UNIVERSITE POLYTECHNIQUE

DE BOBO-DIOULASSO (UPB)

UFR- SCIENCES ET TECHNIQUES

Ecole doctorale Sciences et Techniques

Laboratoire d'Algèbre, de Mathématiques
Discrètes et d'Informatique (L.A.M.D.I)

Equipe de Recherche en
Mathématiques Discrètes (E.R.MA.D)

MÉMOIRE DU DIPLÔME D'ÉTUDES APPROFONDIES (D.E.A)
DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Option : Mathématiques discrètes

Spécialité : Combinatoire des mots

Thème:
Propriétés combinatoires des palindromes sturmiens

Présenté par K. Ernest BOGNINI

Soutenu publiquement le 05 Novembre 2015 devant le jury composé de :

Président	: **Pr Théodore M. Y. TAPSOBA** – Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso
Membres	: **Pr Idrissa KABORE** – Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso
	Pr Joseph BAYARA – Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso

Directeur de mémoire : Pr Idrissa KABORE – Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso

Dédicace

Je dédie ce document à :

- mes parents Norbert BOGNINI et Regina SARE,
- la famille GANSONRE et SANON à Bobo-Dioulasso,
- l'ensemble du personnel du Collège de Tounouma Garçon à Bobo-Dioulasso.

Résumé

Après avoir rappelé quelques définitions et notations de bases, nous présentons des mots finis sturmiens, des mots centraux et des palindromes sturmiens. Nous introduisons ensuite les fonctions d'énumération des palindromes sturmiens, des mots centraux et des mots finis sturmiens. Pour leurs études nous utilisons la fonction "indicateur d'Euler" ϕ bien connue en théorie des nombres. Enfin nous présentons les propriétés combinatoires des palindromes sturmiens.

Mots clés : Mot sturmien, palindromes sturmiens, mot central, facteur spécial.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon Directeur de mémoire, le professeur Idrissa KABORE, de m'avoir permis d'apprendre cette discipline qu'est la combinatoire des mots, pour ses apports de tout genre qui m'ont permis d'élaborer et présenter ce travail.

Je remercie également le professeur Théodore M. Y. TAPSOBA, Directeur du Laboratoire d'Algèbre, de Mathématiques Discrètes et d'Informatique (L.A.M.D.I), pour son cours qui a beaucoup enrichi mes connaissances dans la discipline et pour le cadre qu'il nous a offert pour mener à bien ce travail.

J'adresse mes remerciements au professeur Joseph BAYARA dont la culture mathématiques m'a toujours séduite depuis ma première année universitaire, pour ses enseignements de qualités et ses apports de tout genre.

Je remercie aussi l'Équipe de Recherche en Mathématiques discrètes (E.R.MA.D) pilotée par les professeurs Théodore M. Y. TAPSOBA et Idrissa KABORE dont les étudiants actuels sont Boucaré KIENTEGA, Moussa BARRO tous Doctorants, qui m'ont été d'un grand soutien pour ce travail.

Une profonde reconnaissance est adressée au professeur Sado TRAORÉ, Directeur de l'Unité de Formation et de Recherche en Sciences et Technique (UFR-ST) qui n'a ménagé aucun effort pour notre bonne formation et pour ses enseignements de qualités.

J'ai une pensée envers tous les enseignants de l'UFR-ST qui m'ont permis d'avoir une bonne formation.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de tous mes aînés Doctorants en Mathématiques de l'UPB, pour leurs encouragements et de tous mes camarades de la classe de D.E.A pour les moments d'études, de complicités et de partage d'idées.

Je termine par des sincères remerciements à mes parents et amis sans qui je ne serais pas arrivé à ce niveau d'étude. Grand merci à tous et à toutes !

Table des matières

Introduction

Les mots sturmiens ont été largement étudiés pour leurs importances théoriques et leurs applications dans divers domaines de la science. Par définition les mots sturmiens sont des mots non ultimement périodiques et ayant une fonction de complexité minimale. Les mots sturmiens possèdent aussi quelques caractérisations géometriques remarquables (cutting sequences, mechanical words). Pour plus de détails sur ces mots voir les livres [1, 2].

Des travaux comme ceux de De Luca ont porté sur les mots sturmiens à travers l'étude de leurs facteurs palindromiques. Un palindrome est un mot fini qui est identique en le lisant de gauche à droite que de droite à gauche.

Les palindromes jouent un rôle essentiel dans la structure des mots sturmiens. En effet, Droubay et Pirillo prouvent dans [7] qu'un mot infini est sturmien si et seulement si, il a exactement un facteur palindromique de longueur n si n pair, et deux de longueur n sinon. Il est montré dans [12] par De Luca et Mignosi que l'ensemble des préfixes palindromiques de tous les mots sturmiens standards coïncide avec l'ensemble des mots centraux. Les mots centraux sont les mots binaires ayant deux périodes p et q qui sont premières entre elles et de longueur $p+q-2$. En particulier, un mot central w est un mot tel que wab et wba peuvent être factorisés en un produit de deux palindromes. De plus, l'ensemble des facteurs de tous les mots sturmiens finis est égal à l'ensemble des facteurs de tous les mots centraux.

Notre travail est structuré de la manière suivante. Au chapitre 1 nous donnons d'abord quelques définitions et notations, ensuite des propriétés de bases, enfin nous présentons des mots sturmiens, plus particulièrement des palindromes sturmiens.

Au chapitre 2 nous introduisons la notion de fonction d'énumération pour les mots centraux, palindromiques sturmiens et les mots sturmiens finis. Ensuite nous donnons des résultats sur ces fonctions. La fonction "indicateur d'Euler" est introduite à cet effet pour facilité les calculs.

Au chapitre 3, nous étudions les propriétés des palindromes sturmiens et quelques relations entre les paramètres R_w, K_w et π_w, désignant respectivement le plus petit entier pour lequel w n'admet pas de facteur spécial à droite, la longueur de plus court suffixe non répété dans w et la période minimale de w.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Définitions et notations

Nous introduisons quelques définitions et notations que nous utiliserons dans toute la suite du travail. On se donne un ensemble à deux éléments $A = \{a, b\}$. L'ensemble A est appelé alphabet et ses éléments, des lettres. Un mot sur A est une suite finie ou infinie de lettres de A. La suite vide se définit comme le mot vide ; on le note ε.
On désigne par A^* l'ensemble de tous les mots finis sur A. On munit A^* de l'opération binaire appelée concaténation et notée ".". La concaténation est évidement associative et admet le mot vide ε comme élément neutre.
$(A^*, ., \varepsilon)$ a ainsi une structure de monoïde et on l'appelle le monoïde libre engendré par A.
L'ensemble de tous les mots finis non vides se note A^+ $(A^+ = A^* - \{\varepsilon\})$.
Pour tout mot fini non vide w sur A, il existe $n \geq 1$ tel que $w = a_1 a_2 ... a_n$, avec $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$. L'entier n est appelé la longueur de w, et il est noté $|w|$. Par convention, la longueur du mot vide ε est 0.
Soit $w \in A^*$, $a \in A$. On désigne par $|w|_a$ le nombre d'occurrences de la lettre a dans w.
On désigne par $alph(w)$ l'ensemble des lettres qui composent w.

Définition 1.1.1. *Soit w et u deux mots fixés sur A. On dit que u est un facteur de w si, il existe deux mots r et s tels que $w = rus$. Si $r = \varepsilon$ (resp. $s = \varepsilon$), on dit que u est un préfixe (resp. un suffixe) de w.*
Si $w \neq u$, alors on dit que u est un facteur propre de w.
Si u est un facteur de w, on dit aussi que w est une extension de u.

L'ensemble des facteurs de w se note $Fact(w)$. Pour tout $X \subset A^*$, on pose :
$$Fact(X) = \bigcup_{w \in X} Fact(w).$$

Définition 1.1.2. *Soit w un mot fini sur A et u un facteur de w. On dit que u est médian si, il existe des mots r, s tels que $w = rus$, avec $|r| = |s|$.*

Exemple 1.1.1. Les mots *aba*, *aabaa* et *baabab* sont respectivement des facteurs médians des mots *babab*, *babaabaaaab* et *ababbaababbbba*.

Définition 1.1.3. *Soit w un mot fini sur A et u un facteur de w. On dit que u est une frontière si, il est à la fois un préfixe et un suffixe de w.*

Exemple 1.1.2. Les mots *ab*, *bba* et *abba* sont respectivement des facteurs frontières des mots *abaab*, *bbaababba* et *abbabbaaabba*.

Définition 1.1.4. *Soit $w = a_1a_2\cdots a_n$, avec $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$, un mot fini non vide sur A. On dit que w est périodique si, il existe un entier strictement positif p tel que $a_{i+p} = a_i$, pour tout $i \in [1, n-p]$.*
L'entier p est alors appelé une période de w.

Par convention le mot vide ε est périodique.

Définition 1.1.5. *Soit $w = a_1a_2\cdots a_n$, avec $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$, un mot fini périodique sur A. On appelle période minimale de w, la plus petite des périodes de w. On la note π_w.*

Par convention $\pi_\varepsilon = 1$.

Exemple 1.1.3. La période minimale du mot *abaaba* est 3. En effet, il est périodique et ses périodes sont 3 et 5.

Définition 1.1.6. *Soit w un mot fini non vide. On appelle ordre de w, l'unique entier positif k tel que $w = z^kz'$, où $|z| = \pi_w$ et $|z'| < \pi_w$, avec z, z' deux mots finis donnés.*

Définition 1.1.7. *Soit un mot fini $w = a_1a_2\cdots a_n$, avec $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$. On appelle image miroir de w le mot $\overline{w} = a_na_{n-1}...a_1$.*

Exemple 1.1.4. Les images miroirs des mots *a*, *ab*, *abb* et *ababaab* sont respectivement *a*, *ba*, *bba* et *baababa*.

