

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS  
SECONDAIRE ET SUPÉRIEUR

BURKINA FASO  
*Unité – Progrès – Justice*

SECRETARIAT GÉNÉRAL

Année universitaire 2012-2013

UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE  
DE BOBO-DIOULASSO (UPB)



UNITÉ DE FORMATION ET DE RECHERCHE  
EN SCIENCES ET TECHNIQUES

Ecole doctorale Sciences et Techniques

Laboratoire de Mathématiques  
et Informatiques (L.A.M.I)

**MÉMOIRE DU DIPLÔME D'ÉTUDES APPROFONDIES (D.E.A)  
DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.**

**Option :** Analyse

**Spécialité :** Equations aux Dérivées Partielles

Thème : Equation non locale en  
écoulement granulaire

Présenté par Estelle Nassouri

Soutenu le 20 décembre 2014

Composition du jury :

**Président** : M. Stanislas OUARO, Professeur – Université Ouaga II

**Examineurs** : M. Sado TRAORE, Maître de Conférences – U. P. B  
M. Aboudramane GUIRO, Maître de Conférences – U. P. B

**Directeur de mémoire** : Pr Stanislas OUARO – Université Ouaga II

# Dédicaces

Je dédis ce travail à :

- Mes parents pour leurs soutiens et leurs sacrifices pendant mes études.
- A mon frère : Jules. Ma sœur : Irène.
- A ma tante : Aminata.
- A ma nièce : Anaëlle.

# Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à :

- Mon Professeur Stanislas OUARO qui, en tant que Directeur de mémoire et encadreur professionnel, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce travail, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.
- Mes enseignants de l'Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso, leur disponibilité et leurs précieux enseignements m'ont été d'une grande utilité.
- Ma tendre famille pour le soutien apporté.
- A tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.
- A tous mes compagnons de promotion.
- A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce document
- A Dieu pour le tracé qu'il donne au chemin de ma vie et pour m'avoir donné la force de rédiger ce mémoire.

Trouvez ici l'expression de ma profonde gratitude et reconnaissance.

**Equation non locale en écoulement granulaire**

# Résumé

Nous développons dans ce mémoire un article de Nouredine IGBIDA intitulé **Equation Intégré-Différentielle Partielle associée à la dynamique de la matière granuleuse et sa connexion avec un modèle stochastique** extrait de vol 44. No 3, pp. 1950 - 1975, publié en 2012.

IGBIDA dans son article, introduit et étudie une équation intégro-différentielle associée à la dynamique de certaines matières granuleuses telles qu'un tas de sable ou un filon de mer. L'équation est liée à un problème d'évolution non-local introduit par l'étude de la limite quand  $p \rightarrow +\infty$  de l'équation non locale  $p - Laplacien$ . Il établit aussi la connexion entre l'équation intégro-différentielle et le modèle stochastique introduit par Evans et Rezakhanlou pour modéliser un problème de tas de sable.

# Table des matières

Introduction . . . . .	2
Notations . . . . .	4
<b>1 Rappels et Notions de base</b>	<b>6</b>
1.1 Espaces Fonctionnels . . . . .	6
1.1.1 Espaces $L^p$ . . . . .	6
1.1.2 Espaces de Hilbert et de Sobolev . . . . .	11
1.1.3 Espaces des fonctions à variations bornées ( $BV(\mathbb{R})$ ) . . . . .	12
1.2 Suites régularisantes et Convolution . . . . .	13
1.2.1 Convolution . . . . .	13
1.2.2 Suites régularisantes . . . . .	14
1.3 Opérateurs maximaux monotones . . . . .	14
1.4 Equation associée à un opérateur maximal monotone . . . . .	15
1.4.1 Equation du type $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ avec $u(0) = u_0$ . . . . .	15
1.4.2 Cas où $A = \partial\varphi$ . . . . .	16
1.5 Théorie des sémi-groupes non linéaires . . . . .	16
1.6 Processus Stochastique . . . . .	17
1.6.1 Notion de processus . . . . .	17
1.6.2 Exemples . . . . .	17
1.6.3 Les processus stochastiques . . . . .	17
1.6.4 Chaines de Markov . . . . .	18
<b>2 Principaux résultats</b>	<b>19</b>
2.1 L'Equation Intégo-Différentielle Partielle (EIDP) pour matière granuleuse	19
2.2 Le modèle Stochastique d'Evans - Rezakhanlou pour un tas de sable . .	23
<b>3 Equation Intégo-Différentielle Partielle (EIDP) stationnaire</b>	<b>28</b>
<b>4 Preuve des principaux résultats</b>	<b>43</b>
4.1 Existence et unicité de solution pour l'EIDP . . . . .	43
4.2 La connexion entre l'EIDP et le modèle stochastique . . . . .	48
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>

# Introduction

Selon Aranson et Tsimring (cf.[6]), on peut définir un matériau granulaire comme une collection macroscopique discrète de grains solides de grande taille si bien que le mouvement Brownien est inapplicable. Activé par des forces extérieures(gravité, champs électrique et magnétique), un système granuleux peut produire une transition d'un solide granuleux vers un liquide générant des écoulements particuliers qui sont le centre d'un grand nombre d'applications modernes. La description de tels courants stationnaires représente un défis majeur pour la théorie. Durant les décénies passées, plusieurs études ont été consacrées aux études mathématiques et numériques de systèmes granuleux soumis aux forces de gravité. Différents modèles ont été proposés en utilisant l'approche cinétique [9, 10], les automates cellulaires (voir [19], [35], [23], [30]), ou les équations aux dérivées partielles (voir [7], [34], [15], [28], [8], [20], [22], [21], [24], [18], [29]). La plupart des approches populaires qui ont récemment attirées l'attention de la communauté des chercheurs en EDP sont basées sur les écoulements granulaire partiellement fluidisés (cf.[6]). Dans de telles écoulements, quelques grains s'écoulent les uns sur les autres pendant que d'autres gardent un contact statique avec leurs voisins.

Un exemple typique de système granuleux est la formation du tas de sable : le sable est déversé sur une surface plate par une source positive  $f(t, x)$  et le tas augmente de hauteur.

En utilisant essentiellement l'angle au repos  $\alpha$  qui est la raideur que la surface de la structure forme avec le plan(dépendant des propriétés physiques de la matière granuleuse), les EDP non linéaires ont été utilisées pour décrire la dynamique de la croissance du tas de sable. Par exemple, Bouchaud, Cates, Ravi Prakash et Edwards ont introduit le modèle BCRE ([15], [28]) ; une description en deux phases du flux granuleux, la première phase correspondant au roulement des grains et l'autre phase à ceux statiques. Ce modèle est lié aux EDP associées aux équations de transport phénoménologiques et de type eikonal. De plus, utilisant principalement l'angle au repos, Prigozhin dans [34] et indépendamment Aronson, Evans et Wu dans [7] ont introduit une équation d'évolution non linéaire de type  $p$ -Laplacien avec  $p = \infty$ , pour décrire la dynamique de la formation du tas de sable (c'est la fameuse "équation d'évolution des surfaces"). Par soucis d'exhaustivité on donne une brève description de ce modèle. On note par  $u = u(t, x)$  la hauteur du tas au temps  $t$  et à la position  $x \in \mathbb{R}^2$ . La fonction  $u(t)$  croît avec une pente qui est toujours inférieure à la valeur caractéristique  $\tan(\alpha)$ , c'est à dire :

$$|\nabla u| \leq \tan(\alpha).$$

De plus, utilisant la continuité de l'équation, la propriété de la raideur d'origine de l'écoulement et le fait que la dynamique disparaît lorsque l'angle de la surface est inférieur (strictement) à  $\alpha$ , on obtient l'équation dynamique pour  $u$  suivante (équation

d'évolution de la surface) :

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \Phi = -m \nabla u, & \Phi = -m \nabla u \\ m \geq 0, m(|\nabla u| - \tan(\alpha)) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Cependant, ces approches (modèle BCRE et équation d'évolution de la surface) semblent être réservées au cas de très petits composants (grains fins). En effet, les solutions sont régulières et peuvent ne pas correspondre aux situations générales des composants plus grands pour lesquels le profil peut être discontinu. Pour des composants arbitraires, la dynamique est générée par le fait que les composants (grains, blocs,...) se déplacent l'un contre l'autre le long de la pente ou en sautant d'une position vers une autre position voisine s'ils ne sont pas appuyés l'un contre l'autre. Ainsi, l'état à n'importe quelle position est changeant selon les états voisins incluant la sienne.

Une approche novatrice pour décrire de telles dynamiques est due à Evans et Rezakhanlou en 1998. Les auteurs utilisent les systèmes de particules et donnent une description probabiliste des dynamiques (cf. [23]). Dans cette situation, même si la source est déterministe, les trajectoires sont choisies de manière aléatoire par les blocs, de telle sorte que le profil est un processus de Markov. Cependant, la description ici reste aléatoire. La connexion avec l'équation d'évolution des surfaces apparaît lorsque les blocs tendent à être très petits et très nombreux (voir aussi [23] et [30]). Par ailleurs, récemment, dans [3] (voir aussi [4]) les auteurs introduisent une nouvelle approche déterministe utilisant les interactions non locales pour décrire la dynamique des systèmes granuleux. Cela correspond à une équation d'évolution non locale de type  $p$ -Laplacien avec  $p = \infty$ . En reformulant le problème de façon appropriée, ils démontrent que la solution du modèle converge vers la solution de l'équation d'évolution des surfaces. L'objectif ici est de considérer des interactions non locales de façon appropriée pour construire une nouvelle équation intégral-différentielle partielle (EIDP) pour les modèles de dynamiques de structures granuleuses. On montre que l'EIDP est bien posée (existence et unicité de la solution) et on démontre sa connexion avec le modèle stochastique d'Evans et Rezakhanlou aussi bien que le modèle de [3].

L'Equation Intégral-Différentielle Partielle a été utilisée pour modéliser des situations très différentes appliquées, par exemple en biologie ([17],[25], [33]), au traitement d'image ([27], [32]), aux systèmes de particules ([14]), au modèle de coagulation ([26]), au modèle anisotrope non local pour une phase de transition ([1],[2]) et en mathématique financière utilisant la théorie du contrôle optimal ([13]), etc.. L'un de leur principal intérêt est la connexion avec le processus stochastique. Par exemple, dans certaines situations, ils donnent la distribution de la densité de la variable aléatoire (supposant que le processus a une densité) pour le processus stochastique avec des trajectoires discontinues. Pour la connexion entre les équations différentielles partielles non locales et la probabilité, (voir [5]).

L'objectif de de mémoire est d'étudier le modèle EIDP pour matières granuleuse.

Dans le premier chapitre, on fera des rappels d'outils nécessaires pour la suite. Le second chapitre traite des principaux résultats et est organisé en deux parties. Dans la première partie, on établit l'EIDP pour modéliser les dynamiques de la structure granuleuse et on présente les résultats d'existence et d'unicité de la solution. Dans la seconde partie, on rappelle le modèle stochastique d'Evans et Rezakhanlou et on donne sa connexion avec l'EIDP. Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'équation stationnaire associée à l'EIDP. Enfin, dans le dernier chapitre on donne les preuves des principaux résultats.

# Notations

$\Omega$  : ouvert de  $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ .

$H$  : espace de Hilbert.

$\partial\Omega$  : frontière topologique de  $\Omega$ .

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  : point générique de  $\mathbb{R}^n$ .

$dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  mesure de Lebesgue sur  $\Omega$ .

$\Sigma := ]0, T[ \times \partial\Omega$ .

$Du$  : gradient de  $u$  noté aussi  $\nabla u$ .

$\text{Supp}(f)$  : support d'une fonction  $f$ .

$f^+ = \max(f, 0), f^- = \max(-f, 0)$ .

$\mathcal{M}(E, B) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable}\}$ .

$\mathcal{D}(\Omega)$  : espace de fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans  $\Omega$  aussi noté  $\mathcal{C}_c(\Omega)$ .

$\mathcal{D}^+(\Omega)$  : espace des fonctions positives de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

$\mathcal{C}_0(\Omega)$  : espace des fonctions continues nulles au bord de  $\Omega$ .

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  : espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$ .

$\mathcal{M}_b(\Omega)$  : espace des mesures de Radon bornées sur  $\Omega$ .

$L^p(\Omega)$  : espace des classes de fonctions de puissances  $p$ -ième intégrables sur  $\Omega$  pour la mesure de Lebesgue.

$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ , pour  $1 < p < +\infty$ .

$\|f\|_\infty = \inf \{C \in \mathbb{R}_+; |f| \leq C\}$ ,  $1 < p < +\infty$ .

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in (L^p(\Omega))^n\}$ .

$\|u\|_{1,p} = \left( \|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $1 < p < +\infty$ .

$W_0^{1,p}(\Omega)$  : adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

$W^{-1,p'}(\Omega)$  : espace dual de  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Si  $X$  est un espace de Banach alors :

$L^p(0, T; X) = \{f : ]0, T[ \rightarrow X \text{ mesurable}; \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < +\infty\}$ .

$L^\infty(0, T; X) = \{f : ]0, T[ \rightarrow X \text{ mesurable}; \text{ess-sup}_{t \in ]0, T[} \|f(t)\|_X < +\infty\}$ .

$\mathcal{C}^k([0, T]; X)$  : espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiables de  $[0, T] \rightarrow X$ .

$\mathcal{D}([0, T]; X)$  : espace des fonctions continûment différentiables à support compact dans  $[0, T]$ .

$\text{mes}(A)$  ou  $|A|$  est la mesure de l'ensemble mesurable  $A$ .

# Chapitre 1

## Rappels et Notions de base

Dans cette section, nous faisons des rappels d'outils et de résultats utiles pour la suite du travail.

### 1.1 Espaces Fonctionnels

Dans cette section  $(E, B, m)$  désigne un espace mesuré.

#### 1.1.1 Espaces $L^p$

##### Définitions et Notations

Soit  $f \in \mathcal{M}(E, B)$  c'est à dire  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable; on note  $f^+ = \sup(f, 0)$  et  $f^- = \sup(-f, 0)$ . On sait que  $|f|$ ,  $f^+ = \sup(f, 0)$ ,  $f^- = \sup(-f, 0)$  sont mesurables positives et  $f = f^+ - f^-$ ,  $|f| = f^+ + f^-$ . On obtient alors :

$$\int_E f^+ dm \leq \int_E |f| dm \quad \text{et} \quad \int_E f^- dm \leq \int_E |f| dm.$$

**Définition 1.1.1.** On dit qu'une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est  $m$ -intégrable ou simplement intégrable si :

i)  $f$  est mesurable,

ii)  $\int_E |f| dm$  est finie et dans ce cas,  $\int_E f^+ dm$  est finie et  $\int_E f^- dm$  est finie.

On note  $\mathcal{L}^1$  l'ensemble des fonctions intégrables. i) Pour l'addition et la multiplication des fonctions,  $\mathcal{L}^1$  est un espace vectoriel réel.

ii) Si  $f$  est intégrable,  $|f|$  est intégrable et on a  $\left| \int_E f dm \right| \leq \int_E |f| dm$ .

iii) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions mesurables telles que  $|f| \leq |g|$  et si  $g$  est intégrable alors  $f$  est intégrable.

iiii) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions intégrables telles que  $f \leq g$  alors

$$\int_E f dm \leq \int_E g dm.$$

**Définition 1.1.2.** 1) On dit qu'une partie  $N$  de  $E$  est négligeable ou  $m$ -négligeable si elle est contenue dans un ensemble de mesure nulle, c'est à dire, il existe  $A \in \mathcal{T}$  telle que  $N \subset A$  et  $m(A) = 0$ .

2) On dit qu'une propriété est vraie presque partout ou  $m$ -presque partout notée p.p ou

$m$ -pp s'il existe une partie négligeable  $N$  de  $E$  telle que la propriété soit vraie  $\forall x \in E - N = N^c$ .

**Proposition 1.1.3.** On a :

- i)  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  une fonction mesurable alors  $\int_E f dm = 0 \iff f = 0$  p.p.  
 ii) Soit  $f, g \in \mathcal{L}^1$  telles que  $f = g$  p.p alors  $\int_E f dm = \int_E g dm$ .

On note  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{N}$  le sous ensemble de  $\mathcal{F}$  constitué des applications nulles presque-partout.  $\mathcal{N}$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{F}$ .

La relation  $f = g$  "p.p." est une relation d'équivalence dans  $\mathcal{F}$  ; c'est la relation  $f - g \in \mathcal{N}$ . On note  $L^1(E, m)$  le sous espace de  $\mathcal{F}$  constitué des classes qui contiennent au moins une fonction intégrable. On montre que  $L^1 = \mathcal{L}^1(m) / (\mathcal{L}^1(m) \cap \mathcal{N})$ .

**Définition 1.1.4.** Soit  $(E, B, m)$  un espace mesuré,  $1 \leq p < +\infty$  et  $f$  une fonction définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , mesurable. On pose :

$$\|f\|_p = \left( \int_E |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On dit que  $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(E, B, m)$  si  $\|f\|_p < +\infty$ .

De manière analogue au cas  $p = 1$ , on "quotiente" les espaces  $\mathcal{L}^p$  par la relation d'équivalence " $=$  p.p." afin que l'application  $u \mapsto \|u\|_p$  définisse une norme sur l'espace vectoriel des classes d'équivalence.

**Définition 1.1.5.** Pour  $1 \leq p < +\infty$ , on définit l'espace  $L^p(E)$  comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de  $\mathcal{L}^p$  pour la relation d'équivalence " $=$  p.p.". C'est l'ensemble des classes de fonctions réelles sur  $E$  contenant au moins une fonction de  $\mathcal{L}^p(E)$ .

