UNIVERSITE POLYTECHNIQUE DE BOBO-DIOULASSO

Ecole Doctorale Sciences et Techniques

Laboratoire de **M**athématiques et **I**nformatique **(LAMI)**

N° d'ordre : 02

Thèse présentée

Par **OUEDRAOGO Ali**

Pour obtenir le grade de **Docteur de l'Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso**

Option : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Optimisation

SAUT DE DUALITE NUL ET CARACTERISATION DE SOLUTIONS ROBUSTES DE PROBLEMES D'OPTIMISATION

Soutenue, le 19/11/2016

Directeur de thèse : **M. Sado TRAORE, Maître de conférences,** Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso (Burkina Faso)

Rapporteurs :

- **M. Ouateni DIALLO, Professeur,** Université des Sciences, des Techniques et des Technologies de Bamako (Mali),
- **M. Stanislas OUARO, Professeur,** Université Ouaga I - Professeur Joseph Ki-Zerbo (Burkina Faso),
- **M. Jean de Dieu ZABSONRE, Maître de conférences,** Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso (Burkina Faso).

Composition du Jury :

Président : M. Hamidou TOURE, Professeur, Université Ouaga I - Professeur Joseph Ki-Zerbo (Burkina Faso)

Membres :

- **M. Ouateni DIALLO, Professeur,** Université des Sciences, des Techniques et des Technologies de Bamako (Mali),
- **M. Stanislas OUARO, Professeur,** Université Ouaga I - Professeur Joseph Ki-Zerbo (Burkina Faso),
- **M. Sado TRAORE, Maître de conférences**, Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso (Burkina Faso),
- **M. Jean de Dieu ZABSONRE, Maître de conférences,** Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso (Burkina Faso).

Table des matières

Remerciements

Je rends tout d'abord grâce à Dieu qui m'a accordé la santé nécessaire et favorisé les conditions qui m'ont permis de mener à bien ce mémoire de thèse.

Je rends hommage à mon défunt père Seydou OUEDRAOGO et à ma mère Rakiéta ZOUNGRANA pour l'attention qu'ils ont porté à mon égare.

La personnalité incontournable dans cette série de remerciements est bien mon directeur de thèse, Monsieur Sado TRAORE, Maître de Conférences. Sans son engagement à la bonne marche des travaux, ce mémoire n'aurait pas vu le jour. Il a su créer les conditions idoines pour que mes travaux de recherche se déroulent dans les meilleures conditions. Je tiens à le remercier pour tout son soutient scientifique et pour ses qualités humaines.

Je dis merci aux Professeurs Ouateni DIALLO, Stanislas OUARO, Jean de Dieu ZABSONRE pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Je remercie également les membres du jury.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à Monsieur Moussa BARRO avec qui j'ai cheminé et qui a été d'un grand apport dans la relecture de ce mémoire.

Je tiens également à adresser mes sincères remerciements au Professeur Michel VOLLE qui a prêté une attention particulière à ce travail.

Le Docteur Boureima SANGARE a porté un intérêt particulier à la relecture de ce mémoire et s'est toujours montré disponible à toutes mes sollicitations. Je tiens ici à lui exprimer toute ma reconnaissance et je lui dis merci pour tout.

Pour leurs contributions à ma formation, j'exprime tous mes remerciements au corps professoral de l'Unité de Formation et de Recherche en Sciences et Techniques (UFR/ST) et tout particulièrement à : Théodore Marie Yves TAPSOBA, Joseph BAYARA, Aboudramane GUIRO, Adama OUEDRAOGO, Jean de Dieu ZABSONRE, Idrissa KABORE, Hermann SORE, Ismaël NYANQUINI, Jean Louis ZERBO, Honoré K. OUOBA, Ahmed SERE, Telesphore TIENDREBEOGO et Betaboualé NAON.

Je n'oublie pas tous ces enseignants missionnaires qui ont participé d'une manière ou d'une autre à ma formation en particulier Stanislas OUARO, Bernard Kaka BONZI, Moussa OUATTARA, Ouateni DIALLO, Oumar TRAORE et Gérard KIENTEGA, Marc CILIGOT-TRAVAIN, à vous tous je dis merci.

Un merci particulier au Professeur Hamidou TOURE qui a facilité ma participation à l'atelier du Réseau EDP, modélisation et contrôle de Bamako (Mali). Je ne saurai oublier dans ces remerciements le Professeur Ouateni DIALLO pour son hospitalité lors de mon séjour pour cet atelier.

À tous les camarades et aînés, promotionaires, cadets et tout particulièrement Satafa SANOGO, Idrissa IBRANGO, Brahima ROAMBA, Boukaré KIENTEGA, Lucas GNANOU, Ives Vini LOYARA, Wendkouni OUEDRAOGO, Bakary TRAORE, Ousmane BOKOUM, Jérémie BATIONO, Dramane OUEDRAOGO, Yakouba ZONGO, Kpè KANSIE, Noufou SAWADOGO et Ernest BOGNINI : merci pour votre collaboration et votre soutien.

Je remercie tout particulièrement Madame Eveline TRAORE/ HIEN, Mademoiselle Awa BARRO, pour leur tolérance, leur hospitalité et leurs mets que je ne suis pas prêt d'oublier lors de mes séances de travail chez mon directeur de thèse et chez mon ami, Moussa BARRO.

Tous ceux qui d'une manière ou d'une autre ont contribué à ce travail et dont les noms n'ont pas été cités, qu'ils ne me tiennent pas rigueur car la capacité de l'esprit à se rappeler est limitée.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

– **Dieu, le Tout Puissant**,
– mon défunt Papa, **Seydou OUEDRAOGO**, que son âme repose en paix,
– ma très chère Maman **Rakiéta ZOUNGRANA**,
– toute la famille **OUEDRAOGO à Ramongo**.