Si $w = \overline{w}$ alors w est dit palindrome. L'ensemble des palindromes sur l'alphabet A se note PAL.
Exemple 1.1.5. Les mots "*ici*", "*tôt*" et "*elle*" sont des palindromes en français.

Remarque 1.1.1. *Si un mot fini non vide $w = a_1a_2\cdots a_n$, avec $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$ est un palindrome alors on a :*

$$\forall\, i \in [1, n],\ a_i = a_{n+1-i}.$$

Un mot infini x est une suite infinie de lettres, i.e. $x = a_1a_2\cdots$, avec $a_i \in A$, pour tout $i \geq 1$. Un facteur d'un mot infini x est soit le mot vide ε soit un bloc fini u de lettres consécutives dans x : $u = a_i\cdots a_j$, avec $i \leq j$. En particulier si $i = 1$, alors u est un préfixe de x. Un suffixe de x est un mot infini y tel que x soit de la forme $x = uy$, où $u \in A^*$.
On désigne par $Fact(x)$ l'ensemble des facteurs de x.

Définition 1.1.8. *Soit u un facteur d'un mot infini x. On dit que u est :*

1. *spécial à droite (resp. spécial à gauche) de x si, ua et ub (resp. au et bu) sont aussi des facteurs de x.*

2. *bispécial si, il est à la fois spécial à droite et à gauche.*

Définition 1.1.9. *On appelle mot fini sturmien standard tout mot d'une suite $(s_n)_{n\geq 0}$ de mots définie par récurrence comme suit :*

$$s_0 = b, \quad s_1 = a \quad et \quad s_{n+1} = s_n^{d_{n-1}} s_{n-1},$$

où $(d_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'entiers telle que $d_0 \geq 0$ et $d_n > 0$ pour $n > 0$.

Une telle suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers un mot infini s (souvent noté c_α).

Exemple 1.1.6. Si on prend $d_n = 1$, pour tout $n \geq 0$, on obtient le fameux mot de Fibonacci dont les premières lettres sont : $fib = abaababaabab...$.

On désigne par $Stand$, l'ensemble de tous les mots finis sturmiens standards.

1.2 Mots centraux

Définition 1.2.1. *Un mot fini non vide w est dit central si, il a deux périodes p et q telles que $pgcd(p, q) = 1$ et $|w| = p + q - 2$.*

Par convention le mot vide ε est central. Les mots centraux sont définis sur un alphabet binaire. L'ensemble de tous les mots centraux sur A est désigné par PER.

Exemple 1.2.1. Les mots *aba*, *abaaba*, *abaabaaba* et *abaababaaba* sont centraux, les couples de périodes $(p; q)$ associés étant respectivement $(2; 3)$, $(3; 5)$, $(3; 8)$ et $(5; 8)$.

Proposition 1.2.1. *[2, 12] L'ensemble PER coïncide avec l'ensemble des préfixes palindromiques de tous les mots finis sturmiens standards.*

Définition 1.2.2. *Un mot fini non vide w sur A a la propriété de Robinson (R) si, w est une lettre ou il existe des palindromes p, q, r tels que :*
$w = pq = rxy$, *avec* $x \neq y$ *et* $x, y \in A$.

On désigne par Σ, l'ensemble de tous les mots finis ayant la propriété de Robinson (R).

Théorème 1.2.1. *[4] Un mot fini non vide w est sturmien standard si et seulement si, il est une lettre ou il existe des palindromes p, q, r tels que :*
$w = rxy = pq$, *où* $\{x, y\} = \{a, b\}$, $x \neq y$.
De plus, si $q \neq \varepsilon$, alors la factorisation $w = pq$ est unique.

Autrement dit, tout mot fini sturmien standard satisfait la propriété de Robinson (R). On a l'égalité suivante :
$Stand = \Sigma$.

Proposition 1.2.2. *[12]*

$$w \in PER \Longleftrightarrow wab, wba \in \Sigma. \tag{1.1}$$

Propriété 1.2.1.

$$Stand = A \cup PER\{ab, ba\}. \tag{1.2}$$

Cette propriété est obtenue par A. De Luca dans [11] et se démontre de la manière suivante.

Preuve : Soit $w \in A^*$. Alors $w \in Stand$ équivaut à w est une lettre ou il existe des palindromes p, q, r tels que $w = pq = rxy$, avec $x \neq y$ et $x, y \in \{a, b\}$, en vertu du Théorème 1.2.1. Si $w = rxy$ alors r est central en tant que préfixe palindromique d'un mot standard w. Ainsi,

$$w \in Stand \Longleftrightarrow w \in A \cup PER\{ab, ba\}.$$

□

De la propriété précédente, on déduit que tout mot fini sturmien standard qui n'est pas une lettre est obtenu en ajoutant ab ou ba a un mot central. Réciproquement, en effaçant les deux dernières lettres d'un mot fini sturmien standard qui n'est pas une lettre, on obtient un mot central.

Lemme 1.2.1. *[8] Soit $w \in PER$ tel que $Card(alph(w)) > 1$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *w peut être uniquement représenté par :*
   $$w = PxyQ = QyxP, \text{ avec } x, y \text{ fixés dans } A,\ x \neq y \text{ et } P, Q \in PAL.$$
   De plus, $pgcd(p, q) = 1$, où $p = |P| + 2$ et $q = |Q| + 2$. Cette représentation s'appelle la représentation canonique de w.
2. *Si $|P| < |Q|$, alors Q est le plus long suffixe et préfixe palindromique propre de w.*
3. *Le mot fini sturmien standard $s = wxy$ a la période minimale $\pi_s = \pi_w$, avec $\pi_w = |P| + 2$.*
4. *Si $|P| + 1 < |Q|$, alors il existe un unique couple d'entiers (k, r) tels que $k > 0$, $0 \leq r < \pi_w$ et $Q = (Pxy)^k U$, avec $|U| = r$. Donc $w = (Pxy)^{k+1} U$.*

Proposition 1.2.3. *Un mot w est central sur A si et seulement si, w est une puissance d'une seule lettre de A ou satisfait l'équation :*

$$w = w_1 ab w_2 = w_2 ba w_1, \text{ avec } \ w_1, w_2 \in PAL. \tag{1.3}$$

De plus, dans ce dernier cas, $w_1, w_2 \in PER$, $p = |w_1| + 2$ et $q = |w_2| + 2$ sont deux périodes de w telles que $pgcd(p, q) = 1$, et $\pi_w = \min\{p, q\}$.

Preuve : $\Longrightarrow$) Supposons que w est un mot central sur A. Raisonnons sur $Card(alph(w))$.
• __Cas 1 :__ $Card(alph(w)) = 0$. Alors $w = \varepsilon$ qui est une puissance de n'importe quelle lettre.
• __Cas 2 :__ $Card(alph(w)) = 1$. Alors w est une puissance d'une seule lettre de A. On peut supposer sans perte de généralité que w est une puissance de a. Ainsi il existe $n > 0$ tel que $w = a^n$.
• __Cas 3 :__ $Card(alph(w)) > 1$. Alors en utilisant le Lemme 1.2.1, on a les égalités (1.3).
Donc w est une puissance d'une seule lettre de A ou satisfait les égalités (1.3).

$\Longleftarrow$) Supposons que w est une puissance d'une seule lettre de A ou satisfait les égalités (1.3) et montrons qu'il est central. Il nous suffit pour cela de montrer que wab, $wba \in \Sigma$ d'après la Proposition 1.2.2 .

• Supposons que w est une puissance d'une seule lettre de A. Alors, il existe $n \geq 1$ tel que $w = a^n$ ou $w = b^n$. Or $a^n ab = a^{n+1}b \in \Sigma$ et $b^n ba = b^{n+1}a \in \Sigma$. Donc $w \in PER$.

• Supposons que $w = w_1abw_2 = w_2baw_1$. En faisant la concaténation de w avec ba et ab, on obtient :

$wba = w_1abw_2ba = w_1(abw_2ba)$, où $w_1, abw_2ba \in PAL$.

$wab = w_2baw_1ab = w_2(baw_1ab)$, où $w_2, baw_1ab \in PAL$.

Ainsi wab, $wba \in \Sigma$. Donc w est central. □

1.3 Mots sturmiens

Définition 1.3.1. *Soit x un mot infini sur A. On appelle fonction de complexité de x que l'on note p_x, l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à tout n associe le nombre de facteurs distincts de x de longueur n.*

Définition 1.3.2. *On dit qu'un mot infini x est sturmien si,sa fonction de complexité vérifie $p_x(n) = n + 1$, pour tout $n \geq 0$.*

Définition 1.3.3. *Soit w un mot fini sur A. On dit que w est sturmien fini si, il existe un mot infini sturmien x tel que $w \in Fact(x)$.*

On désigne par St l'ensemble de tous les mots finis sturmiens.

Proposition 1.3.1. *[14] Soit x un mot infini sturmien. Alors x contient :*
(i) les facteurs ab et ba,
(ii) un et un seul des facteurs aa et bb.

Théorème 1.3.1. *[7] Un mot infini binaire x est sturmien si et seulement si, pour tout $n \geq 0$, x possède un unique facteur spécial à droite de longueur n.*

Théorème 1.3.2. *[7] Un mot infini est sturmien si et seulement si, il possède exactement un facteur palindromique de longueur n si n pair, et deux facteurs palindromiques de longueur n sinon.*

La limite s d'une suite de mots sturmiens standards $(s_n)_{n\geq 0}$ est un mot sturmien.

Exemple 1.3.1.