**Remarque 1.1.6.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  ; on rappelle que  $A$  est borné inférieurement s'il existe un minorant réel de  $A$ , c'est à dire  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $x \geq \alpha \forall x \in A$ . Si  $A$  est borné inférieurement, on définit l'inf de  $A$  comme le plus grand des minorants de  $A$ .

**Définition 1.1.7.** On note  $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(E, B, m)$  l'ensemble des fonctions  $f$  mesurables sur  $(E, B)$  à valeurs réelles, qui sont simultanément bornées, ce qui signifie qu'il existe un réel  $a \in \mathbb{R}^+$  dépendant de  $f$ , tel que  $|f| \leq a$  m - p.p. Pour une telle fonction, on pose

$$\|f\| = \inf\{a \in \mathbb{R}^+ : |f| \leq a \text{ m - p.p.}\}.$$

**Définition 1.1.8.** Soient  $(E, B, m)$  un espace mesuré et  $f$  une fonction mesurable :

- 1) on dit que  $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$  ou encore que  $f$  est essentiellement bornée s'il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|f| \leq C$  p.p. ;
- 2) si  $f \in \mathcal{L}^\infty$ , on pose  $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}^+ ; |f| \leq C \text{ p.p.}\}$  ,
- 3) si  $f \notin \mathcal{L}^\infty$ , on pose  $\|f\|_\infty = +\infty$ .

## Théorèmes et Propriétés

On dit que deux nombres réels  $p$  et  $q$  sont conjugués s'ils sont strictement positifs et si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Par la suite, on désignera par  $q$  le conjugué de  $p$ .

Notation : On désigne par  $C_c(\Omega)$  l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$  à support compact, c'est à dire  $C_c(\Omega) := \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K \text{ où } K \subset \Omega \text{ est un compact}\}$ .

**Théorème 1.1.9.** (Théorème de densité)  $L^1$  l'espace  $C_c(\Omega)$  est dense dans  $L^1(\Omega)$ , c'est à dire ,

$$\forall f \in L^1(\Omega) \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists f_1 \in C_c(\Omega) \text{ tel que } \|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon.$$

**Théorème 1.1.10.** Si  $p \in [1, \infty]$ , l'espace  $(L^p, \|\cdot\|_p)$  est un espace vectoriel normé.

**Théorème 1.1.11.** (Inégalité de Hölder) Soit  $p \in [1, \infty[$ . Soient  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$ . Alors :

$$f \cdot g \in L^1 \text{ et } \int_E |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Théorème 1.1.12.** (Inégalité de Minkowski)

Soit  $p \in [1, \infty]$ . Soient  $f \in L^p$  et  $g \in L^p$ . Alors :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Théorème 1.1.13.** (Théorème de représentation de Riesz)

Soit  $1 < p < \infty$  et soit  $\varphi \in (L^p(E))' = L^q(E)$  alors il existe  $u \in L^q(E)$  unique tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_E u f dx \quad \forall f \in L^p(E).$$

De plus, on a :

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

**Théorème 1.1.14.** L'espace  $C_c(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$  pour  $1 < p < \infty$ .

**Définition 1.1.15.** Soit  $1 < p < \infty$ ; on dit qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à  $L^p_{Loc}(\Omega)$  si  $f|_K \in L^p(\Omega)$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ .

**Lemme 1.1.16.** Soit  $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$  tel que

$$\int_E f u dx = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega).$$

Alors,  $f = 0$  p.p sur  $\Omega$ .

**Théorème 1.1.17.** (Théorème de convergence monotone de Beppo Levi).

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de fonctions de  $L^1(\Omega)$  telle que  $\sup_n \int f_n < \infty$ .

Alors  $f_n$  converge p.p sur  $\Omega$  vers une limite finie notée  $f$  et de plus,  $f \in L^1(\Omega)$  avec  $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 1.1.18.** (Théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$ . On suppose que :

a)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$ ,

b) il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$  telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$ .

Alors,  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Lemme 1.1.19.** (Lemme de Fatou)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions dans  $\mathcal{M}(\Omega)^+$  alors :

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n dx.$$

**Théorème 1.1.20.** (Théorème d'Ascoli)

Soit  $K$  un espace métrique compact et soit  $\mathcal{H}$  un sous ensemble borné de  $\mathcal{C}(K)$ .

On suppose que  $\mathcal{H}$  est uniformément équicontinu i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{H}.$$

Alors,  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}(K)$ .

**Lemme 1.1.21.** (Inégalité de Jensen)

Soit  $f$  une fonction convexe de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On suppose que  $X$  et  $f(X)$  sont intégrables, alors on a :

$$\int f(X) dP \geq f \left( \int X dP \right).$$

## Notion de convergence faible

**Définition 1.1.22.** (Convergence faible dans un espace de Banach)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $E'$  son dual topologique (i.e l'espace des formes linéaires continues sur  $E$ ), soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  et  $u \in E$ . On dit que la suite  $u_n$  converge faiblement vers  $u$  si pour tout élément  $F$  de  $E'$ , on a  $F(u_n) \rightarrow F(u)$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.1.23.** (Convergence faible dans  $L^p$ )

Soit  $(E, B, m)$  un espace mesuré,  $p \in [1, +\infty[$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$  et  $f \in L^p$ . On dit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $f$  si pour tout  $g \in L^q$ , on a  $\int f_n g dm \rightarrow \int f g dm$ .

**Définition 1.1.24.** (Convergence faible \* dans le dual d'un espace de Banach)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $E'$  son dual topologique, soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$  et  $F \in E'$ . On dit que la suite  $F_n$  converge faiblement vers  $F$  pour la topologie faible \* si pour tout élément  $u$  de  $E$ , on a  $F_n(u) \rightarrow F(u)$  dans  $\mathbb{R}$ .

## Espace $L^p(0, T; X)$

Soit  $X$  un espace de Banach.

$$\mathcal{C}([0, T]; X) := \{f : [0, T] \rightarrow X \text{ continue}\}.$$

On considère l'espace

$$L^p(0, T; X) := \{f : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable; } \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty\}, 1 \leq p < +\infty,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

et

$L^\infty(0, T; X) := \{f : ]0, T[ \rightarrow X \text{ mesurable}; \exists C \geq 0 \text{ tel que } \|f(t)\|_X \leq C \text{ p.p } t \in ]0, T[\}$   
qui est muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} := \inf\{C \geq 0 \text{ tel que } \|f(t)\|_X \leq C \text{ p.p } t \in ]0, T[\}.$$

**Théorème 1.1.25.** (Théorème d'Egorov)

Si  $f_n : ]0, T[ \rightarrow X$  est une suite de fonctions qui converge presque-partout vers  $f$  alors,  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe un ensemble mesurable  $A_\varepsilon \subset ]0, T[$  tel que  $|A_\varepsilon| > \varepsilon$  et  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur  $]0, T[ \setminus A_\varepsilon$ .

### Mesure de Radon

**Définition 1.1.26.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}$ ; on appelle mesure de Radon sur  $\Omega$  un élément de  $\mathcal{M}(\Omega) = (\mathcal{C}_c(\overline{\Omega}))'$ , i.e toute application linéaire continue (pour la norme infinie) de  $\mathcal{C}_c(\overline{\Omega})'$  dans  $\mathbb{R}$  c'est à dire  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  s'identifie à l'application :

$$\xi \in \mathcal{C}_c(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} \xi d\mu.$$

**Remarque 1.1.27.** L'espace  $\mathcal{M}(\Omega)$  peut également être identifié au dual de l'espace des fonctions continues jusqu'au bord ( $\mathcal{M}(\Omega) = (\mathcal{C}_c(\overline{\Omega}))'$ ), dans le sens où tout  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  est égal à  $\tilde{\mu} \in (\mathcal{C}_c(\overline{\Omega}))'$  avec  $\mu(\partial\Omega) = 0$ . Ainsi, pour tout  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  et  $\xi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ , on utilise la notation  $\int_{\Omega} \xi d\mu$  pour désigner  $(\tilde{\mu}, \xi)$ .

**Définition 1.1.28.** La variation totale associée à la mesure de Radon  $\mu$ , notée  $|\mu|$  est définie par :

$$|\mu|(B) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_i)|; B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \text{ avec } B_i \text{ un borélien fixé}\right\}.$$

**Remarque 1.1.29.**  $|\mu| \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ , l'espace des mesures de Radon positive.

On désigne par  $\mathcal{M}_b(\Omega)$  l'espace des mesures de Radon dont la variation totale est bornée.

**Définition 1.1.30.** Soient  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ . La mesure  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $\nu$  et on note  $\mu \ll \nu$ , si  $\nu(A) = 0$  implique que  $\mu(A) = 0$  pour tout  $A \subset \Omega$ .

Du théorème de décomposition de Radon-Nykodim, on sait que si  $\mu \in (\mathcal{M}_b(\Omega))^n$  et  $\nu \in (\mathcal{M}_b(\Omega))^n$  telle que  $\mu \ll \nu$  alors il existe une mesure de Radon bornée sur  $\mathbb{R}^n$  notée  $D_\nu \mu$  telle que pour tout  $A \subseteq \Omega$ ,

$$\mu(A) = \int_A D_\nu \mu d\nu,$$

où  $D_\nu \mu \in (\mathcal{M}_b(\Omega))^n$  est la densité de  $\mu$  par rapport à  $\nu$  qui peut se calculer par différentiation.

## 1.1.2 Espaces de Hilbert et de Sobolev

### Espaces de Hilbert

**Définition 1.1.31.** Soit  $H$  un espace vectoriel.

- 1) Un produit scalaire de  $H$  est une forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)$  sur  $H \times H$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , symétrique et définie positive.
- 2) Un espace préhilbertien (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) normé dont la norme est induite par un produit scalaire.
- 3) Un espace de Hilbert (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) normé complet dont la norme est induite par un produit scalaire. C'est donc un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

**Définition 1.1.32.** 1) Deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $H$  sont dit orthogonaux si  $(u, v) = 0$  (on écrit  $u \perp v$ ).

2) Si  $K$  est une partie de  $H$ , on appelle orthogonal de  $K$  et on note  $K^\perp$ , l'ensemble des vecteurs  $u \in H$  qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de  $K$ .

**Théorème 1.1.33.** (Projection sur un convexe fermé)

Soit  $K \subset H$  un convexe fermé non vide. Alors, pour tout  $f \in H$ , il existe  $u \in K$  unique tel que

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|.$$

De plus,  $u$  est caractérisé par la propriété :

$$u \in K,$$

$$(f - u, v - u) \leq 0, \forall v \in K.$$

On note  $u = P_K f$ , la projection de  $f$  sur  $K$ . On a :

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|, \forall f_1, f_2 \in H.$$

**Corollaire 1.1.34.** Soit  $M \in H$  un sous espace vectoriel fermé. Soit  $f \in H$ .

Alors,  $u = P_M f$  est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in M, \\ (f - u, v) = 0, \forall v \in M. \end{cases}$$

De plus,  $P_M$  est un opérateur linéaire.

### Espace de Sobolev

**Définition 1.1.35.** On note  $H^1(\Omega)$  l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable dont chacune des dérivées partielles premières (au sens des distributions) est de carré intégrable, c'est-à-dire :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \forall i = 1, \dots, N, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

La norme correspondante est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Proposition 1.1.36.** Soit  $m \in \mathbb{N}$ . L'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est défini par

$$H^m(\Omega) = \{v / \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, D^\alpha v \in L^2(\Omega)\}.$$

**Définition 1.1.37.** Soit  $p$  un élément de  $[1, \infty]$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle espace de Sobolev d'ordre  $m$  et on note  $W^{m,p}(\Omega)$  (resp.  $H^m(\Omega)$  si  $p = 2$ ), l'ensemble

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Définition 1.1.38.** On appelle  $H_0^1(\Omega)$ , la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . En d'autres termes,

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / (v_n) \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0\}.$$

**Définition 1.1.39.** Soit  $p$  un réel,  $1 \leq p < \infty$ ,  $m$  un entier  $\geq 2$ ; on appelle espace de Sobolev et on note  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{m,p}(\Omega)$ .

### 1.1.3 Espaces des fonctions à variations bornées ( $BV(\mathbb{R})$ )

**Définition 1.1.40.** Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble totalement ordonné  $E$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$  (ou plus généralement dans un espace de Banach  $F$ ). On lui associe l'application

$$T_f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$$

définie par

$$T_f(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{j=1}^N |f(x_j) - f(x_{j-1})|; N \in \mathbb{N}^*, -\infty < x_0 < \dots < x_N = x \right\}.$$

$T_f$  est une application croissante.

**Définition 1.1.41.** On dira que  $f$  est à variation bornée si  $T_f$  est bornée. Dans ce cas, on notera  $u \in BV(\mathbb{R})$  et

$$VT(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} T_f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} T_f(x).$$

**Remarque 1.1.42.**  $BV(\mathbb{R})$  définit l'ensemble des fonctions à variations bornées et est un espace vectoriel sur lequel la variation totale  $VT$  définit une semi-norme.

**Lemme 1.1.43.** Si  $f \in BV(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$(x < y) \implies |f(x) - f(y)| \leq T_f(y) - T_f(x).$$

**Lemme 1.1.44.** Si  $f \in BV(\mathbb{R})$  alors :

$$\sup_{h \neq 0} \int \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx \leq VT(f) < +\infty.$$

**Définition 1.1.45.**

$$\|f\| = VT(f) + \sup_{\mathbb{R}} |f|$$

est une norme sur  $BV(\mathbb{R})$  On muni l'espace vectoriel  $BV(\mathbb{R})$  de cette norme

**Proposition 1.1.46.** L'espace vectoriel ainsi normé  $BV(\mathbb{R})$  est un espace de Banach.

## 1.2 Suites régularisantes et Convolution

La notion de support de fonction continue est bien connue : c'est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel  $f$  est nulle (l'adhérence de l'ensemble  $\{x, f(x) \neq 0\}$ ). Quand on travaille avec les fonctions mesurables il faut être bien prudent puisque ces fonctions sont en général définies presque partout et la définition précédente ne convient plus. La notion appropriée est donnée dans la proposition ci-après :

**Proposition 1.2.1.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et soit  $f$  une fonction définie sur  $\Omega$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On considère la famille de tous les ouverts  $(\omega_i)_{i \in I}$ ,  $\omega_i \subset \Omega$  tels que pour chaque  $i \in I$ ,  $f = 0$  p.p sur  $\omega_i$ .

On pose  $w = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ .

Alors,  $f = 0$  p.p. sur  $\omega$ .

Par définition,  $\text{supp} f = \Omega/\omega$ .

### 1.2.1 Convolution

**Théorème 1.2.2.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ .

On pose :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Alors,  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

**Proposition 1.2.3.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$\text{Supp}(f * g) \subset \overline{\text{Supp} f + \text{Supp} g}.$$

**Proposition 1.2.4.** Soit  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .

$$\text{Alors } f * g \in C(\mathbb{R}^n).$$

**Proposition 1.2.5.** Soit  $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  ( $k$  entier). Alors,  $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$  et  $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$ . En particulier, si  $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  alors  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

### 1.2.2 Suites régularisantes

**Proposition 1.2.6.** *Il existe une fonction numérique  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  vérifiant :*

- 1)  $\varphi \not\equiv 0$  et  $\varphi \geq 0$ ,
- 2)  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ ,
- 3)  $\text{supp}(\varphi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ,
- 4)  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ .

**Définition 1.2.7.** *(Suites régularisantes)*

*Soit  $\rho$  une fonction vérifiant les hypothèses de la proposition précédente; on appelle suite régularisante associée à  $\rho$ , la suite de fonctions  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  définie par :*

$$\rho_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \rho_k(x) = k^n \rho(kx).$$

(Des éléments de la suite régularisante associée à  $\rho$ ).

- 1) On a  $\rho_k \geq 0$ ,  $\rho_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
- 2) On a  $\text{supp}(\rho_k) \subset B(0, \frac{1}{k})$ .
- 3) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k dx = 1$ .

**Proposition 1.2.8.** *Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ ; alors  $\rho_n * f \rightarrow f$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Théorème 1.2.9.** *Soit  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p < \infty$ . Alors,  $\rho_n * f \rightarrow f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .*

**Corollaire 1.2.10.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert quelconque. Alors,  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$ , pour  $1 \leq p < \infty$ .*

### 1.3 Opérateurs maximaux monotones

**Définition 1.3.1.** *Un opérateur (multivoque) est une application de  $H$  dans  $P(H)$  (ensemble des parties de  $H$ ). Le graphe, le domaine et l'image d'un opérateur  $A$  se notent et se définissent respectivement par :*

$$\mathcal{G}(A) = \{(x, y) \in E \times F : y \in Ax\},$$

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$$

et

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in F : \exists x \in E \text{ tel que } y \in Ax\}.$$

**Définition 1.3.2.** *(Opérateur monotone)*

*Un opérateur  $A$  est dit monotone si  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ ,  $(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq 0$  ou plus précisément  $\forall y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$  alors  $(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0$  ou encore  $(Av, v) \geq 0$ .*

**Définition 1.3.3.** *Un opérateur de  $H$  est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.*

On insiste sur le fait que  $A$  est maximal dans l'ensemble des graphes monotones. Un opérateur qui est seulement maximal dans l'ensemble des opérateurs univoques monotones n'est pas nécessairement maximal au sens de la définition précédente.

**Définition 1.3.4.** (Opérateur maximal monotone)

Un opérateur  $A$  est dit maximal monotone si  $A$  est monotone et si de plus pour tout  $(x, y) \in H \times H$  tel que  $(y - A\varepsilon, x - \varepsilon) \geq 0$ ,  $\forall \varepsilon \in D(A)$  (ou plus précisément  $(y - \eta, x - \varepsilon) \geq 0 \forall (\varepsilon, \eta) \in A$ ) alors  $y \in Ax$ .

