x_1, \cdots, x_{n-2}\}$, $(\lambda \in K)$.

Démonstration. Montrons $(a) \Longrightarrow (b)$: On sait que si A^2 est n-associative, alors $D_{K,nc}(A)$ est $(2n-2)$-associative. Puisque $\{x_1, \cdots, x_n\} = 0$ dans A^2, alors $\{X_1, \cdots, X_n\} \subseteq N_{K,nc}(A)$ et on a

$$\begin{aligned}\{X_1, \cdots, X_{2n-3}\} =& \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} [\{X_1, \cdots, X_{2n-2k-4}\}\{X_{2n-2k-3}, \cdots, X_{2n-3}\} \\ & - \{X_1, \cdots, X_{2n-2k-5}\}\{X_{2n-2k-4}, \cdots, X_{2n-3}\}] \\ =& \binom{n-3}{p-1} \{x_1, \cdots, x_{n-1}\} \otimes \{x_n, \cdots, x_{2n-3}\} \\ & - \{x_1, \cdots, x_{n-2}\} \otimes \{x_{n-1}, \cdots, x_{2n-3}\}.\end{aligned}$$

Ainsi, si $D_{K,nc}(A)$ est strictement $(2n-2)$-associative, c'est fini. Sinon $D_{K,nc}(A)$ est strictement $(2n-3)$-associative et on a

$$\{x_1, \cdots, x_{n-1}\} \otimes \{x_n, \cdots, x_{2n-3}\} = \{x_1, \cdots, x_{n-2}\} \otimes \{x_{n-1}, \cdots, x_{2n-3}\}$$

et, en particulier,

$$\{x_1, \cdots, x_{n-1}\} = \{x_{n-1}, x_1, \cdots, x_{n-2}\} = \lambda\{x_1, \cdots, x_{n-2}\}$$

et aussi

$$\{x_{n-1}, \cdots, x_{2n-3}\}g = \{x_n, \cdots, x_{2n-3}\}.$$

Montrons $(b) \Longrightarrow (a)$: Supposons que $D_{K,nc}(A)$ est $4p$-associative. Alors $D_{K,nc}(A)$ est m-associative, pour tout $m \geq n = 4p$. On a

$$\begin{aligned}0 =& \{X_1, \cdots, X_{2(n-1)}\} \\ =& \binom{n-2}{2p-1} \{X_1, \cdots, X_{n-1}\}\{X_n, \cdots, X_{2(n-1)}\} \\ =& \binom{n-2}{2p-1} \{x_1, \cdots, x_{n-1}\} \otimes \{x_n, \cdots, x_{2(n-1)}\};\end{aligned}$$

par suite $\{x_1, \cdots, x_{n-1}\} = 0$, c'est-à-dire, A^2 est $(n-1)$-associative. De proche en proche, on a

$$\begin{aligned}0 =&\{X_1, \cdots, X_{2(n-(2l+1))}\}\\ =&\binom{n-2(l+1)}{2p-(l+1)}\{x_1, \cdots, x_{n-(2l+1)}\} \otimes \{x_{n-2l}, \cdots, x_{2(n-(2l+1))}\},\end{aligned}$$

qui implique que $\{x_1, \cdots, x_{n-(2l+1)}\} = 0$, donc A^2 est $(n-(2l+1))$-associative où l'entier l est tel que $2(n-(2l+1)) \geq n$, ou encore $l \leq p-1$. Alors $\{x_1, \cdots, x_{2p+1}\} = 0$, d'où A^2 résulte être $(2p+1)$-associative. Enfin

$$\begin{aligned}\{X_1, \cdots, X_{4p-1}\} =&\binom{2p-2}{p-1}[\{X_1, \cdots, X_{2p}\}\{X_{2p+1}, \cdots, X_{4p-1}\}\\ &- \{X_1, \cdots, X_{2p-1}\}\{X_{2p}, \cdots, X_{4p-1}\}]\\ =&\binom{2p-2}{p-1}\{x_1, \cdots, x_{2p}\} \otimes x_{2p+1}, \cdots, x_{4p-1}\}\\ &- \{x_1, \cdots, x_{2p-1}\} \otimes \{x_{2p}, \cdots, x_{4p-1}\}].\end{aligned}$$

Si $D_{K,nc}(A)$ est strictement $4p$-associative, A^2 est aussi strictement $(2p+1)$-associative. Sinon

$$\{x_1, \cdots, x_{2p}\} = \{x_{2p}, x_1, \cdots, x_{2p-1}\} = \{x_1, \cdots, x_{2p-1}\},$$

où $\mu = \mu(x_1, \cdots, x_{2p}) \in K$, et $D_{K,nc}(A)$ est strictement $(4p-1)$-associative. $\square$

Corollaire 4.3.5. *Si la dupliquée $D_{K,nc}(A)$ est strictement 7-associative, alors l'algèbre A^2 vérifie l'une des deux conditions suivantes :*
(i) A^2 est strictement 4-associative ;
(ii) A^2 est strictement 5-associative satisfaisant $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \mu\{x_1, x_2, x_3\}$ $(\mu \in K)$.

Le second cas est illustré par l'exemple suivant :

Exemple 4.3.6. ([12], Exemple (e)) Soit A une K-algèbre de dimension 2 dont la table de multiplication dans la base a, b est donnée par
$a^2 = a + b,\ ab = b,\ ba = b^2 = 0$. Si $p = (p_1, p_2),\ q = (q_1, q_2),\ r = (r_1, r_2),\ s = (s_1, s_2),\ t = (t_1, t_2)$ sont des éléments de A, alors $\{p, q, r\} = (0, -p_1q_1r_1)$ et $\{p, q, r, s\} = (0, -p_1q_1r_1s_1) = s_1\{p, q, r\}$. Par conséquent $A = A^2$ n'est pas 4-associative. Mais A est 5-associative, donc A est strictement 5-associative. Tout 5-associateur dans $D_{K,nc}(A)$ est du type $\mu b \otimes b$ et par conséquent chaque 7-associateur est nul dans $D_{K,nc}(A)$.
Comme $\{a \otimes a, a \otimes a, a \otimes a, a \otimes a, a \otimes a, a \otimes a\} = 2(b \otimes b) \neq 0$, $D_{K,nc}(A)$ n'est pas 6-associative. En conséquence $D_{K,nc}(A)$ est strictement 7-associative.

4.4 Sur le noyau de $D^k_{K,nc}(A) \twoheadrightarrow D^k_K(A)$

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre. Par récurrence sur k, on voit que le morphisme naturel $D^k_{K,nc}(A) \twoheadrightarrow D^k_K(A)$ est surjectif et nous nous interrogions sur la taille du noyau que nous noterons $I^k_K(A)$ pour tout entier $k \geq 1$.

Théorème 4.4.1. *Soit A une K-algèbre de dimension finie n. Il existe alors un polynôme $Q_k(n)$ de degré $2^k - 1$ en la variable n dont les coefficients sont des nombres entiers et tel que $dim_K(I^k_K(A)) = \frac{1}{2^{2^k-1}} nQ_k(n)$ pour tout entier $k \geq 1$.*

Démonstration. On peut écrire $D^k_K(A) \approx D^k_{K,nc}(A))/I^k_K(A)$, isomorphisme de K-algèbres, donc $dim_K(I^k_K(A)) = dim_K(D^k_{K,nc}(A)) - dim_K(D^k_K(A))$. D'autre part, on sait qu'il existe un polynôme $P_k(n)$ en la variable n dont les coefficients sont des entiers positifs de degré $2k - 2$ tel que $dim_K(D^k_K(A)) = \frac{1}{2^{2^k-1}} n(n+1)P_k(n)$ pour tout entier $k \geq 1$ (cf. [48], theorem 3.2.4). La formule d'induction qui donne les polynômes $P_k(n)$ s'écrit $P_{k+1}(n) = P_k(n)\left(n(n+1)P_k(n) + 2^{2^k-1}\right)$ pour tout entier $k \geq 1$ où les premières valeurs des $P_k(n)$ sont les suivantes :

$P_1(n) = 1$ de degré $2^1 - 2 = 0$,
$P_2(n) = n^2 + n + 2$ de degré $2^2 - 2 = 2$,
$P_3(n) = P_2(n)(n^2 - n + 2)(n^2 + 3n + 4)$ de degré $2^3 - 2 = 6$
$P_4(n) = P_3(n)(n(n+1)P_3(n) + 128)$ de degré $2^4 - 2 = 14$.

On peut donc écrire

$$dim_K(I^k_K(A)) = n^{2^k} - \frac{1}{2^{2^k-1}} n(n+1)P_k(n)$$

ou encore,

$$dim_K(I^k_K(A)) = \frac{1}{2^{2^k-1}} n\left((2n)^{2^k-1} - (n+1)P_k(n)\right).$$

Si l'on pose $Q_k(n) = (2n)^{2^k-1} - (n+1)P_k(n)$, on a la formule annoncée. Les premières valeurs des polynômes $Q_k(n)$ sont les suivantes :

$Q_1(n) = n - 1$ de degré $2^1 - 1 = 1$,
$Q_2(n) = 7n^3 - 2n^2 - 3n - 2$ de degré $2^2 - 1 = 3$,
$Q^3(n) = (2n)^7 - (n+1)P_3(n)$ de degré $2^3 - 1 = 7$,
$Q^4(n) = (2n)^15 - (n+1)P_4(n)$ de degré $2^4 - 1 = 15$,

La formule d'induction qui donne les polynômes $Q_k(n)$ s'écrit

$$Q_{k+1}(n) = (2n)^{2^{k+1}-1} - n\left((2n)^{2^k-1} - Q_k(n)\right)^2 - 2^{2^k-1}\left((2n)^{2^k-1}Q_k(n)\right).$$

En fait, à partir de la formule $Q_k(n) = (2n)^{2^k-1} - (n+1)P_k(n)$, on a

$$Q_{k+1}(n) = (2n)^{2^{k+1}-1} - (n+1)P_{k+1}(n)$$

et il suffit de remplacer $P_{k+1}(n)$ donné par sa formule d'induction pour obtenir la formule ci-dessus pour $Q_{k+1}(n)$. $\square$

Exemple 4.4.2. Pour $k = 1$ et pour la dimension n de A, on a :
$dim_K(I_K^1(A)) = \frac{1}{2}nQ_1(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$.
Pour $k = 2$ et pour la dimension n de A on a :
$dim_K(I_K^2(A)) = \frac{1}{8}nQ_2(n) = \frac{1}{8}n(7n^3 - 2n^2 - 3n - 2)$.
Si l'on veut prolonger la formule

$$dim_K(I^k K(A)) = \frac{1}{2^{2^k-1}} nQ_k(n)$$

pour $k = 0$, il faudrait écrire $Q_0(n) = 0$ donc $Q_0(n) = 1 - (n+1)P_0(n) = 0$, mais alors $P_0(n) = \frac{1}{n+1}$ ne serait plus un polynôme.