Notations

Ensembles et opérateurs

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$	Ensemble des réels, des réels positifs, des réels négatifs.
$\operatorname{aff} M$	Enveloppe affine de M.
X^*	dual topologique de X.
$\emptyset$	Ensemble vide.
$\operatorname{aint}_M A$	Intérieur algébrique de A par rapport à M .
A^i	Intérieur algébrique de A.
A^{ri}	Intérieur algébrique relatif de A.
$\operatorname{int}(A)$	Intérieur topologique de A.
$\operatorname{co} S$	Enveloppe convexe de S.
$\overline{co}\, S$	Enveloppe convexe fermée de S.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Ensemble des matrices d'ordre $n \times m$.
$\mathbb{S}^n$	Ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
$\mathbb{S}^n_+$	Ensemble des matrices symétriques d'ordre n semi-définies positives.
$\mathbb{L}_n$	Cône de Lorentz d'ordre n.
$\operatorname{cone}(C)$	Enveloppe conique convexe de C.
$\operatorname{dom} f$	Domaine de la fonction f.
$\operatorname{epi} f$	Épigraphe de f.
$\operatorname{epi}_S f$	Épigraphe strict de f.
$[f \leq r]$	Tranche inférieure large de f de niveau r.
$[f \geq r]$	Tranche supérieure large de f de niveau r.
∇f	Gradient de f.
$\nabla^2 f$	Matrice Hessienne de f.
f^*	Conjuguée de Fenchel de la fonction f.
f^{**}	Biconjuguée de Fenchel de la fonction f.
$\overline{f}$	Enveloppe semi-continue inférieure de f.
$f \square g$	Somme épigraphique de f et g.
$f \triangle g$	Max-convolution de f et g.
K-epi g	K épigraphe de g.
$\sigma(X, X^*)$	Topologie faible.
$\sigma(X^*, X)$	Topologie faible $*$.

$\tau(X^*, X)$	Topologie de Mackey.
$\mathscr{N}_X(x)$	Ensemble des voisinages de x dans X.
$\Gamma_0(X)$	Ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexes s.c.i propres.
∂f	Sous-différentiel de la fonction f.
$S(P)$	Ensemble admissible du problème (P).
$\mathrm{argmin}(P)$	Ensemble des solutions optimales du problème (P).
$\mathrm{vect}(A)$	Espace vectoriel engendré par A.
$\mathrm{val}(P)$	Valeur du problème (P).
$\mathbb{B}_X$	Boule unité fermée de X.
$\overline{A}$	Adhérence de A.
Δ_2	Simplexe de $\mathbb{R}^2$.

Fonctions et relations

$\leq_K$	Ordre partiel engendré par le cône propre K.
Pr_X	Projection sur X.
$\langle ., . \rangle$	Crochet de dualité.
$a \vee b$	Maximum entre a et b.
$a \wedge b$	Minimum entre a et b.
σ_A	Fonction support de A.
i_A	Fonction indicatrice de A.
$\|\ \|, \|\ \|_*$	Norme et norme duale respectivement.
$M \perp N$	Somme inverse des sous-ensembles M et N.

Résumé

Dans ce mémoire, nous rappelons certaines notions de l'analyse convexe utiles à l'étude des problèmes d'optimisation. Pour un problème paramétrique donné, nous déterminons son dual paramétrique à l'aide de la perturbation horizontale de la fonction objectif. Nous établissons des conditions de qualification d'intériorité garantissant la dualité forte entre les deux problèmes. Nous donnons ensuite la version duale des résultats obtenus. Ces résultats de dualité sont ensuite appliqués au cas particulier de la minimisation du maximum de deux fonctions convexes.

Dans la pratique, les données d'un problème d'optimisation sont soumises à des erreurs de modélisation ou de mesure, ce qui nous amène à considérer un problème d'optimisation convexe conique à données incertaines. Par une approche épigraphique, nous établissons la dualité forte robuste pour ce problème. Nous terminons ce mémoire par l'étude d'un problème d'optimisation quadratique, à données incertaines dans un ensemble borné. Nous caractérisons l'ensemble des solutions optimales robustes dans les cas homogène et non homogène sous certaines conditions.

Abstract

In this thesis, we recall some notions of convex analysis which are helpful to the study of optimization problems. For a given parametric problem, we determine its parametric dual using the horizontal disturbance of the objective function. We establish qualification conditions guaranteeing the strong duality between the two problems. We then give the dual version of the results. These duality results are then applied to the specific case of minimization the maximum of two convex functions. In practice, data of optimization problem are submitted to modeling or measurement errors, which leads us to consider an uncertain conical convex optimization problem. By the means of an epigraphic approach, we establish robust strong duality for this problem. We end this thesis by studying an uncertain quadratic optimization problem where the uncertain data belong in a bounded set. We characterize the set of robust optimal solutions in homogeneous and non-homogeneous cases under some conditions.

Introduction générale

Les problèmes d'optimisation ont occupé certains chercheurs au cours des années. Les chercheurs grecs ont considéré divers problèmes d'extrema liés aux figures géométriques. Au IV^e siècle avant l'ère chrétienne, Euclide, dans ses "Éléments", a montré que le parallélogramme de plus grande surface incluse dans un triangle a pour sommets un des sommets du triangle et les trois milieux des côtés. Après une longue période de latence, l'étude des problèmes d'optimisation a pris un nouvel envol au XVII^e siècle avec l'avènement du calcul différentiel. C'est en ce moment que Fermat dans le cas des polynômes, énonça ce qu'on appelle la règle de Fermat. Cette règle stipule que la dérivée d'une fonction est nulle au point où elle atteint son minimum. Il revient à Newton et Leibniz d'avoir forgé les outils de base du calcul différentiel, qui permettent une étude systématique de nombreux problèmes d'optimisation. Jean Bernoulli proposa à la communauté mathématique le problème qui consiste à déterminer la courbe permettant le transfert, d'un point à un autre, d'une masse ponctuelle en un temps minimum. L'Hôpital, Leibniz et Newton proposèrent une solution au dit problème. La solution fut publiée dans le numéro de mai 1697 de la revue Acta Eruditorum. Euler, puis Lagrange étudièrent de façon systématique les problèmes d'optimisation de courbe. Le domaine fut appelé calcul des variations en raison de la méthode des variations introduite par Lagrange, et se développa considérablement au XIX^e siècle, en liaison avec la mécanique. Enfin, le XX^e siècle a vu le développement des méthodes d'optimisation grâce à l'introduction de la dualité et de l'analyse convexe. En effet, la dualité permet de regarder un problème d'optimisation sous deux angles : le problème primal et le problème dual. L'utilité de cette notion de dualité réside d'une part du faite que la valeur du dual est une minorante de celle du primal (dualité faible) et dans certains cas on a l'égalité entre les deux valeurs avec exactitude (c'est-à-dire la valeur est atteinte) de celle du dual (dualité forte). D'autre

part, il peut exister un passage de l'ensemble des solutions optimales du problème dual à celui du primal et vice versa. L'analyse convexe quant à elle permet entre autre d'assurer l'existence et / ou l'unicité de solutions optimales. Dans de nombreux cas, la convexité permet de caractériser les solutions optimales grâce aux équations d'Euler et de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). C'est également au XX^e siècle que les applications techniques ont connu un développement fulgurant, notamment dans les domaines des sciences sociales, de la finance, de la gestion et de l'économie.
Dans la pratique, les données d'un problème d'optimisation sont souvent soumises à des erreurs de modélisation ou de mesure et pour y remédier, A. L. Soyster [61] à introduit la notion de solution robuste (le pire des cas). Cette approche d'optimisation robuste a été valorisée par A. Ben-Tal et collaborateurs [9] au début du XXI^e siècle.
L'objectif de cette thèse est d'établir :