**Proposition 1.3.5.** Soit  $A$  un opérateur de  $H$ , il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- 1)  $A$  est maximal monotone.
- 2)  $A$  est monotone et  $R(I + A) = H$  (c'est à dire  $\forall H, \exists u \in D(A)$  tel que  $u + Au = f$ ).
- 3) Pour tout  $\lambda \geq 0$ ,  $(I + \lambda A)^{-1}$  est une contraction définie sur  $H$  tout entier.

### Exemples d'opérateurs maximaux monotones

**Exemple 1.3.6.** Soit  $A$  un opérateur maximal monotone de  $H$ , les opérateurs  $A^{-1}, \lambda A$  pour tout  $\lambda \geq 0$  sont maximaux monotones.

On définit l'opérateur sous-différentiel de  $f$  noté  $\partial f$  par

$$\forall x \in D(f), \partial f = \{y \in H : \forall z \in H, f(z) \geq f(x) + (y, z - x)\}.$$

**Exemple 1.3.7.** Soit  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, fermée et propre. Alors, l'application sous-différentiel  $\partial f : H \rightarrow H$  est maximal monotone.

**Exemple 1.3.8.** Soit  $\varphi$  une fonction convexe propre sur  $H$ . Si  $\varphi$  est sémi-continue inférieurement (s.c.i) alors  $\partial\varphi$  est maximal monotone.

## 1.4 Equation associée à un opérateur maximal monotone

### 1.4.1 Equation du type $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ avec $u(0) = u_0$

**Définition 1.4.1.** Soit  $A$  un opérateur de  $H$  et  $f \in L^1(0, T; H)$ . On appelle solution forte de l'équation  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ , toute fonction  $u \in C([0, T]; H)$ , absolument continue sur tout compact de  $]0, T[$  vérifiant  $u(t) \in \mathcal{D}(A)$  et  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$  p.p. sur  $]0, T[$ .

**Définition 1.4.2.** On dit que  $u \in C([0, T]; H)$  est solution faible de l'équation  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$  s'il existe des suites  $f_n \in L^1(0, T; H)$  et  $u_n \in C([0, T]; H)$  telles que  $u_n$  soit solution forte de l'équation  $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$ ,  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1(0, T; H)$  et  $u_n \rightarrow u$  uniformément sur  $[0, T]$ .

**Lemme 1.4.3.** Soit  $A$  un opérateur maximal monotone,  $f, g \in L^1(0, T; H)$ .  $u$  et  $v$  des solutions fortes des équations  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$  et  $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ , on a :

- 1)  $|u(t) - v(t)| \leq |u(s) - v(s)| + \int_s^t |f(\sigma) - g(\sigma)| d\sigma, \forall 0 \leq s \leq t \leq T;$
- 2)  $(u(t) - u(s), u(s) - x) \leq \frac{1}{2}|u(t) - x|^2 - \frac{1}{2}|u(s) - x|^2 \leq \int_s^t (f(\sigma) - y, u(\sigma) - x) d\sigma,$   
 $\forall 0 \leq s \leq t, \forall (x, y) \in H.$

**Théorème 1.4.4.** Soit  $A$  un opérateur maximal monotone de  $H$ . Pour tout  $f \in L^1(0, T; H)$  et  $u_0 \in \overline{D(A)}$ , il existe une unique solution faible de  $u$  de l'équation  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$  telle que  $u(0) = u_0$ .

### 1.4.2 Cas où $A = \partial\varphi$

Dans le cas particulier où  $A$  est le sous-différentiel d'une fonction convexe, les solutions faibles de l'équation  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$  sont en fait des solutions fortes dès que  $f \in L^2(0, T; H)$ . On suppose dans ce paragraphe que  $\varphi$  est une fonction convexe s.c.i telle que  $\min \varphi = 0$ . On pose  $A = \partial\varphi$  et  $K = \{v \in H, \varphi(v) = 0\}$ .

**Théorème 1.4.5.** Soit  $f \in L^2(0, T; H)$ , alors toute solution faible de l'équation  $\frac{du}{dt} + Au \ni f$  est solution forte  $\sqrt{t}\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$  et on a les estimations suivantes :

- 1)  $\left[ \int_0^T \left| \frac{du(t)}{dt} \right|^2 t dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \int_0^T |f(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T |f(t)| dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{dist}(u(0), K),$
- 2)  $\left[ \int_\delta^T \left| \frac{du(t)}{dt} \right|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \int_0^T |f(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \int_0^\delta |f(t)| dt + \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \text{dist}(u(0), K) \quad \forall \delta \in ]0, T[.$

La fonction  $t \mapsto \varphi(t)$  appartient à  $L^1(]0, T[)$  et est absolument continue sur tout intervalle  $[\delta, T]$ ,  $\forall \delta \in ]0, T[$  avec

$$\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + \frac{d}{dt} \varphi(u) = (f, \frac{du}{dt}) \text{ p.p sur } ]0, T[.$$

Enfin, si  $u(0) \in \mathcal{D}(\varphi)$  alors  $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$  avec

$$\left[ \int_0^T \left| \frac{du(t)}{dt} \right|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \int_0^T |f(t)| dt \right]^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\varphi(u(0))}$$

et la fonction  $t \mapsto \varphi(u(t))$  est absolument continue sur  $[0, T]$ .

**Remarque 1.4.6.** Supposons que  $f \in L^1(0, T; H) \cap L^1_{loc}(0, T; H)$ ; alors toute solution faible de l'équation  $\frac{du}{dt} + \partial\varphi(u) \ni f$  est une solution forte et  $\frac{du}{dt} \in L^1_{loc}(0, T; H)$ .

## 1.5 Théorie des sémi-groupes non linéaires

Soit  $C$  une partie non vide d'un espace de Hilbert  $H$  et soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  une famille d'applications de  $C$  dans  $C$  dépendant d'un paramètre  $t \geq 0$ .

On dit que  $S(t)$  est un sémi-groupe continu de contractions non linéaire sur  $C$  (par commodité on dira simplement sémi-groupe) s'il vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $S(0) = Id$  et  $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \cdot S(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$ ;
- 2)  $\lim_{t \rightarrow 0} |S(t)x - x| = 0, \quad \forall x \in C$ ;
- 3)  $|S(t)x - S(t)y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in C, \quad \forall t \geq 0$ .

Rappelons d'autres part qu'étant donné un opérateur maximal monotone dans  $H$ , l'application  $S(t)$  qui à  $x \in D(A)$  fait correspondre la valeur à l'instant  $t \geq 0$  de la solution de l'équation  $\frac{\partial u}{\partial t} + Au \ni 0, u(0) = x$ , définit un sémi-groupe sur  $D(A)$ ; ce sémi-groupe est prolongé par continuité sur  $\overline{D(A)}$ .

On obtient ainsi le sémi-groupe engendré par  $-A$  sur  $D(A)$ .

On va montrer qu'inversement à tout sémi-groupe  $S(t)$  défini sur un convexe fermé  $C$ , on peut associer un opérateur maximal monotone  $A$  unique tel que  $\overline{D(A)} = C$  et que  $S(t)$  coïncide avec le sémi-groupe engendré par  $-A$ .

**Théorème 1.5.1.** *Soit  $S(t)$  un sémi-groupe sur un convexe fermé  $C$  alors, il existe un opérateur maximal monotone  $A$  unique tel que  $\overline{D(A)} = C$  et  $S(t)$  coïncide avec le sémi-groupe engendré par  $-A$ .*

*Autrement dit, il existe un opérateur maximal monotone  $A$  tel que  $\overline{D(A)} = C$  et*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x - S(t)x}{t} = A^\circ x \text{ pour tout } x \in D(A).$$

## 1.6 Processus Stochastique

### 1.6.1 Notion de processus

On désigne par  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité,  $I$  un ensemble arbitraire et  $S$  un espace métrique muni de la tribu borélienne notée  $\mathcal{B}(S)$ .  $I$  est souvent appelé ensemble des indices (souvent, on aura  $I = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p, \mathbb{N}, \dots$ ).  $I$  peut faire référence au temps, à l'espace ou aux deux à la fois.

L'indice  $i \in I$  désigne alors un instant dans  $\mathbb{R}^+$ , une date dans  $\mathbb{N}$ , un point, ou encore un point à un certain instant.  $S$  est appelé espace d'état (souvent, on aura  $S = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ , un ensemble fini ou dénombrable). Si l'espace d'état  $S$  est de la forme  $\mathbb{R}^d$ , on parle de champ aléatoire.

**Définition 1.6.1.** *Un processus aléatoire généralise la notion de variable aléatoire utilisée en statistique élémentaire. On le définit comme une famille de variables aléatoires  $X(i)$ , associées à toutes les valeurs  $i \in I$ . L'ensemble des observations disponibles  $x(i)$ , constitue une réalisation du processus.*

On distingue généralement les processus à temps discret et à temps continu, à valeurs discrètes et à valeurs continues. Si l'ensemble  $I$  est dénombrable, on parle de processus discret ou de série temporelle, si l'ensemble est non dénombrable on parle de processus continu.

### 1.6.2 Exemples

1– La description d'un phénomène par des valeurs discrètes conduit à des processus de comptage dont le plus simple est le processus de Poisson utilisé dans la théorie des files d'attente.

2– La notion de propriété markovienne définit une classe de processus discrets ou continus, à valeurs discrètes ou continues, qui repose sur l'hypothèse selon laquelle l'avenir ne dépend que de l'instant présent.

### 1.6.3 Les processus stochastiques

**Définition 1.6.2.** *Un processus stochastique  $\{X_i, i \in I\}$  est une collection de variables aléatoires (c'est-à-dire, des applications mesurables) définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  indexées par un paramètre  $t$  et définies sur un même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .*

Un processus stochastique est noté par  $\{X_i\}_{i \in I}$ . La valeur de la variable aléatoire  $X_i$  en un certain  $\omega \in \Omega$  est désignée par  $X_i(\omega)$ .

La variable  $X_i$  représente l'état du processus au temps  $i$  et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelée l'espace des états du processus et sera noté  $S$ . Un processus stochastique dont l'ensemble des états  $S$  est fini ou dénombrable est appelé une chaîne. Un processus est à temps discret lorsque l'ensemble  $I$  est fini ou dénombrable.

#### 1.6.4 Chaînes de Markov

On dispose :

- d'un espace d'état, c'est-à-dire d'un ensemble  $E$  fini ou dénombrable,
- d'une loi de probabilité  $\mu_0$  sur  $E$  qui jouera le rôle de loi initiale,
- des probabilités de transition (ou de passage) de  $x$  vers  $y$ , c'est-à-dire d'une famille  $(p(x, y))_{(x, y) \in E^2}$  de nombres réels positifs vérifiant

$$\sum_{y \in E} p(x, y) = 1.$$

**Remarque 1.6.3.** Lorsque l'espace d'états  $E$  est fini, les  $(p(x, y))$  peuvent être écrits sous la forme d'une matrice appelée matrice de transition et dans ce cas, les « sommes en ligne » de cette matrice doivent toutes être égales à 1. On dit que cette matrice est stochastique.

**Définition 1.6.4.** Une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  sur  $E$ , de loi initiale  $\mu_0$ , de probabilité de transition  $(p(x, y))_{x, y}$  est une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $E$  telle que :

- 1 - pour tout  $x \in E$ ,  $P(X_0 = x) = \mu_0(x)$ ,
- 2 - pour tout  $n > 0$  et pour tout  $(n + 1)$ -uplet  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ , on a

$$P(X_0 = x, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu(x_0)p(x_0, x_1)p(x_1, x_2) \dots p(x_{n-1}, x_n).$$

En particulier, on aura  $p(x, y) = P(X_1 = y | X_0 = x) = P(X_{n+1} = y | X_n = x)$ .

**Proposition 1.6.5.** Une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n > 0}$  est une chaîne de Markov de probabilité de transition  $(p(x, y))$  si et seulement si, pour tout  $n > 0$  et tout  $(n + 1)$ -uplet  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  de  $E^{n+1}$ , on a

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) = p(x_n, x_{n+1}).$$

## Chapitre 2

# Principaux résultats

### 2.1 L'Equation Intégo-Différentielle Partielle (EIDP) pour matière granuleuse

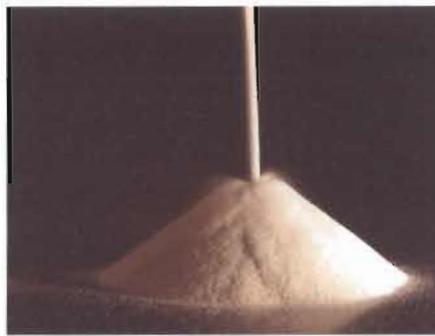


FIGURE 2.1 – Tas de sable

Pour introduire le modèle, on considère une matière granuleuse avec des composants arbitraires (grains, blocs, etc.). On verse la matière granuleuse sur une surface plate selon la fonction positive  $f(t, x)$  (la source) et on se concentre sur la croissance de la hauteur du tas notée par  $u(t, x)$  (au temps  $t$  et à la position  $x \in \mathbb{R}^2$ ). Pour commencer, on admet que l'évolution de  $u$  est donnée par l'équation intégrale suivante :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(t, x, y) dy = f(t, x), \text{ pour tout } (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{F}(t, x, y)$  est une fonction antisymétrique définie sur  $]0, T[ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , couvrant les échanges entre la position  $x$  et la position proche  $y$ . En effet, pour une position fixée  $x \in \mathbb{R}^2$  et un temps  $\Delta t$  suffisamment petit, l'évolution de  $u$  est donnée par :

$$u(t + \Delta t, x) \simeq u(t, x) + \Delta t Q(t, x),$$

où  $Q(t, x)$  est le taux de matières arrivant à la position  $x$ . Ayant à l'esprit la source extérieure  $f$ ,  $Q$  est donné par :

$$Q(t, x) = f(t, x) + In(t, x) - Out(t, x),$$

où  $In(t, x)$  représente la quantité de blocs arrivant à la position  $x$ , des positions avoisinantes et  $Out(t, x)$  représente la quantité de blocs partant de la position  $x$  vers les positions voisines. On note par  $j(t, x, y)$ , le nombre de cubes allant de la position  $x$  vers la position  $y$ ; on a :

$$In(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} j(t, y, x) dy \text{ et } Out(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} j(t, x, y) dy.$$

Par conséquent, on a :

$$\mathcal{F}(t, x, y) = j(t, x, y) - j(t, y, x). \quad (2.2)$$

On note que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, x, y) &= -\mathcal{F}(t, y, x) \text{ car} \\ \mathcal{F}(t, x, y) &= j(t, x, y) - j(t, y, x) \\ &= -(-j(t, x, y) + j(t, y, x)) \\ &= -(j(t, y, x) - j(t, x, y)) \\ &= -\mathcal{F}(t, y, x) \end{aligned}$$

et

$$u(t + \Delta t, x) \simeq u(t, x) + \Delta t f(t, x) + \Delta t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(t, x, y) dy$$

car

$$u(t + \Delta t, x) \simeq u(t, x) + \Delta t Q(t, x)$$

or,

$$\begin{aligned} Q(t, x) &= f(t, x) + In(t, x) - Out(t, x) \\ &= f(t, x) + \int_{\mathbb{R}^2} j(t, y, x) dy - \int_{\mathbb{R}^2} j(t, x, y) dy \\ &= f(t, x) - \int_{\mathbb{R}^2} [j(t, x, y) - j(t, y, x)] dy \\ &= f(t, x) - \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(t, y, x) dy. \end{aligned}$$

On obtient donc,

$$u(t + \Delta t, x) \simeq u(t, x) + \Delta t f(t, x) - \Delta t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(t, x, y) dy$$

c'est à dire,

$$u(t + \Delta t, x) \simeq u(t, x) + \Delta t [f(t, x) - \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(t, x, y) dy].$$

Par conséquent,

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} \simeq f(t, x) - \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(t, x, y) dy.$$

On fait ensuite  $\Delta t \rightarrow 0$  dans la relation précédente pour obtenir (2.1).

Pour avoir un problème bien posé, on a besoin de donner la connexion entre  $\mathcal{F}$  et  $u$ . Le modèle est aussi un modèle au stade critique. De plus, contrairement au cas de petits

composants où l'angle de stabilité est un facteur crucial, dans cette situation on utilise la contrainte non locale de stabilité

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq \delta \text{ pour } |x - y| \leq \varepsilon, \quad (2.3)$$

où  $\delta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  sont des constantes données dépendant de la gravité, du contact entre les blocs et leurs géométries. La condition (2.3) mesure la taille des irrégularités des éléments. On rappelle qu'une contrainte similaire a déjà été utilisée dans [3] avec  $\delta = \varepsilon$ . En effet, cette contrainte naturelle a été obtenue en faisant  $p$  tendre vers l'infini dans l'équation non locale  $p$ -Laplacien. Ayant à l'esprit (2.3) et puisque les blocs de la structure se déplacent seulement lorsque la condition limite est atteinte, la dynamique est en retour concentrée dans l'ensemble

$$\{(t, x, y) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; |u(t, x) - u(t, y)| = \delta \text{ et } |x - y| \leq \varepsilon\}.$$

Par conséquent, pour  $t \in ]0, T[$ , on a :

$$\text{Support}(\mathcal{F}(t)) \subseteq \{(t, x, y) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; |u(t, x) - u(t, y)| = \delta \text{ et } |x - y| \leq \varepsilon\}. \quad (2.4)$$

De plus, puisque les blocs se déplacent en tombant des positions hautes vers les positions inférieures, alors les quantités  $\mathcal{F}(t, x, y)$  et  $u(t, y) - u(t, x)$  ont le même signe. Par conséquent, en combinant (2.2) et (2.4) on obtient

$$\mathcal{F}(t, x, y) = |\mathcal{F}(t, x, y)| \frac{u(t, x) - u(t, y)}{\delta}.$$

On pose

$$\mu(t, x, y) = \frac{1}{\delta} |\mathcal{F}(t, x, y)|.$$

On déduit donc que  $u$  satisfait l' EIDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^2} (u(t, x) - u(t, y)) \mu(t, x, y) dy = f(t, x) \text{ pour } (t, x) \in Q \\ |u(t, x) - u(t, y)| \leq \delta \text{ pour } |x - y| \leq \varepsilon \text{ et } t \in ]0, T[ \\ \mu(t) \geq 0, \mu(t) \text{ est symétrique pour } t \in ]0, T[ \\ \text{Support}(\mathcal{F}(t)) \subseteq \{(t, x, y) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; |u(t, x) - u(t, y)| = \delta \text{ et } |x - y| \leq \varepsilon\}, \end{cases}$$

où  $Q := ]0, T[ \times \mathbb{R}^2$ .