Chapitre 5

Dupliquée et algèbres n-Leibniz

Soient K un corps commutatif, A une K-algèbre non nécessairement commutative de dimension finie et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Dans un premier temps nous caractérisons les algèbres dont la dupliquée non commutative est de Leibniz ; puis, après avoir démontré que si $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre de Leibniz d'ordre n et si A^2 est associative alors $(A^2)^{2n-2} = \{0\}$ et $(D_{K,nc}(A))^{2n-1} = \{0\}$, nous donnons une caractérisation de la sous-algèbre A^2 de A dans le cas où $D_{K,nc}(A)$ est Leibniz-admissible.

5.1 Dupliquée et algèbres de Leibniz

Dans ce paragraphe $D_{K,nc}(A) = A \otimes A$, où la multiplication est donnée par $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y'$, pour tous x, y, x', y' parcourant A.

Rappelons que $D_{K,nc}(A)$ est une K-algèbre de Leibniz si

$$(XZ)Y = (XY)Z - X(YZ) \quad \text{pour tous } X, Y, Z \text{ dans } D_{K,nc}(A).$$

Lemme 5.1.1. *Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre. Si $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre de Leibniz alors, soit $A^2 = \{0\}$, soit $y^2 = 0$ pour tout y dans A^2.*

Démonstration. Supposons que $D_{K,nc}(A)$ soit une algèbre de Leibniz. Alors $XY^2 = 0$ pour tous X, Y dans $D_{K,nc}(A)$ (proposition 1.4.2) et d'après le lemme 2.3.12 on a : $\mu(X) \otimes \mu(Y^2) = 0$. Si $\mu(X) = 0$ pour tout X dans $D_{K,nc}(A)$ alors $\mu = 0$ et par suite $A^2 = \mu(D_{K,nc}(A)) = \{0\}$. S'il existe un élément X dans $D_{K,nc}(A)$ tel que $\mu(X)$ soit non nul alors $\mu(Y^2) = 0$ pour tout Y dans $D_{K,nc}(A)$ et comme μ est surjective, $y^2 = 0$ quel que soit y dans A^2. $\square$

Théorème 5.1.2. *La dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A)$ de A est une algèbre de Leibniz si et seulement si A^2 est une zéro-algèbre.*

Démonstration. Supposons que $D_{K,nc}(A)$ soit une algèbre de Leibniz. Alors $XY^2 = 0$ quels que soient X et Y dans $D_{K,nc}(A)$ et donc $\mu(X) \otimes \mu(Y^2) = 0$. Alors, soit $\mu(X) = 0$ pour tout X dans $D_{K,nc}(A)$ et alors $A^2 = \{0\}$, soit $0 = \mu(Y^2)$ et donc Y^2 est dans $ker(\mu) = N_{D_{nc}}(A)$ pour tout Y dans $D_{K,nc}(A)$. Dans ce dernier cas, en faisant $Z = X$ dans la relation $(XZ)Y = (XY)Z - X(YZ)$, on obtient $0 = (XY)X - X(YX)$ pour tout X et Y dans $D_{K,nc}(A)$, c'est-à-dire, $D_{K,nc}(A)$ est flexible ; le théorème 4.2.2 nous dit alors que A^2 est de dimension un ou que A^2 est une zéro-algèbre. Mais si A^2 est de dimension un engendré par e alors, d'après le lemme 5.1.1, $e^2 = 0$ et alors A^2 est une zéro-algèbre. Réciproquement, si A^2 est une zéro-algèbre alors $(XZ)Y = \mu(XZ) \otimes Y = \mu(X)\mu(Y) \otimes Y = 0 \otimes Y = 0$ et de même $(XY)Z = X(YZ) = 0$. Par suite $(XZ)Y = (XY)Z - X(YZ) = 0$ pour tous X, Y, Z dans $D_{K,nc}(A)$ qui est alors une algèbre de Leibniz. □

Corollaire 5.1.3. *Si $D_{K,nc}(A)$ est de Leibniz alors $(D_{K,nc}(A))^3 = \{0\}$.*

Démonstration. En effet, d'après le théorème ci-dessus, si $D_{K,nc}(A)$ est de Leibniz alors $(A^2)^2 = \{0\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\{0\} = (A^2)^2 &\Longrightarrow \{0\} = (\mu(D_{K,nc}(A)))^2 \\
&\Longrightarrow \{0\} = (\mu((D_{K,nc}(A))^2)) \\
&\Longrightarrow (D_{K,nc}(A))^2 \in \ker(\mu) \\
&\Longrightarrow (D_{K,nc}(A))^3 = \{0\}.
\end{aligned}$$

□

5.2 Dupliquée non commutative et algèbres de Leibniz d'ordre n

5.2.1 Rappels

Dans cette partie, on suppose que K est un corps de caractéristique zéro.

Définition 5.2.1. Soit A un espace vectoriel muni d'une opération n-linéaire $\omega : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}} \longrightarrow A$. On dit qu'une application $f : A \longrightarrow A$ est une dérivation par rapport à ω si

$$f(\omega(a_1, \cdots, a_n)) = \sum_{j=1}^{n} \omega(a_1, \cdots, a_{j-1}, f(a_j), a_{j+1}, \cdots, a_n).$$

Notons par $\mathfrak{Der}_\omega$ l'ensemble de toutes les dérivations par rapport à ω.
On a les résultats suivants :

Proposition 5.2.2. *[15] 1) Le sous-ensemble $\mathfrak{Der}_\omega$ de l'algèbre $End(A)$ des endomorphismes de A est une algèbre de Lie.*

2) Si $f \in \mathfrak{Der}_\omega$ et $f \in \mathfrak{Der}_\sigma$ alors $f \in \mathfrak{Der}_{\omega+\sigma}$ où σ est aussi une opération n-linéaire de $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\ facteurs}$ dans A.

Proposition 5.2.3. *[15] Soit $A \times A \longrightarrow A, (x, y) \longmapsto xy$ une opération bilinéaire et $\omega : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\ facteurs} \longrightarrow A$ l'opération définie par*

$$\omega(x_1, \cdots, x_n) = x_1(x_2(\cdots(x_{n-1}x_n)\cdots))$$

Si $f : A \longrightarrow A$ est une dérivation par rapport à (,) alors f est une dérivation par rapport à ω.

Définition 5.2.4. [15] Une algèbre de Leibniz d'ordre n ou une n-algèbre de Leibniz est un espace vectoriel A muni d'une opération n-linéaire $[\ ,\cdots,\ ] : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\ facteurs} \longrightarrow A$ telle que pour tous $x_1, \cdots, x_{n-1}$, l'application $adj(x_1, \cdots, x_{n-1})$ définie de A dans A par

$$adj(x_1, \cdots, x_{n-1})(x) = [x, x_1, \cdots, x_{n-1}]$$

est une dérivation par rapport à $[\ ,\cdots,\ ]$. En d'autres termes, A est une n-algèbre de Leibniz si la *n-identité de Leibniz* suivante est satisfaite :

(n$-IL$) $[[x_1, \cdots, x_{n-1}], y_1, \cdots, y_{n-1}]$

$$= \sum_{i=1}^{n} [x_1, \cdots, y_{i-1}, [x_i, y_1, \cdots, y_{n-1}], x_{i+1}, \cdots, x_n]$$

Remarque 5.2.5. [15] Une algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz vérifiant la condition $x^2 = 0$. De façon similaire, une n-algèbre de Lie est une n-algèbre de Leibniz vérifiant la condition

$$[x_1, \cdots, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n] = 0 \quad \text{dès que } x_j = x_{j+1}.$$

Si $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre de Lie, alors $A^2 = \{0\}$ (corollaire 3.2.9) ; donc $(A^2)^n = \{0\}$ et $(D_{K,nc}(A))^{n+1} = \{0\}$, $n \geq 2$.

Le corollaire 5.1.3 suggère de chercher des conclusions analogues pour les algèbres de Leibniz d'ordre n (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2).