Le mot infini sturmien le plus connu est le mot de Fibonacci. Nous présentons ci-dessous deux méthodes pour le construire :

– en tant que point fixe du morphisme φ, défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : A^* &\longrightarrow A^* \\ a &\longmapsto ab \\ b &\longmapsto a. \end{aligned}$$

– comme limite de la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$s_0 = b, s_1 = a$$
$$s_{n+1} = s_n s_{n-1}, \quad pour \quad tout \quad n \geq 1.$$

Ainsi, $fib = \lim_{n\to+\infty} s_n = \varphi^{\omega}(a) = abaababaabaababaababa\cdots$.

Proposition 1.3.2. *[2] Pour tout mot infini sturmien, il existe un mot infini sturmien standard ayant le même ensemble de facteurs.*

Propriété 1.3.1. *Nous avons les égalités suivantes :*
$$St = Fact(Stand) = Fact(\Sigma) = Fact(PER).$$

La preuve de cette propriété que l'on retrouve dans [7] est donnée par :

Preuve : Nous allons montrer que $St = Fact(Stand)$. L'inclusion $Fact(Stand) \subset St$ est évidente. Vérifions l'inclusion $St \subset Fact(Stand)$. Soit $w \in St$. Alors il existe un mot infini sturmien standard x tel que $w \in Fact(x)$. Ainsi $w \in Fact(Stand)$. □

1.4 Palindromes sturmiens

Les palindromes sturmiens sont par définition les facteurs finis palindromiques des mots finis sturmiens. Son ensemble est noté $St \cap PAL$. On a l'inclusion suivante $PER \subset St \cap PAL$. Cette inclusion est stricte car il existe des palindromes sturmiens non centraux.

Exemple 1.4.1. Les mots *aaaaa*, *bbbbb aabaa*, *bbabb*, *ababa* et *baaab* sont des palindromes sturmiens.

Théorème 1.4.1. *Tout facteur palindromique d'un mot sturmien standard c_α est un facteur médian d'un préfixe palindromique de c_α.*

Ce résultat est obtenu par A. de Luca dans [8]. La preuve utilise un argument de A. Carpi [3] et est basée sur les résultats suivants.

Proposition 1.4.1. *[2] Soit x un mot infini sturmien. Si w est un facteur de x alors, $\overline{w}$ est aussi un facteur de x. De plus, si x est standard alors w est un facteur spécial à droite de x si et seulement si, $\overline{w}$ est un préfixe de x.*

Corollaire 1.4.1. *[2] Un facteur palindromique d'un mot infini sturmien standard x est spécial à droite si et seulement si, il est un préfixe palindromique de x.*

Nous procédons maintenant à la démonstration du Théorème 1.4.1 .

Preuve : Soit c_α un mot sturmien standard tel que $c_\alpha = \lambda u x$, où u est un palindrome qui n'est pas un facteur médian d'aucun préfixe palindromique de c_α, $\lambda \in A^*$ de longueur minimale. Puisque u n'est pas un préfixe de c_α, nous avons $|\lambda| \geq 1$. Ainsi nous pouvons prendre sans perte de généralité $\lambda = \lambda' a$ avec λ' un mot donné. Maintenant soit z la première lettre de x, alors $x = zx'$ pour un certain mot x'. Supposons d'abord que $z = a$, alors on a $c_\alpha = \lambda u x = \lambda' a u a x'$.

Le palindrome aua n'est pas un facteur médian d'un préfixe palindromique de c_α, sinon u le serait aussi. Mais $c_\alpha = \lambda' auax'$, avec $|\lambda'| < |\lambda|$ est absurde car λ est de longueur minimale. Donc $z = b$. Ainsi aub et $bua = \overline{aub}$ sont des facteurs de c_α, d'après la Proposition 1.4.1 . Par suite le palindrome u est un facteur bispécial de c_α, donc spécial à droite. À l'aide du Corollaire 1.4.1, on déduit que u est un préfixe palindromique de c_α, ce qui contredit l'hypothèse. □

Une conséquence de ce théorème est un résultat plus général de X. Droubay, J. Justin, et G. Pirillo [6].

Corollaire 1.4.2. *Un mot fini non vide est un palindrome sturmien si et seulement si, il est un facteur médian d'un mot central.*

Preuve : $\Longrightarrow$) Supposons que u est un palindrome sturmien, i.e. $u \in St \cap PAL$. Ainsi $u \in St$ et $u \in PAL$. Comme $u \in St$ alors u est un facteur sturmien standard, puisque $St = Fact(Stand)$. Le mot u étant un facteur palindromique d'un mot sturmien standard, en vertu du Théorème 1.4.1, on déduit qu'il est un facteur médian d'un préfixe palindromique d'un mot sturmien standard de c_α. Donc u est un facteur médian d'un mot central, puisque l'ensemble des préfixes palindromiques des mots sturmiens standards coïncide avec l'ensemble des mots centraux.

$\Longleftarrow$) Supposons que u est un facteur médian d'un mot central w. Nous allons montrer que $u \in St \cap PAL$.
Comme u est médian de w alors $w = rus$, avec $|r| = |s|$. Le mot w étant central alors w est un palindrome. Donc $w = \overline{w}$ et alors $rus = \overline{s}\,\overline{u}\,\overline{r}$. D'où $u = \overline{u}$ et $u \in PAL$. Ainsi, $u \in St \cap PAL$. □

Chapitre 2

Fonctions d'énumération

2.1 Introduction

La notion de fonction d'énumération a été introduite dans le livre de Lothaire paru en 1983. Cette fonction permet de compter le nombre de facteurs d'une longueur fixée et vérifiant une propriété donnée.
Dans cette section nous introduisons quelques fonctions spécifiques. Il s'agit des fonctions d'énumération $g(n)$, $h(n)$ et $st(n)$ que nous développerons dans la suite.
L'indicateur d'Euler est la fonction arithmétique, qui à tout entier naturel n non nul associe le nombre d'entiers compris entre 1 et n (inclus) et premiers avec n. On la note $\phi(n)$. Par exemple $\phi(10) = Card(\{1, 3, 7, 9\}) = 4$.

2.2 Définitions et propriétés de bases

Définition 2.2.1. *La fonction "indicateur d'Euler" $\phi(n)$ est définie comme suit :*
(i) $\phi(1) = 1$,
(ii) $\phi(pq) = p\phi(q)$ *ou* $\phi(pq) = (p-1)\phi(q)$, *avec p premier et $q \geq 1$.*

Propriété 2.2.1. *La fonction "indicateur d'Euler" $\phi(n)$ vérifie :*
(1) $\phi(1) = \phi(2) = 1$,
(2) *$\phi(n)$ est multiplicative, i.e. pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $pcgd(n_1, n_2) = 1$, on a $\phi(n_1 \times n_2) = \phi(n_1) \times \phi(n_2)$,*
(3) *Pour tout entier naturel p premier et $k \geq 1$, $\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$,*
(4) $\phi(n) = n \prod_{p|n} \frac{p-1}{p}$, *pour tout $n > 0$,*
(5) *Pour tout $n > 0$, $\phi(2n) = \phi(n)$ si n impair et $\phi(2n) = 2\phi(n)$ si n pair.*

Lemme 2.2.1. *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\phi(n) \geq \begin{cases} n^\alpha & \textit{si } n \textit{ impair} \\ 2^{-\alpha} n^\alpha & \textit{sinon} \end{cases}$$

avec $\alpha = \log_3 2 = 0,6309...$.

Preuve : • Si $n = 1$, on a clairement $\phi(1) = 1$ et donc $\phi(1) \geq 1^\alpha$.

• Si $n > 1$, alors en faisant la décomposition en produit de facteurs premiers de n, on obtient :
$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, avec $p_1 < p_2 < p_3 < ... < p_r$ et $k_i \geq 1$.
D'après la Propriété 2.2.1, on a : $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i - 1}{p_i}$.
Nous distinguons deux cas suivant la parité de n.
<u>**Cas 1 :**</u> n impair. Alors on a $p_1 \geq 3$ et $n \geq 3^r$ d'après la décomposition ci-dessus.
Puisque $p_i \geq 3$ et $p_i - 1 \geq 2$. On vérifie que, $\frac{p_i - 1}{p_i} \geq \frac{2}{3}$.
En faisant le produit membre à membre de ces inégalités, on obtient :

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{p_i - 1}{p_i} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^r$$
$$n \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i - 1}{p_i} \geq n \left(\frac{2}{3}\right)^r$$
$$\phi(n) \geq n \left(\frac{2}{3}\right)^r.$$

De plus, on a $n \geq 3^r$. D'où $\log_3 n \geq r$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\right)^r &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_3 n} \\
\phi(n) \geq n \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_3 n} &= n.e^{\log_3 n \times ln \frac{2}{3}} \\
&= n.e^{\frac{ln(n)}{ln3} \times (ln2 - ln3)} \\
&= n.e^{ln(n) \times (\frac{ln2}{ln3} - 1)} \\
&= \frac{n.e^{\frac{ln2}{ln3} \times ln(n)}}{e^{ln(n)}} \\
&= \frac{n.e^{\log_3 2 \times ln(n)}}{n} \\
&= e^{\log_3 2 \times ln(n)} \\
&= n^{\log_3 2} \\
&= n^{\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\phi(n) \geq n^{\alpha}.$$

<u>**Cas 2 :**</u> n pair. Ainsi $n = 2^k m$, avec $k \geq 1$ et m impair. En vertu de la Propriété 2.2.1, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= \phi(2^k m) \\
&= 2^{k-1} \phi(m) \\
&= 2^{k-1} \phi\left(\frac{n}{2^k}\right), \quad car \quad m = \frac{n}{2^k} \quad .
\end{aligned}$$

Puisque m est impair, du **Cas 1** on a :
$$\phi\left(\frac{n}{2^k}\right) \geq \left(\frac{n}{2^k}\right)^{\alpha}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}
\phi(n) &\geq 2^{k-1} \times \left(\frac{n}{2^k}\right)^{\alpha} \\
&\geq 2^{k-1} \times 2^{-k\alpha} \times n^{\alpha} \\
&\geq 2^{k-1} \times 2^{-(k-1)\alpha} \times 2^{-\alpha} \times n^{\alpha} \\
&\geq 2^{-(k-1)(\alpha-1)} \times 2^{-\alpha} \times n^{\alpha} \\
&\geq 2^{-\alpha} \times n^{\alpha}, \quad car \quad 2^{-(k-1)(\alpha-1)} \geq 1.
\end{aligned}$$
D'où, pour tout $n \geq 1$, on a le résultat. □

Théorème 2.2.1. *Soit w un mot fini non vide. Les relations suivantes sont équivalentes*
(i) $w \in PER$,
(ii) awb et $bwa \in St$,
(iii) awa, awb, bwa et $bwb \in St$.