- la dualité forte pour un problème d'optimisation paramétrique sous de nouvelles conditions de qualification ;
- la dualité forte robuste d'un problème d'optimisation convexe conique à données incertaines ;
- une caractérisation des solutions optimales robustes pour des problèmes quadratiques (homogène et non homogène) à données incertaines.

La thèse est organisée en quatre (4) chapitres.

0.1 État de l'art

Dans ce chapitre, nous rappelons les principaux concepts et résultats d'analyse convexe utiles à l'étude des problèmes d'optimisation. L'étude des problèmes coniques requiert certaines propriétés relatives aux cônes qui y sont également développées. Nous rappelons le S-lemma et le théorème des alternatives, lesquels résultats sont utiles à l'étude des problèmes d'optimisation quadratique.

0.2 Dualité pour des problèmes paramétriques

Ce chapitre est dédié à une étude abstraite de la théorie de la dualité en optimisation convexe dans les espaces vectoriels topologiques. On considère le problème paramétrique (primal) suivant :

$$\text{minimiser } F(x, y)\ ,\ \text{s.l.c } x \in X, \tag{P_y}$$

où s.l.c signifie "sous les contraintes", X et Y sont deux espaces vectoriels topologiques, X^* et Y^* leurs duaux topologiques respectifs, $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et le

paramètre y est fixé dans Y.
On associe à la fonction F, la fonction dite de perturbation (horizontale) $G_y : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$G_y(x,u) = F(x, y+u), \quad \forall (x,u) \in X \times Y. \tag{1}$$

Ceci permet d'obtenir le problème dual paramétrique associé au problème (P_y) donné par

$$\text{maximiser } -G_y^*(0_{X^*}, y^*), \text{ s.l.c } y^* \in Y^*. \tag{D_y}$$

Notons que pour y fixé dans Y, la valeur de (D_y) est inférieure ou égale à celle de (P_y) (dualité faible) et le gap entre les deux valeurs est appelé saut de dualité. De nombreux auteurs ont proposé des conditions pour annuler le saut de dualité (dualité forte), en particulier des conditions de point-intérieur à partir de l'intérieur classique ou d'autres notions de l'intérieur tels que : le "core" ([55]), le "intrinsic core" ([34]) et l'intérieur quasi-relative ([19]). On retrouve dans les ouvrages de Zălinescu ([69]) et de Boţ ([15]) des conditions de qualifications réalisant la dualité forte de problème non paramétrique en faisant intervenir des projections.
Nous donnons des conditions de qualifications de type intérieur et fermeture garantissant des résultats de dualité forte du problème paramétrique. Nous donnons aussi les versions duales de nos résultats de dualité forte ([5]). Nous appliquons ensuite ces propriétés de dualité forte à la minimisation du maximum de deux fonctions convexes. Dans ce cas nous généralisons des résultats de dualité forte obtenus par Traoré-Volle ([65]).

0.3 Dualité robuste pour des problèmes d'optimisation convexe conique à données incertaines

Nous étudions dans ce chapitre un problème d'optimisation convexe conique incertain défini par

$$\inf_x f(x) \quad \text{s.l.c} \quad g_u(x) \in -S, \tag{P}$$

où U est un ensemble incertain, X et Y sont deux espaces vectoriels topologiques Hausdorff localement convexes, $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe semi-continue inférieurement et propre, $S \subset Y$ est un cône convexe fermé non vide, pour chaque $u \in U$, la fonction $g_u : \mathrm{dom}(g_u) \subset X \longrightarrow Y$ est soit S-convexe fermée par épigraphique ou S-convexe fermée par niveaux.
Au problème (P) est associé sa contrepartie robuste ([8], [9], [11]) définie par

$$\inf_x f(x) \quad \text{s.l.c} \quad g_u(x) \in -S, \ \forall u \in U. \tag{RP}$$

Le dual "optimiste" du problème (P) ([7], [16], [36], [43]) est défini également par

$$\sup_{(u,\lambda)} \inf_{x\in X} \{f(x) + \lambda g_u(x)\} \qquad \text{s.l.c} \quad (u,\lambda) \in U \times S^+. \tag{ODP}$$

Notons que le problème (P) a été étudié par Jeyakumar et collaborateurs ([43]) avec les fonctions g_u définies et continues sur l'espace X, ce qui est une condition plus forte que la fermeture des tranches ou des épigraphes.

La dualité forte de ce problème dans le cas où il n'y a pas d'incertitudes, a été étudiée par Boţ ([15]) et par Dinh, Vallet et Volle ([29]). L'apparition de l'incertitude au niveau des problèmes fait intervenir une notion de solution appelée solution robuste, laquelle notion a été introduite par Soyster ([61]). Ces solutions robustes sont les solutions du problème (RP). La valeur de la contrepartie robuste (RP) notée $\inf(RP)$, est appelée *valeur robuste* du problème incertain (P).

La dualité forte robuste est vérifiée s'il y a égalité entre la valeur robuste et la valeur du dual "optimiste" avec exactitude de la valeur du dual "optimiste". La dualité forte robuste est vérifiée si on a donc l'égalité $\inf(RP) = \max(ODP)$.

La dualité forte robuste a été établie par Li, Jeyakumar, Lee dans [43, Corollaire 3.1] dans le cas où les fonctions $g_u : X \longrightarrow Y$ sont S-convexes par épigraphe et continues sous la condition

$$\operatorname{epi} f^* + \bigcup_{u\in U, \lambda\in S^+} \operatorname{epi}(\lambda g_u)^* \text{ est convexe } \omega^*\text{-fermé}, \tag{2}$$

où S^+ est le cône polaire positif de S.