Dans toute la suite, nous considérons des algèbres dont la multiplication est $(x, y) \mapsto xy$ et conformément à la définition 5.2.4, on pose

$$(RF) \qquad [x, y, z] = x(yz).$$

5.2.2 Dupliquée non commutative et algèbres de Leibniz d'ordre 3

Soit A une algèbre de Leibniz d'ordre 3
On a une application trilinéaire $[\ ,\ ,\ ]$ de $A \times A \times A$ dans A telle que

$$\begin{aligned}[[x_1,x_2,x_3],y_1,y_2] =& [[x_1,y_1,y_2],x_2,x_3] + [x_1,[x_2,y_1,y_2],x_3] \\ &+ [x_1,x_2,[x_3,y_1,y_2]].\end{aligned}$$

Faisant $x_2 = y_1, x_3 = y_2$ dans la relation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}[[x_1,y_1,y_2],y_1,y_2] =& [[x_1,y_1,y_2],y_1,y_2] + [x_1,[y_1,y_1,y_2],y_2] \\ &+ [x_1,y_1,[y_2,y_1,y_2]].\end{aligned}$$

Par suite

$$0 = [x_1,[y_1,y_1,y_2],y_2] + [x_1,y_1,[y_2,y_1,y_2]],$$

c'est-à-dire,

$$0 = x_1((y_1(y_1y_2))y_2) + x_1(y_1(y_2(y_1y_2)).$$

Proposition 5.2.6. *Si A est à puissances associative, alors $xy^4 = 0$ pour tous x, y dans A.*

Démonstration. En effet, du calcul ci-dessus, on a

$$0 = x_1((y_1(y_1y_2))y_2) + x_1(y_1(y_2(y_1y_2))$$

pour tous x_1, y_1, y_2 dans A. Posant $x = x_1, y_1 = y_2 = y$ et si A est à puissances associatives, on obtient $0 = 2xy^4$. D'où la proposition. $\square$

Proposition 5.2.7. *Si $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre de Leibniz d'ordre 3 et si A^2 est associative alors $(A^2)^4 = \{0\}$ et $(D_{K,nc}(A))^5 = \{0\}$.*

Démonstration. Soit une K-algèbre A telle que $D_{K,nc}(A)$ soit une K-algèbre de Leibniz d'ordre 3. Alors pour tout X_1, Y_1, Y_2 dans $D_{K,nc}(A)$, on a :

$$\begin{aligned}0 =& [X_1,[Y_1,Y_1,Y_2],Y_2] + [X_1,Y_1,[Y_2,Y_1,Y_2]] \\ =& X_1([Y_1,Y_1,Y_2]Y_2) + X_1(Y_1[Y_2,Y_1,Y_2]).\end{aligned}$$

Compte tenu du lemme 2.3.12, on obtient

$$\mu(X_1) \otimes \mu(([Y_1,Y_1,Y_2]Y_2) + Y_1[Y_2,Y_1,Y_2]) = 0.$$

Pour $\mu(X_1) \neq 0$, on obtient :

$$\mu([Y_1,Y_1,Y_2]Y_2] + Y_1[Y_2,Y_1,Y_2]) = 0.$$

Comme

$$[Y_1, Y_1, Y_2]Y_2 + Y_1[Y_2, Y_1, Y_2] = (Y_1(Y_1Y_2))Y_2 + Y_1(Y_2(Y_1Y_2));$$

on a :

$$\begin{aligned} 0 =& \mu((Y_1(Y_1Y_2))Y_2 + Y_1(Y_2(Y_1Y_2))) \\ =& (\mu(Y_1)(\mu(Y_1)\mu(Y_2)))\mu(Y_2) + \mu(Y_1)(\mu(Y_2)(\mu(Y_1)\mu(Y_2))). \end{aligned}$$

Comme μ est surjective, pour tous x, y dans A^2, on obtient :

$$0 = (x(xy))y + x(y(xy)).$$

Supposant A^2 associative et posant $x = y$, on obtient que pour tout x dans A^2, $2x^4 = 0$ et donc tout élément de A^2 est 4-nilpotent.
Soit I la sous algèbre de A^2 engendré par les éléments 4-nilpotents de A^2.
Étant en dimension finie et A^2 étant associative, I est une sous-algèbre nilpotente d'indice de nilpotence égale à 4 (cf [60] page 65). Comme tout élément de A^2 est 4-nilpotent, alors $I = A^2$. Par suite A^2 est 4-nilpotent.
La suite de la démonstration est analogue à celle du corollaire 5.1.3. □

5.2.3 Dupliquée non commutative et algèbres de Leibniz d'ordre n

Théorème 5.2.8. *Soit A une algèbre de Leibniz d'ordre n.
Si A est à puissances associatives, alors $xy^{2n-2} = 0$ pour tous x, y dans A.*

Démonstration. On a une application n-linéaire $[\ ,\cdots,\ ]$ de $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\ facteurs}$ dans A telle que
(n$-IL$) $[[x_1, \cdots, x_{n-1}], y_1, \cdots, y_{n-1}]$

$$= \sum_{i=1}^{n} [x_1, \cdots, y_{i-1}, [x_i, y_1, \cdots, y_{n-1}], x_{i+1}, \cdots, x_n]$$

Ayant posé $[x, y, z] = x(yz)$ (cf relation (RF) de Rappels 5.2.1), on note que pour $n \geq 4$ on a :

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n] = x_1[x_2, \cdots, x_n].$$

Posons $x_i = y_{i-1}, i \geq 2$.
La relation (n-IL) devient :
$[[x_1, y_1, \cdots, y_{n-1}], y_1, \cdots, y_{n-1}] = [[x_1, y_1, \cdots, y_{n-1}], y_1, \cdots, y_{n-1}]$

$$+ \sum_{i=2}^{n} [x_1, y_1, \cdots, y_{i-1}, [y_{i-1}, y_1, \cdots, y_{n-1}], y_i, \cdots, y_{n-1}]$$

et donc

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{j=2}^{n}[x_1, y_1, \cdots, y_{j-1}, [y_{j-1}, y_1, \cdots, y_{n-1}], y_j, \cdots, y_{n-1}] \\ &= \sum_{j=2}^{n} x_1[y_1, \cdots, y_{j-1}, [y_{j-1}, y_1, \cdots, y_{n-1}], y_j, \cdots, y_{n-1}]\end{aligned}$$

Si A est à puissances associatives, en posant $y_j = y, 1 \leq j \leq n-1$, on obtient

$$(n-2)x_1 y^{2n-2} = 0$$

Donc $x_1 y^{2n-2} = 0$.
Les cas $n = 2$ et $n = 3$ ont été vus plus haut. □

Proposition 5.2.9. *Si $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre de Leibniz d'ordre n et si A^2 est associative alors $(A^2)^{2n-2} = \{0\}$ et $(D_{K,nc}(A))^{2n-1} = \{0\}$.*

Démonstration. Dans $D_{K,nc}(A)$ et compte tenu du lemme 2.3.12, on obtient :

$$0 = \mu(x_1) \otimes \mu(\sum_{j=2}^{n}[y_1, \cdots, y_{j-1}, [y_{j-1}, y_1, \cdots, y_{n-1}], y_j, \cdots, y_{n-1}])$$

Pour $\mu(x_1) \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}0 =&\mu(\sum_{j=2}^{n}[y_1, \cdots, y_{j-1}, [y_{j-1}, y_1, \cdots, y_{n-1}], y_j, \cdots, y_{n-1}]) \\ =&\mu(\sum_{j=2}^{n}[\mu(y_1) \cdots, \mu(y_{j-1}), [\mu(y_{j-1}), \mu(y_1), \cdots, \mu(y_{n-1})], \mu(y_j), \cdots, \mu(y_{n-1})]).\end{aligned}$$

Supposant A^2 associative et posant $y_1 = \cdots = y_{n-1} = y$, on obtient pour tout y dans $D_{K,nc}(A)$:

$$(n-2)(\mu(y))^{2n-2} = 0.$$

Comme μ est surjective , pour tout x dans A^2, on a

$$(n-2)x^{2n-2} = 0$$

et comme la caractéristique de K est zéro alors tout élément de A^2 est $(2n-2)$-nilpotent. La suite de la démonstration est analogue à celle du corollaire 5.1.3 □

5.3 Dupliquée non commutative et Leibniz-admissibilité

Définition 5.3.1. On dit qu'une K-algèbre A est Leibniz-admissible si A^- est une K-algèbre de Leibniz.

Ainsi la dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A)$ d'une K-algèbre A est Leibniz-admissible si $D_{K,nc}(A)^-$ une K-algèbre de Leibniz.

On a le résultat suivant.

Théorème 5.3.2. *([56]) $D_{K,nc}(A)^- \cong (A^2)^- \underset{\varphi^-}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ où*

$$\varphi^-(x,y) = \varphi(x,y) - \varphi(y,x).$$

La remarque suivante est une traduction de la proposition 2.3.11.

Remarque 5.3.3. La dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A)$ d'une K-algèbre A est Leibniz-admissible si et seulement si A^2 est Leibniz-admissible et $\Phi_L(x,y,z) = 0$ pour tous x,y,z dans A^2 où

$$\Phi_L(x,y,z) = \varphi^-([x,z],y) - \varphi^-([x,y],z) + \varphi^-(x,[y,z]).$$

Lemme 5.3.4. *Si A^2 est Leibniz-admissible alors*

$$\begin{aligned}\Phi_L(x,y,z) =& [x,z]\otimes y - y\otimes[x,z] - [x,y]\otimes z\\ &+ z\otimes[x,y] + x\otimes[y,z] - [y,z]\otimes x\end{aligned}$$

pour tous x,y,z dans A^2.