Théorème 2.2.2. *Soit w un mot fini non vide sturmien. Si wa et wb sont des mots Sturmiens, alors il existe une lettre $x \in A$ tels que xwa et xwb soient sturmiens.*

Les preuves des Théorème 2.2.1 et 2.2.2 que l'on retrouve dans [12] sont longues et fastidieuses.

Proposition 2.2.1. *Soit $w \in A^*$ un palindrome. Si wa et wb sont sturmiens, alors w est un mot central.*

Preuve : Soit $w \in A^*$ un palindrome tel que wa et $wb \in St$. D'après le Théorème 2.2.1, il existe une lettre $x \in A$ telle que xwa et $xwb \in St$. Sans perte de généralité prenons $x = b$. Nous savons que $\overline{bwa} = awb \in St$, d'après la Proposition 1.4.1. Ainsi awb et $bwa \in St$. Donc $w \in PER$ d'après le Théorème 2.2.1. □

Lemme 2.2.2. *Soit w un mot fini non vide dans $St \cap PAL$. Si w n'est pas central, alors il existe une unique lettre $x \in A$ telle que xwx soit sturmien.*

Preuve : Supposons que $w \notin PER$. Par hypothèse $w \in St \cap PAL$ équivaut à $w \in St$ et $w \in PAL$.
Comme $w \in St$, alors il est spécial à droite. Donc wa et $wb \in St$. D'après la Proposition 2.2.1 w est central, ce qui est absurde. Le mot $w \in St \cap PAL$ est un facteur médian propre d'un mot central en vertu du Corollaire 1.4.1. Ainsi, il existe une unique lettre $x \in A$ telle que $xwx \in St$. □

2.3 Fonction d'énumération $g(n)$

Définition 2.3.1. *La fonction d'énumération des palindromes sturmiens est définie par :*
$$\begin{aligned}
g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
n &\longmapsto g(n) = Card(St \cap PAL \cap A^n).
\end{aligned}$$

Théorème 2.3.1. *[11] Pour tout $n \geq 1$, le nombre $g(n)$ de palindromes sturmiens de longueur n est donné par :*

$$g(n) = 1 + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \phi(n-2i), \tag{2.1}$$

où ϕ est la fonction indicateur d'Euler.

On a de manière équivalente, pour tout $n \geq 0$:

$$g(2n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \phi(2i) \qquad \text{et} \qquad g(2n+1) = 1 + \sum_{i=0}^{n} \phi(2i+1).$$

Proposition 2.3.1. *Pour tout $n > 0$, on a :*

$$g(2n-1) = g(4n) - 2g(2n) + 2.$$

Preuve : À l'aide du Théorème 2.3.1 et de la Propriété 2.2.1, on a :

$$\begin{aligned} g(4n) &= 1 + \sum_{i=1}^{2n} \phi(2i) \\ &= 1 + \sum_{\substack{i \leq 2n \\ i \text{ pair}}} \phi(2i) + \sum_{\substack{i < 2n \\ i \text{ impair}}} \phi(2i) \\ &= 1 + 2\sum_{\substack{i \leq 2n \\ i \text{ pair}}} \phi(i) + \sum_{\substack{i < 2n \\ i \text{ impair}}} \phi(i). \end{aligned}$$

Si i est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}^* \mid i = 2k$.
Si i est impair alors il existe $k \in \mathbb{N} \mid i = 2k+1$.
Ainsi

$$\begin{aligned} g(4n) &= 1 + 2\sum_{\substack{i \leq 2n \\ i \text{ pair}}} \phi(i) + \sum_{\substack{i < 2n \\ i \text{ impair}}} \phi(i) \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \phi(2k) + \sum_{k=0}^{n-1} \phi(2k+1) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \phi(2k+1) + 2\sum_{k=1}^{n} \phi(2k). \end{aligned}$$

Or $\qquad 2\sum_{k=1}^{n} \phi(2k) = 2(g(2n)-1) \qquad$ et $\qquad g(2n-1) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \phi(2k+1).$

Par suite

$$g(4n) = g(2n-1) + 2g(2n) - 2.$$

D'où

$$g(2n-1) = g(4n) - 2g(2n) + 2.$$

□

Proposition 2.3.2. *Soit* $\beta = \dfrac{1}{2(\alpha+1)}$ *avec* $\alpha = \log_3 2 > 0$. *Pour tout* $n \geq 0$, *on a :*

$$g(2n+1) \geq (2-\beta) + \beta(2n+1)^{1+\alpha} \tag{2.2}$$

et

$$g(2n) \geq 1 + \frac{1}{\alpha+1} n^{1+\alpha}. \tag{2.3}$$

Preuve : • Montrons (2.2). Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$g(2n+1) = 1 + \sum_{k=0}^{n} \phi(2k+1), \text{ d'après le Théorème 2.3.1.}$$

Puisque $2k+1$ est impair, d'après le Lemme 2.2.1, on a :

$$\phi(2k+1) \geq (2k+1)^\alpha$$
$$\sum_{k=0}^{n} \phi(2k+1) \geq \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^\alpha$$
$$1 + \sum_{k=0}^{n} \phi(2k+1) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^\alpha$$

$$\begin{aligned} g(2n+1) &\geq 1 + \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^\alpha \\ &\geq 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^\alpha \\ &\geq 2 + \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^\alpha. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^\alpha \geq \int_0^n (2x+1)^\alpha dx &= \left[\frac{1}{2(\alpha+1)}(2x+1)^{\alpha+1}\right]_0^n \\ &= \frac{1}{2(\alpha+1)}(2n+1)^{\alpha+1} - \frac{1}{2(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\beta = \dfrac{1}{2(\alpha+1)}$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^\alpha \geq \beta(2n+1)^{\alpha+1} - \beta.$$

Donc

$$g(2n+1) \geq (2-\beta) + \beta(2n+1)^{\alpha+1}.$$

D'où (2.2).

• Montrons (2.3). On a aussi :

$$g(2n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \phi(2k).$$

Puisque $2k$ est pair, d'après le Lemme 2.2.1, on a :

$$\phi(2k) \geq 2^{-\alpha}(2k)^{\alpha} = k^{\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \phi(2k) \geq \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$$

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \phi(2k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$$

$$g(2n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}.$$

Par ailleurs, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \geq \int_{0}^{n} x^{\alpha} dx = \left[\frac{1}{(\alpha+1)} x^{\alpha+1}\right]_{0}^{n}$$
$$= \frac{1}{(\alpha+1)} n^{\alpha+1}.$$

Ainsi,

$$g(2n) \geq 1 + \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}.$$ □

2.4 Fonction d'énumération $h(n)$

Définition 2.4.1. *La fonction d'énumération des mots centraux est définie par :*

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto h(n) = Card(PER \cap A^{n}).$$

Lemme 2.4.1. *[12] Pour tout $n > 0$,*

$$Card(PER \cap A^{n}) = \phi(n+2).$$

Définition 2.4.2. *On définit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction donnée pour tout $n \geq 0$, par :*
$f(2n) = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $f(2n+1) = 2 + n(n+1)$.

Dans le tableau suivant nous listons les valeurs des fonctions g, f et h pour $0 \leq n \leq 13$.

n	$g(n)$	$f(n)$	$h(n)$	n	$g(n)$	$f(n)$	$h(n)$
0	1	1	1	7	14	14	6
1	2	2	2	8	10	11	4
2	2	2	2	9	20	22	10
3	4	4	4	10	14	16	4
4	4	4	2	11	30	32	12
5	8	8	6	12	18	22	6
6	6	7	4	13	42	44	8

Du tableau, on voit que $g(n) \leq f(n)$ pour tout $0 \leq n \leq 13$.

2.5 Fonction d'énumération $st(n)$

Définition 2.5.1. *La fonction d'énumération des mots finis sturmiens est donnée par :*

$$st : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto st(n) = Card(St \cap A^n).$$

Définition 2.5.2. *On appelle différence finie première de st, la fonction s définie par :*
$s(k) = st(k+1) - st(k)$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

En fait la fonction s donne le nombre de facteurs sturmiens spéciaux à droite de longueur donnée.

Théorème 2.5.1. *[12] Pour tout* $k > 0$,

$$s(k+1) - s(k) = \phi(k+2).$$

Une conséquence de ce théorème est le résultat suivant que l'on retrouve dans [11].