Ces auteurs utilisent l'approche de fonction de perturbation pour aboutir à leur résultat.

Nous introduisons le problème suivant

$$\sup_u \inf_x \{f(x) \quad : \quad g_u(x) \in -S\} \quad \text{s.l.c} \quad u \in U \tag{Q}$$

et nous appelons sa valeur, la *pire valeur* du problème (P).

On observe que la pire valeur est une minorante de la valeur robuste et que l'inégalité entre ces deux valeurs peut être stricte. L'objectif de ce chapitre est de donner une condition nécessaire et suffisante permettant d'obtenir l'égalité entre la valeur robuste et la pire valeur, avec exactitude de la pire valeur (c'est-à-dire la pire valeur est atteinte). On déduit de cette propriété une condition suffisante permettant d'obtenir la propriété de dualité forte robuste et on compare ce dernier résultat à celui de Jeyakumar, Li et Lee. En établissant l'égalité entre la valeur robuste et la pire valeur, nous établissons la dualité forte robuste du problème (P) ([6]).

0.4 Optimisation quadratique à données incertaines

Ce dernier chapitre aborde l'étude des problèmes quadratiques à données incertaines de la forme

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \frac{1}{2}x^T A x + a^T x \\ s.l.c & \begin{cases} \frac{1}{2}x^T B x + b^T x + \beta \leq 0 \\ Hx = d, \end{cases} \end{array} \qquad (UNH)$$

où $A \in \mathbb{S}^n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$,$\beta \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^m$, H est une matrice d'ordre $m \times n$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $(B, b) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^n$ est incertain et appartient à un ensemble incertain $V = V_0 \times V_1$ avec $V_0 = \{B_0 + \mu B_1 \ : \ \mu \in [\mu_0, \mu_1]\}, V_1 = \{b_0 + \delta b_1 \ : \ \delta \in [\delta_0, \delta_1]\}$ où $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R} \ : \ \mu_0 \leq \mu_1$, $\delta_0, \delta_1 \in \mathbb{R} \ : \ \delta_0 \leq \delta_1$, $B_0, B_1 \in \mathbb{S}^n$ et $b_0, b_1 \in \mathbb{R}^n$.

Ce type de problème apparaît dans plusieurs domaines d'applications tels que la communication et le traitement du signal ([46], [59]).

Jeyakumar et collaborateurs ([37]) ont étudié ce problème dans le cas où $H := 0, d = 0$ et $\beta > 0$. Ils utilisent une version robuste du S-lemma et du théorème des alternatives pour établir une caractérisation des solutions optimales robustes. Nous établissons une version robuste plus générale du S-lemma et du théorème des alternatives pour caractériser les solutions optimales robustes de (UNH).

CHAPITRE 1

État de l'art

1.1 Quelques notions sur l'analyse convexe

Nous donnons dans cette partie quelques concepts essentiels sur l'analyse convexe utiles pour l'étude des problèmes d'optimisation convexes.

1.1.1 Ensemble convexe

Considérons un $\mathbb{R}$-espace vectoriel X. Afin d'introduire la définition d'ensemble convexe nous abordons la notion d'ensemble affine.

1.1.1.1 Ensemble affine

Soient x et y distincts dans X, l'ensemble des points de la forme

$$(1-\lambda)x + \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est appelé "ligne" passant par x et y.

Définition 1.1. Un sous-ensemble M de X est appelé *ensemble affine* si

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in M \text{ pour tout } x, y \in M \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un ensemble affine M est donc un ensemble qui contient la "ligne" passant par deux points quelconques de M.

Exemple 1.1. L'ensemble vide $\emptyset$ par convention et l'espace X sont des ensembles affines.

Définition 1.2. Pour un sous-ensemble $M \subset X$, on définit le plus petit ensemble affine contenant M par

$$\operatorname{aff} M := \bigcap \{A \subset X \mid M \subset A, A \text{ affine}\}.$$

$\operatorname{aff} M$ est appelé *enveloppe affine* de M et on vérifie que (voir [4, Theorem 1.13])

$$\operatorname{aff} M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ x_i \in M,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Remarque 1.1. Un sous-ensemble M affine contenant l'origine de X est un sous-espace vectoriel.

Nous obtenons un lien entre un ensemble affine et un sous-espace vectoriel.

Proposition 1.1 ([66]). *Un sous-ensemble non vide M de X est un ensemble affine si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel L de X et $a \in M$ tel que $M = \{a\} + L$.*

1.1.1.2 Intérieur algébrique

Définition 1.3. Soit M un sous-espace vectoriel de X et soit A un sous-ensemble de X, l'*intérieur algébrique* noté $\operatorname{aint}_M A$ de A par rapport à M est :

$$\operatorname{aint}_M A := \{a \in X \mid \forall x \in M,\ \exists \delta > 0 : \forall \lambda \in [0, \delta],\ a + \lambda x \in A\}.$$

Remarque 1.2. On peut distinguer deux cas importants :

(i) $M = X$, dans ce cas l'intérieur algébrique de A par rapport à M est noté A^i et est appelé tout simplement *intérieur algébrique* de A ;

(ii) $M = \operatorname{aff}(A - A)$, dans ce cas l'intérieur algébrique de A par rapport à M est noté A^{ri} et est appelé *intérieur algébrique relatif* de A.

On obtient donc l'expression suivante de l'intérieur algébrique relatif :

$$A^{ri} = \{a \in X \mid \forall x \in \operatorname{aff}(A),\ \exists \delta > 0 : \forall \lambda \in [0, \delta],\ (1 - \lambda)a + \lambda x \in A\}.$$

1.1.1.3 Ensemble convexe

Définition 1.4. Un sous-ensemble C de X est dit *convexe* si pour tous $x, y \in C$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$; c'est-à-dire que C contient tout segment entre deux points de C.

Exemple 1.2.

(i) Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est convexe.

(ii) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, l'intervalle ouvert

$$]x, y[= \{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 < \lambda < 1\}$$

est un ensemble convexe de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.3. La notion d'ensemble convexe est donc plus générale que celle d'ensemble affine en ce sens que tout ensemble affine est convexe.

Définition 1.5. Une *combinaison convexe* des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ est un élément x de la forme

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

avec $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

On en déduit une autre caractérisation des ensembles convexes.