Démonstration. Soient $(x,m),(y,n),(z,p)$ des éléments de $D_{K,nc}(A)$. On a

$$\begin{aligned}\Phi_L(x,y,z) =& \varphi^-([x,z],y) - \varphi^-([x,y],z) + \varphi^-(x,[y,z])\\ =& \varphi([x,z],y) - \varphi(y,[x,z]) - \varphi([x,y],z) + \varphi(z,[x,y])\\ &+ \varphi(x,[y,z]) - \varphi([y,z],x)\\ =& \eta([x,z])\eta(y) - \eta([x,z]y) - \eta(y)\eta([x,z]) + \eta(y[x,z])\\ &- \eta([x,y])\eta(z) + \eta([x,y]z) + \eta(z)\eta([x,y]) - \eta(z[x,y])\\ &+ \eta(x)\eta([y,z]) - \eta(x[y,z]) - \eta([y,z])\eta(x) + \eta([y,z]x)\end{aligned}$$

Utilisant le lemme 2.3.12, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi_L(x,y,z) =& [x,z]\otimes y - y\otimes[x,z] - [x,y]\otimes z + z\otimes[x,y]\\ &+ x\otimes[y,z]) - [y,z]\otimes x\\ &+\eta(-[x,z]y + y[x,z]) + \eta([x,y]z - z[x,y])\\ &\eta(-x[y,z]) + [y,z]x)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\Phi_L(x,y,z) =& [x,z]\otimes y - y\otimes [x,z] - [x,y]\otimes z + z\otimes [x,y] \\ & + x\otimes [y,z]) - [y,z]\otimes x \\ & +\eta(-[[x,z],y])) + \eta([[x,y],z]) + \eta(-[x,[y,z]]) \\ =& [x,z]\otimes y - y\otimes [x,z] - [x,y]\otimes z + z\otimes [x,y] \\ & + x\otimes [y,z]) - [y,z]\otimes x \\ & + \eta(-[x,z]y + y[x,z] + [x,y]z - z[x,y] - x[y,z]) + [y,z]x) \\ =& [x,z]\otimes y - y\otimes [x,z] - [x,y]\otimes z + z\otimes [x,y] \\ & + x\otimes [y,z]) - [y,z]\otimes x + \eta(0)\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\Phi_L(x,y,z) =& [x,z]\otimes y - y\otimes [x,z] - [x,y]\otimes z + z\otimes [x,y] \\ & + x\otimes [y,z]) - [y,z]\otimes x\end{aligned}$$

□

Remarque 5.3.5. Soient A une K-algèbre et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Il est immédiat que si A^2 est une zéro-algèbre alors $D_{nc(A)}$ est Leibniz-admissible. De même, si A^2 est commutative et Leibniz-admissible, alors $D_{nc(A)}$ est Leibniz-admissible.

Théorème 5.3.6. *Soit A une K-algèbre et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Si $D_{K,nc}(A)$ est Leibniz-admissible et A^2 n'est pas commutative alors $dim_K(A^2)^2 \leq 2$.*

Démonstration. Supposons que l'idéal A^2 soit non commutatif et que $\dim_K((A^2)^2) \geq 3$. Tout vecteur de $(A^2)^2$ étant une somme finie de produits finis de vecteurs de A^2 et comme $\dim_K(A^2)^2 \geq 3$, il existe une base $x_1, \cdots, x_r$ de A^2 telle qu'au moins trois des produits x_ix_j, $i,j = 1,\cdots,r$ soient linéairement indépendants ; de plus, comme A^2 est non commutatif, au moins un des produits x_ix_j vérifie $x_ix_j \neq x_jx_i$. Soient alors $e_1 = x_ix_j, e_2 = x_kx_l, e_3 = x_mx_n$ des vecteurs linéairement indépendants de $(A^2)^2$ avec $x_ix_j \neq x_jx_i$ où les $x_i, x_j, x_k, x_l, x_m, x_n, x_p, x_q$ sont dans $\{x_1,\cdots,x_r\}$. De la définition des vecteurs e_i, $i = 1,2,3$, il vient qu'au moins un des entiers k,l,m,n est distinct de i et de j. Supposons par exemple que $k \notin \{i,j\}$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi_L(x_i,x_j,x_k) =&[x_i,x_k]\otimes x_j - x_j\otimes[x_i,x_k]-[x_i,x_j]\otimes x_k\\ &+x_k\otimes[x_i,x_j]+x_i\otimes[x_j,x_k]-[x_j,x_k]\otimes x_i\\ =&[x_i,x_k]\otimes x_j - x_j\otimes[x_i,x_k]-(e_1-x_jx_i)\otimes x_k\\ &+x_k\otimes(e_1-x_jx_i)+x_i\otimes[x_j,x_k]-[x_j,x_k]\otimes x_i\\ =&(x_k\otimes e_1-e_1\otimes x_k)\\ &+(x_jx_i\otimes x_k-x_k\otimes x_jx_i)\\ &+([x_i,x_k]\otimes x_j-x_j\otimes[x_i,x_k])\\ &+(x_i\otimes[x_j,x_k]-[x_j,x_k]\otimes x_i).\end{aligned}$$

Si $x_jx_i=\alpha e_1$, $\alpha\neq 1$ alors

$$\begin{aligned}\Phi_L(x_i,x_j,x_k) =&(1-\alpha)(x_k\otimes e_1-e_1\otimes x_k)\\ &+([x_i,x_k]\otimes x_j-x_j\otimes[x_i,x_k])\\ &+(x_i\otimes[x_j,x_k]-[x_j,x_k]\otimes x_i).\end{aligned}$$

Le vecteur $x_k\otimes e_1-e_1\otimes x_k$ est non nul et, du choix de i,j et k, il est linéairement indépendant avec les vecteurs $[x_i,x_k]\otimes x_j-x_j\otimes[x_i,x_k]$ et $x_i\otimes[x_j,x_k]-[x_j,x_k]\otimes x_i$. Par suite $\Phi_L(x_i,x_j,x_k)$ est non nul et $D_{K,nc}(A)$ n'est pas Leibniz-admissible. Si x_jx_i et e_1 sont linéairement indépendants, alors

$$\begin{aligned}\Phi_L(x_i,x_j,x_k) =&(x_k\otimes e_1-e_1\otimes x_k)\\ &+(x_jx_i\otimes x_k-x_k\otimes x_jx_i)\\ &+([x_i,x_k]\otimes x_j-x_j\otimes[x_i,x_k])\\ &+(x_i\otimes[x_j,x_k]-[x_j,x_k]\otimes x_i).\end{aligned}$$

Utilisant des arguments analogues aux précédents on conclut que $\Phi_L(x_i,x_j,x_k)$ est non nul et $D_{K,nc}(A)$ n'est pas Leibniz-admissible. □

Proposition 5.3.7. *Soit A une K-algèbre et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative telle que A^2 soit Leibniz-admissible. Si $dim_K(A^2)\leq 2$ alors $D_{K,nc}(A)$ est Leibniz-admissible.*

Démonstration. Ceci vient du fait que $\Phi_L : A^2\times A^2\times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$, $(x,y,z)\longmapsto \Phi_L(x,y,z)$ est K-trilinéaire alternée. □

Théorème 5.3.8. *Soit A une K-algèbre et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Si A^2 est Leibniz-admissible et $dim_K A^2\geq 3$ alors les assertions suivantes ont équivalentes.*

1) $D_{K,nc}(A)$ est Leibniz-admissible.

2) A^2 est commutative.

Démonstration. Analysons le cas où $D_{K,nc}(A)$ est Leibniz-admissible, $\dim_K(A^2) \geq 3$ et $\dim_K((A^2)^2) = 1$. Soient $e_0, e_1, \cdots e_n$ une base de A^2 où e_0 est un vecteur non nul de $(A^2)^2$. Pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, écrivons $e_ie_j = \alpha_{ij}e_0$; alors on a :

$$\begin{aligned}\Phi_L(e_0, e_j, e_k) =&[e_0, e_k] \otimes e_j - e_j \otimes [e_0, e_k] - [e_0, e_j] \otimes e_k + e_k \otimes [e_0, e_j]\\ &+ e_0 \otimes [e_j, e_k] - [e_j, e_k] \otimes e_0\\ =&\alpha_{0k}e_0 \otimes e_j - \alpha_{0k}e_j \otimes e_0 - \alpha_{0j}e_0 \otimes e_k + \alpha_{0j}e_k \otimes e_0\\ &+ \alpha_{jk}e_0 \otimes e_0 - \alpha_{jk}e_0 \otimes e_0\\ =&\alpha_{0k}e_0 \otimes e_j - \alpha_{0k}e_j \otimes e_0 - \alpha_{0j}e_0 \otimes e_k + \alpha_{0j}e_k \otimes e_0.\end{aligned}$$

La relation $\Phi_L(e_0, e_j, e_k) = 0$ conduit à $\alpha_{0j} = \alpha_{0k} = 0$.
Pour tous $j, k, l \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\begin{aligned}\Phi_L(e_j, e_k, e_l) =&[e_j, e_l] \otimes e_k - e_k \otimes [e_j, e_l] - [e_j, e_k] \otimes e_l + e_l \otimes [e_j, e_k]\\ &+ e_j \otimes [e_k, e_l] - [e_k, e_l] \otimes e_j\\ =&\alpha_{jl}e_0 \otimes e_k - \alpha_{jl}e_k \otimes e_0 - \alpha_{jk}e_0 \otimes e_l + \alpha_{jk}e_l \otimes e_0\\ &+ \alpha_{kl}e_j \otimes e_0 - \alpha_{kl}e_0 \otimes e_j.\end{aligned}$$

La relation $\Phi_L(e_j, e_k, e_l) = 0$ conduit à $\alpha_{jk} = \alpha_{jl} = \alpha_{kl} = 0$.
Si $D_{K,nc}(A)$ est Leibniz-admissible, $\dim_K(A^2) \geq 3$ et $\dim_K((A^2)^2) = 2$, en raisonnant de façon analogue au cas précédent, on conclut que A^2 est commutative. Ainsi l'assertion 1) implique l'assertion 2). La réciproque vient de la remarque 5.3.5. □

Corollaire 5.3.9. *Soit A une K-algèbre et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Si A^2 est Leibniz-admissible alors les assertions suivantes ont équivalentes.*

1) $D_{K,nc}(A)$ est Leibniz-admissible.

2) L'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

(a) $\dim_K(A^2) \leq 2$

(b) $\dim_K(A^2) \geq 3$ *et A^2 est commutative.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 5.3.6, de la proposition 5.3.7 et du théorème 5.3.8. □

Chapitre 6

Dupliquée et superalgèbres

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de dupliquée non commutative d'une superalgèbre. Quelques résultats sont donnés dans le cas des superalgèbres de Lie et dans le cas des superalgèbres de Leibniz.

Dans tout ce qui suit, K est un corps commutatif de caratéristique différente de deux.

6.1 Espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués ; superalgèbres

6.1.1 Espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués

Les notions ci-dessous sont essentiellement tirées de [27]

Définition 6.1.1. Un *K-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué* A est la donnée d'un couple (A_0, A_1) de K-espaces vectoriels tels que $A = A_0 \oplus A_1$

Définition 6.1.2. Dans un espace vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradué $A = A_0 \oplus A_1$, les éléments de A_0 sont appelés *éléments homogènes de degré* 0 ; les éléments de A_1 sont appelés *éléments homogènes de degré* 1, on note $\bar{x}$ *le dégré* d'un élément homogène x de $A_0 \cup A_1$.