Alors, il est clair que l'évolution de  $u$  au point  $x$  et au temps  $t$  ne dépend pas seulement de  $u(t, x)$ , mais de toutes les valeurs de  $u$  avoisinantes, formant l'équation non locale. On rappelle que dans une EIDP standard, le noyau  $\mu$  est connu et est régulier. Ici l'EIDP est non standard, puisque le calcul de  $u$  est lié au noyau de l'inconnu  $\mu$  qui est une mesure de Radon en général (voir Théorème 2.1). Ainsi, le premier (resp second) terme de l'opérateur intégral s'écrit  $\int_{\mathbb{R}^2} (u(t, y) \mu(t, x, dy))$  (resp  $\int_{\mathbb{R}^2} (u(t, x) \mu(t, x, dy))$ ) et traduit le nombre de matériaux arrivant à la position  $u(t, x)$  provenant de toutes les autres positions (resp partant de la position  $u(t, x)$  vers tous les autres sites).

Pour simplifier la notation, on introduit l'ensemble des profils admissibles

$$K_\varepsilon^\delta = \{z \in L^2(\mathbb{R}^2); |z(x) - z(y)| \leq \delta \text{ pour } |x - y| \leq \varepsilon\}$$

et pour tout  $z \in K_\varepsilon^\delta$ , on note

$$\mathcal{R}_\varepsilon^\delta(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; |z(x) - z(y)| = \delta \text{ et } |x - y| \leq \varepsilon\}.$$

En prenant  $u_0$  comme valeur initiale au temps  $t = 0$ , l'EIDP s'écrit

$$(P_\varepsilon^\delta) \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^2} (u(t, x) - u(t, y)) \mu(t, x, dy) = f(t, x) \text{ pour } (t, x) \in Q \\ u(t) \in K_\varepsilon^\delta, \mu(t) \geq 0, \mu(t) \ll \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u(t)) \text{ pour } t \in ]0, T[, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où on suppose que pour tout  $t \in ]0, T[$ ,  $\mu(t)$  est une mesure de Radon,  $u(t) \in C_0(\mathbb{R}^2)$  et on utilise la notation  $\mu(t) \ll \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u(t))$  pour indiquer que  $\text{Supp}(\mu)(t) \subseteq \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u(t))$ .

Pour montrer les résultats d'existence et d'unicité de la solution pour  $(P_\varepsilon^\delta)$ , on considère l'espace

$$\mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+ := \{ \mu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2); \int \int \xi(x, y) \mu(dx, dy) = \int \xi(y, x) \mu(dx, dy) \\ \text{pour tout } \xi \in C_c(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \}$$

où on utilise  $\mu(dx, dy)$  pour indiquer  $d\mu(x, y)$ .

**Théorème 2.1.1.** *On suppose que  $f \in BV(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^1(0, T; C_0(\mathbb{R}^2))$  et qu'il existe  $\alpha \in L^1(]0, T[)$  tel que pour tout  $h \in \mathbb{R}^2$ , on ait*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |f(t, x+h) - f(t, x)| \leq \alpha(t), \text{ pour tout } t \in ]0, T[. \quad (2.5)$$

Alors, pour tout  $u_0 \in K_\varepsilon^\delta \cap C_c(\mathbb{R}^2)$ ,  $(P_\varepsilon^\delta)$  a une unique solution  $u$  au sens suivant :  $u \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; C_0(\mathbb{R}^2))$ ,  $u(0) = u_0$ , pour tout  $t \in ]0, T[$ ,  $u(t) \in K_\varepsilon^\delta$  et il existe  $\mu(t) \in \mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+$  tel que

$$\mu(t) \ll \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u(t))$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \xi(x) (u(t, x) - u(t, y)) \mu(t, dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} (f(t, x) - \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}) \xi(x) dx,$$

pour  $t \in ]0, T[$  et pour tout  $\xi \in C_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ . De plus, si pour  $i=1, 2$ ,  $u_i$  est la solution correspondante à  $f_i$  alors, pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ , on a

$$\frac{d}{dt} \|u_1 - u_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}$$

et

$$\frac{d}{dt} \|(u_1 - u_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[).$$

**Proposition 2.1.2.** *On note par  $\mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(z)$  la fonction indicatrice de  $K_\varepsilon^\delta$  définie par*

$$\mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in K_\varepsilon^\delta, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(z)$  est convexe car  $K_\varepsilon^\delta$  est convexe.

Le sous différentiel de  $\mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  est donné par  $g \in \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(v)$  si et seulement si  $v \in K_\varepsilon^\delta$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R})$  et

$$\int_{\mathbb{R}} g(z - v) \leq 0 \text{ pour } z \in K_\varepsilon^\delta.$$

Grâce à [16], on sait que pour tout  $u_0 \in K_\varepsilon^\delta$  et  $f \in BV(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$ , le problème d'évolution

$$\begin{cases} u_t + \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(u) \ni f \text{ dans } ]0, T[ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

admet une unique solution, dans le sens que  $u \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$ ,  $u(0) = u_0$  et pour tout  $t \in ]0, T[$ ,  $u(t) \in K_\varepsilon^\delta$  et  $\int_{\mathbb{R}^2} (f(t) - \frac{\partial u(t)}{\partial t})(u(t) - z) \geq 0$ , pour tout  $z \in K_\varepsilon^\delta$ .

La connexion entre le modèle  $(P_\varepsilon^\delta)$  et la dynamique (2.6) est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.1.3.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.1,  $u$  est solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$  si et seulement si  $u$  est solution de (2.6).*

**Remarque 2.1.4.** 1. *On rappelle que si  $\delta = \varepsilon \rightarrow 0$ , il est prouvé dans [3] que la solution variationnelle  $u_\varepsilon^\delta$  converge vers la solution du problème local du tas de sable*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial \mathbb{I}_K(u) \ni f \text{ dans } ]0, T[ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où

$$K = \{z \in W^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega); \|\nabla z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\}.$$

2. *Dans le cas d'une distance euclidienne, il est connu que le problème (2.7) est équivalent au problème d'évolution de surface (1.1), où il faut gérer le problème dans un bon sens en tenant compte du fait que  $m$  est une mesure (voir par exemple [33] et ses références). Par conséquent, par le Théorème 2.1.3 et la remarque précédente, puisque  $\varepsilon = \delta \rightarrow 0$ , la solution  $u_\varepsilon^\delta$  de  $(P_\varepsilon^\delta)$  converge vers  $u$ , unique solution du modèle d'évolution de surface (1.1). Quant au noyau  $\mu_\varepsilon^\delta$ , il n'est pas difficile de voir que, en prenant une sous-suite  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $u_{\varepsilon_k}$  converge dans  $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^2)$  faiblement vers la mesure de Radon positive  $\mu$ . Cependant, la caractérisation de  $\mu$  est un problème ouvert; il pourrait être la densité mais la preuve n'est pas très claire.*

3. *On voit que  $(P_\varepsilon^\delta)$  est une équation couplée entre  $u$  et un noyau  $\mu$ . Grâce au Théorème 2.1.3, l'unicité de la solution  $u$  de  $(P_\varepsilon^\delta)$  est liée à l'unicité de la solution du problème d'évolution gouverné par un opérateur sous-différentiel. Pour le noyau inconnu de  $\mu$ , on voit qu'il n'a pas d'équation mais seulement une restriction sur son support. On ne sait pas si  $\mu$  est unique ou non, ou même si c'est une fonction régulière.*

## 2.2 Le modèle Stochastique d'Evans - Rezakhanlou pour un tas de sable

Le but de cette section est de faire une connexion entre l'EIDP  $(P_\varepsilon^\delta)$  et le modèle stochastique d'Evans-Rezakhanlou introduit dans [23]. On rappelle brièvement ce modèle. L'objectif est d'étudier l'évolution d'un tas de blocs de cubes au repos sur un plan lorsque de nouveaux cubes sont ajoutés au tas, ou placés sur une case inoccupée dans le plan ou sur le sommet d'une colonne disponible.

On considère un ensemble de sites marqués par un couple d'entiers  $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$ . L'expression de la source est une fonction  $\hat{f}: ]0, T[ \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  attribuant les cubes par unité de temps sur les sites  $i \in \mathbb{Z}^2$ .

L'évolution du tas est spécifié par deux règles pour l'ajout des cubes :

- Le cube est assigné à une position liée à plusieurs pentes en “escaliers” le long desquelles il peut se déplacer et le cube choisira au hasard une position parmi les chemins en escalier disponible.
- Le cube assigné n’a pas de position en escalier dérivant de la position où il a été placé et reste en place.

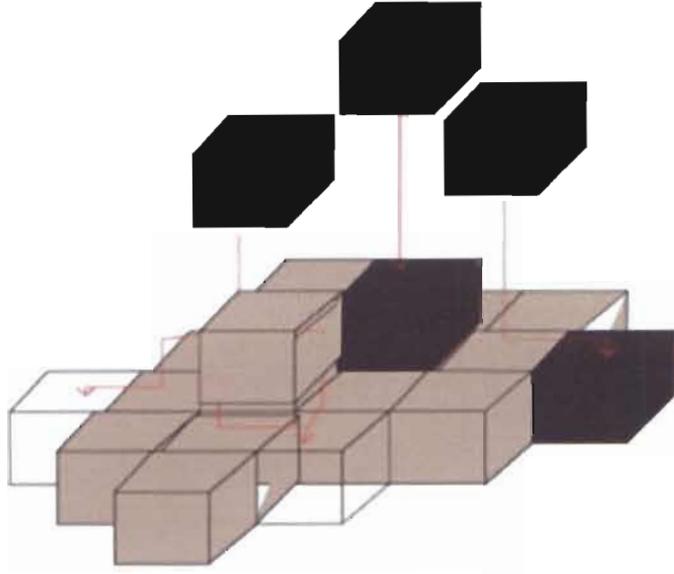


FIGURE 2.2 – Modèle d’Evans-Rezakhanlou

**Définition 2.2.1.** *Un escalier est une chaîne de positions adjacentes avec des hauteurs de différences égales à un cube.*

On suppose qu’un cube se déplace en chutant dans l’une des quatre directions (en avant, en arrière, à gauche, à droite) afin d’obtenir une configuration stable, ce qui signifie que les hauteurs de deux colonnes adjacentes quelconques de cube peuvent différer d’au plus un.

Même si la source est déterminée, il est clair qu’on a besoin d’utiliser une approche stochastique pour décrire l’évolution de la hauteur du tas.

**Définition 2.2.2.** *Un treillis (en anglais : lattice) est un ensemble partiellement ordonné dans lequel chaque couple d’éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.*

On considère le treillis  $\mathcal{O} := \mathbb{Z}^2$  munie de la norme

$$|i| = |i_1| + |i_2|$$

et on note  $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$  pour indiquer un site caractéristique dans  $\mathbb{Z}^2$ .

**Définition 2.2.3.** *On dit que  $i, j \in \mathbb{Z}^2$  sont adjacents, noté  $i \sim j$ , si  $|i - j| \leq 1$ .*

On considère maintenant l'espace de Hilbert

$$H := \{\eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \|\eta\| := \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \eta(i)^2 < \infty\}.$$

**Définition 2.2.4.** Une configuration (stable) est une fonction  $\eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que :

$$\begin{cases} |\eta(i) - \eta(j)| \leq 1 \text{ si } i \sim j \\ \text{et } \eta \text{ est à support borné.} \end{cases}$$

L'espace d'étude est

$$S := \{\eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \eta \text{ est une configuration}\}.$$

Pour simplifier la présentation, on suppose dans cette section que  $\hat{f}$ , la fonction contrôlant le taux de nouveaux cubes ajoutés (ou retirés du tas si  $f$  est négative) est positive. En déposant les cubes avec un taux  $\hat{f}$ , on génère un processus stochastique  $(\eta(t), t \geq 0)$  dans l'espace d'étude  $S$ . Il est clair que la probabilité que  $\eta(t)$  soit situé (au temps  $t$ ) dans un ensemble donné  $\Gamma$  de  $S$  sous la condition que le mouvement du système jusqu'au temps  $s$  ( $s < t$ ) est complètement connu, dépend seulement de l'état du système au temps  $s$ . En d'autres termes,  $(\eta(t), t \geq 0)$  est un processus de Markov. Pour étudier le processus  $(\eta(t), t \geq 0)$ , on a besoin de connaître son générateur infinitésimal  $A$ . Pour ce faire, les auteurs de [23] considèrent  $p(i, j, \xi)$  la probabilité qu'un cube placé sur une configuration donnée  $\xi \in S$  à la position  $i$  finira en  $j$  après être descendu en tombant par dessus le tas  $\xi$ . Par conséquent, pour tout  $i, j \in \mathbb{Z}^2$ , on a

$$0 \leq p(i, j, \xi) \leq 1 \text{ et } \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} p(i, j, \xi) = 1.$$

En outre, ils introduisent le facteur  $c(j, \eta, \tau)$  (un facteur fortement non local) enregistrant le taux auquel, au temps  $\tau$ , de nouveaux cubes viennent se poser sur le site  $j$  après sa chute. Le paramètre  $c$  est donné par

$$c(j, \eta, \tau) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} p(i, j, \eta(t)) \hat{f}(t, i) \text{ pour } (t, i) \in \mathbb{Z}^2 \times [0, \infty[ \quad (2.8)$$

et satisfait

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, \tau) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(t, i) \text{ car } \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} p(i, j, \eta(t)) = 1. \quad (2.9)$$

On indique par  $B(S)$  l'ensemble des fonctions bornées définies sur  $S$ .

Grâce à [23], le générateur infinitésimal du processus de Markov  $(\eta(t), t \geq 0)$  est donné par  $\mathcal{L}_t : F \in B(S) \rightarrow \mathcal{L}_t F \in B(S)$  l'opérateur dépendant du temps défini par

$$\mathcal{L}_t(F)(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \xi, t) (F(T_j(\xi)) - F(\xi)), \quad (2.10)$$

pour tout  $t > 0$  et  $\xi \in S$  et

$$T_j : \xi \in S \mapsto T_j(\xi) \in S \text{ avec } T_j(\xi) = \begin{cases} \xi(i) + 1 \text{ si } i \sim j \\ \xi(i) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour donner la connexion entre l'EIDP ( $P_\varepsilon^\delta$ ) et le processus de Markov ( $\eta(t), t \geq 0$ ), on pose  $\delta = \frac{1}{P}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{N}$  pour  $P, N \in \mathbb{N}^*$  et on suppose :

- (H<sub>1</sub>) :  $u_0 \equiv 0$ .
- (H<sub>2</sub>) :  $f \in BV(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$  est telle que  $f(t)$  est positive et à support compact pour tout  $t \in ]0, T[$ .
- (H<sub>3</sub>) :  $\hat{f} : ]0, T[ \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est donné par

$$\hat{f}(t, i) = f\left(\frac{t}{P}, \frac{i}{N}\right) \text{ pour tout } (t, i) \in [0, \infty[ \times \mathbb{R}^2. \quad (2.11)$$

On introduit le processus stochastique ( $\eta_{P,N}(t), t \geq 0$ ) donné par

$$\eta_{P,N}(t, x) = \frac{1}{P} \eta(Pt, [Nx]) \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{Z}^2,$$

où ( $\eta_{P,N}(t), t \geq 0$ ) est le processus de Markov généré par  $\hat{f}$ . On remarque que ( $\eta_{P,N}$ ) décrit l'évolution aléatoire de la hauteur des blocs de la structure dont la base est un coté de longueur  $\varepsilon = \frac{1}{N}$  et de hauteur  $\delta = \frac{1}{P}$ .

**Théorème 2.2.5.** *Sous les hypothèses (H<sub>1</sub> – H<sub>3</sub>), soit une solution de (2.7), où  $\varepsilon = 1/N$ ,  $\delta = \frac{1}{P}$ ,  $N, P \in \mathbb{N}^*$ , et  $\mathbb{R}^2$  muni de la norme*

$$|(x_1, x_2)| = |x_1| + |x_2|, \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.12)$$

Pour tout  $t \in ]0, T[$ , on a

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x) - \eta_{P,N}(t, x)|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \delta^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} f(s, \frac{[Nx]}{N}) dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \left| f(t, x) - f(s, \frac{[Nx]}{N}) \right| dx ds \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où  $[x] = ([x_1], [x_2])$  pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et, pour tout  $i = 1, 2$ ,  $[x_i]$  indique la partie entière du nombre réel  $x_i$ .