Proposition 1.2 ([66])**.** *Un sous-ensemble $C \subset X$ est convexe si et seulement si pour tous $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et pour tous $c_1, c_2, \ldots, c_n \in C$, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \in C.$$

Certaines opérations sur les ensembles convexes préservent la convexité.

Proposition 1.3 ([66])**.** *Les opérations suivantes préservent la convexité :*

(i) l'intersection d'une famille quelconque d'ensembles convexes est convexe,

(ii) si $C_1, C_2 \subset X$ sont deux sous-ensembles convexes alors la somme de Minkowski notée et définie par

$$C_1 + C_2 = \{x + y : x \in C_1, y \in C_2\}$$

et le produit de C_1 par un scalaire α noté et défini par

$$\alpha C_1 = \{\alpha x : x \in C_1\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

sont convexes,

(iii) le produit cartésien de deux sous-ensembles convexes $C_1, C_2 \subset X$ est un sous-ensemble $C_1 \times C_2$ convexe de $X \times Y$,

(iv) l'image d'un convexe $C \subset X$ par une application affine $f : X \longrightarrow Y$, (où Y est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel) est un convexe.

Proposition 1.4. *Si $C \subset X$ est un ensemble convexe et $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$, alors*

$$(\lambda_1 + \lambda_2)C = \lambda_1 C + \lambda_2 C.$$

Preuve.
Le résultat est évident si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.
Si au moins un des λ_1, λ_2 est non nul, on a pour tout $c_1 \in C, c_2 \in C$,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} c_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} c_2 = c \in C.$$

Il en résulte que

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} c_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} c_2\right) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)c \in (\lambda_1 + \lambda_2)C,$$

donc $\lambda_1 C + \lambda_2 C \subset (\lambda_1 + \lambda_2)C$.
Inversement, pour tout $c \in C$, comme

$$(\lambda_1 + \lambda_2)c = \lambda_1 c + \lambda_2 c \in \lambda_1 C + \lambda_2 C,$$

alors

$$(\lambda_1 + \lambda_2)C \subset \lambda_1 C + \lambda_2 C.$$

On conclut que

$$(\lambda_1 + \lambda_2)C = \lambda_1 C + \lambda_2 C.$$

□

Remarque 1.4. Pour tout sous-ensemble de X, il existe un plus petit ensemble convexe le contenant.

Définition 1.6. Soit $S \subset X$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes contenant S est appelé l'*enveloppe convexe* de S. C'est le plus petit ensemble convexe contenant S. On le note co S ou conv S et on a :

$$\text{co } S := \bigcap \Big\{A : S \subset A,\ A \text{ convexe}\Big\}.$$

Si de plus, X est un espace topologique, on note $\overline{co}\ S$ l'enveloppe convexe fermée de S.

Proposition 1.5 ([4])**.** *Soit $S \subset X$, l'enveloppe convexe co S est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des éléments de S.*

$$co\ S = \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i :\ x_i \in S,\ \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\right\}.$$

Corollaire 1.1. *L'enveloppe convexe de m points de X,* $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset X$ *est*

$$co(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : \ \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m, \ \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.7. L'enveloppe convexe de $m+1$ points linéairement indépendants $y_0, y_1, \ldots, y_m$ est appelé *simplexe* de dimension m et de sommets $y_0, y_1, \ldots, y_m$.

Remarque 1.5. Le point $\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_m y_m$ avec $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \dfrac{1}{1+m}$ est appelé *iso-barycentre* du simplexe.

1.1.1.4 Cône convexe

Définition 1.8. Un sous-ensemble K de X est un *cône* s'il est invariant pour la multiplication par un scalaire strictement positif, c'est-à-dire

$$\forall x \in K, \ \forall \lambda > 0, \ \lambda x \in K.$$

Remarque 1.6. Un cône a plusieurs propriétés, entre autres :

(i) l'origine 0 peut ou ne pas appartenir au cône K,

(ii) dans le cas où le cône ne contient pas de droite, on parle de cône "pointu",

(iii) l'ensemble $\{a\}+K$, $a \in X$ appelé translation du cône K par a est un cône de sommet a.

Exemple 1.3. Parmi les exemples de cônes convexes on peut citer :

(i) l'orthant positif de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\},$$

(ii) le cône des matrices symétriques semi-définies positives $\mathbb{S}^n_+ = \{A \in \mathbb{S}^n \ : \ x^T A x \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ n \in \mathbb{N}^*\}$ dans l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n,

(iii) le cône de Lorentz ou "ice cream cone", $\mathbb{L}_n = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sqrt{x_1^2 + \ldots, x_{n-1}^2} \leq x_n, \ \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

(iv) tout sous-espace vectoriel de X.

Proposition 1.6 ([66]). *Un sous-ensemble* $C \subset X$ *est un cône convexe si et seulement s'il vérifie les deux assertions suivantes :*

(i) $\forall x \in C, \forall \lambda > 0, \lambda x \in C,$

(ii) $\forall x_1, x_2 \in C, \ x_1 + x_2 \in C.$

Définition 1.9. Un point de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ avec $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$ est appelé *combinaison conique* (ou combinaison linéaire strictement positive) des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Corollaire 1.2. *Un sous-ensemble C de X est un cône convexe si et seulement si il contient toutes les combinaisons coniques de ses éléments.*

Remarque 1.7. L'intersection d'une famille quelconque de cônes convexes est un cône convexe.

Corollaire 1.3. *Soit C un sous-ensemble de X, le plus petit cône convexe contenant C est appelé enveloppe conique convexe noté cone(C) et est obtenu par :*

$$cone(C) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}^*,\ x_i \in C, \lambda_i > 0, i = 1, \ldots, n\}.$$

Si l'ensemble C est de plus convexe, on obtient une forme plus simple de l'enveloppe conique.

Corollaire 1.4. *Soit C un sous-ensemble convexe de X alors*

$$cone(C) = \{\lambda x : x \in C, \lambda > 0\}$$

1.1.1.5 Cône propre et inégalité généralisée

Dans cette sous section, on suppose que X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique.

Définition 1.10. Un cône $K \subset X$ est appelé *cône propre* s'il vérifie les propriétés suivantes :

(i) K est convexe,

(ii) K est fermé,

(iii) K est solide c'est-à-dire que l'intérieur de K est non vide,

(iv) K est pointu c'est-à-dire que K ne contient pas de droite autrement dit :
$x \in K$ et $-x \in K \Longrightarrow x = 0$.