Remarque 6.1.3. Soient $A = A_0 \oplus A_1$ et $B = B_0 \oplus B_1$ deux K-espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués. Alors :

1) $B \subseteq A \Longleftrightarrow B_0 \subseteq A_0$ et $B_1 \subseteq A_1$.

2) $A \oplus B$ est un K-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué et $(A \oplus B)_i = A_i \oplus B_i, i \in \mathbb{Z}_2$.

3) $A \otimes B$ est un K-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué et
$(A \otimes B)_0 = (A_0 \otimes B_0) \oplus (A_1 \otimes B_1),\ (A \otimes B)_1 = (A_0 \otimes B_1) \oplus (A_1 \otimes B_0)$.

Définitions 6.1.4. *Une application K-linéaire f de $A = A_0 \oplus A_1$ dans $B = B_0 \oplus B_1$ est dite de degré k si $f(A_i) = B_{i+k}$, $i + k$ étant calculé modulo 2. Une application K-linéaire $\mathbb{Z}_2$-graduée f de $A = A_0 \oplus A_1$ dans $B = B_0 \oplus B_1$ est* *un couple d'applications linéaires* (f_0, f_1) *où* $f_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ *et* $f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$. *Une application* K*-linéaire* $\mathbb{Z}_2$*-graduée est de degré* 0.

6.1.2 Superalgèbre

Définition 6.1.5. [27] Une *K-algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée* ou *K-superalgèbre* est un K-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué A muni d'une multiplication telle que $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$, $i + j$ étant calculé modulo 2.

Définition 6.1.6. [27] Soient $A = A_0 \oplus A_1$ et $B = B_0 \oplus B_1$ deux K-superalgèbres. Un morphisme de K-superalgèbres f de A dans B est une application K-linéaire $\mathbb{Z}_2$-graduée f telle que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x, y dans A.

6.1.3 Quelques superalgèbres à patronyme

Nous rappelons les définitions de superalgèbre de Lie et de superalgèbre de Leibniz

Superalgèbres de Lie

Définitions 6.1.7. *[27] Soit* $A = A_0 \oplus A_1$ *une* K*-superalgèbre.*
On définit l'application K*-trilinéaire* $\tilde{\mathfrak{J}}$ *de* $A \times A \times A$ *dans* A *par*

$$\tilde{\mathfrak{J}}(x, y, z) = (xy)z - x(yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y.$$

$\tilde{\mathfrak{J}}$ *est appelé* super-jacobien *de* A.

Définition 6.1.8. ([27]) Une K-superalgèbre $A = A_0 \oplus A_1$ est une superalgèbre de Lie si et seulement si pour tous x, y, z dans $A_0 \cup A_1$,

$$xy = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}}yx$$

et

$$\tilde{\mathfrak{J}}(x, y, z) = 0.$$

Il est immédiat qu'une algèbre de Lie est une superalgèbre de Lie.

Rappelons que : *si* $A = A_0 \oplus A_1$ *est une superalgèbre de Lie alors* A_0 *est une algèbre de Lie et* A_1 *est un* A_0*-bimodule de Lie.*

On note également que : *si* $A = A_0 \oplus A_1$ *est une superalgèbre telle que* A_0 *soit une algèbre de Lie et* A_1 *soit un* A_0*-bimodule de Lie, en posant* $(A_1)^2 = \{0\}$ *alors* $A = A_0 \oplus A_1$ *est une superalgèbre de Lie.*

Superalgèbres de Leibniz

Définition 6.1.9. ([24]) Une K-superalgèbre $A = A_0 \oplus A_1$ est une superalgèbre de Leibniz si et seulement si $\tilde{\mathfrak{L}}(x, y, z) = 0$ pour tous x, y, z dans $A_0 \cup A_1$ où $\tilde{\mathfrak{L}}(x, y, z) = (-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y - (xy)z + x(yz)$.

Il est clair qu'une algèbre de Leibniz est une superalgèbre de Leibniz.

Comme pour les superalgèbres de Lie on peut dire que : *si $A = A_0 \oplus A_1$ est une superalgèbre de Leibniz alors A_0 est une algèbre de Leibniz et A_1 est une A_0-bimodule de Leibniz.*

On peut également dire que : *si $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre telle que A_0 soit une algèbre de Leibniz et A_1 soit une A_0-bimodule de Leibniz, en posant $(A_1)^2 = \{0\}$ alors $A = A_0 \otimes A_1$ est une superalgèbre de Leibniz.*

Proposition 6.1.10. *Si $A = A_0 \oplus A_1$ est une K-superalgèbre de Leibniz alors pour tous x, y, z dans $A_0 \cup A_1$*

1) $x(yz) = -(-1)^{\bar{y}\bar{z}}x(zy)$,

2) $x^2z = (-1)^{\bar{x}\bar{z}}(xz)x + x(xz)$.

Démonstration. Une comparaison des relations $\tilde{\mathfrak{L}}(x, y, z) = 0$ et $\tilde{\mathfrak{L}}(x, z, y) = 0$ donne la première relation. Faisant $x = y$ dans la relation $\tilde{\mathfrak{L}}(x, y, z) = 0$, on obtient la deuxième relation. □

Proposition 6.1.11. *Si $A = A_0 \oplus A_1$ est une K-superalgèbre de Leibniz alors :*

1) $xy^2 = 0$ pour tout x dans $A_0 \cup A_1$ et pour tout y dans A_0 ;

2) $xy^2 = 2(xy)y$ pour tout x dans $A_0 \cup A_1$ et pour tout y dans A_1.

Démonstration. Faisant $y = z$ et $y \in A_0$ dans la relation $\tilde{\mathfrak{L}}(x, y, z) = 0$, on obtient la première relation. Faisant $y = z$ et $y \in A_1$ dans la relation $\tilde{\mathfrak{L}}(x, y, z) = 0$, on obtient la deuxième relation. □

6.2 Dupliquée et superalgèbres

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre. La dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A)$ de A est le K-espace vectoriel $A \otimes A$ muni de la multiplication donnée par $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y'$ pour tous x, y, x', y' dans A.

Soit $\mu : D_{K,nc}(A) \longrightarrow A^2, X \otimes Y \longmapsto XY$. Soient $X = x_0 + x_1, Y = y_0 + y_1, X' = x'_0 + x'_1, Y' = y'_0 + y'_1$ dans A. On a

$$\begin{aligned}\mu((X \otimes Y)(X' \otimes Y')) =& \mu((XY) \otimes (X'Y')) \\ =& (XY)(X'Y') \\ =& \mu(X \otimes Y)\mu(X' \otimes Y')\end{aligned}$$

par suite μ est un morphisme d'algèbres.

De la remarque 6.1.3, en posant

$$D_0 = A_0 \otimes A_0 \oplus A_1 \otimes A_1$$

et

$$D_1 = A_0 \otimes A_1 \oplus A_1 \otimes A_0,$$

$D_{K,nc}(A) = D_0 \oplus D_1$ est $\mathbb{Z}_2$-graduée.

D'autre part, en posant

$$(A^2)_0 = A_0A_0 + A_1A_1$$

et

$$(A^2)_1 = A_0A_1 + A_1A_0,$$

l'idéal $A^2 = (A^2)_0 \oplus (A^2)_1$ de A est naturellement $\mathbb{Z}_2$-graduée.

Soit $x \otimes y$ un élément homogène de $D_{K,nc}(A) = A \otimes A$; puisque $\overline{\mu(x \otimes x)} = \overline{xy}$, on est conduit à poser :

Définition 6.2.1. Pour tout x et y dans $A_0 \cup A_1$, $\overline{x \otimes y} = \bar{x} + \bar{y}$.

On a alors le résultat suivant.

Proposition 6.2.2. *$\mu : D_{K,nc}(A) \longrightarrow A^2, x \otimes y \longmapsto xy$ est un morphisme de K-algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées.*

Nous pouvons alors dire que le théorème (d'Etherington) 2.3.2 est valable pour la dupliquée non commutative d'une superalgèbre.

Corollaire 6.2.3. *Soit $D_{K,nc}(A) = A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{nc}}(A)$ la dupliquée non commutative d'une superalgèbre A. Pour tout $X = (x, m)$ on a $\bar{X} = \bar{x}$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 6.2.2 et du théorème d'Etherington. □

6.3 Dupliquée et superalgèbres de Lie

Théorème 6.3.1. *$D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*
1) A^2 est une superalgèbre de Lie ;
2) $\varphi(x, y) = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\varphi(y, x)$ pour tous x, y dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$;
3) $\varphi(xy, z) - \varphi(x, yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz, y) = 0$ pour tous x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$.