Corollaire 2.5.1. *Pour tout* $k > 0$,

$$s(k) = \sum_{i=1}^{k+1} \phi(i).$$

Preuve : En vertu du Théorème 2.5.1, on a pour tout $i > 0$,

$$s(i+1) - s(i) = \phi(i+2).$$

En passant à la somme on obtient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1}(s(i+1)-s(i)) &= \sum_{i=1}^{k-1}\phi(i+2)\\
\sum_{i=1}^{k-1}s(i+1)-\sum_{i=1}^{k-1}s(i) &= \sum_{i=1}^{k-1}\phi(i+2)\\
s(k)-s(1) &= \sum_{i=1}^{k-1}\phi(i+2)\\
s(k) &= s(1)+\sum_{i=1}^{k-1}\phi(i+2)\\
s(k) &= \phi(1)+\phi(2)+\sum_{i=3}^{k+1}\phi(i),\ \text{car } s(1)=2=\phi(1)+\phi(2)\\
s(k) &= \sum_{i=1}^{k+1}\phi(i).
\end{aligned}
$$

□

Théorème 2.5.2. *Pour tout $n \geq 0$, le nombre $st(n)$ de mots finis sturmiens est donné par la formule suivante :*

$$st(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\phi(i).$$

Preuve : Par définition de la fonction s, on a :

$$
\begin{aligned}
s(k) &= st(k+1)-st(k)\\
\sum_{k=0}^{n}s(k) &= \sum_{k=0}^{n}st(k+1)-\sum_{k=0}^{n}st(k)\\
&= st(n+1)-st(0).
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
st(n) &= st(0)+\sum_{k=0}^{n-1}s(k)\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\phi(i),\ \text{car } s(k)=\sum_{i=1}^{k+1}\phi(i).
\end{aligned}
$$

On va maintenant calculer cette somme en fixant k.

$k=1$	$\phi(1)$
$k=2$	$\phi(1)+\phi(2)$
$k=3$	$\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)$
$k=4$	$\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\phi(4)$

$\vdots$

$k = n-1 \qquad \phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\cdots+\phi(n-1)$
$k = n \qquad \phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\cdots+\phi(n-1)+\phi(n).$

En faisant la somme, on obtient :

$$\begin{aligned} S &= n\phi(1)+(n-1)\phi(2)+(n-2)\phi(3)+\cdots+(n-n+2)\phi(n-1)+(n-n+1)\phi(n) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\phi(i). \end{aligned}$$

D'où

$$st(n) = 1+\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\phi(i).$$

□

2.6 Relations entre les fonctions d'énumération $g(n)$, $h(n)$ et $st(n)$

Notation : Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction positive, on note $\Omega(f)$ l'ensemble

$$\{g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists\, c > 0,\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 :\ g(n) \geq c \times f(n)\}.$$

$\Omega(f)$ représente l'ensemble des fonctions qui croissent au moins vite que f.

Proposition 2.6.1. *Pour tout $n \geq 0$ on a le résultat suivant :*

$$g(n) \in \Omega(n^{1+\alpha}).$$

Preuve : D'après la Proposition 2.3.2, on a :

$$\begin{aligned} g(2n) &\geq 1+\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1} \\ &\geq \frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1} \\ &\geq c.n^{\alpha+1}, \quad avec \quad c = \frac{1}{\alpha+1} > 0. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} g(2n+1) &\geq (2-\beta)+\beta(2n+1)^{\alpha+1} \\ &\geq \beta(2n+1)^{\alpha+1} \\ &\geq \beta(n+1)^{\alpha+1} \\ &\geq \beta n^{\alpha+1} \\ &\geq c' \times n^{\alpha+1}, \quad avec \quad c' = \beta > 0. \end{aligned}$$

En posant $C = min(c, c')$, on obtient pour tout $n \geq 0$,

$$g(n) \geq Cn^{\alpha+1}.$$

□

Proposition 2.6.2. *La fonction* $\frac{h}{g}$ *vérifie :*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{h(n)}{g(n)}=0.$$

Preuve : Rappelons que $h(n)=\phi(n+2)\leq n+1$.
De même, on a $g(n)\in\Omega(n^{\alpha+1})$. Ce qui équivaut à l'existence d'une constante strictement positive C tel que $g(n)\geq C\times n^{\alpha+1}$.
Ainsi,

$$\frac{1}{g(n)}\leq\frac{1}{C\times n^{\alpha+1}}.$$

D'où,

$$\frac{h(n)}{g(n)}\leq\frac{n+1}{C.n^{\alpha+1}}.$$

$\frac{h}{g}$ étant positive et $\alpha>0$, on déduit $\lim_{n\to+\infty}\frac{h(n)}{g(n)}=0$. □

Lemme 2.6.1. *Pour tout* $n\geq 0$*, on a :*

$$st(n)\in\Omega(n^{\alpha+2}).$$

Preuve : Nous avons $st(n)=1+\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\phi(i)$. Nous distinguons deux cas.

<u>Cas 1 :</u> i est pair. Alors on a $\phi(i)\geq 2^{-\alpha}i^{\alpha}$. Ainsi

$$\begin{aligned}(n-i+1)\phi(i)&\geq(n-i+1)2^{-\alpha}i^{\alpha}\\ \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\phi(i)&\geq\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)2^{-\alpha}i^{\alpha}\\ 1+\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\phi(i)&\geq 1+\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)2^{-\alpha}i^{\alpha}\\ st(n)&\geq 1+2^{-\alpha}(n+1)\sum_{i=1}^{n}i^{\alpha}-2^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}i^{\alpha+1}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :
$\sum_{i=1}^{n}i^{\alpha}\geq\int_0^n x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}$ et $\sum_{i=1}^{n}i^{\alpha+1}\leq\int_0^{n+1}x^{\alpha+1}dx=\frac{1}{\alpha+2}(n+1)^{\alpha+2}$.

$$\begin{aligned}
st(n) &\geq 1 + 2^{-\alpha}(n+1) \times \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} - 2^{-\alpha} \times \frac{1}{\alpha+2}(n+1)^{\alpha+2} \\
&\geq 2^{-\alpha}(n+1) \times \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} - 2^{-\alpha} \times \frac{1}{\alpha+2}(n+1)^{\alpha+2} \\
&\geq 2^{-\alpha}(n+1)n^{\alpha+1}\left[\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1}\right] \\
&\geq 2^{-\alpha}(n+1)n^{\alpha+1}\left[\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right], \quad car \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} \geq 1 \\
&\geq M \times n^{\alpha+2}, \quad avec \quad M = 2^{-\alpha} \times \left[\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right]
\end{aligned}$$

<u>**Cas 2 :**</u> i est impair. Alors $\phi(i) \geq i^{\alpha}$. Par suite

$$\begin{aligned}
(n+1-i)\phi(i) &\geq (n+1-i)i^{\alpha} \\
\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\phi(i) &\geq \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i^{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
st(n) &\geq 1 + (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha+1} \\
&\geq 1 + \frac{1}{\alpha+1}(n+1)n^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}(n+1)^{\alpha+2} \\
&\geq \frac{1}{\alpha+1}(n+1)n^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}(n+1)^{\alpha+2} \\
&\geq (n+1)n^{\alpha+1}\left[\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1}\right] \\
&\geq (n+1)n^{\alpha+1}\left[\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right] \\
&\geq M' \times n^{\alpha+2}, \quad avec \quad M' = \left[\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right].
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, il existe $C > 0$ tel que $st(n) \geq Cn^{\alpha+2}$. Par conséquent,

$$st(n) \in \Omega(n^{\alpha+2}).$$

□

Proposition 2.6.3. *On a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{st(n)} = 0.$$

Preuve : De la définition de la fonction g, on a $g(n) \leq 1 + \Phi(n)$, où

$$\Phi(n) = \sum_{i=1}^{n} \phi(i).$$

Il est montré dans [13] qu'il existe $C_1 > 0$ tel que $\Phi(n) \leq C_1 \times n^2$.
Par suite,

$$\begin{aligned} g(n) &\leq 1 + C_1 \times n^2 \\ &\leq max(1, C_1 + 1) \times n^2 \\ &\leq C_2 \times n^2, \text{ avec } C_2 = max(1, C_1 + 1). \end{aligned}$$

En vertu du Lemme 2.6.1, il existe $C_3 > 0$ tel que $st(n) \geq C_3 \times n^{\alpha+2}$.
Par suite, $\dfrac{1}{st(n)} \leq \dfrac{1}{C_3 \times n^{\alpha+2}}$.
Ainsi,

$$\frac{g(n)}{st(n)} \leq \frac{C_2 \times n^2}{C_3 \times n^{\alpha+2}} = \frac{C_2}{C_3} \times \frac{1}{n^\alpha}.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{st(n)} = 0.$$

□

2.7 Conclusion

La fonction d'Euler intervient dans l'étude des fonctions d'énumération introduites dans ce chapitre. Plus précisement, elle permet d'obtenir des formulations exactes puis des minorations utiles de ces fonctions. Ainsi, on conclut quant à l'importance théorique de ces fonctions.

Chapitre 3

Propriétés combinatoires des palindromes sturmiens

Nous avons vu au chapitre 1, qu'un palindrome sturmien est un facteur médian d'un mot central. Dans ce chapitre, nous présentons plus de résultats concernant les palindromes sturmiens. Nous fixons toujours l'alphabet $A = \{a, b\}$.