Un cône propre K défini un ordre partiel avec l'inégalité généralisée qu'il engendre sur X. Au cône propre K on associe l'*inégalité généralisée* notée $\leq_K$ et définie par :

$$x \leq_K y \Longleftrightarrow y - x \in K,$$

appelée ordre partiel.
On définit de manière analogue l'*ordre partiel* strict notée $<_K$ par

$$x <_K y \Longleftrightarrow y - x \in \text{int}K,$$

où int$K$ désigne l'intérieure topologique de K.

Remarque 1.8. Si $X = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{R}_+$, l'ordre partiel $\leq_K$ est l'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{R}$, et l'ordre partiel strict $<_K$ est l'ordre strict usuel $<$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.4. L'orthant positif $K = \mathbb{R}^n_+$ est un cône propre. L'inégalité généralisée associée $\leq_{\mathbb{R}^n_+}$ est l'inégalité composante par composante entres vecteurs :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \;\; x \leq_{\mathbb{R}^n_+} y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Exemple 1.5. Le cône des matrices symétriques semi-définies positives d'ordre n, $\mathbb{S}^n_+$ est un cône propre dans l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n, $\mathbb{S}^n$. L'inégalité généralisée associée $\leq_{\mathbb{S}^n_+}$ est l'inégalité matricielle définie par :

$$\forall A, B \in \mathbb{S}^n,\;\; A \leq_{\mathbb{S}^n_+} B \Longleftrightarrow B - A \text{ est semi-définie positive c'est-à-dire } x^T(B-A)x \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où x^T est la transposée de x.

Propriété 1.1 ([21]). *Pour tout cône propre K de X, l'inégalité généralisée $\leq_K$ satisfait les propriétés suivantes :*

(i) $\forall x, y, u, v \in X$, *si* $x \leq_K y$ *et* $u \leq_K v$, *alors* $x + u \leq_K y + v$,

(ii) $\forall x, y \in X$ *et* $\alpha \geq 0$, *si* $x \leq_K y$, *alors* $\alpha x \leq_K \alpha y$,

(iii) L'inégalité généralisée $\leq_K$ *est :*

- *réflexive c'est-à-dire*

$$\forall x \in X, x \leq_K x,$$

- *antisymétrique c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in X, \;\; si\ x \leq_K y\ et\ y \leq_K x, \;\; alors\ x = y,$$

- *transitive c'est-à-dire*

$$\forall x, y, z \in X, \;\; si\ x \leq_K y\ et\ y \leq_K z\ alors\ x \leq_K z.$$

L'inégalité généralisée stricte $<_K$ a aussi certaines propriétés intéressantes.

Propriété 1.2 ([21]). $\forall x, y \in X$,

(i) si $x <_K y$ *alors* $x \leq_K y$,

(ii) $\forall u, v \in X$, *si* $x <_K y$ *et* $u \leq_K v$ *alors* $x + u <_K y + v$,

(iii) si $x <_K y$ *alors* $\forall \alpha > 0$, $\alpha x <_K \alpha y$.

Plusieurs propriétés liées à l'inégalité ordinaire $\leq$ sur $\mathbb{R}$ sont valables pour l'inégalité généralisée $\leq_K$. Cependant il existe certaines qui ne sont pas valables pour l'inégalité généralisée. Plus spécifiquement l'inégalité généralisée n'est pas une relation d'ordre totale, ce qui rend délicat la notion d'élément extremum.

Définition 1.11 ([21])**.** Soit S un sous-ensemble de X et K un cône propre de X.
Un élément $x \in S$ est dit élément *minimum* (respectivement *maximum*) de S par rapport à l'inégalité généralisée $\leq_K$ si pour tout $y \in S$, on a $x \leq_K y$ (respectivement $y \leq_K x$).
Une définition équivalente est la suivante : Un élément $x \in S$ est un élément *minimum* (respectivement *maximum*) si

$$S \subseteq x + K \text{ (respectivement si } -S \subset -x + K).$$

L'ensemble $x + K$ est l'ensemble des éléments comparables avec x et plus "grand" ou égale à x par rapport à $\leq_K$.

Propriété 1.3 ([21])**.** *Si un ensemble a un minimum (respectivement un maximum) alors il est unique.*

Définition 1.12. Soit S un sous-ensemble de X et K un cône propre de X. On dit qu'un élément $x \in S$ est un élément *minimal* (respectivement *maximal*) de S par rapport à l'inégalité généralisée $\leq_K$ si pour $y \in S$ tel que $y \leq_K x$ (respectivement $y \geq_K x$) alors $y = x$ (respectivement $y = x$).
On dit aussi qu'un élément $x \in S$ est un élément minimal de S (par rapport à $\leq_K$) si

$$(\{x\} - K) \cap S = \{x\}.$$

$x - K$ est l'ensemble des éléments comparables à x et plus "petit" ou égale à x.

Remarque 1.9. Si $X = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{R}^+$, l'ordre partiel $\leq_K$ devient l'ordre ordinaire $\leq$. Dans ce cas les concepts d'élément minimum (maximum) et d'élément minimal (maximal) coïncident. Ces notions correspondent à la définition usuel d'élément minimum (maximum) d'un ensemble.

Nous aurons aussi besoin dans la suite de la notion de cône régulier.

Définition 1.13 ([39])**.** Un cône $K \subset \mathbb{R}^n$ est un cône régulier si $K \cup (-K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.6. Le cône de premier ordre [3], $K = S + \mathbb{R}_+ d$, où S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$, est un cône régulier. En particulier les sous-espaces vectoriels, les rayons $\mathbb{R}_+ d$ (où $d \in \mathbb{R}^n$) sont des cônes réguliers.

1.1.2 Fonction convexe

Considérons X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ une fonction.

1.1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.14. On appel *domaine effectif* ou tout simplement *domaine* de f le sous-ensemble noté $\mathrm{dom}(f)$ de X et défini par :

$$\mathrm{dom}(f) := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.15. La fonction f est dite *propre* si

$$\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset \text{ et } f(x) > -\infty, \ \forall x \in X.$$

Définition 1.16. Le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R}$ noté $\mathrm{epi}f$ et défini par

$$\mathrm{epi}f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$$

est appelé *épigraphe de f*.
Si l'inégalité est stricte on parle d'*épigraphe strict* noté $\mathrm{epi}_S f$ et défini par

$$\mathrm{epi}_S f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) < r\}.$$

Définition 1.17. Soient X et Y deux ensembles, la projection sur X (respectivement sur Y) est la fonction notée $P_X : X \times Y \longrightarrow X$ (respectivement $P_Y : X \times Y \longrightarrow Y$) et définie par : $P_X(x, y) = x$ (respectivement $P_Y(x, y) = y$).