Démonstration. Soient $X = (x, m)$, $Y = (y, n)$, $Z = (z, p)$ des éléments de $D_0 \cup D_1$. On a :

$$XY = (xy, \varphi(x, y))$$

et

$$YX = (yx, \varphi(y, x));$$

la relation $XY = -(-1)^{\bar{X}\bar{Y}} YX$ conduit à

$$xy = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}} yx$$

et

$$\varphi(x, y) = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}} \varphi(y, x).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{J}}(X, Y, Z) =&(XY)Z - X(YZ) - (-1)^{\bar{Y}\bar{Z}}(XZ)Y \\ =&((xy)z, \varphi(xy, z) - (x(yz), \varphi(x, yz)) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}((xz)y, \varphi(xz, y))) \\ =&((xy)z - x(yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y), \varphi(xy, z) - \varphi(x, yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz, y)).\end{aligned}$$

La relation $\tilde{\mathfrak{J}}(X, Y, Z) = 0$ conduit alors à

$$(xy)z - x(yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y) = 0$$

et

$$\varphi(xy, z) - \varphi(x, yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}} \varphi(xz, y) = 0.$$

Ainsi $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie si et seulement si les quatres conditions suivantes sont vérifiées :
(i) $xy = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}} yx$ pour tous x, y dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$,
(ii) $\varphi(x, y) = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}} \varphi(y, x)$ pour tous x, y dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$,
(iii) $\mathfrak{J}(x, y, z) = (xy)z - x(yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y) = 0$ pour tous x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$,
(iv) $\varphi(xy, z) - \varphi(x, yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}]} \varphi(xz, y) = 0$ pour tous x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$; c'est-à-dire
A^2 est une superalgèbre de Lie,
$\varphi(x, y) = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}} \varphi(y, x)$ pour tous x, y dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$ et
$\varphi(xy, z) - \varphi(x, yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}} \varphi(xz, y) = 0$ pour tous x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$. □

Corollaire 6.3.2. *Si $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie alors $\varphi(x, x) = 0$ pour tout x dans $(A^2)_0$.*

Démonstration. En effet, on a aura :

$$\begin{aligned}\varphi(x, x) =& - (-1)^{\bar{x}\bar{x}} \varphi(x, x) \\ =& - (-1)^0 \varphi(x, x) \\ =& - \varphi(x, x)\end{aligned}$$

et comme la caractéristique du corps est différente de deux, alors $\varphi(x, x) = 0$.
□

Proposition 6.3.3. *Si $A^2 = (A^2)_0 \oplus (A^2)_1$ est une superalgèbre de Lie alors pour tous x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$ on a :*

$$\varphi(xy, z) - \varphi(x, yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz, y) = xy \otimes z - x \otimes yz - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}xz \otimes y.$$

Démonstration. Soient x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$; on a (cf lemme 2.3.13) :

$$\begin{aligned}
\varphi(xy, z) - \varphi(x, yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz, y) =& \eta(xy)\eta(z) - \eta((xy)z) \\
& - \eta(x)\eta(yz) + \eta(x(yz)) \\
& - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\eta(xz)\eta(y) + (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\eta((xz)y) \\
=& \eta(xy)\eta(z) - \eta(x)\eta(yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\eta(xz)\eta(y) \\
& - \eta((xy)z - x(yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y)) \\
=& \eta(xy)\eta(z) - \eta(x)\eta(yz) \\
& - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\eta(xz)\eta(y) - \eta(0) \\
=& xy \otimes z - x \otimes yz - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}xz \otimes y.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On notera $\Phi_{LiS}(x, y, z) = xy \otimes z - x \otimes yz - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}xz \otimes y$.

On a la remarque immédiate suivante.

Remarque 6.3.4. Si A est une zéro-superalgèbre, alors $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie.

Exemple 6.3.5. Considérons l'algèbre $A = A_0 \oplus A_1$ où $A_0 =< e_1, e_2 >$, $A_1 =< e_3 >$ et la table de multiplication relative à la base e_1, e_2, e_3 est donnée par : $e_1e_2 = -e_2e_1 = e_1$, les autres produits étant nuls. A est une superalgèbre de Lie. Comme $A^2 =< e_1 >$ est une zéro-superalgèbre alors $\varphi(xy, z) - \varphi(x, yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz, y) = 0$ pour tous x, y, z dans A^2. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1, e_1) =& \eta(e_1)\eta(e_1) - \eta(e_1e_1) \\
=& \eta(e_1)\eta(e_1) \\
=& e_1 \otimes e_1;
\end{aligned}$$

ainsi e_1 est dans $(A^2)_0 =< e_1 >$ mais $\varphi(e_1, e_1)$ est non nul. Par suite, d'après le corollaire 6.3.2, $D_{K,nc}(A)$ n'est pas une superalgèbre de Lie.

Proposition 6.3.6. *Si $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie alors A^2 est une zéro-superalgèbre.*

Démonstration. Soient u, x des vecteurs non nuls (éventuels) de $(A^2)_0$ et y, z des vecteurs non nuls (éventuels) de $(A^2)_1$.

$$\begin{aligned}
\Phi_{LiS}(x, y, y) =& xy \otimes y - x \otimes y^2 - (-1)^{\bar{y}\bar{y}}xy \otimes y \\
=& xy \otimes y - x \otimes y^2 + xy \otimes y \\
=& 2xy \otimes y - x \otimes y^2.
\end{aligned}$$

Comme x est dans $(A^2)_0$ et $2xy$ est dans $(A^2)_1$, la relation $\Phi_{LiS}(x,y,y) = 0$ nous dit que $2xy = 0$ et $y^2 = 0$. Comme la caractéristique du corps est différente de deux, alors $xy = 0$ et donc $(A^2)_0(A^2)_1 = \{0\}$; de même la relation $\Phi_{LiS}(y,x,x) = 0$ permet d'avoir $(A^2)_1(A^2)_0 = \{0\}$.

$$\begin{aligned}\Phi_{LiS}(u,x,y) =& ux \otimes y - u \otimes xy - (-1)^{\bar{x}\bar{y}} uy \otimes x \\ =& ux \otimes y - u \otimes xy - uy \otimes x.\end{aligned}$$

De ce qui précède, on a $\Phi_{LiS}(u,x,y) = ux \otimes y$. La relation $\Phi_{LiS}(u,x,y) = 0$ conduit à $ux = 0$; par suite $(A^2)_0(A^2)_0 = \{0\}$.
Les relations $\Phi_{LiS}(x,y,z) = 0$, $(A^2)_1(A^2)_0 = \{0\}$ et $(A^2)_0(A^2)_1 = \{0\}$ permettent de dire que $(A^2)_1(A^2)_1 = \{0\}$. D'où la proposition. □

Lemme 6.3.7. *Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre de Lie. Si $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie alors* $\dim_K(A^2)_1 \leq 1$.

Démonstration. Supposons que $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie. Alors d'après la proposition 6.3.6, A_0 est une zéro-superalgèbre et $(A_1)^2 = \{0\}$. Supposons que $\dim_K(A^2) \geq 2$ et soient e_1 et e_2 deux vecteurs linéairement indépendants de A^2. Ces deux vecteurs proviennent de $A_0A_1 + A_1A_0$ et donc sont dans $(A^2)_1$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(e_1,e_2) =& \eta(e_1)\eta(e_2) - \eta(e_1e_2) \\ =& \eta(e_1)\eta(e_2) - \eta(0) \\ =& e_1 \otimes e_2.\end{aligned}$$

et

$$\varphi(e_2,e_1) = e_2 \otimes e_1.$$

Comme les deux vecteurs e_1 et e_2 sont linéairement indépendants alors les vecteurs $\varphi(e_1,e_2) = e_1 \otimes e_2$ et $\varphi(e_2,e_1) = e_2 \otimes e_1$ sont linéairement indépendants ; ceci est contraire à la condition 2) du théorème 6.3.1. □

Exemple 6.3.8. Considérons l'algèbre $A = A_0 \oplus A_1$ où $A_0 =< e_1, e_2 >$, $A_1 =< e_3 >$ et la table de multiplication relative à la base e_1, e_2, e_3 est donnée par : $e_1e_3 = e_3e_1 = e_3$, les autres produits étants nuls. A est une superalgèbre de Lie. Comme $A^2 =< e_3 >$ est une zéro-superalgèbre alors $\varphi(xy,z) - \varphi(x,yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz,y) = 0$ pour tous x,y,z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$. On a $\varphi(e_3,e_3) = e_3 \otimes e_3$ et $\varphi(e_i,e_j) = 0$ pour tous les autres cas où i et j parcourent $\{1,2,3\}$. Par suite $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie.

Théorème 6.3.9. *Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre de Lie. $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) A_0 est une zéro-superalgèbre ;
2) $(A_1)^2 = \{0\}$;
3) $\dim_K(A^2)_1 \leq 1$.

Démonstration. Si $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Lie alors les conditions 1), 2) et 3) sont satisfaites d'après la proposition 6.3.6. Réciproquement, si les conditions 1), 2) et 3) sont satisfaites alors A^2 est une zéro-superalgèbre et $\varphi(xy,z) - \varphi(x,yz) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz,y) = 0$ pour tous x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$; il reste à vérifier que $\varphi(x,y) = -(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\varphi(y,x)$ pour tous x, y dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$. Soient e un éventuel vecteur non nul de $(A^2)_1$, $x = \alpha e$ et $y = \beta e$; on a :

$$\begin{aligned} -(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\varphi(y,x) =& - (-1)^{1\times 1}\varphi(\beta e, \alpha e) \\ =&\varphi(\beta e, \alpha e) \\ =&\alpha\beta\varphi(e,e) \\ =&\varphi(\alpha e, \beta e) \\ =&\varphi(x,y). \end{aligned}$$

D'où le théorème. □

6.4 Dupliquée et superalgèbres de Leibniz

Théorème 6.4.1. *$D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Leibniz si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*
1) A^2 est une superalgèbre de Leibniz ;
2) $(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz,y) - \varphi(xy,z) + \varphi(x,yz) = 0$ pour tous x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$.

Démonstration. Soient $X = (x,m)$, $Y = (y,n)$, $Z = (z,p)$ des éléments de $D_0 \cup D_1$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{L}}(X,Y,Z) =&(-1)^{\bar{Y}\bar{Z}}(XZ)Y - X(YZ) + (XY)Z \\ =&((-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xy)z, \varphi(xy,z) - (x(yz), \varphi(x,yz)) - ((xz)y, \varpi(xz,y))) \\ =&((-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y - x(yz) + (xy)z), (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz,y) - \varphi(x,yz) + \varphi(xy,z)). \end{aligned}$$

La relation $\tilde{\mathfrak{L}}(X,Y,Z) = 0$ conduit alors à

$$(-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y - x(yz) + (xzy)z) = 0$$

et

$$(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz,y) - \varphi(x,yz) + \varphi(xy,z)) = 0.$$

Ainsi $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Leibniz si et seulement si $\tilde{\mathfrak{L}}(x,y,z) = (-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y - x(yz) + (xy)z) = 0$ pour tous x, y, z parcourant $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$ et $(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz,y) - \varphi(x,yz) + \varphi(xy,z) = 0$ pour tous x, y, z parcourant $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$; c'est-à-dire A^2 est une superalgèbre de Leibniz et $(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz,y) - \varphi(x,yz) + \varphi(xy,z) = 0$ pour tous x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$. □

On a alors le résultat immédiat suivant.