3.1 Structures des palindromes sturmiens

Proposition 3.1.1. *[8] Un mot w a une période $p \leq |w|$ si et seulement si, il existe des mots $u, v, s \in A^*$ tels que $w = us = sv$, avec $|u| = |v| = p$.*

Lemme 3.1.1. *Un palindrome $w \in A^*$ a une période $p \leq |w|$ si et seulement si, il a un préfixe et un suffixe palindromique de longueur $|w| - p$.*

Preuve : Soit un palindrome $w \in A^*$. Supposons que w a une période $p \leq |w|$. Ce qui équivaut à dire qu'il existe des mots $u, v, s \in A^*$ tels que $w = us = sv$, avec $|u| = |v| = p$ en vertu de la Proposition 3.1.1 . Nous allons montrer que s est un palindrome.
Comme $w \in PAL$ alors $w = \overline{w}$ et $us = \overline{us} = \overline{s}\,\overline{u}$. D'où $s = \overline{s}$ et $s \in PAL$. De plus $|s| = |w| - |u| = |w| - |p|$. □

Proposition 3.1.2. *Un palindrome $w \in A^*$ de période minimale $\pi_w > 1$ peut être uniquement représenté comme suit :*

$$w = w_1xyw_2 = w_2yx\overline{w_1},$$

avec $x, y \in A$, w_2 le plus long suffixe palindromique propre de w et $|w_1xy| = \pi_w$.
Le mot w n'est pas central si et seulement si, soit $w_1 \notin PAL$ soit $w = (w_1xx)^kw_1$ où $k \geq 1$ est l'ordre de w.

Preuve : Puisque $\pi_w > 1$, d'après le Lemme 3.1.1, w peut se factoriser de manière unique sous la forme $w = w_1xyw_2$ où w_2 est le plus long suffixe palindromique propre de w ; $x, y \in A$ et $\pi_w = |w_1xy|$.
Comme $w \in PAL$, nous pouvons écrire $w = w_1xyw_2 = w_2yx\overline{w_1}$.
Le mot w est central si et seulement si, $w_1 \in PAL$ et $x \neq y$, d'après la Proposition 1.2.2. Ainsi pour que w ne soit pas central il faut que l'on ait $w_1 \notin PAL$ ou $x = y$. Dans le cas où

$x = y$ nous pouvons écrire $w = w_1xxw_2 = w_2xxw_1$. Le mot w est de longueur $\pi_w + q - 2$, avec ses deux périodes :

$$\pi_w = |w_1xx| \qquad \text{et} \qquad q = |w_2xx|. \tag{3.1}$$

Ainsi w n'étant pas central, alors $d = pgcd(\pi_w, q) > 1$. Puisque $|w| \geq \pi_w + q - d$, d'après le théorème de Fine et Wilf (voir [15]) d est une période de w. Comme $d \leq \pi_w$ et d période de w alors par minimalité de π_w, on a $d = \pi_w$. Par suite, il existe $k \geq 1$ tel que $q = k\pi_w$.
Par conséquent, $w_2xx = (w_1xx)^k$ et $w = w_2xxw_1 = (w_1xx)^kw_1$. □

Exemple 3.1.1.

- Considérons le mot $u = abaababababaaba$ dans $St \cap PAL$. Le mot u se factorise comme suit :

$$u = (abaabab)ab(abaaba),$$

avec $abaaba$ le plus long suffixe palindromique propre de u. Comme $abaabab \notin PAL$ alors $u \notin PER$.

- Considérons $v = abbabbabba$ dans $St \cap PAL$. La factorisation de v selon la Proposition 3.1.2 est :

$$v = (a)bb(abbabba) = (abb)^3a.$$

Ainsi $v \notin PER$.

Lemme 3.1.2. *Soit $w \in A^*$. Si $w = w_1xyw_2 = w_2yx\overline{w_1}$, avec w_2 le plus long suffixe palindromique propre de w et $x, y \in A$, alors $w' = ywy$ a la période minimale $\pi_{w'} = \pi_w$.*

Preuve : Supposons que $w = w_1xyw_2 = w_2yx\overline{w_1}$, avec w_2 le plus long suffixe (resp. préfixe) palindromique propre de w et $x, y \in A$. Alors d'après la Proposition 3.1.2, $\pi_w = |w_1xy|$.
Comme $w' = ywy = yw_1xyw_2y$, alors le mot yw_2y est le plus long préfixe palindromique propre de w' car w_2 l'est pour w. En vertu de la Proposition 3.1.2, on déduit que $\pi_{w'} = |yw_1x|$.
Ainsi $\pi_{w'} = |yw_1x| = |w_1xy| = \pi_w$. D'où $\pi_{w'} = \pi_w$. □

Lemme 3.1.3. *Soit $w \in PER$ tel que $w = w_1xyw_2 = w_2yxw_1$, avec $|w_2| > |w_1|$ et $\{x, y\} = A$.*
Le mot $v = ywy$ a la période minimale $\pi_v = \pi_w$, tandis que $v' = xwx = xw_1xyw_2x$ a la période minimale $\pi_{v'} = |w| - \pi_w + 2$.

Preuve : Supposons que $w = w_1xyw_2 = w_2yxw_1 \in PER$, avec $|w_2| > |w_1|$. Plus précisément w_2 est le plus long suffixe palindromique de w et $\{x, y\} = A$.
• Pour $v = ywy$, on a $\pi_v = \pi_w$ selon le Lemme 3.1.2.
• Pour $v' = xwx = xw_2yxw_1x$ alors xw_1x est le plus long suffixe palindromique propre de v'. D'après le Lemme 3.1.1, le mot v' a la période $|xw_2y|$. Ainsi $\pi_{v'} = |xw_2y| = |w_2| + 2$. Or $|w| = \underbrace{|w_1| + 2}_{\pi_w} + |w_2|$. Donc $|w_2| = |w| - \pi_w$. D'où $\pi_{v'} = |w| - \pi_w + 2$. □

Soit w un palindrome sturmien non central, i.e. $w \in (St \cap PAL) - PER$. On désigne par u le plus court mot dans PER dont w est facteur médian et par v le plus long facteur médian de w dans PER.
Par exemple pour le palindrome sturmien non central $w = baaabaaab$, on a : $u = aawaa$ et $v = aaabaaa$.

Théorème 3.1.1. *Soit $w \in (St \cap PAL) - PER$. Avec les notations précédentes, on a $\pi_u = \pi_w$. De plus, soit $\pi_w = \pi_v$ soit $\pi_w = |v| - \pi_v + 2$.*

Preuve : Soit $w \in (St \cap PAL) - PER$, u et v satisfaisant les notations précédentes. Nous raisonnons sur π_v.

• Supposons que $\pi_v = 1$. Alors v est puissance d'une lettre de A. Ainsi, il existe une lettre x et un entier $n \geq 1$ tels que $v = x^n$, avec $|v| = n > 1$. Étant donné que v est un facteur médian de w, alors il existe $v_1 \in Fact(w)$ et $y \in A$ tels que $v_1 = yvy = yx^n y$. D'après la Proposition 3.1.2, on a $\pi_{v_1} = |yx^n| = n + 1 = |v| - \pi_v + 2$.
Maintenant considérons la suite $(v_i)_{0 \leq i \leq n}$ définie par :

$$v_0 = v, \quad v_1 = yvy \quad \text{et} \quad v_i = xv_{i-1}x \quad \text{pour} \quad i \geq 2.$$

En faisant varier $i \in [2, n]$, on obtient :

$$\begin{aligned} v_i &= x^{i-1}yx^n yx^{i-1} \\ &= (x^{i-1}yx^{n-i+1})(x^{i-1}yx^{i-1}). \end{aligned}$$

Observons que $v_n = x^{n-1}yx^n yx^{n-1}$ est central (voir Proposition 1.2.3). Alors on a $\pi_u = n+1$ Comme u est le plus court mot central dont w est un facteur médian alors les v_i pour $i < n$ ne sont pas centraux. Donc, $w \in \{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$. Or par construction $\pi_{v_0} = \pi_{v_1} = \cdots = \pi_{v_{n-1}}$. Donc $\pi_w = \pi_i$ $i \leq n - 1$. Par suite $\pi_w = \pi_u = n + 1 = |v| - \pi_v + 2$.

• Supposons maintenant que $\pi_v > 1$. En utilisant la Proposition 1.2.2, on a $v = w_1 xyw_2 = w_2 yxw_1$, avec $w_1, w_2 \in PER$, $x, y \in A$, $x \neq y$. Supposons de plus que $|w_2| > |w_1|$. Alors $\pi_v = |w_1| + 2$. Comme v est un facteur médian de w, il existe $v_1 \in Fact(w)$ et z une lettre tels que $v_1 = zvz$. On a $z = y$ ou $z = x$.

• **Cas 1 :** $z = y$. on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} v_1 &= yvy \\ &= yw_1 xyw_2 y \\ v_2 &= xv_1 x \\ &= xyw_1 xyw_2 yx \\ &= (xyw_1)(xyw_2 yx). \end{aligned}$$

Posons $w_1 = p_1 p_2 \cdots p_k$, $1 \leq j \leq k$ et considérons la suite $(v_i)_{i \geq 3}$ définie par la récurrence :

$$v_i = p_{k-i+3} v_{i-1} p_{k-i+3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_3 &= p_k v_2 p_k \\ &= (p_k x y p_1 p_2 \cdots p_{k-1})(p_k x y w_2 y x p_k) \\ v_4 &= p_{k-1} v_3 p_{k-1} \\ &= (p_{k-1} p_k x y p_1 p_2 \cdots p_{k-2})(p_{k-1} p_k x y w_2 y x p_k p_{k-1}) \\ &\vdots \\ v_{k+2} &= p_1 v_{k+1} p_1 \\ &= p_1 p_2 \cdots p_k v_2 p_k p_{k-1} \cdots p_1 \\ &= p_1 p_2 \cdots p_k x y p_1 p_2 \cdots p_k x y w_2 y x p_k p_{k-1} \cdots p_1 \\ &= w_1 x y w_1 x y w_2 y x \overline{w_1}. \end{aligned}$$

Comme $w_1 \in PER$, alors il est un palindrome. Par suite, on a les égalités,

$$\begin{aligned} v_{k+2} &= w_1 x y w_1 x y w_2 y x w_1 \\ &= (w_1) x y (w_1 x y w_2 y x w_1) \\ &= (w_1 x y w_2 y x w_1) y x (w_1), \end{aligned}$$

car $w_1 x y w_2 = w_2 y x w_1$. D'après la Proposition 1.2.2, on déduit que $v_{k+2} \in PER$. Posons $u = v_{k+2}$ et $w = v_i$, $1 \leq i < k+2$. Notons que dans ce cas les v_i sont les seuls palindromes sturmiens non centraux. On a $\pi_u = |w_1 x y| = |w_1| + 2 = \pi_v = \pi_w$ en vertu de la Proposition 3.1.2.