Une situation typique pour le Théorème 2.2.5 correspond au cas où  $f(t)$  est une constante sur chaque ensemble  $I_i = \{x \in \mathbb{R}^2; [Nx] = i\}$  avec  $i \in \mathbb{Z}^2$ , c'est à dire

$$f(t, x) = f\left(t, \frac{[Nx]}{N}\right) \text{ pour tout } (t, x) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R}^2. \quad (2.13)$$

En pareil situation, on imagine que la source est attribuée sur les sites  $I_i$  qui sont les blocs dont la base est un carré de longueur  $\varepsilon = 1/N$  et de hauteur  $\delta = \frac{1}{P}$ . En particulier, on a ce qui suit.

**Corollaire 2.2.6.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.5, on suppose de plus que (2.13) est satisfaite. Alors, pour tout  $t \in ]0, T[$ , on a*

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x) - \eta_{P,N}(t, x)|^2 \right] \leq \delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |f(s, x)| dx dt.$$

- Remarque 2.2.7.** 1. En général, la norme de  $\mathbb{R}^2$  est prise de façon arbitraire dans la formulation de  $(P_\varepsilon^\delta)$ . De plus, dans le Théorème 2.2.5,  $\mathbb{R}^2$  est équipé de la norme (2.12) selon la norme de  $\mathbb{Z}^2$ . Cela est lié au mouvement que l'on assigne aux cubes (en avant, en arrière, à gauche ou à droite). Maintenant, si on permet aux cubes de se déplacer dans huit directions en ajoutant les déplacements sur les diagonales alors, les résultats du théorème restent vraies en équipant  $\mathbb{Z}^2$  de la norme  $|(i_1, i_2)|_\infty = \max(|i_1|, |i_2|)$  et  $\mathbb{R}^2$  de la norme correspondante  $|(x_1, x_2)|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$ , pour  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .
2. Le Théorème 2.2.5 implique que la solution de l'EIDP est une approximation déterministe de la hauteur aléatoire  $\eta(t)$ , pour  $t \in ]0, T[$ . En effet, on fait  $(\varepsilon, \delta) \rightarrow (0, 0)$ , on constate que  $u$  et  $\eta_{P,N}$  coïncident avec la solution du problème non local du tas de sable (2.7).
3. Pour simplifier, on suppose ici la donnée initiale de la hauteur  $\eta(0) \equiv 0$  et  $u_0 \equiv 0$ . Des résultats similaires peuvent être prouvés pour des données initiales plus générales par redimensionnement et en utilisant les mêmes techniques.
4. En utilisant le fait que pour  $\eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $u(t, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , les solutions de (2.7) sont lipschitziennes continues, il est prouvé dans [23] que la convergence de  $\eta_{P,N}$  de  $u$  reste vraie dans  $C(\mathbb{R}^2)$  lorsque  $\delta = \varepsilon = \frac{1}{N} \rightarrow 0$ .

## Chapitre 3

# Equation Intégré-Différentielle Partielle (EIDP) stationnaire

Afin d'étudier  $(P_\varepsilon^\delta)$ , on utilise la théorie des sémi-groupes associés au problème d'évolution dans un espace de Hilbert. Cette approche connecte l'étude de l'équation d'évolution avec une équation stationnaire associée obtenue par la discrétisation implicite en temps d'Euler.

**Définition 3.1.** Pour  $\sigma > 0$ , on dit que  $(t_i, f_i)_{i=1, \dots, n}$  est une  $\sigma$ -discrétisation si  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < T = t_n$  avec  $t_i - t_{i-1} = \sigma$ ,  $f_1, \dots, f_n \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , tel que

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_i\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sigma.$$

**Définition 3.2.** Pour tout  $\sigma > 0$ , on dit que  $u_\sigma$  est une solution  $\sigma$ -approchée de  $(P_\varepsilon^\delta)$ , s'il existe  $(t_i, f_i)_{i=1, \dots, n}$  une  $\sigma$ -discrétisation telle que

$$u_\sigma = \begin{cases} u_0 \text{ pour } t \in [0, t_1[ \\ u_i \text{ pour } t \in [t_{i-1}, t_i[, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.1)$$

et  $u_i$  est solution de la discrétisation implicite en temps d'Euler de  $(P_\varepsilon^\delta)$  :

$$\begin{cases} u_i(x) + \sigma \int_{\mathbb{R}^2} (u_i(x) - u_i(y)) \mu(x, dy) = \sigma f_i(x) + u_{i-1} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^2, \\ u_i \in (K_\varepsilon^\delta), \mu_i \geq 0, \mu_i \ll (\mathcal{R}_\varepsilon^\delta)(u). \end{cases} \quad (3.2)$$

On voit que (3.2) est un cas particulier du problème stationnaire

$$\begin{cases} u(x) + \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y)) \mu(x, dy) = f(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^2, \\ u \in (K_\varepsilon^\delta), \mu \geq 0, \mu \ll (\mathcal{R}_\varepsilon^\delta)(u), \end{cases} \quad (3.3)$$

où on suppose sans perte de généralité que  $\sigma = 1$ . Ici,  $f$  est une fonction donnée dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et le couple  $(u, \mu)$  inconnu. Dans le but de prouver l'existence et l'unicité de la solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$  on étudie le problème stationnaire (3.3).

**Théorème 3.3.** Pour tout  $f \in C_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ , (3.3) a une unique solution  $u$  dans le sens suivant :

$$\begin{cases} u \in K_\varepsilon^\delta \cap \mathcal{C}_b, \exists \mu \in \mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2), \mu \ll \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u), \\ \int_{\mathbb{R}^2} u(x) \xi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y)) \xi(x) \mu(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \xi(x) dx, \end{cases} \quad (3.4)$$

pour tout  $\xi \in C_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ . De plus,  $u$  est solution de (3.4) si et seulement si

$$u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f), \quad (3.5)$$

où  $\mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}$  est la projection sur le convexe  $K_\varepsilon^\delta$  par rapport à la norme  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

La preuve du Théorème 3.0.10 est une conséquence du lemme suivant.

**Lemme 3.4.** *On suppose que  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Si  $u$  est solution de (3.3) alors  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f)$ .*

### Preuve

Soit  $u$  solution de (3.3). L'objectif est de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (f(x) - u(x))(u(x) - z(x)) dx \geq 0 \text{ pour tout } z \in K_\varepsilon^\delta. \quad (3.6)$$

Pour tout  $\lambda > 0$ , on note par  $\rho_\lambda$  la régularisation classique dans  $\mathbb{R}^2$  et  $z_\lambda = z * \rho_\lambda$ , la régularisation standard de  $z$  par convolution. On a que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} z_\lambda(x) = z(x)$  et que  $z_\lambda \in K_\varepsilon^\delta$ .

Utilisant  $u - z_\lambda$  dans l'équation intégrale satisfaite par  $u$  dans (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (f(x) - u(x))(u(x) - z(x)) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} (f(x) - u(x))(u(x) - z_\lambda(x)) dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))(u(x) - z_\lambda(x)) \mu(dx, dy) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_\lambda. \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} (u(x) - u(y))^2 &+ (u(x) - u(y))(u(y) - z_\lambda(y)) + (u(x) - u(y))(z_\lambda(y) - z_\lambda(x)) \\ &= (u(x) - u(y))[(u(x) - u(y)) + (u(y) - z_\lambda(y)) + (z_\lambda(y) - z_\lambda(x))] \\ &= (u(x) - u(y))[u(x) - u(y) + u(y) - z_\lambda(y) + z_\lambda(y) - z_\lambda(x)] \\ &= (u(x) - u(y))(u(x) - z_\lambda(x)). \end{aligned}$$

En intégrant doublement sur  $\mathbb{R}^2$  on a

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy) + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))(u(y) - z_\lambda(y)) \mu(dx, dy) + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))(z_\lambda(y) - z_\lambda(x)) \mu(dx, dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy) - I_\lambda + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))(z_\lambda(y) - z_\lambda(x)) \mu(dx, dy). \end{aligned}$$

Cela implique que

$$2I_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy) + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))(z_\lambda(y) - z_\lambda(x)) \mu(dx, dy).$$

En mettant  $(u(x) - u(y))^2$  en facteur dans l'égalité précédente, on obtient

$$2I_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))^2 \left( 1 + \frac{z_\lambda(y) - z_\lambda(x)}{u(x) - u(y)} \right) \mu(dx, dy).$$

Puisque  $u \in K_\varepsilon^\delta$  alors on a

$$2I_\lambda \geq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))^2 \left(1 - \frac{|z_\lambda(y) - z_\lambda(x)|}{\delta}\right) \mu(dx, dy)$$

et comme  $z_\lambda \in K_\varepsilon^\delta$  alors  $|z_\lambda(x) - z_\lambda(y)| \leq \delta$ .

Par conséquent,  $2I_\lambda \geq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))^2 \left(1 - \frac{\delta}{\delta}\right) \mu(dx, dy)$ .

On a donc  $2I_\lambda \geq 0$ , ce qui implique que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_\lambda \geq 0$ .

On obtient alors  $\int_{\mathbb{R}^2} (f(x) - u(x))(u(x) - z(x)) dx \geq 0$  pour tout  $z \in K_\varepsilon^\delta$ .  $\square$

Afin de prouver l'existence de la solution pour (3.3), on utilise l'équation non locale  $p$ -Laplacien

$$u_p(x) + \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) dy = f(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.7)$$

où  $J \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$  est une fonction radiale continue à support compacte dans  $B(0, \varepsilon)$ ,  $J(0) > 0$  et  $\int_{\mathbb{R}^2} J(x) dx = 1$ . Grâce à [3], on sait que pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , (3.7) a une unique solution  $u_p$ . De plus, pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , on a

$$\|u_p\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \quad (3.8)$$

et, si  $u_i$  est la solution correspondante pour  $f_i \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , pour  $i = 1, 2$  alors

$$\|u_1 - u_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \quad (3.9)$$

et

$$\|(u_1 - u_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \quad (3.10)$$

L'objectif est de prouver qu'en passant à la limite dans (3.7), on obtient la solution de (3.4).

D'abord, on donne quelques estimations qui seront utiles dans la suite.

**Lemme 3.5.** *On suppose  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  et considérons  $u_p$  solution de (3.7). Alors,*

$$\frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy = 2 \int_{\mathbb{R}^2} (f(x) - u_p(x)) u_p(x) dx \quad (3.11)$$

et

$$\frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx. \quad (3.12)$$

De plus, pour tout  $h > 0$ ,

$$\|u_p(\cdot + h) - u_p(\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}, \text{ pour tout } 1 \leq q \leq \infty \quad (3.13)$$

et pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^q dx dy \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \right)^{\frac{q}{p}}. \quad (3.14)$$

### Preuve

On doit montrer que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(x) dx dy. \end{aligned} \tag{3.15}$$

On a que

$$\begin{aligned} |u_p(x) - u_p(y)|^p &= |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y))^2 \\ &\doteq |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) (u_p(x) - u_p(y)) \\ &= |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(x) \\ &\quad - |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(y). \end{aligned}$$

Par suite, on obtient que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(x) dx dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(y) dx dy. \end{aligned}$$

$$\text{On pose } I = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(y) dx dy.$$

En permutant  $x$  et  $y$  dans l'égalité précédente on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(y-x) |u_p(y) - u_p(x)|^{p-2} (u_p(y) - u_p(x)) u_p(x) dx dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(y-x) |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(x) dx dy. \end{aligned}$$

Aussi, comme  $J$  est symétrique, on a

$$I = - \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(x) dx dy.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(x) dx dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(x) dx dy. \end{aligned}$$

On obtient donc en conclusion que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(x) dx dy.
\end{aligned}$$

□

### Montrons l'égalité (3.11)

On multiplie (3.7) par  $u_p$  et on intègre sur  $\mathbb{R}^2$  pour obtenir pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_p(x) u_p(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) u_p(x) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) u_p(x) dx.$$

En utilisant (3.15), on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_p(x) u_p(x) dx + \frac{1}{2\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) u_p(x) dx,$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) u_p(x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} u_p(x) u_p(x) dx.$$

D'où (3.11). □

### Montrons l'inégalité (3.12)

Montrons que  $\|u_p\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ .

On sait que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_p(x) u_p(x) dx + \frac{1}{2\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) u_p(x) dx$$

et  $\frac{1}{2\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \geq 0$ ; par conséquent,

$$\text{on a } \int_{\mathbb{R}^2} u_p(x) u_p(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} f(x) u_p(x) dx.$$

Ce qui implique que  $\|u_p\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ .

D'après (3.11), on a que  $\int_{\mathbb{R}^2} (f(x) - u_p(x)) u_p(x) dx \geq 0$ , donc,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) u_p(x) \geq \int_{\mathbb{R}^2} u_p(x) u_p(x) dx \geq 0.$$

Par suite, on a

$$\frac{1}{2\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^2} f(x) u_p(x) dx.$$

$$\text{Or, } \int_{\mathbb{R}^2} f(x) u_p(x) dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |u_p(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui implique que  $\frac{1}{2\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y)|u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx$

car  $\left( \int_{\mathbb{R}^2} |u_p(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ .

D' où le résultat  $\square$

### Montrons l'inégalité (3.13)

On considère  $u_p(\cdot + h)$  comme solution de (3.7) correspondante à  $f(\cdot + h)$ , alors, en utilisant l'expression (3.9) avec  $u_1 = u_p(\cdot + h)$ ,  $u_2 = u_p$ ,  $f_1 = f(\cdot + h)$  et  $f_2 = f$ , on obtient :

$$\|u_p(\cdot + h) - u_p(\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}. \square$$

### Montrons l'inégalité (3.14)

On pose

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y)|u_p(x) - u_p(y)|^q dx dy.$$

On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y)|u_p(x) - u_p(y)|^q dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y)^{\left(\frac{q}{p} + \frac{p-q}{p}\right)} |u_p(x) - u_p(y)|^q dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y)^{\frac{q}{p}} |u_p(x) - u_p(y)|^q J^{\frac{p-q}{p}}(x-y) dx dy. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} I &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y)|u_p(x) - u_p(y)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) dx dy \right)^{\frac{p-q}{p}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y)|u_p(x) - u_p(y)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \text{ car } \int_{\mathbb{R}^2} J(x) dx = 1. \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 3.6.** Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  est à support compact et  $u_p \rightarrow u$  presque partout dans  $\mathbb{R}^2$ , alors  $u$  est à support compact.

### Preuve

Pour démontrer le lemme, on suppose que  $\text{Supp}(f) \subseteq B(0, R)$  pour  $R > 0$  et on montre qu'il existe  $R' > 0$ , tel que

$$\text{Supp}(u) \subseteq B(0, R'). \quad (3.16)$$

On voit que pour tout  $\lambda > 0$ , on a

$$|f(x)| \leq d_R(x) := (\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \lambda(R + |x|))^+, \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.17)$$

En utilisant (3.7), on déduit que

$$u_p(x) - d_R(x) + \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) dy \leq 0 \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.18)$$

car

$$|f(x)| \leq d_R(x).$$

En effet, de (3.7) on a

$$u_p(x) + \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) dy = f(x).$$

Comme  $f(x) \leq |f(x)|$  donc, on obtient

$$u_p(x) + \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) dy = f(x) \leq |f(x)|.$$

Par conséquent,

$$u_p(x) + \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) dy = f(x) \leq |f(x)| \leq d_R(x);$$

d'où

$$u_p(x) - d_R(x) + \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) dy \leq 0$$

c'est à dire

$$u_p(x) - d_R(x) + \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) \leq 0.$$

Aussi, on a

$$u_p + d_R(x) + \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) dy \geq 0 \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.19)$$

car étant donné que  $-d_R(x) \leq f(x) \leq d_R(x)$ ,

$$-d_R(x) \leq f(x) = u_p(x) + \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) dy.$$

Par conséquent,

$$u_p(x) + d_R(x) + \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y)) dy \geq 0$$

c'est à dire

$$u_p(x) + d_R(x) + \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) dy \geq 0,$$

où on note  $\Phi_p(r) = |r|^{p-2}r$  pour tout  $r \in \mathbb{R}$  et  $U_p(x,y) = u_p(x) - u_p(y)$  pour  $x, y \in \mathbb{R}^2$ .

En multipliant (3.18) par  $(u_p(x) - d_R(x))^+$  et en intégrant sur  $\mathbb{R}^2$ , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (u_p - d_R(x))(u_p(x) - d_R(x))^+ dx + \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y))(u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \leq 0.$$

Comme  $(u_p(x) - d_R(x))^+ = \sup((u_p(x) - d_R(x)), 0)$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (u_p - d_R(x))^+ (u_p(x) - d_R(x))^+ dx + \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \leq 0;$$

donc,

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} ((u_p - d_R(x))^+)^2 dx \leq -\frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy.$$

$$\begin{aligned} & 2 \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ &+ \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy. \end{aligned}$$

En permutant  $x$  et  $y$  dans le second terme de l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned} & 2 \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ &+ \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(y-x) \Phi_p(U_p(y, x)) (u_p(y) - d_R(y))^+ dx dy. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & 2 \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ &- \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(y-x) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(y) - d_R(y))^+ dx dy. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x, y)) ((u_p(x) - d_R(x))^+ - (u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy. \quad (3.20) \end{aligned}$$

De plus, puisque

$$(\Phi_p(U_p(x, y)) - \Phi_p(D_p(x, y))) ((u_p(x) - d_R(x))^+ - (u_p(y) - d_R(y))^+) \geq 0$$

où  $D_p(x, y) = d_R(x) - d_R(y)$ , pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) (\Phi_p(U_p(x, y)) - \Phi_p(D_p(x, y))) ((u_p(x) - d_R(x))^+ - (u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) ((u_p(x) - d_R(x))^+ - (u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy \\ & \geq \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(D_p(x,y)) ((u_p(x) - d_R(x))^+ - (u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy. \end{aligned}$$

En utilisant (3.20), on obtient

$$\begin{aligned} & \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ & \geq \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(D_p(x,y)) ((u_p(x) - d_R(x))^+ - (u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy \\ & \geq \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(D_p(x,y)) (u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} I & \leq \frac{-1}{\delta^{p-2}} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(D_p(x,y)) ((u_p(x) - d_R(x))^+) dx dy \\ & \leq \delta \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{d_R(x) - d_R(y)}{\delta} \right|^{p-1} dx dy, \quad (3.21) \end{aligned}$$

où on utilise le fait que  $\|u_p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ .

Puisque  $|\nabla d_R(x)| < \delta$ , pour  $x \in \mathbb{R}^2$ , on a  $|d_R(x) - d_R(y)| \leq \lambda \varepsilon$ , pour tout  $|x - y| \leq \varepsilon$  et (3.21) implique que

$$\int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} ((u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx \leq \delta \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \left( \frac{\lambda \varepsilon}{\delta} \right)^{p-1} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) dx dy.$$

Maintenant, on choisit  $\varepsilon > 0$  de sorte que  $\frac{\lambda \varepsilon}{\delta} < 1$  pour obtenir

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} ((u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx = 0.$$

Grâce au Lemme de Fatou, on déduit que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} ((u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx = 0.$$

Ce qui implique que  $((u_p(x) - d_R(x))^+)^2 = 0$  p.p. .

Par conséquent,

$$u \leq d_R \text{ pour presque partout } x \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

Multiplions (3.19) par  $(-u_p(x) - d_R(x))^+$  et intégrons sur  $\mathbb{R}^2$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} (u_p(x) + d_R(x)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx \\ & + \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \geq 0. \end{aligned}$$

Comme  $(-u_p(x) - d_R(x))^+ = \sup(-u_p(x) - d_R(x), 0)$  donc,

$(u_p(x) + d_R(x)) = -(-u_p(x) - d_R(x))^+$  ; on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^2} ((-u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx \\ & + \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} ((-u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx \\ & - \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \leq 0. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} ((-u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx \leq \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy, \\ & 2 \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ & = \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ & + \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy. \end{aligned}$$

En permutant  $x$  et  $y$  dans le second terme de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} & 2 \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ & = \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ & + \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(y-x) \Phi_p(U_p(y,x)) (-u_p(y) - d_R(y))^+ dx dy. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & 2 \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ & = \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ & - \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(y-x) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(y) - d_R(y))^+ dx dy. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ & = \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) ((-u_p(x) - d_R(x))^+ - (-u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy. \end{aligned} \tag{3.22}$$

De plus, puisque

$$(\Phi_p(U_p(x,y)) - \Phi_p(D_p(x,y))) ((-u_p(x) - d_R(x))^+ - (-u_p(y) - d_R(y))^+) \geq 0$$

où  $D_p(x,y) = d_R(x) - d_R(y)$ , pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) (\Phi_p(U_p(x,y)) - \Phi_p(D_p(x,y))) ((-u_p(x) - d_R(x))^+ - (-u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy \geq 0$$

donc

$$\begin{aligned} & \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) ((-u_p(x) - d_R(x))^+ - (-u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy \\ & \geq \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(D_p(x,y)) ((-u_p(x) - d_R(x))^+ - (-u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy. \end{aligned}$$

En utilisant (3.22), on obtient

$$\begin{aligned} & \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(U_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy \\ & \geq \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(D_p(x,y)) ((-u_p(x) - d_R(x))^+ - (-u_p(y) - d_R(y))^+) dx dy \\ & \geq \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(D_p(x,y)) (-u_p(x) - d_R(x))^+ dx dy. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} I & \leq \frac{-1}{\delta^{p-2}} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \Phi_p(D_p(x,y)) ((-u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx dy, \\ & \leq \delta \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{d_R(x) - d_R(y)}{\delta} \right|^{p-1} dx dy, \end{aligned} \quad (3.23)$$

où on utilise le fait que  $\|u_p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ .

Puisque  $|\nabla d_R(x)| < \delta$ , pour  $x \in \mathbb{R}^2$ , on a  $|d_R(x) - d_R(y)| \leq \lambda \varepsilon$ , pour tout  $|x - y| \leq \varepsilon$  et (3.23) implique que

$$\int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} ((-u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx \leq \delta \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \left( \frac{\lambda \varepsilon}{\delta} \right)^{p-1} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} J(x-y) dx dy.$$

Maintenant, on choisit  $\varepsilon > 0$  de sorte que  $\frac{\lambda \varepsilon}{\delta} < 1$  pour obtenir

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} ((-u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx = 0.$$

Grâce au Lemme de Fatou, on déduit que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} ((-u_p(x) - d_R(x))^+)^2 dx = 0.$$

Ce qui implique que  $((-u_p(x) - d_R(x))^+)^2 = 0$  p.p. .

Par conséquent,

$$u(x) \geq -d_R(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

On conclut donc que  $-d_R(x) \leq u(x) \leq d_R(x)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Ainsi, pour tout  $0 < \lambda < \frac{\delta}{\varepsilon}$ ,

$$\text{Supp}(u) \subseteq B(0, R'_\lambda) \text{ où } R'_\lambda = R + \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

En faisant  $\lambda \rightarrow \frac{\delta}{\varepsilon}$ , on obtient  $R' = R + \frac{\varepsilon}{\delta} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ , ce qui donne (3.16).  $\square$

**Lemme 3.7.** Si  $f \in C_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$  alors

$$u_p \rightarrow u \text{ dans } C(\mathbb{R}^2) \text{ et dans } L^2(\mathbb{R}^2), \quad (3.24)$$

où  $u \in C_0(\mathbb{R}^2)$  et  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f)$ .

### Preuve

D'abord, on suppose que  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ . En utilisant (3.13) avec  $q = \infty$  et le Théorème d'Ascoli, on déduit l'existence de  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$  et une sous-suite que l'on note aussi par  $p$  tel que (3.24) soit satisfaite. De plus, grâce à (3.9), avec  $q = 2$ , on voit que  $u_p \rightarrow u$  faiblement dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . On doit montrer que  $u \in K_\varepsilon^\delta$ . Grâce à (3.12) et (3.14), on a

$$\begin{aligned} I_p &:= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^q dx dy \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^q \right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \left( 2\delta^{\frac{q(p-2)}{p}} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 \right)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

On prend  $q > 1$  fixé et on fait  $p \rightarrow \infty$  en utilisant (3.22), pour déduire que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u(x) - u(y)}{\delta} \right|^q dx dy \leq 1.$$

Puisque  $q > 1$  est arbitraire, on déduit que  $|u(x) - u(y)| \leq \delta$  pour  $x - y \in \text{Supp}(J) = B(0, \varepsilon)$ . Ce qui implique que  $|u(x) - u(y)| \leq \delta$  pour  $|x - y| \leq \varepsilon$  et donc,  $u \in K_\varepsilon^\delta$ . Maintenant, pour tout  $\xi \in K_\varepsilon^\delta$ , on doit montrer que  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f)$ , autrement dit, on doit montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (f(x) - u(x))(u(x) - \xi(x)) \leq 0, \text{ pour tout } \xi \in K_\varepsilon^\delta. \quad (3.25)$$

On montre que  $\frac{n}{n+1}\xi \in K_\varepsilon^\delta$  : en effet, comme  $\xi \in K_\varepsilon^\delta$ , alors  $|\xi(x) - \xi(y)| \leq \delta$ .

En multipliant l'inégalité précédente par  $\frac{n}{n+1}$  on a  $\frac{n}{n+1}|\xi(x) - \xi(y)| \leq \frac{n}{n+1}\delta$ ; ce qui implique que  $|\frac{n}{n+1}\xi(x) - \frac{n}{n+1}\xi(y)| \leq \frac{n}{n+1}\delta$ .

Etant donné que  $\frac{n}{n+1} \leq 1$ , il résulte que  $|\frac{n}{n+1}\xi(x) - \frac{n}{n+1}\xi(y)| \leq \delta$ .

On prend  $u_p - \frac{n}{n+1}\xi$  comme fonction test dans (3.7), ce qui donne

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} (u_p(x) - f(x))(u_p(x) - \frac{n}{n+1}\xi(x)) dx \\ &\geq - \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{\xi(x) - \xi(y)}{\delta(n+1)/n} \right|^{p-2} \left( u_p(x) - \frac{n}{n+1}\xi(x) \right) dx dy. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Puisque  $|\frac{\xi(x) - \xi(y)}{\delta(n+1)/n}| \leq \frac{n}{n+1}\varepsilon \leq \varepsilon$ ,  $\text{supp}(J) = B(0, \varepsilon)$  et  $\|u_p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ , alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{\xi(x) - \xi(y)}{\delta(n+1)/n} \right|^{p-2} \left( u_p(x) - \frac{n}{n+1}\xi(x) \right) dx dy = 0. \quad (3.27)$$

Par conséquent, en faisant  $p \rightarrow \infty$  dans (3.26) et en utilisant (3.27), on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x) \left( u(x) - \frac{n}{n+1}\xi(x) \right) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \left( u(x) - \frac{n}{n+1}\xi(x) \right) dx.$$

Ensuite, en faisant  $n \rightarrow \infty$  on obtient (3.23) car  $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$  et on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x) (u(x) - \xi(x)) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} f(x) (u(x) - \xi(x)) dx,$$

d'où (3.25).

Maintenant, pour tout  $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$ , on considère une suite  $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ , telle que

$$f_n \rightarrow f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2).$$

On note par  $u_{pn}$  la solution de (3.7) correspondante à  $f_n$ . Grâce à la propriété de contraction  $L^\infty$  de  $\mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}$  et de la solution de (3.7), on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta} f(x) - u_p(x)| &\leq \|\mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta} f - \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta} f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta} f_n - u_{pn}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad + \|u_{pn} - u_p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \|f - f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta} f_n - u_{pn}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Grâce à la première partie de la preuve, il découle que

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} |\mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta} f(x) - u_p(x)| \leq \|f - f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

En faisant  $n \rightarrow \infty$  ensuite dans l'inégalité précédente, on déduit aussi que (3.24) est vérifiée.  $\square$

**Lemme 3.8.** *Si  $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f)$ , alors  $u$  est solution de (3.4).*

### Preuve

On rappelle que  $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$  et

$$u_p \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2), \quad (3.28)$$

où  $u_p$  est la solution de (3.7). On doit montrer que  $u$  est solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$ . Pour ce faire, on prend

$$\mu_p := J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2}$$

et on montre que la limite faible de  $u_p$  dans  $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+$  est un noyau pour l'équation intégrale de  $(P_\varepsilon^\delta)$ . Grâce à (3.12) et (3.15) avec  $q = p - 2$ , on voit que

$$\int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \mu_p(x,y) dx dy \leq \left( \frac{2}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 \right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

En effet, on a

$$\mu_p = J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2}.$$

En posant  $q = p - 2$  dans (3.12) et (3.14), on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mu_p(x, y) dx dy &\leq \frac{1}{\delta^{p-2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\delta^{p-2}} \left( \frac{\delta^{p-2}}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&\leq \frac{(\delta^{p-2})^{\frac{p-2}{p}}}{\delta^{p-2}} \left( \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&\leq (\delta^{p-2})^{\frac{p-2}{p}-1} \left( \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&\leq (\delta^{p-2})^{\frac{-2}{p}} \left( \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&\leq (\delta^{-2})^{\frac{p-2}{p}} \left( \frac{1}{\delta^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) |u_p(x) - u_p(y)|^p dx dy \right)^{\frac{p-2}{p}}.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.12), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mu_p(x, y) dx dy \leq (\delta^{-2})^{\frac{p-2}{p}} \left( 2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{p-2}{p}},$$

ce qui implique que  $\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mu_p(x, y) dx dy \leq \left( \frac{2}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{p-2}{p}}$ .

Par conséquent,  $\mu_p$  est borné dans  $L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  et donc, il existe  $\mu \in \mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+$  tel que

$$\mu_p \rightarrow \mu \text{ faiblement } * \text{ dans } \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+. \quad (3.29)$$

En conclusion, puisque  $\mu_p$  est symétrique, alors  $\mu \in \mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^+$ . Maintenant, on montre que la mesure  $\mu$  est à support dans  $[|u(x) - u(y)| = \delta \text{ et } |x - y| \leq \varepsilon]$ . Il est clair que  $\mu \ll [ |x - y| \leq \varepsilon ]$ . On prend  $0 < \lambda < \delta$  et  $A$  un ensemble ouvert tels que  $A \subseteq [ |u(x) - u(y)| = \delta \text{ et } |x - y| \leq \varepsilon ]$ . Grâce à (3.27), il existe  $p_0 > 1$  tel que, pour tout  $p > p_0$ , on a

$$\sup_{(x,y) \in A} |u_p(x) - u_p(y)| < \delta - \lambda.$$

Par conséquent,

$$\mu(A) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \int \int_A J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} dx dy = 0.$$

Ce qui implique que

$$\mu \ll [ |u(x) - u(y)| \geq \delta - \lambda \text{ et } |x - y| \leq \varepsilon ].$$

Puisque  $0 < \lambda < \delta$  est arbitraire, on déduit que :

$$\begin{aligned}
\text{Supp}(\mu) &\subseteq \cap_{0 < \lambda < \delta} [ |u(x) - u(y)| \geq \delta - \lambda \text{ et } |x - y| \leq \varepsilon ] \\
&\subseteq [ |u(x) - u(y)| = \delta \text{ et } |x - y| \leq \varepsilon ].
\end{aligned}$$

Maintenant, en multipliant (3.7) par une fonction test  $\xi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$  et en intégrant sur  $\mathbb{R}^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u_p(x)\xi(x)dx + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y))\xi(x)dx dy \quad (3.30) \\ = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\xi(x)dx. \end{aligned}$$

Grâce à (3.28), le premier terme de (3.30) converge vers  $\int_{\mathbb{R}^2} u(x)\xi(x)dx$  et  $(u_p(x) - u_p(y))\xi(x) \rightarrow (u(x) - u(y))\xi(x)$  uniformément pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} J(x-y) \left| \frac{u_p(x) - u_p(y)}{\delta} \right|^{p-2} (u_p(x) - u_p(y))\xi(x)dx dy \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(y) - u(x))\xi(x)dx dy. \end{aligned}$$

Cela implique que  $u$  satisfait l'équation intégrale (3.4) pour tout  $\xi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ . Par densité, on déduit que cela reste vrai pour tout  $\xi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ . Par conséquent,  $u$  est solution de (3.4).  $\square$

## Chapitre 4

# Preuve des principaux résultats

### 4.1 Existence et unicité de solution pour l'EIDP

Grâce au Théorème 3.0.10, les preuves des théorèmes 2.1.1 et 2.1.3 découlent en utilisant les arguments de la théorie des sémi-groupes non linéaires. Tout d'abord, rappelons que

$$\mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta} = (I + \lambda \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta})^{-1} \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Par conséquent, le problème stationnaire (3.3) est équivalent à

$$u + \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta} \ni f. \quad (4.1)$$

En particulier, le Théorème 3.0.10 donne une caractérisation de  $\partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}$  en terme d'équation intégrale.

**Corollaire 4.1.1.** *On considère  $f \in C_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $u \in C_0(\mathbb{R}^2) \cap K_\varepsilon^\delta$ . Alors,  $f \in \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}$  si et seulement s'il existe  $\mu \in \mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  tel que*

$$\mu \llcorner \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(u)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y)) \xi(x) \mu(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \xi(x) dx,$$

pour tout  $\xi \in C_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ .

#### Preuve

On rappelle que :

Si  $f \in \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(u)$  alors on a  $\int_{\mathbb{R}^2} f(t)(u(t) - z) dx \geq 0$  pour tout  $z \in K_\varepsilon^\delta$ .

Si  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f + u)$  alors,  $u \in K_\varepsilon^\delta$  et  $\int_{\mathbb{R}^2} f(t)(z - u(t)) dx \leq 0$ .

On doit montrer d'abord que  $f \in \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}$  si et seulement si  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f + u)$ .

• On suppose que  $f \in \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(u)$  alors, par définition, on a  $\int_{\mathbb{R}^2} f(t)(u(t) - z) dx \geq 0$  pour tout  $z \in K_\varepsilon^\delta$ . Autrement dit, on a  $\int_{\mathbb{R}^2} f(t)(z - u(t)) dx \leq 0$  et donc,  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f + u)$ .

- On suppose maintenant que  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f + u)$ , alors par définition, on a  $u \in K_\varepsilon^\delta$  et

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(t)(z - u(t))dx \leq 0 \text{ d'où } f \in \partial\mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(u).$$

Par conséquent, grâce au Théorème 3.0.10, si  $u$  est solution de (3.4), alors  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}$ .

Etant donné que  $u = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(f + u)$  alors on a  $u$  est solution de (3.4) en posant  $f = f + u$ .

Par conséquent, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x)\xi(x)dx + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))\xi(x)\mu(x, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} (f(x) + u(x))\xi(x)dx.$$

Par simplification, on obtient donc que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(x) - u(y))\xi(x)\mu(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\xi(x)dx. \square$$

Le Corollaire 4.1.1 suggère une connexion entre le problème  $(P_\varepsilon^\delta)$  et le problème (2.6).

On sait, grâce à [16], que  $\partial\mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}$  est un graphe maximal monotone dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et, grâce à [11], que, pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ , si  $u_i$  est la solution correspondante à  $f_i \in L^q(\mathbb{R}^2)$  pour  $i = 1, 2$ , alors,

$$\|u_1 - u_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \quad (4.2)$$

et

$$\|(u_1 - u_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.3)$$

En particulier, cela donne le concept de solution variationnelle pour  $(P_\varepsilon^\delta)$ . Cela correspond à la solution de l'équation d'évolution (2.6).