Corollaire 6.4.2. *Si A^2 est une zéro-superalgèbre alors $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Leibniz.*

Proposition 6.4.3. *Si $A^2 = (A^2)_0 \oplus (A^2)_1$ est une superalgèbre de Leibniz alors pour tous x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$ on a :*

$$(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz, y) - \varphi(x, yz) + \varphi(xy, z) = (-1)^{\bar{y}\bar{z}} xz \otimes y - x \otimes yz + xy \otimes z.$$

Démonstration. Soient x, y, z dans $(A^2)_0 \cup (A^2)_1$; on a (cf lemme 2.3.13) :

$$\begin{aligned}
(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\varphi(xz, y) - \varphi(x, yz) + \varphi(xy, z) =& (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\eta(xz)\eta(y) - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\eta((xz)y) \\
& - \eta(x)\eta(yz) + \eta(x(yz)) \\
& + \eta(xy)\eta(z) - \eta((xy)z) \\
=& (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\eta(xz)\eta(y) - \eta(x)\eta(yz) \\
& + \eta(xy)\eta(z) \\
& - \eta((-1)^{\bar{y}\bar{z}}(xz)y - x(yz) + (xy)z)) \\
=& (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\eta(xz)\eta(y) - \eta(x)\eta(yz) \\
& + \eta(xy)\eta(z) - \eta(0) \\
=& (-1)^{\bar{y}\bar{z}} xz \otimes y - x \otimes yz + xy \otimes z.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On notera $\Phi_{LeS}(x, y, z) = (-1)^{\bar{y}\bar{z}} xz \otimes y - x \otimes yz + xy \otimes z$.

Exemple 6.4.4. Soit $A = A_0 \oplus A_1$ où $A_0 =< e_1, e_2 >$, $A_1 =< e_3 >$ la superalgèbre de l'exemple 6.3.5. Comme $A^2 =< e_1 >$ est une zéro-superalgèbre, alors $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Leibniz.

Exemple 6.4.5. Considérons une superalgèbre B telle que B^2 soit isomorphe à $A = A_0 \oplus A_1$ la superalgèbre de l'exemple 6.3.5. Comme B^2 est une superalgèbre de Lie alors B^2 est une superalgèbre de Leibniz. On a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{LeS}(e_1, e_2, e_3) =& (-1)^{\bar{e_2}\bar{e_3}} e_1e_3 \otimes e_2 - e_1 \otimes e_2e_3 + e_1e_2 \otimes e_3 \\
=& e_1 \otimes e_3.
\end{aligned}$$

Ainsi $\Phi_{LeS}(e_1, e_2, e_3)$ est non nul et par suite $D_{K,nc}(B)$ n'est pas une superalgèbre de Leibniz.

Proposition 6.4.6. *Si $D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Leibniz alors A^2 est une zéro-superalgèbre.*

Démonstration. Soient u, x des vecteurs non nuls (éventuels) de $(A^2)_0$ et y, z des vecteurs non nuls (éventuels) de $(A^2)_1$.

$$\begin{aligned}\Phi_{LeS}(x,y,y) =&(-1)^{\bar{y}\bar{y}}xy\otimes y - xy\otimes y + x\otimes y^2\\ =&-xy\otimes y + x\otimes y^2\\ =&-2xy\otimes y - x\otimes y^2.\end{aligned}$$

Comme x est dans $(A^2)_0$ et $2xy$ est dans $(A^2)_1$, la relation $\Phi_{LeS}(x,y,y) = 0$ nous dit que $2xy = 0$ et $y^2 = 0$. Comme la caractéristique du corps K est différente de deux, alors $xy = 0$ et donc $(A^2)_0(A^2)_1 = \{0\}$.

$$\begin{aligned}\Phi_{LeS}(y,x,y) =&(-1)^{\bar{y}\bar{y}}y^2\otimes x - yx\otimes y + y\otimes xy\\ =&y^2\otimes x - yx\otimes y + y\otimes xy;\end{aligned}$$

le calcul ci-dessus nous dit que $\Phi_{LeS}(y,x,y) = -yx\otimes y$; par suite la relation $\Phi_{LeS}(y,x,y) = 0$ permet de dire que $(A^2)_1(A^2)_0 = \{0\}$.

$$\begin{aligned}\Phi_{LeS}(u,x,y) =&(-1)^{\bar{x}\bar{y}}uy\otimes x - ux\otimes y + u\otimes xy\\ =&uy\otimes x - ux\otimes y + u\otimes xy.\end{aligned}$$

De ce qui précède, on a $\Phi_{LeS}(u,x,y) = -ux\otimes y$. La relation $\Phi_{LeS}(u,x,y) = 0$ conduit à $ux = 0$; par suite $(A^2)_0(A^2)_0 = \{0\}$.
Les relations $\Phi_{LeS}(x,y,z) = 0$ et $(A^2)_0(A^2)_1 = \{0\}$ permettent de dire que $(A^2)_1(A^2)_1 = \{0\}$. D'où la proposition. □

Le corollaire 6.4.2 et la proposition 6.4.6 permettent d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 6.4.7. *$D_{K,nc}(A)$ est une superalgèbre de Leibniz si et seulement si A^2 est une zéro-superalgèbre.*

Conclusion

La dupliquée introduite en 1949 par I. H. Etherington est à l'origine un thème d'algèbre génétique ; c'est dans ce sens qu'au chapitre 2, quelques résultats dus aux auteurs A. Micali, F. Corpet, I. Katambé sont donnés.

Notre étude s'est axée sur l'aspect purement algèbrique de la notion de dupliquée.

Soient K un corps commutatif et $D_{K,nc}(A)$ sa dupliquée non commutative. Si $D_{K,nc}(A)$ est dans une classe d'algèbres donnée, il est possible sous certaines conditions de caractériser la sous-algèbre A^2 de A. C'est ce qui est fait dans les chapitres 3, 4, et 5.

Dans le chapitre 3, nous avons montré que si $D_{K,nc}(A)$ est Lie-admissible et A^2 est non commutative alors $\dim_K(A^2) \leq 3$; dans le chapitre 4, il est indiquée que $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre de Jordan si et seulement si A^2 est une zéro-algèbre ou $\dim_K(A^2) \leq 1$; dans le chapitre 5, il est montré que si $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre Leibniz-admissible et A^2 est non commutative alors $\dim_K(A^2) \leq 2$. Nous allons alors conjecturer : *"Soit A une algèbre dans une classe $\mathfrak{C}$. Si la dupliquée non commutative de A est dans la classe $\mathfrak{C}$ alors la dimension de A^2 est inférieure ou égale à trois"*.

D'autre part, si la question de la dupliquée non commutative d'une algèbre de Lie ou de Leibniz semble être traitée jusqu'à certain niveau, ce n' est pas le cas pour la dupliquée non commutative des algèbres de Jordan. En effet, qu'en est-il de la Jordan-admissibilité ? Ne serait-il pas possible de définir, comme pour les algèbres n-Leibniz, une notion d'algèbres de Jordan d'ordre n ($n \geq 4$) ?

Qu'en est-il de la dupliquée des algèbres de Malcev, des algèbres de Hopf, etc ?

Nous disons également que la notion de dupliquée non commutative d'une superalgèbre ne demande qu'à être élargie.

Enfin les résultats algébriques obtenus dans ce travail ont-ils des significations dans le domaine de la génétique ?

Bibliographie

[1] Albert, A. A., *Power-associative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 64, (1948). 552–593

[2] Albeverio, S. ; Ayupov, Sh. A. and Omirov, B. A., *On nilpotent and simple Leibniz algebras*, Com. in algebra. 33 (1), (2005). 159–172

[3] Albeverio, S. ; Omirov, B. A. and Rakimov, I. S., *Varieties of nilpotent complex Leibniz algebras of dimension less than five*, Com. in algebra. 33 (5), (2005). 1575–1585

[4] Ancocha Bermúdez, J. M. ; Campoamor-Stursberg, R. ; García Vergnolle, L. and Sánchez Hernández, *Contractions d'algèbres de Jordan d'ordre deux*, Journal of algebra. 319, (2008) 2395-2409

[5] Ayupov, Sh. A. and Omirov, B. A., *On Leibniz algebras*, Algebra and operators theory, Proceeding of the colloquium in Tashkent 1997 Kluwert Academic Publichers (1998) 1–13

[6] Ayupov, Sh. A. and Omirov, B. A., *On* 3*-dimensional Leibniz algebras*, Uzbek Math. J. 1 9-14 (1999)

[7] Ayupov, Sh. A. and Omirov, B. A., *On some classes of nilpotent Leibniz algebras*, Siberian Math. Jornal 42 (1) (2001) 18-29

[8] Balavoine, D., *Déformations des algèbres de Leibniz*, C. R. Acad. Sci. Paris, T 319 (1994), Série F, 783–788.

[9] Benkart, G. M., *Power-Associative Lie-Admissible Algebras,* Journal of Algebra 90 (1984), 37–58.

[10] Boers, A. H., *Duplication of algebras*, Indigationes Math. , 44 (1982) 121-125.

[11] Boers, A. H., *Duplication of algebras II,* Indagationes Mathematicae 50 (3) (1988), 235–244.

[12] Boers, A. H., *Duplication of algebras III,* Indagationes Mathematicae 1 (3) (1990), 265–279.

[13] Boers, A. H. ; *Duplication d'algèbres IV.* Indagationes Mathematicae 22 (2011) 55-68

[14] Bourbaki, N., *Éléments de Mathématiques, Algèbre Chapitre 1 à 3*, Springer Verlag Masson Paris 1970.