- <u>**Cas 2 :**</u> $z = x$

$$\begin{aligned} v_1 &= x v x \\ &= x w_2 y x w_1 x \\ v_2 &= y v_1 y \\ &= y x w_2 y x w_1 x y \\ &= (y x w_2)(y x w_1 x y). \end{aligned}$$

Posons $w_2 = q_1 q_2 \cdots q_k$, $1 \leq j \leq k$ et considérons la suite $(v_i)_{i \geq 3}$ définie par la récurrence :

$$v_i = q_{k-i+3} v_{i-1} q_{k-i+3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_3 &= q_k v_2 q_k \\ &= (q_k y x q_1 q_2 \cdots q_{k-1})(q_k x y w_1 x y q_k) \\ v_4 &= q_{k-1} v_3 q_{k-1} \\ &= (q_{k-1} q_k y x q_1 q_2 \cdots q_{k-2})(q_{k-1} q_k x y w_1 x y q_k q_{k-1}) \\ &\vdots \\ v_{k+2} &= q_1 v_{k+1} q_1 \\ &= q_1 q_2 \cdots q_k v_2 q_k q_{k-1} \cdots q_1 \\ &= q_1 q_2 \cdots q_k y x q_1 q_2 \cdots q_k x y w_1 x y q_k q_{k-1} \cdots q_1 \\ &= w_2 y x w_2 y x w_1 x y \overline{w_2}. \end{aligned}$$

Comme $w_2 \in PER$, alors il est un palindrome. Par suite,

$$\begin{aligned} v_{k+2} &= w_2yxw_2yxw_1xyw_2 \\ &= (w_2)yx(w_2yxw_1xyw_2) \\ &= (w_2yxw_1xyw_2)xy(w_2), \quad \textit{car} \quad w_2yxw_1 = w_1xyw_2. \end{aligned}$$

À l'aide de la Proposition 1.2.2, on déduit que $v_{k+2} \in PER$. Posons $u = v_{k+2}$ et $w = v_i$, $1 \leq i < k+2$. Notons que dans ce cas les v_i sont les seuls palindromes sturmiens non centraux. Par la Proposition 3.1.2, on a $\pi_u = \pi_w = |w_2yx| = |w_2| + 2 = \pi_{v_1} = |v| - \pi_v + 2$. □

Exemple 3.1.2.

- Considérons le mot $w = baaabaaab$ dans $(St \cap PAL) - PER$. En suivant les notations du Théorème 3.1.1, on a :
  $v = aaabaaa$, $v_1 = w$ et $u = v_3 = aabaaabaaabaa = (aa)ba(aabaaabaa) = (aabaaabaa)ab(aa)$. Ainsi, $\pi_w = \pi_u = \pi_v = 4$.
- Considérons le mot $w = babbbbab$ dans $(St \cap PAL) - PER$ et posons :
  $v = bbbb$, $v_2 = w$ et $u = v_4 = bbbabbbbabbb = (bbb)ab(bbbabbb) = (bbbabbb)ba(bbb)$. Ainsi, $\pi_w = \pi_u = 5 = |v| - \pi_v + 2$.

3.2 Quelques relations entre les paramètres R_w, K_w et π_w

Notation : Pour tout mot fini non vide w sur A, on désigne par :

1. R_w le plus petit entier k tel que w n'admet pas de facteur spécial à droite de longueur k.
2. K_w la longueur du plus court suffixe non répété dans w.

Par convention, on pose $R_\varepsilon = K_\varepsilon = 0$.

Exemple 3.2.1.

- Pour le mot $w = babb$, on a $R_w = 2$ et $K_w = 2$.
- Pour le mot $w = baaaab$, on a $R_w = 4$ et $K_w = 2$.
- Pour le mot $w = babaaaaabba$, on a $R_w = 5$ et $K_w = 3$.

Théorème 3.2.1. *Soit $w \in A^*$ un palindrome avec $\pi_w > 1$. Alors w est central si et seulement si, son préfixe de longueur $\pi_w - 2$ est un facteur spécial à droite de w.*

Pour la preuve de ce théorème nous avons besoin du lemme suivant dont la preuve se trouve dans [9].

Lemme 3.2.1. *Soit w un mot fini non vide sur A. On a $|w| \geq R_w + K_w$ et $\pi_w \geq R_w + 1$. De plus, on a les relations suivantes :*
- *si $\pi_w = R_w + 1$, alors $|w| = R_w + K_w$,*
- *si $|w| = R_w + K_w$, alors pour tout n, il existe au plus un facteur spécial à droite de w de longueur n.*

Nous procédons à la preuve du Théorème 3.2.1.

Preuve : Soit $w \in A^*$ un palindrome avec $\pi_w > 1$. Supposons que w est central. Alors d'après la Proposition 3.1.2, on a $w_1 \in PAL$ et $x \neq y$. Si ces deux conditions sont satisfaites alors $w = w_1xyw_2$, et w_1 est prolongeable à droite par x dans w. De même on a $w = w_2(yxw_1) = (w_1xy)w_2$. Donc w_2 est une frontrière de w. Par suite w_1 est aussi une frontière de w_2. Et comme w_2 se prolonge à droite en y il en est de même pour w_1. Ainsi w_1 est spécial à droite dans w.

Réciproquement supposons que le préfixe de longueur $\pi_w - 2$ de w, w_1 est un facteur spécial à droite. Nous devons montrer que $w_1 \in PAL$ et $x \neq y$.

• Montrons que $w_1 \in PAL$. Par hypothèse, on a $w = w_1xyw_2 = w_2yx\overline{w_1}$, avec $x, y \in A$, w_2 le plus long suffixe palindromique propre de w et $\pi_w = |w_1xy| = |w_1| + 2$. D'où $|w_1| = \pi_w - 2$. Comme w_1 est spécial à droite, alors $|w_1| \leq R_w - 1$. Du fait que $|w_1| = \pi_w - 2$, on obtient $\pi_w - 2 \leq R_w - 1$. Par suite $\pi_w \leq R_w + 1$. On a aussi $\pi_w \geq R_w + 1$, d'après le Lemme 3.2.1. Ainsi, $\pi_w = R_w + 1$. Donc $|w| = R_w + K_w$.
Le mot $\overline{w_1}$ est répété dans w, car w_1 est spécial à droite. Par suite $|\overline{w_1}| \leq K_w - 1$. Ce qui implique que $\pi_w - 2 \leq K_w - 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |w| &= R_w + K_w \\ &\geq \pi_w - 1 + \pi_w - 1 \\ &\geq 2\pi_w - 2. \end{aligned}$$

• Si $|w| = 2\pi_w - 2$, alors $|w_2| = |w_1| = \pi_w - 2$. En effet, comme $|w| = |w_1| + |w_2| + 2$ et $|w_1| = \pi_w - 2$, alors $2\pi_w - 2 = 2\pi_w - 2 + |w_2| + 2$. Ainsi $|w_2| = \pi_w - 2 = |w_1|$. Puisque w_1, w_2 sont tous des préfixes de w, alors $w_1 = w_2$. D'où $w_1 \in PAL$

• Si $|w| > 2\pi_w - 2$, alors on vérifie que $|w_2| > |w_1|$. Ainsi, w_1 est un préfixe de w_2. Par suite, $w = w_1xyw_1xu$ avec $u \in A^*$. Le facteur w_1xyw_1x est un préfixe de w et $yw_1 \in Fact(w)$. Comme w_1 est spécial à droite alors $w_1y \in Fact(w)$. Puisque yw_1 n'est pas un préfixe de w, alors il existe $z \in A$ tel que $zw_1y \in Fact(w)$. On a $z \neq y$ car sinon yw_1 serait spécial à droite de longueur $\pi_w - 1 = R_w$, ce qui contredirait la définition de R_w. Donc $z = x$. Ainsi on a $xw_1y \in Fact(w)$. Comme $yw_1x, xw_1y \in Fact(w)$ et w un palindrome, alors $x\overline{w_1}y, y\overline{w_1}x \in Fact(w)$. Ainsi $\overline{w_1}$ est spécial à droite. D'après le Lemme 3.2.1, on a $w_1 = \overline{w_1}$, i.e. $w_1 \in PAL$.

• Montrons que $x \neq y$. Nous procédons par contradiction en supposant que $x = y$. D'après la Proposition 3.1.2, on a $w = (w_1xx)^kw_1$, $k \geq 1$. Comme w_1 est spécial à droite, alors il existe une lettre $z \neq x$ telle que $w_1z \in Fact(w)$. Donc $z = y$.
Du fait que $w \in PAL$, on a :

$$\begin{aligned} w &= (w_1xx)^kw_1 \\ &= \underbrace{w_1xxw_1xx\cdots w_1xxw_1xx}_{k.fois}w_1. \end{aligned}$$

Comme $w_1y \in Fact(w)$, alors $w_1y = xw_1$ et $w_1y = v_2xxv_1y$, avec v_1y un préfixe de w_1 et v_2 un suffixe de w_1. On sait que $|w_1| = |w_1y| - 1$. Ainsi $w_1 = v_1y\alpha v_2$, $\alpha \in A$.