**Définition 4.1.2.** Pour une donnée  $f \in L^2_{loc}(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$  et  $u_0 \in K_\varepsilon^\delta$ , on dit que  $u$  (resp.  $u_\sigma$ ) est solution variationnelle (resp., solution variationnelle  $\sigma$ -approchée) de  $(P_\varepsilon^\delta)$  si  $u \in W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$ ,  $u(0) = u_0$ , et, pour tout  $t \in ]0, T[$ ,  $u(t) \in K_\varepsilon^\delta$  et

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( f(t) - \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right) (u(t) - z) \geq 0 \text{ pour tout } z \in K_\varepsilon^\delta$$

(resp.  $u_\sigma$  est donné par (3.1) et  $u_i = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(u_{i-1} + \sigma f^i)$ ).

En utilisant la théorie des sémi-groupes dans les espaces de Hilbert pour les problèmes d'évolution gouvernés par des opérateurs sous-différentiels (cf. [12, 16, 36]), on a le résultat suivant.

**Théorème 4.1.3.** On considère  $u_0 \in K_\varepsilon^\delta$ ,  $T > 0$  et  $f \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$  alors on a :

1. Pour tout  $\sigma > 0$  et pour toute  $\sigma$ -discrétisation du problème  $(P_\varepsilon^\delta)$ , il existe une unique solution variationnelle  $\sigma$ -approchée de  $(P_\varepsilon^\delta)$ .
2. Il existe un unique  $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2))$  tel que  $u(0) = u_0$  et, lorsque  $\sigma \rightarrow 0$ ,

$$u_\sigma \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2)).$$

3. Si  $f \in BV(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$  alors, la fonction  $u$  donnée en 2 est l'unique solution de (2.6), appelée solution variationnelle de  $(P_\varepsilon^\delta)$ .
4. Si, pour  $i = 1, 2$ ,  $u_i$  est la solution (donnée en 2) correspondante à  $f_i$ , alors pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ ,

$$\frac{d}{dt} \|u_1 - u_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[)$$

et

$$\frac{d}{dt} \|(u_1 - u_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T]).$$

5. En particulier, si  $f \geq 0$  alors,  $u \geq 0$  presque partout dans  $Q$ .

### Preuve

1) Soit  $(t_i, f_i)$  une  $\sigma$ - discrétisation du problème  $(P_\varepsilon^\delta)$ .

On considère

$$(P) \begin{cases} u_i(x) + \sigma \int_{\mathbb{R}^2} (u_i(x) - u_i(y)) \mu(x, dy) = \sigma f_i(x) + u_{i-1} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^2, \\ u_i \in (K_\varepsilon^\delta), \mu_i \geq 0, \mu_i \ll (\mathcal{R}_\varepsilon^\delta)(u), \end{cases}$$

la discrétisation en temps d'Euler associée à  $(P_\varepsilon^\delta)$ .

On pose  $u_\sigma$  défini comme suit

$$u_\sigma = \begin{cases} u_0 \text{ pour } t \in [0, t_1[, \\ u_i \text{ pour } t \in [t_{i-1}, t_i[, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

$u_\sigma$  est donc une solution  $\sigma$ -approchée de  $(P_\varepsilon^\delta)$ . De plus,  $u_i$  est solution variationnelle du système précédent, alors  $u_i = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(u_{i-1} + \sigma f_i)$ . Par conséquent  $u_i$  est solution faible du problème (P). On peut donc conclure que  $u_\sigma$  est l'unique solution  $\sigma$ -approchée de  $(P_\varepsilon^\delta)$ .

2) D'après le Théorème 1.4.4, le problème  $u_t + \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta} = 0$  telle que  $u(0) = u_0$  admet une unique solution variationnelle. En appliquant la définition 1.4.1, on déduit que

$$u_\sigma \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)).$$

3) Utilisant le Théorème 1.4.5, la partie 3 découle.

4) Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions faibles du problème associé à  $f_1$  et  $f_2$  respectivement ; on a :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} + \int_s^t \|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} d\tau;$$

ce qui équivaut à

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} - \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \int_s^t \|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} d\tau.$$

Par conséquent,  $\forall s, t \in [0, T]$  avec  $s < t$ , on a :

$$\int_s^t \frac{d}{d\tau} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \int_s^t \|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} d\tau.$$

Puisque  $\forall s, t \in [0, T]$  avec  $s < t$  on a  $[s, t] \subset [0, T]$ , on peut écrire

$$\int_0^T \frac{d}{d\tau} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \int_0^T \|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} d\tau.$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{d\tau} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}.$$

En conclusion, on a

$$\frac{d}{dt} \|u_1 - u_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}.$$

Aussi, on a  $|u_1(t) - u_2(t)| \leq |u_1(s) - u_2(s)| + \int_s^t |f_1(\tau) - f_2(\tau)| d\tau$ .

Puisque  $|u_1(t) - u_2(t)| \geq 0$ , on a  $|u_1(t) - u_2(t)| = (u_1(t) - u_2(t))^+$ ; de même, on a  $|f_1(\tau) - f_2(\tau)| = (f_1(\tau) - f_2(\tau))^+$ .

Par conséquent,

$$(u_1(t) - u_2(t))^+ \leq (u_1(s) - u_2(s))^+ + \int_s^t (f_1(\tau) - f_2(\tau))^+ d\tau.$$

Ainsi, pour tout  $s, t$  tels que  $s < t$ , on a :

$$\int_s^t \frac{d}{d\tau} (u_1(\tau) - u_2(\tau))^+ d\tau \leq \int_s^t (f_1(\tau) - f_2(\tau))^+ d\tau.$$

Puisque pour tout  $s, t \in [0, T]$  on a  $[s, t] \subset [0, T]$  on peut écrire

$$\int_0^T \frac{d}{d\tau} (u_1(\tau) - u_2(\tau))^+ d\tau \leq \int_0^T (f_1(\tau) - f_2(\tau))^+ d\tau.$$

D'où,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_0^T \frac{d}{d\tau} (u_1(\tau) - u_2(\tau))^+ d\tau \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^T (f_1(\tau) - f_2(\tau))^+ d\tau;$$

c'est à dire

$$\int_0^T \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^2} (u_1(\tau) - u_2(\tau))^+ d\tau \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(\tau) - f_2(\tau))^+ d\tau.$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^2} (u_1(\tau) - u_2(\tau))^+ d\tau \leq \int_{\mathbb{R}^2} (f_1(\tau) - f_2(\tau))^+ d\tau.$$

En conclusion, on a

$$\frac{d}{dt} \|(u_1 - u_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

5) On suppose que  $f \geq 0$  alors,  $f_i \geq 0$  pour  $i = 1, 2$ .

On remarque que  $(0, 0)$  est solution du problème. On pose  $u_1 = 0$  et  $f_1 = 0$ , en utilisant (4.3) on obtient :

$$\|(-u_2)^+\|_{L^1} \leq \|(-f_2)^+\|_{L^1}.$$

si  $f_2 \geq 0$ , alors  $-f_2 \leq 0$ . Par conséquent,  $(-f_2)^+ = 0$  et donc  $\|(-f_2)^+\|_{L^1} = 0$ .

On déduit donc que  $\|(-u_2)^+\| = 0$ .

$$\begin{aligned} \|(-u_2)^+\|_{L^1} = 0 &\implies (-u_2)^+ = 0 \text{ p.p.} \\ &\implies -u_2 \leq 0 \text{ p.p.} \\ &\implies u_2 \geq 0 \text{ p.p.} \end{aligned}$$

On voit alors que si  $f_2 \geq 0$  alors  $u_2 \geq 0$ .

De même on montre que si  $f_1 \geq 0$  alors  $u_1 \geq 0$ .

En conclusion, on a que si  $f \geq 0$ , alors  $u \geq 0$  presque partout dans  $Q$ .  $\square$

Enfin, utilisant la caractérisation de l'opérateur  $\partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}$  (cf. Corollaire 4.1.1) et le Théorème 4.1.3, on montre l'existence et l'unicité de la solution pour  $(P_\varepsilon^\delta)$ . Pour ce faire, pour commencer on démontre le lemme suivant.

**Lemme 4.1.4** *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.1, soit  $u$  solution de (2.6). Alors, pour tout  $t \geq 0$ ,  $u(t) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ .*

### Preuve

On considère

$$u_i = \mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}(u_{i-1} + \sigma f^i) \text{ pour } i = 1, \dots, n,$$

où  $(t_i, f_i)_{i=1, \dots, n}$  est une  $\sigma$ -discrétisation de (2.6). On peut supposer sans perte de généralité que  $f_i \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$  et on prend

$$f_\sigma(t) = f_i \text{ pour tout } t \in ]t_{i-1}, t_i[ \text{ et } i = 1, \dots, n.$$

En utilisant le Lemme 1.1.45, on peut supposer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T \|f_\sigma(t, \cdot + h) - f_\sigma(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} dt = 0 \quad (4.4)$$

uniformément par rapport à  $\sigma$ .

Grâce au Lemme 3.0.13, on déduit que  $u_i \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  et donc que  $u_\sigma \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $t \in ]0, T[$ . De plus, pour tout  $h \in \mathbb{R}^2$ , on sait que

$$|u_i(x+h) - u_i(x)| \leq \|u_0(\cdot + h) - u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \sum_{i=1}^n \|f_i(\cdot + h) - f_i(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)};$$

par conséquent, pour tout  $t \in [0, T[$ , on a

$$|u_\sigma(x+h) - u_\sigma(x)| \leq \|u_0(\cdot + h) - u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \int_{\mathbb{R}^2} \|f_\sigma(\cdot + h) - f_\sigma(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} dt,$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Grâce aux hypothèses du Théorème 2.1.1 et (4.4) on déduit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{x \in \mathbb{R}^2} |u_\sigma(t, x+h) - u_\sigma(t, x)| = 0 \text{ uniformément par rapport à } \sigma. \quad (4.5)$$

On rappelle que  $u_\sigma \rightarrow u$  dans  $\mathcal{C}_0(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$  quand  $\sigma \rightarrow 0$ . Utilisant (4.5) et le Théorème d'Ascoli, on déduit que  $u(t) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $t \in [0, T[$ . On obtient donc que  $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ .  $\square$

**Lemme 4.1.5.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.1, la solution de (2.6) donnée par le Théorème 4.1.3 est l'unique solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$ .*

**Preuve**

Tout d'abord, utilisant le Corollaire 4.1.1, on voit qu'une solution  $u$  de  $(P_\varepsilon^\delta)$  est une solution de (2.6), ainsi  $u$  est unique. Maintenant, on considère  $u$  comme solution variationnelle de  $\mathbb{P}_{K_\varepsilon^\delta}$ . Alors,  $u \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $u(0) = u_0$  et  $f(t) - \frac{\partial u(t)}{\partial t} \in \partial \mathbb{I}_{K_\varepsilon^\delta}(u(t))$ , pour presque tout  $t \in ]0, T[$ . Grâce au Lemme 4.1.4, on sait que  $u(t) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $t \in ]0, T[$ , alors, utilisant le Corollaire 4.1.1, pour tout  $t \in ]0, T[$  fixé, il existe  $\mu(t) \in \mathcal{M}_b^s(\mathbb{R}^2)$ , tel que  $\mu(t) \ll \mathcal{R}_\varepsilon^\delta(\mathbb{R}^2)$  et

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (u(t, x) - u(t, y)) \xi(x) \mu(t, x, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} \left( f(t, x) - \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right) \xi(x) dx, \quad (4.6)$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$ . Ce qui met fin à la preuve.  $\square$

Maintenant on peut achever la preuve des théorèmes 2.1.1 et 2.1.3.

**Preuve du Théorème 2.1.1**

On suppose que  $f \in BV(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^1(0, T; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2))$  et qu'il existe  $\alpha \in L^1(]0, T[)$  tel que pour tout  $h \in \mathbb{R}^N$ , on ait (2.5).

Alors, d'après le Lemme 4.1.5,  $(P_\varepsilon^\delta)$  admet une unique solution. De plus la partie 4 du Théorème 4.1.3 dit que si, pour  $i = 1, 2$ ,  $u_i$  est la solution correspondante à  $f_i$ , alors pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ ,

$$\frac{d}{dt} \|u_1 - u_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[)$$

et

$$\frac{d}{dt} \|(u_1 - u_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[).$$

Ce qui met fin à la preuve.  $\square$

**Preuve du Théorème 2.1.3**

D'après le Lemme 4.1.5, on sait que si  $u$  est solution de (2.6) alors  $u$  est l'unique solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$ .

Réciproquement, si  $u$  est solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$  alors d'après le Théorème 4.1.3, on voit que  $u$  est solution de (2.6).  $\square$

## 4.2 La connexion entre l'EIDP et le modèle stochastique

Grâce à [23], on sait que la connexion entre le modèle stochastique et le modèle d'évolution de surface pour un tas de sable est donnée à travers les dynamiques non linéaires suivantes dans  $H$  :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + \partial \mathbb{I}_{\hat{K}}(\hat{u}) \ni \hat{f} \text{ pour } t \geq 0, \\ \hat{u}(0) = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $H = l^2(\mathbb{Z}^2)$ ,  $\partial\mathbb{I}_{\hat{K}}$  représente le sous différentiel de  $\mathbb{I}_{\hat{K}}$  dans  $H$ , avec

$$\hat{K} := \{\eta \in H; |\eta(i) - \eta(j)| \leq 1 \text{ si } i \sim j\}.$$

En d'autres termes,  $\hat{g} \in \partial\mathbb{I}_{\hat{K}}$  si et seulement si  $\hat{u} \in \hat{K}$ ,  $g \in H$  et

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \hat{g}(i)(\hat{u}(i) - \hat{\xi}(i)) \geq 0 \text{ pour tout } \hat{\xi} \in H.$$

Puisque  $\hat{K}$  est un sous ensemble fermé et convexe de  $H$  pour  $\hat{f} \in BV(0, T; H)$  donnée, le problème d'évolution (4.7) a une unique solution (cf. [16]) au sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u} \in W^{1,\infty}(0, T; H), \hat{u}(t) \in \hat{K} \text{ pour presque tout } t \in [0, T[, \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\hat{f}(t, i) - \partial_t \hat{u}(t, i))(\hat{u}(t, i) - \hat{\xi}(i)) \geq 0 \text{ pour presque tout } t \in [0, T[, \forall \hat{\xi} \in \hat{K}. \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une analogue discrète de (2.6) et donc une analogue discrète de  $(P_\varepsilon^\delta)$ . En particulier, en subdivisant le plan en carré de coté  $\frac{1}{N}$ , avec  $N \in \mathbb{N}^*$ , on montre le résultat suivant, en prenant une connexion explicite entre la solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$  et la solution de (4.7).

**Lemme 4.2.1.** *Sous les hypothèses  $(H_1) - (H_3)$ , on suppose qu'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$ , tel que (2.13) soit satisfaite. Alors,  $u$  est solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$ , avec  $\varepsilon = \frac{1}{N}$  et  $\delta = \frac{1}{P}$ , si et seulement si*

$$u(t, x) = \frac{1}{P} \hat{u}(Pt, [Nx]) \text{ pour tout } (t, x) \in [0, \infty[ \times \mathbb{R}^2,$$

où  $\hat{u}$  est solution de (4.7).

### **Preuve**

On sait que les deux problèmes  $(P_\varepsilon^\delta)$  et (4.7) ont des solutions uniques.

Pour la preuve du lemme, on choisit  $\hat{u}$  solution de (4.7), alors  $u(t, x) = \frac{1}{P} \hat{u}(Pt, [Nx])$  est solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$ .

On montre que  $u(t) \in K_\varepsilon^\delta$  pour tout  $t \geq 0$ .

En effet, on a :

$\hat{u}$  est solution de (4.7), alors  $u(t, x) = \frac{1}{P} \hat{u}(Pt, [Nx])$  et  $\hat{u} \in \hat{K}$ .

Par définition de  $\hat{K}$ , on a

$$|\hat{u}(i) - \hat{u}(j)| \leq 1,$$

ce qui implique que  $|Pu(x) - Pu(y)| \leq 1$ , d'où  $|u(x) - u(y)| \leq \frac{1}{P}$  et par conséquent,  $|u(x) - u(y)| \leq \delta$ .

$i \sim j$  implique que  $|i - j| \leq 1$ ; puisque (2.13) est vérifié, on a

$$|Nx - Ny| \leq 1.$$

Par conséquent,  $|x - y| \leq \frac{1}{N}$ , d'où  $|x - y| \leq \varepsilon$ .

On obtient donc que  $u \in K_\varepsilon^\delta$ .

Maintenant, pour  $\xi \in K_\varepsilon^\delta$  donné, on doit montrer que

$$\mathcal{J} := \int_{\mathbb{R}^2} (f(t, x) - \partial_t u(t, x))(u(t, x) - \xi(x)) dx \geq 0. \quad (4.8)$$

Pour tout  $i \in \mathbb{Z}^2$ , on note

$$I_i = \{z \in \mathbb{R}^2; [Nz] = i\}. \quad (4.9)$$

Puisque pour tout  $x \in I_i$ ,  $u(t, x) = \delta \hat{u}(Pt, i)$ ,  $f(t, x) = \hat{f}(Pt, i)$  et  $|I_i| = \varepsilon^2$  alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \int_{I_i} (f(t, x) - \partial_t u(t, x))(u(t, x) - \xi(x)) dx \\ &= |I_i| \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\hat{f}(Pt, i) - \partial_t \hat{u}(Pt, i)) \left( \frac{1}{P} \hat{u}(Pt, i) - \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} \xi(x) dx \right) \\ &= \delta \varepsilon^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\hat{f}(Pt, i) - \partial_t \hat{u}(Pt, i)) (\hat{u}(Pt, i) - \hat{\xi}(i)), \end{aligned}$$

où

$$\hat{\xi}(i) := \frac{1}{\delta \varepsilon^2} \int_{I_i} \xi(x) dx.$$

On a  $\xi \in \hat{K}$ , donc en utilisant le fait que  $\hat{u}$  est solution de (4.7), on déduit que  $\mathcal{J} \geq 0$ .