[15] Casas J. M. ; Loday J.-L. and Pirashvili, T., *Leibniz n-algebras,* Forum Math. , 14,(2002), 189–207

[16] Coppage, W. E., *Peirce decomposition in simple Lie-admissible power associative rings.* Pacific Journal of Mathematics, 29, $N°2$, 251–258, (1969).

[17] Corpet, F. et Micali, A., *Algèbre génétiques et mutation quantique.* Linear Algebra and Its Applications 239 (1996) 1-14

[18] Da Motta Ferreira, J. C. et Micali, A., *Sur les algèbres nucléaires.* Indagationes Mathematicae 7 (3) 331-342 (1996)

[19] Eilenberg, S., *Extensions of general algebras.* Ann. Soc. Pol. Math, 21, (1948), 125–134, .

[20] De Graaf, W. A., *Classification of solvable Lie-algebras* Experiment. Math. 14 (2005) no.1, 15–25

[21] Etherington, I. M. H., *Duplication of linear algebras.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) ; 6 (1941), 222–230

[22] Filippov, V. T., *n-Lie algebras.* Translated from Bibirskii Matematicheskii Zhurnal 26 N° 6, 126-140, (1985).

[23] Hentzel, I. R. and Peresi, L. A., *A variety containing Jordan and pseudo-composition algebras.* East-West J. Math 6 ; N° 1 67-84

[24] Gómez J. R. ; Navarro R. M. ; Omirov, B. A., *On nilpotent Leibniz superalgebras.* Préprint MA1-02-X106 Universidad de Sevilla (2006), p.24 (arXiv.math RA/0611723)

[25] Gonshor, H., *Special train algebras arising in genetic.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 12 (1960) 41-53

[26] Jacobson, N., *Lie algebras* Interscience New-York, 1962

[27] Kac, V. G., *Lie Superalgebras.* Advances in Mathematics 26, 8-96 (1977)

[28] Kaplansky, I., *Algebras with many derivations, in Aspects of Mathematics and its applications,* J.A. Barroso editor (1986), 431–438.

[29] Katambé, I., *Sur des structures algébriques en génétique.* Thèse d'habilitation à diriger les recherches, soutenue le 5 juin 2006 à l'Université Abdou Moumouni de Niamey

[30] Kleinfeld, E. and Kokoris, L. A., *Flexible algebras of degree one.* Proc. Amer. Math. Soc. 13, (1962)

[31] Loday, J. L., *Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz.* Ens. Math. 39 (1993) 269–293

[32] Loday, J. L. and Pirashvilli, T., *Univeral envelopping algebras of Leibniz algebras and (co)homology.* Math. Ann. 296 (1996) 139-158

[33] Meyberg, K. and Osborn, J. M., *Pseudo-composition algebras,* Math. Z. (1) 214 (1993), 67–77.

[34] Micali, A., *Communications personnelles* (2010)

[35] Micali, A., Koulibaly A. et Ouattara, M., *Dupliquée d'une algèbre et Théorème de Whitehead.* Indagationes Mathematicae N.S. 5 (1994) n°3 341–351

[36] Micali, A. et Ouattara, M., *Dupliquée d'une algèbre et Théorème d'Etherington.* Linear Algebra and Its Applications 153 (1991) 193–207

[37] Micali, A. et Ouattara, M., *Sur la dupliquée d'une algèbre II* . Bull. Soc. Math. Belgique 43 Série A (1991) 113–125

[38] Micali, A. et Ouattara, M., *Sur la dupliquée d'une algèbre,* Bull. Soc. Math. Belgique 45 Série B (1993) 5-24

[39] Micali, A. et Ouattara, M., *Sur les algèbres de Bernsein-Suttles.* Afrika Matematika **S**érie 3, 19 (2008) 168–189

[40] Mikhalev, A. A. and Umirbaev U. U., *Subalgebras of free Leiniz algebras.* Comm in Algebra 26 (2)(1998) 435–446

[41] Myung, H. C., *Lie-admissible algebras* Hadronic J. 1, 169-193 (1978)

[42] Oehmke, R. H., *On flexible algebras.* Ann. of Math. 2 68 221–230 (1958)

[43] Oehmke, R. H., *Some elementary structure theorems for a class of Lie-admissible algebras* Hadronic J. 3, 293-319 (1979)

[44] Ouattara, M., *Algèbres de Jordan et algèbres génétiques.* Thèse de Doctorat soutenue le 4 juillet 1988 Académie de Montpellier. Université des Sciences et Techniques du Languedoc.

[45] Ouattara, M., *Algèbres de la génétique des populations.* Thèse de Doctorat d'État soutenue le 16 décembre 1991 IMP Université de Ouagadougou

[46] Ouattara, M., *Autour de la dupliquée.* Indagationes Math2(1) 99-104 (1991)

[47] Ouattara, M., *Sur les algèbres de Bernstein d'ordre 2.* Lin. Alg. Appl. 144 (1991) 29-38

[48] Ouattara, M. ; Micali, A. and Katambé I., *Diweighted algebras and two notes,* JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications 6 2 (2006), 265–277.

[49] Patera, J. and Zassenhaus, H., *Solvable Lie-algebras of dimension* ≤ 4 *over Perfect Fields* Linear Algebra and its Applications 142 (1990) 1–17

[50] Peresi, L. A., *A note on duplication of algebras,* Linear Algebra Appl. 104 (1988), 65–69.

[51] Pilabré, N. B., *Sur la Lie-admissibilité de la dupliquée non commutative d'une algèbre.* Thèse de doctorat 3ème cycle, soutenue le 11 avril 1995 FAST université de Ouagadougou

[52] Pilabré, N. B., *Dupliquée commutative et décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein.* Afrika Matematika Série III 17, 25-31 (2006)

[53] Pilabré, N. B., *Noncommutative Duplicate and Jordan algebras.* Advances in Theoretical and Applied Mathematics Number 2 (2010), 223-235

[54] Pilabré, N. B. ; Béré C. J. A. et Koulibaly, A., *Noncommutative Duplicate and Jordan algebras II.* Int. J. of Mathematical Sciences and Applications 1, N° 1, (2011) 359-368

[55] Pilabré, N. B. et Koulibaly, A., *Sur la dupliquée Lie-admissible d'une algèbre.* Afrika Matematika Série III 9, (1998) 73–85

[56] Pilabré, N. B. et Koulibaly, A., *Autour d'un théorème de Tits.* Afrika Matematika Série III 10, (1999) 1-13

[57] Pilabré, N. B. and Koulibaly, A., *Noncommutative duplicate and Leibniz algebras.* Afrika Matematika (2011)

[58] Pilabré, N. B. and Koulibaly, A., *Lie-admissible duplicate of an algebra.* Afrika Matematika (2011)

[59] Pilabré, N. B. and Koulibaly, A., *Noncommutative duplicate and Leibniz-admissibility.* A paraitre dans "International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics"

[60] Pierce, R., *Associative algebras.* Graduation text in Mathematics 88 Springer-Verlad New-York, Heidelberg, Berlin

[61] Pirashvilli, T., *On Leibniz homology.* Ann. Inst. Fourier 44 (2) (1994) 401-411

[62] Schafer, R. D., *Structure of genetic algebras,* Amer. J. Math. 71 (1949), 121–135.

[63] Schafer, R. D., *An introduction to nonassociative algebras.* Academic Press New-York, San-Francisco, London 1966

[64] Sidorov, A. V., *Lie triple algebras.* Transated from Algebra i Logika, 2, N° 1, 101-108, (1981).

[65] Suttles, D., *A counter example to a conjecture of Albert.* Notices Amer. Math. Soc. 19 (5), (1972), A-56.

[66] Weiner, L. M. *Lie-admissible algebras.* Univ. Nac. Tucaman. Rev., Ser. A 11, 10-24 (1957)

[67] Zitan, F. ; Micali, A. et Ouattara M. *Sur les algèbres de Bernstein VI : Cas non commutatif,* Italian J. Pure Appl. Math. 14 (2003), 191-212

Résumé

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre. La dupliquée non commutative $D_{K,nc}(A)$ de A est le K-espace vectoriel $A \otimes A$, muni de la multiplication donnée par $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y'$, pour tous x, y, x', y' parcourant A ; tant dis que la dupliquée commutative $D_K(A)$ de A est le K-espace vectoriel $S^2(A)$ la seconde puissance symétrique de A muni de la multiplication donnée par : $(x \vee y)(x' \vee y') = xy \vee x'y'$, pour tous x, y, x', y' dans A. Les Professeurs A. Micali, A. Koulibaly et M. Ouattara ont vu cette dupliquée comme le produit semi-direct $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$, la structure de K-algèbre de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_{D_{K,nc}}(A)$ étant donnée par $(x, m)(y, n) = (xy, \varphi(x, y))$ où $\varphi : A^2 \times A^2 \longrightarrow N_{D_{K,nc}}(A)$ est une application K-bilinéaire convenable. Ils ont observé que : $D_{K,nc}(A)$ *est dans une classe d'algèbres* C *si et seulement si la sous-algèbre* A^2 *de* A *est dans la classe* C *et* φ *est un* 2*-cocycle à coefficients dans* $N_{D_{K,nc}}(A)$ *où* $N_{D_{K,nc}}(A)$ *est le noyau du morphisme surjectif* $\mu : D_{K,nc}(A) \longrightarrow A^2,\ x \otimes y \longmapsto xy.$

Dans ce travail, il est question de caractériser la sous-algèbre A^2 de A lorque $D_{K,nc}(A)$ est une algèbre Lie-admissible, une algèbre de Leibniz, une algèbre Leibniz-admissible, une algèbre de Jordan.

D'autre part, la dimension du noyau du morphisme surjectif $D^k_{K,nc}(A) \twoheadrightarrow D^k_K(A)$ est calculée où $D^k_{K,nc}(A)$ (repectivement $D^k_K(A)$) est la k^{ieme} dupliquée non commutative (respectivement la k^{ieme} dupliquée commutative) de A.