• Le cas $w_1y = xw_1$ est impossible. En effet, comme $w_1 \in PAL$, on a $\overline{w_1y} = \overline{xw_1}$ équivaut à $yw_1 = w_1x$, ce qui est impossible car w_1 commence par x et se termine par y.

• Le cas $w_1y = v_2xxv_1y$ équivaut à $w_1 = v_2xxv_1$. Comme $w_1 \in PAL$, alors on a :

$$v_2xxv_1 = \overline{v_1}\alpha y\overline{v_2}.$$

Ainsi $x \neq y$. Donc w est central. □

Exemple 3.2.2.

- Considérons le mot $u = baab$ dans $St \cap PAL$. On a $\pi_u = 3$ et son préfixe de longueur $\pi_u - 2 = 1$, n'est pas spécial à droite. Donc $u \notin PER$.
- Considérons le mot $v = ababbaba$ dans $St \cap PAL$. On a $\pi_v = 5$ et son préfixe de longueur $\pi_v - 2 = 3$, n'est pas spécial à droite. Donc $v \notin PER$.
- Considérons le mot $v' = abaaba$ dans $St \cap PAL$. On a $\pi_{v'} = 3$ et son préfixe de longueur $\pi_{v'} - 2 = 1$, est spécial à droite. Donc $v' \in PER$.
- Considérons le mot $w = bababaababab$ dans $St \cap PAL$. On a $\pi_w = 7$ et son préfixe de longueur $\pi_v - 2 = 5$, n'est pas spécial à droite. Donc $w \notin PER$.

Proposition 3.2.1. *Soit $w \in A^*$. Si $\pi_w = R_w + 1$, alors w est sturmien.*

Preuve : Soit $w \in A^*$ tel que $\pi_w = R_w + 1$.

• <u>Cas 1 :</u> $\pi_w = 1$. Alors $R_w = 0$, i.e. tout facteur de longueur $n \geq 0$ de w est spécial à droite. Ainsi en vertu du Théorème 1.3.1, w est sturmien.

• <u>Cas 2 :</u> $\pi_w > 1$. Alors $\pi_w = R_w + 1 > 1$. Par définition de R_w, w admet un facteur s de longueur $R_w - 1$ spécial à droite. Or $R_w - 1 = \pi_w - 2$. Donc $|s| = \pi_w - 2$.
Par suite $sa, sb \in Fact(w)$. Par ailleurs sa et sb ne peuvent pas être à la fois suffixes de w, car ils ont la même longueur. Supposons que sa n'est pas un suffixe de w. Alors soit $saa \in Fact(w)$ soit $sab \in Fact(w)$. Comme $|saa| = |sab| = \pi_w$, ces deux possibilités impliquent, respectivement :

$$w \in Fact((saa)^*) \quad \text{ou} \quad w \in Fact((sab)^*). \tag{3.2}$$

Nous montrons d'abord que $w \in Fact((saa)^*)$.Par contradiction supposons que $w \in Fact((saa)^*)$. Alors on peut écrire $w = r(saa)^kt$ avec r un suffixe de saa, t un préfixe de saa et $k \geq 0$ un entier. Puisque sb est un facteur de w, il est aussi un facteur de $saas$. Comme $sb \neq sa$, alors il existe deux mots $u, v \in A^*$ et x une lettre tels que $saas = uxsbv$. Les mots u et v sont respectivement un préfixe et un suffixe de s, et $|u|+|v| = |saas|-|xsb| = 2|s|+2-|s|-2 = |s|$. Donc $s = uv$ et $vaau = xuvb$. Mais c'est une contradiction, car $|vaau|_a > |xuvb|_a$.
Donc $w \in Fact((sab)^*)$. Nous allons montrer que s est central pour obtenir son caractère sturmien. Le facteur sb de w est aussi un facteur de $sabs$. Puisque $sb \neq sa$, il existe deux mots $u, v \in A^*$ et une lettre x tels que $sabs = uxsbv$. Comme précédement, on a $|u| + |v| = |s|$, pour que $s = uv$. Ainsi $vabu = xuvb$. On a $x = a$. Donc

$$vabu = auvb. \tag{3.3}$$

• $u = \varepsilon$, on obtient $va = av$, pour que $s = v \in a^* \subset PER$.

• $v = \varepsilon$, on obtient de même $ub = bu$, pour que $s = u \in b^* \subset PER$.

• $u, v \neq \varepsilon$, alors de (3.4), on déduit que u se termine par b et v commence par a. Par suite il existe des mots $u', v' \in A^*$ tels que $u = u'b$ et $v = av'$.
Ainsi, $s = uv = u'bav' = v'abu'$ et donc $s \in PER$, en vertu de la Proposition 1.2.2 . □

La réciproque de la proposition précédente n'est pas en général vraie. Cependant, le résultat est vrai pour les palindromes sturmiens comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.2.2. *Un palindrome $w \in A^*$ est sturmien si et seulement si, $\pi_w = R_w + 1$.*

Preuve : $\Longleftarrow$) Supposons que $\pi_w = R_w + 1$. Alors w est sturmien par la Proposition 3.2.1.

$\Longrightarrow$) Supposons que w est un palindrome sturmien.

• <u>Cas 1 :</u> $\pi_w = 1$. Alors $R_w = 0$. Par le Lemme 3.2.1, on déduit w admet au plus un facteur spécial à droite de longueur $n \geq 0$.

• <u>Cas 2 :</u> $\pi_w > 1$. Supposons que $w \in PER$. Alors son préfixe de longueur $\pi_w - 2$ est spécial à droite d'après le Théorème 3.2.1.
Supposons maintenant que w n'est pas dans PER. Alors avec les notations du Théorème 3.1.1, nous désignons par u le plus court mot central dont w est un facteur médian et par v le plus long facteur médian central de w. Comme $v \in PER$ alors il existe une lettre x et un entier $n > 1$ tels que $v = x^n$ ou $v = v_1xyv_2 = v_2yxv_1$; $x, y \in A$, $x \neq y$, $v_1, v_2 \in PER$, avec $\pi_v = |v_1xy|$.
• Pour $v = x^n$, en vertu du Théorème 3.1.1, on a $\pi_w = |v| + 1 = n + 1$. Puisque v est médian, alors $yvy = yx^ny = yxx^{n-1}y = yx^{n-1}xy \in Fact(w)$, donc x^{n-1} est un facteur spécial à droite de longueur $n - 1 = \pi_w - 2$.
• Pour $v = v_1xyv_2 = v_2yxv_1$; $x, y \in A$, $x \neq y$, $v_1, v_2 \in PER$, avec $\pi_v = |v_1xy|$. Alors, on a $\pi_w = \pi_v$ ou $\pi_w = |v| - \pi_v + 2$, d'après le Théorème 3.1.1 .
En vertu du Théorème 3.2.1. □

Exemple 3.2.3.

- Considérons le mot $u = ababaa$ n'appartenant pas à PAL. On a $\pi_u = 5$ et $R_u = 4$. On remarque que $\pi_u = R_u + 1$. Ainsi il est sturmien. Cependant $v = aabab \in St$, on a $\pi_v = 5 > 3 = R_v + 1$.
- Considérons le mot $w = abba$ dans $PAL \cap St$. On a $\pi_w = 3$ et $R_w = 2$. On remarque que $\pi_w = R_w + 1$. Donc w est sturmien.

Bibliographie

[1] J.-P. Allouche and J. Shallit, *Automatic Sequences* (Cambrige University Press, Cambridge UK, 2003).

[2] J. Berstel and P. Séébold, "Sturmian words", in M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on words (Cambridge University Press, Cambridge UK, 2002).

[3] A. Carpi, Private communication (2005).

[4] A. Carpi and A. de Luca, "Codes of central Sturmian words", *Theoretical Computer Sciences*, **340** (2005) 220 – 239.

[5] F. D'Alessandro; "A combinatorial problem on trapezoidal words", *Theoretical Computer Sciences*, **273** (2002) 11 – 33.

[6] X. Droubay and G. Pirillo, "Episturmian words and some constructions of A. de Luca et Rauzy", *Theoretical Computer Sciences*, **255** (2001) 539 – 553.

[7] X. Droubay and G. Pirillo, "Palindromes and Sturmian words", *Theoretical Computer Sciences*, **223** (1999) 73 – 85.

[8] A. de Luca, "Sturmian words : structure, combinatorics, and their arithmetics", *Theoretical Computer Sciences*, **183** (1997) 45 – 82.

[9] A. de Luca, "On the combinatorics of finite words", *Theoretical Computer Sciences*, **218** (1999) 13 – 39.

[10] A. de Luca and A. De Luca, "Palindromes in Sturmian words", in DLT 2005, *Proc. 9th Int. Conf. Developments in Language Theory*, eds. C. De Felice et A. Restivo, vol.3572 de LNCS (Springer, Berlin, 2001), pp.199 – 208.

[11] A. de Luca and A. De Luca, "Combinatorial properties of Sturmian palindromes", International Journal of foundations of computer Sciences Vol.**17** No.03 (2006), 557 – 573.

[12] A. de Luca and F. Mignosi, "Some combinatorial properties of Sturmian words", *Theoretical Computer Sciences*, **136** (1994) 361 – 385.

[13] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Nombers* (University Press, Oxford UK,1979).

[14] I. Kabore, "About k to k insertion words of sturmian words", *International Journal of Pure and Applied Mathematics* Vol.79 No. 4 (2012), 561 – 572.

[15] M. Lothaire, *Combinatorics on words* (Addison-Wesley, Reading MA, 1983).