Remarque 1.10. Soient X et Y deux ensembles et $A \times B$ un sous-ensemble de l'espace produit $X \times Y$. La *projection* de $A \times B$ sur l'ensemble X (respectivement Y) est le sous-ensemble A (respectivement B) et notée par $\mathrm{Pr}_X(A \times B)$ (respectivement $\mathrm{Pr}_Y(A \times B)$). On a donc

$$\mathrm{Pr}_X(A \times B) = \{x \in X \ : \ \exists\, y \in B, \ (x, y) \in A \times B\} = A$$

et

$$\mathrm{Pr}_Y(A \times B) = \{y \in Y \ : \ \exists\, x \in A, \ (x, y) \in A \times B\} = B.$$

Remarque 1.11. Par définition de la projection,

$$\mathrm{Pr}_X(\mathrm{epi}f) := \{x \in X \mid \exists r \in \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$$

et on a que $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{Pr}_X(\mathrm{epi}f)$.

Définition 1.18. Les ensembles

$$[f \leq r] := \{x \in X \mid f(x) \leq r\}, \quad r \in \mathbb{R}$$

et

$$[f \geq r] := \{x \in X \mid f(x) \geq r\}, \quad r \in \mathbb{R}$$

sont appelés respectivement *tranche inférieure de f* de niveau r et *tranche supérieure de f* de niveau r. Si les inégalités sont strictes alors on parle respectivement de *tranche inférieure stricte* et de *tranche supérieure stricte*.

Définition 1.19. La fonction f est dite *convexe* si

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0,1]$$

avec la convention

$$(+\infty) + (-\infty) = +\infty, \ \ 0.(+\infty) = +\infty, \ \ 0.(-\infty) = 0. \tag{1.1}$$

L'inégalité de Jensen donne une définition plus générale de la convexité.

Propriété 1.4. *f est convexe si et seulement si f vérifie l'inégalité de Jensen*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n),$$

$\forall \lambda_i \geq 0, \ \ \forall x_i \in X, i = 1, \ldots, n, \ n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \ : \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1.$

***Preuve*.**
Si f est convexe on montre par récurrence que l'inégalité de Jensen est vérifiée.
Si l'inégalité de Jensen pour la fonction f est vérifiée, il est clair que la fonction est convexe. □

On utilise aussi une propriété géométrique pour caractériser la convexité d'une fonction.

Propriété 1.5 ([4])**.** *La fonction f est convexe si et seulement si son épigraphe* epi$f$ *ou son épigraphe* strict epi$_s f$ *est convexe.*

Définition 1.20. La fonction f est *concave* si $(-f)$ est convexe.

Exemple 1.7.

(i) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^p & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec } \ 1 \leq p < +\infty$$

est convexe.

(ii) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^p & \text{si } x \geq 0 \\ \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec } \; 0 < p < 1$$

est concave.

(iii) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ \\ +\infty & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est convexe.

Il existe d'autres caractérisations de la convexité des fonctions souvent liées à la nature de l'espace X.

Proposition 1.7. *La fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa restriction sur une "ligne" quelconque est convexe c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ et $y \in X$, la fonction $\varphi_{x,y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi_{x,y}(t) = f(x + ty), \quad t \in \mathbb{R}$$

est convexe.

Preuve.
Comme pour tout $z \in X$, $\exists x, y \in X$, $t \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + ty$ et de plus

$$\begin{aligned} \varphi_{x,y}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) =& f(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)y) \\ =& f(x + \lambda x - \lambda x + \lambda t_1 y + (1-\lambda)t_2 y) \\ =& f(\lambda(x + t_1 y) + (1-\lambda)(x + t_2 y)), \end{aligned}$$

alors pour tout $x, y \in X$, $\varphi_{x,y}$ est convexe si et seulement si f est convexe. □

Proposition 1.8. *Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est convexe,*

(ii) $\forall x, y \in H, f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle,$

où $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x.

Remarque 1.12. La condition (*ii*) est appelée condition de premier ordre.

***Preuve*.**
Supposons que f est convexe. Soient $x, y \in H$, on a pour tout $t \in]0, 1[$:

$$f(x + t(y - x)) - f(x) \leq t(f(y) - f(x)).$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\frac{1}{t}$ et en passant à la limite pour t tendant vers 0 on obtient :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle,$$

d'où (ii).
Supposons (ii). Pour tout $t \in [0, 1]$, (ii) est vraie pour $x + t(y - x)$ et x, c'est-à-dire

$$f(x) \geq f(x + t(y - x)) - t\langle \nabla f(x + t(y - x)), (y - x) \rangle,$$

(ii) est aussi vraie pour $x + t(y - x)$ et y, c'est-à-dire

$$f(y) \geq f(x + t(y - x)) + (1 - t)\langle \nabla f(x + t(y - x)), (y - x) \rangle.$$

En faisant la combinaison convexe des deux inégalités on obtient :

$$(1 - t)f(x) + tf(y) \geq f(x + t(y - x)),$$

ce qui prouve la convexité de f. □

Proposition 1.9. *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, alors f est convexe si et seulement si ∇f est un opérateur monotone c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in H \times H, \qquad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0. \tag{1.2}$$

***Preuve*.**
Soient $x, y \in H$, d'après la Proposition 1.8, si f est convexe, on a :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

et

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle,$$

en faisant la somme membre à membre on obtient

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0.$$

Réciproquement, pour $x, y \in H$ tels que $x \neq y$, soit la fonction $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t) = (1 - t)f(x) + tf(y) - f(x + t(y - x)).$$

φ est dérivable et on a :

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi'(t) = -f(x) + f(y) - \langle \nabla f(x + t(y-x)), y - x \rangle.$$

Par suite, $\forall t_1, t_2 \in [0,1] : t_1 \leq t_2$,

$$(t_1 - t_2)(\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)) = \langle \nabla f(x + t_2(y-x)) - \nabla f(x + t_1(y-x)), (t_1 - t_2)(y-x) \rangle \leq 0,$$

(d'après (1.2)). Par conséquent, φ est décroissante sur $[0,1]$. De plus $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et d'après le théorème de Rolle, il existe $a \in]0,1[$ tel que $\varphi'(a) = 0$. En utilisant le tableau de variation de φ, on obtient que $\varphi \geq 0$ sur $[0,1]$, ce qui correspond à la convexité de f. $\square$

Proposition 1.10. *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est convexe,

(ii) la matrice Hessienne $\nabla^2 f$ de f est semi-définie positive sur H.