On a donc  $u$  solution de  $(P_\varepsilon^\delta)$ .  $\square$

La connexion entre le modèle stochastique et le modèle discret pour l'évolution du tas de sable est donnée par le résultat suivant.

**Proposition 4.2.2.** *On suppose que  $\hat{f} \in BV(0, T; l^2(\mathbb{Z}^2))$ ,  $\hat{f} \geq 0$  et  $f(t)$  à support borné pour tout  $t \in [0, T]$ . On considère  $\hat{u}$  solution de (4.7) et on considère  $(\eta(t), t \geq 0)$  le processus stochastique généré par  $\hat{f}$ . On a*

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\eta(t, i) - \hat{u}(t, i))^2 \right] \leq \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(s, j) ds \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (4.10)$$

On rappelle que la preuve de la Proposition 4.2.2 (cf.[23]) est basée sur l'inégalité

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t) (\eta(t, j) - w(j)) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(t, i) (\eta(t, i) - w(i)), \quad \forall w \in \hat{K}. \quad (4.11)$$

Pour montrer (4.11), les auteurs de [23] définissent deux types d'ensembles (type 1 et type 2) et montrent (4.11) en séparant les calculs en respectant chaque cas. Ici, on utilise essentiellement la remarque suivante et on donne une preuve directe et courte de (4.11).

**Remarque 4.2.3.** *Pour  $\xi \in S$ , si  $p(i, j, \xi) > 0$ , alors il existe au moins un escalier  $i_0 = i \sim i_1 \sim \dots \sim i_m = j$ , tel que  $\xi(i_p) = \xi(i_{p+1}) + 1$  pour tout  $p = 0, 1, \dots, m-1$ . On note cet escalier par  $\mathcal{C}(i, j)$ . c'est à dire*

$$\mathcal{C}(i, j) = [i, i_1, \dots, i_{m-1}, j].$$

De plus, pour  $k \in \mathcal{C}(i, j)$ , on note par  $\tilde{k}$  le coté adjacent de  $k$  satisfaisant  $u(k) = u(\tilde{k}) + 1$ .

Pour tout  $i, j \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $p(i, j, \xi) > 0$ ,  $\mathcal{C}(i, j)$  est non vide et peut ne pas être unique.

**Lemme 4.2.4.** *Sous les hypothèses de la Proposition 4.2.2, (4.11) est vérifiée.*

### Preuve

Grâce à (2.8), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t)(\eta(t, j) - w(j)) &= \sum_{j, i \in \mathbb{Z}^2} p(i, j, \eta(t)) \hat{f}(t, i)(\eta(t, j) - w(j)) \\
&= \sum_{j, i \in \mathbb{Z}^2} p(i, j, \eta(t)) \hat{f}(t, i)(\eta(t, i) - w(i)) \\
&\quad + \sum_{j, i \in \mathbb{Z}^2} p(i, j, \eta(t)) \hat{f}(t, i)((w(i) - w(j)) - (\eta(t, i) - \eta(t, j))) \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Puisque  $\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} p(i, j, \eta(t)) = 1$  pour tout  $(i, t) \in \mathbb{Z}^2 \times ]0, \infty[$ , alors

$$I_1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(t, i)(\eta(t, i) - w(i)).$$

On doit montrer maintenant que  $I_2 \leq 0$ .

Grâce à la Remarque 4.2.3, on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{j \neq i} p(i, j, \eta(t)) \hat{f}(t, i) \sum_{k \in \mathcal{C}(i, j) \setminus j} ((w(k) - w(\tilde{k})) - (\eta(k, t) - \eta(\tilde{k}, t))) \\
&\leq \sum_{j \neq i} p(i, j, \eta(t)) \hat{f}(t, i) \sum_{k \in \mathcal{C}(i, j) \setminus j} ((w(k) - w(\tilde{k})) - 1) \\
&\leq 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

car  $w \in K$  et  $k \sim \tilde{k}$ .  $\square$

**Remarque 4.2.5.** Dans la preuve de (4.12), on prend un escalier arbitraire  $\mathcal{C}(i, j)$  associé à  $p(i, j, \eta(t)) > 0$ . La preuve est indépendante du choix d'un tel  $\mathcal{C}(i, j)$ .

Le reste de la preuve de la Proposition 4.2.2 découle de [23].

### Preuve de la Proposition 4.2.2

1) Pour tout  $w \in S$  et  $t \geq 0$ , on doit montrer que

$$I := \frac{1}{2} \mathcal{L}_t \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\eta(t, i) - w(i))^2 \right) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(t, j)(\eta(t, j) - w(j)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f(t, j).$$

Par définition de  $\mathcal{L}_t$ , on a

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t) \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (T_j(\eta(t))(i) - w(i))^2 - \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} (\eta(t, i) - w(i))^2 \right).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t) \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (T_j(\eta)(i) - \eta(i))(T_j(\eta)(i) + \eta(i) - 2w(i)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t)(2\eta(j) + 1 - 2w(j)) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t)(\eta(j) - w(j)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t).
\end{aligned}$$

Grâce à (2.9), on déduit que

$$I = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t)(\eta(j) - w(j)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f(t, j).$$

Utilisant le Lemme 4.2.4, on déduit que

$$I \leq \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(s, j)(\eta(t, i) - w(i)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t).$$

On conclut que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t)(\eta(j) - w(j)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f(t, j) \leq \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(s, j)(\eta(t, i) - w(i)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c(j, \eta, t).$$

2) Pour tout  $w \in W^{1, \infty}(0, T, H)$  tel que, pour tout  $t \in [0, T[, w(t) \in \hat{K}$ , on doit montrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\eta(t, i) - w(t, i))^2 &\leq \int_0^t \left[ \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} w_s(i, s)(w(i, s) - \eta(i, s)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f(s, j)(\eta(s, j) - w(s, j)) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(s, j) \right] ds + \mathcal{M}(t), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}_s$  est donné par (2.10) et  $(\mathcal{M}(t))_{t \geq 0}$  est la martingale satisfaite par

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}(t)) = 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Comme dans [23], on utilise l'équation intégrale stochastique suivante.

Pour tout  $F : S \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne continue en  $t$  et  $F(\eta(\cdot, 0), 0) = 0$ , on a

$$F(\eta(\cdot, t), t) = \int_0^t \left( \frac{\partial F}{\partial s} + \mathcal{L}_s F \right) (\eta(\cdot, s)) + \mathcal{M}(t), \quad (4.13)$$

où  $(\mathcal{M}(t))_{t \geq 0}$  est la martingale satisfaisant  $\mathbb{E}(\mathcal{M}(t)) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

Soit  $F$  donnée par

$$F(\xi, t) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\xi(i) - w(i))^2 \text{ pour tout } (\xi, t) \in S \times ]0, T[.$$

Alors,

$$\frac{\partial F}{\partial s} = - \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} w_s(i, s)(\xi(i) - w(i, s)) \text{ pour tout } (\xi, t) \in S \times ]0, T[$$

et (4.13) implique que, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\eta(t, i) - w(t, i))^2 = \int_0^t \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} w_s(i, s)(w(i, s) - \eta(i, s)) + \mathcal{L}_s(F(\eta(\cdot, s), s)) \right) ds + \mathcal{M}(t).$$

Par conséquent, utilisant la première étape, on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\eta(t, i) - w(t, i))^2 \leq \int_0^t \left[ \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} w_s(i, s)(w(i, s) - \eta(i, s)) \right.$$

$$+ \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f(s, j)(\eta(s, j) - w(s, j)) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(s, j) ds + \mathcal{M}(t).$$

3) Puisque  $\hat{u}$  est une solution de (4.7) et  $\eta(t) \in \hat{K}$  pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \hat{u}_s(i, s)(\hat{u}(i, s) - \eta(i, s)) + \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(s, j)(\eta(s, j)\hat{u}(s, j)) \leq 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Alors, utilisant le 2) de la preuve avec  $w = \hat{u}$ , où  $\hat{u}$  est solution de (4.7), on a

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\eta(t, i) - w(t, i))^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(s, j) ds + \mathcal{M}(t).$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\eta(t, i) - \hat{u}(t, i))^2 \right) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left( \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} f(s, j) ds \right) + \mathbb{E}(\mathcal{M}(t)).$$

Comme  $\mathbb{E}(\mathcal{M}(t)) = 0$ , en simplifiant l'inégalité précédente par  $\frac{1}{2}$ , on déduit (4.10).  $\square$

### **Preuve du Théorème 2.2.5**

On considère  $u_{P,N}$  solution de l'EIDP associée à  $f_N$  donnée par

$$f_N(t, x) = f\left(t, \frac{[Nx]}{N}\right) \text{ pour tout } (t, x) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R}^2.$$

En prenant

$$I := \left( \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x) - \eta_{P,N}(t, x)|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

et en utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$I \leq \left( \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |u_{P,N}(t, x) - \eta_{P,N}(t, x)|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\mathbb{R}^2} |u_{P,N}(t, x) - u(t, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

Pour le dernier terme de (4.14), on utilise la seconde partie du Théorème 2.1.1 pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x) - u_{P,N}(t, x)|^2 dx \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |f(t, x) - f_N(t, x)|^2 dx ds.$$

Pour le premier terme de (4.14), puisque  $f_N$  satisfait (2.13), en utilisant le Lemme 4.2.4 et le fait que  $|I_i| = \varepsilon^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} (\eta_{P,N}(t, x) - u_{P,N}(t, x))^2 dx \right] &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{E} \left[ \int_{I_i} (\eta_{P,N}(t, x) - u_{P,N}(t, x))^2 dx \right] \\ &= \delta^2 \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[ \sum (\eta(Pt, i) - \hat{u}(Pt, i))^2 \right]. \end{aligned}$$

Par suite, utilisant (4.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} (\eta_{P,N}(t, x) - u_{P,N}(t, x))^2 dx \right] &\leq \delta^2 \varepsilon^2 \int_0^{Pt} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(s, j) ds \\
&\leq \delta^2 \varepsilon^2 \int_0^{Pt} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f\left(\frac{s}{P}, j\right) ds \\
&\leq \delta^2 \int_0^{Pt} \int_{\mathbb{R}^2} f_N\left(\frac{s}{P}, x\right) dx ds \\
&\leq \delta \int_0^{Pt} \int_{\mathbb{R}^2} f_N(s, x) dx ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent, (4.14) implique que

$$I \leq \delta^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} f_N(s, x) dx ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |f(t, x) - f_N(s, x)| dx ds \right)^{\frac{1}{2}}. \square$$

# Conclusion

Dans ce mémoire on a développé le modèle mathématique intitulé Equation Intégré-Différentielle Partielle (EIDP) associé à la dynamique de la matière granuleuse qui modélise la formation d'un tas de sable lorsqu'on déverse le sable sur une surface plate. On montre qu'il existe une connexion entre l' EIDP le problème d'évolution et le modèle stochastique d'Evans-Rezakhanlou. Cette connexion est très utile car permet de montrer l'existence e l'unicité de solution de l' EIDP.

Comme perspectives, on pourra étudier l'évolution d'un tas de sable sous l'effet de facteurs externes (vent, eau..), modéliser les avalanches et faire des simulations numériques.

# Bibliographie

- [1] G. Alberti and G. Bellettini, A nonlocal anisotropic model for phase transition. Part I : the Optimal Problem. *Math Ann* , 310, (1998), 527-560.
- [2] G. Alberti and G. Bellettini, A nonlocal anisotropic model for phase transition : asymptotic behaviour of rescaled. *Euro. JNL Applied Mathematics*, 9, (1998), 261-284.
- [3] F. Andreu, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. Toledo, The limit as  $p \rightarrow \infty$  in a nonlocal  $p - Laplacian$  evolution equation. A nonlocal approximation of a model for sandpiles. *Cal. Var. Partial Diff. Equ.* Vol 35(3), 279-316, (2009).
- [4] F. Andreu, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. Toledo, A nonlocal  $p - Laplacian$  evolution equation with non homogenous Diriclet boundary conditions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. Vol. 40(5),1815-1851, (2009).
- [5] D. Applebaum. *Lévy Process and Stochastic Calculus*. Cambridge studies in advanced mathematics 93, 2004.
- [6] I. S Arason and L.S Tsrining, Pattens and collective behavior in granular media : Theoretical concepts, *Rev. Modern Phys.*, 78 (2006), pp. 641-692.
- [7] G. Aronson, L. C. Evans and Y. Wu, Fast Slow diffusion and growing sandpiles. *J. Differential Equation*, 131 :304-335, 1996.
- [8] J. W. Barret and L. Prigozhin, Dual formulation in critical state problems, *Interface Free bound.*, 8(2006), pp. 349-370.
- [9] D. Benedetto, E. Caglioti, and M. Pulvirenti, A kinetic equation for granular media, *RAIRO Model. Math. Anal. Numer.*, 31(1997), pp, 615-641.
- [10] D. Benedetto, E. Caglioti, and M. Pulvirenti, Collective behavior of one-dimensional granular media, in *Modeling Applied Science : A kinetic Theory Approachs*, N. Bellomo and M. Pulvirenti, eds., Birkhauser Boston, MA, 2000.
- [11] Ph. Benilan, M. G. Crandall, Completely accretive operator in Semigroup Theory and Evolution Equation (Deft, 1989), *Lecture Notes in Pure and Appl. math.* 135, Marcel Dekker, NY, 1991, pp, 41-75.
- [12] Ph. Benilan, M. G. Crandall and A. Pazy, *Evolution equations Governed by Accretive Operators*. Preprints Book.
- [13] I. H. Biswas, E. R. Jakolen and K. H. Karlen. Error estimates for finite difference-quadrature schemes for fully nonlinear degenerate parabolic integro-EDPs. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 5(1),(2008), 187-219.
- [14] M. Bodnar and J.L. Valasquez, An integro-differential equation arising as a limit of individual cell-based model. *J. Differential Equations*, 222, (2006), 341-380.

- [15] J.P. Bouchaud, M. E. Cates, J. Ravi Prakash and S. F. Edwards, A model for the dynamics of sandpile surface. *J. Phys. I France*(4), 1383-1410, 1994.
- [16] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et sémi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* (fench). North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matematica (50). North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.
- [17] C. Carrilo and P. Fife, Spatial effects in discrete generation population models. *J. Math. Biol.* 50(2),(2005),161-188.
- [18] G. Crasta and S. Finzi Vita, An existence result for the sandpile problem on flat tables with walls, *Network and Heterogeneous Media*, 3 (2008), pp. 815-830.
- [19] D. Diar, Self-organized critical state of sandpile automation models, *Phys. Rev. Lett.*, 64 (1990), pp.1613-1616.
- [20] S. Dumont and N. Igbida, Back on a Dual Formulation for the Growing Sandpile Problem, *European J. App. Math.*,20 (2008), pp. 169-185.
- [21] S. Dumont and N. Igbida, On the collapsing sandpile problem.
- [22] L. C. Evans, M. Feldman, and R. F. Gariepy , Fast / slow diffusion and collapsing sandpiles, *J. Differential equation*, 137 (1997), pp. 166-209.
- [23] L. C. Evnans and F. Rezakanlou, A stochastic model for sandpile and its continuum limit, *Comm. Math. Phys.* , 197 (1998), pp. 325-345.
- [24] M. Falcone and S. Finzi Vita, A finite-difference approximation of a two-layer system for growing sandpiles, *SIAM J. Sci.Comput.*, 28 (2006), pp. 1120-1132
- [25] P. Fife, Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions, in *Trends in Nonlinear Analysis*, Springer, Berlin, 2003, pp. 153 - 191.
- [26] N. Fournier and P. Laurencot, Well-posedness of Smoluchowskis coagulation equation for a class of homogeneous kernels, *J. Funct. Anal.*, 233 (2006), pp. 351 - 379.
- [27] G. Gilboa and S. Osher, Nonlocal Linear Image Regularization and Supervised Segmentation, *UCLA CAM Report*, 2006, pp. 647.
- [28] K. P. Hadeler and C. Kuttler, Dynamical models for granular matter, *Granular Matter*, 2 (1999), pp. 918.
- [29] N. Igbida, A generalized collapsing sandpile model, *Arch. Math. (Basel)*, 94 (2010), pp. 193 - 200.
- [30] N. Igbida, A Partial Itegro-Differential Equation in granular Matter and its connection with a stochastique model, *SIAM J. Math. Anal.* , (2012) Vol. 44, No. 3, pp. 1950 - 1975.
- [31] N. Igbida, Evans-Rezakhanlou stochastic model revisited, in *Recent Developments in Nonlinear Analysis, Proceedings of the Conference in Mathematics and Mathematical Physics, Morocco*, 2008.
- [32] N. Igbida, Equivalent formulations for Monge-Kantorovich equation, *Nonlinear Anal.*, 71 (2009), pp. 3805 - 3813.
- [33] S. kindermann, S. Osher and P. W. Jones, Deblurring and denoising of images by nonlocal functionals. *Multiscale Model. Simul.*, 4,(2005),1091-1115.
- [34] A Mongilner and L. Edlestein-Keshet, A non-local model for a swarm. *J. Math. Biol.*,38,(1999),534-570.

- [35] L. Prigozhin, Variational model of sandpile growth. *Euro. J. Appl. Math.* 7 (1996), pp. 225-236.
- [36] H. Pull, On the modeling of real sand piles, *Phys. A.* 182 (1992), pp. 295-308.
- [37] R. E. Showalter, Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. *Mathematical Surveys and Monographs*, 49. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.