L'assertion (ii) est appelée condition de second ordre.

***Preuve*.**
Si f est convexe alors d'après la Proposition (1.9)

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0,$$

en posant $x - y = t\omega$, $t > 0$ on obtient

$$\langle \nabla f(y + t\omega), \omega \rangle - \langle \nabla f(y), t\omega \rangle \geq 0.$$

En divisant par t et en passant à la limite quand $t \longrightarrow 0^+$, on a :

$$\langle \nabla^2 f(y)\omega, \omega \rangle \geq 0.$$

Réciproquement supposons que $\nabla^2 f$ est semi-définie positive sur H. Soient $x, y \in H$, d'après la formule de Taylor il existe $\theta \in]0,1]$ tel que

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x + \theta(y-x))(y-x), y - x \rangle.$$

Si $\nabla^2 f$ est semi-définie positive, d'après la proposition 1.8, f est convexe.

$\square$

Corollaire 1.5. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$, alors :*
f est convexe sur $]\alpha, \beta[\iff f'' \geq 0$ sur $]\alpha, \beta[$.

Corollaire 1.6. *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert, soit $A : H \longrightarrow H$ une application linéaire continue auto-adjointe (c'est-à-dire vérifiant $A^* = A$), soit $b \in H$ et soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$, dite quadratique, définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c,$$

est convexe sur H si et seulement si $\langle u, Au \rangle \geq 0,\ \forall u \in H$.
En particulier si $H = \mathbb{R}^n$, la fonction quadratique $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx \rangle + \langle a, x \rangle + \alpha,$$

avec $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et Q une matrice symétrique de taille $n \times n$, est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si Q est semi-définie positive.

Nous décrivons certaines opérations qui conservent la convexité, ce qui permet de construire de nouvelles fonctions convexes.

Proposition 1.11. *Si $f_i : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ i = 1, \ldots, n$ sont n fonctions convexes alors pour $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$, la fonction*

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n$$

est convexe. En particulier la somme de deux fonctions convexes est convexe.

Par définition, la preuve est immédiate.

Théorème 1.1. *Si $f_i : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ i \in I \neq \emptyset,\ I \subset \mathbb{N}$ est une famille de fonctions convexes alors la fonction $\sup\limits_{i \in I} f_i$ définie par*

$$(\sup_{i \in I} f_i)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$

est convexe.

Preuve.
Puisque

$$\operatorname{epi}(\sup_{i \in I} f_i) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{epi} f_i$$

est convexe, on déduit le résultat de la Propriété 1.5. □

Corollaire 1.7. *Soient f_1 et $f_2 : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes. La fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par : $f = \sup\{f_1, f_2\}$ notée souvent $f_1 \vee f_2$ et définie par*

$$f(x) = (f_1 \vee f_2)(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x)\},\quad \forall x \in X$$

est convexe.

Remarque 1.13. Notons que l'infimmum de deux fonctions convexes n'est pas forcement convexe. En effet, les fonctions définies par
$f_1(x) = x + 1$ et $f_2(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$ sont convexes sur $\mathbb{R}$, mais

$$f(x) = (f_1 \wedge f_2)(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x)\} = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ \\ x+1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Étant donné $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, on écrit $\min(E)$ (respectivement $\max(E)$) au lieu de $\inf(E)$ (respectivement $\sup(E)$) lorsque l'infimum (respectivement le supremum) est atteint.

Définition 1.21. Soient X et Y deux espaces vectoriels et $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. La fonction $h : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$h(y) = \inf_{x \in X} F(x, y)$$

est appelée fonction *marginale* associée à F.

Théorème 1.2. *Si F est convexe alors la fonction marginale h associée à F est convexe.*

Preuve.
En effet, $\mathrm{epi}_s h = \mathrm{Pr}_Y \mathrm{epi}_s F$ est convexe si F est convexe. □

Définition 1.22. La *fonction indicatrice* d'un sous-ensemble A de X est la fonction
$i_A : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$i_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ \\ +\infty & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Remarque 1.14. Il est clair que $\mathrm{dom}(i_A) = A$ et epi $i_A = A \times \mathbb{R}_+$ et il en résulte que i_A est convexe si et seulement si A est convexe.

Si f est convexe, les tranches inférieures et inférieures strictes de f de niveau r respectivement $[f \leq r]$, $[f < r]$ sont convexes pour tout $r \in \mathbb{R}$. Le sens inverse est généralement faux.

Définition 1.23. Une fonction f est dite *quasi-convexe* si l'ensemble $[f \leq r]$ est convexe, pour tout $r \in \mathbb{R}$.

Propriété 1.6. *Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est quasi-convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0, 1] : \ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}. \tag{1.3}$$

Preuve.
Supposons que f est quasi-convexe. Soient $x, y \in X$, on a

$$x \in [f \leq \max\{f(x), f(y)\}] \qquad \text{et} \qquad y \in [f \leq \max\{f(x), f(y)\}].$$

Alors, $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in [f \leq \max\{f(x), f(y)\}].$$

D'où (1.3). Inversement supposons que (1.3) est vérifiée. Soient $r \in \mathbb{R}$, x et $y \in [f \leq r]$, on a

$$f(x) \leq r \quad \text{et} \quad f(y) \leq r. \Longrightarrow \max\{f(x), f(y)\} \leq r.$$

Comme (1.3) est vérifiée, alors

$$\forall \lambda \in [0,1] : \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq r.$$

Par conséquent $[f \leq r]$ est convexe. □

1.1.2.2 Généralisation de la convexité

De manière naturelle, on étant la notion de fonction convexe à valeurs dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un ordre partiel engendré par un cône propre. Soit Y un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et K un cône propre de Y. Rappelons que le cône propre K induit un ordre partiel noté $\leq_K$ et qu'il défini un élément maximal et minimal de Y relativement à l'ordre partiel. Notons ∞ l'élément maximal et $-\infty$ l'élément minimal. Par analogie à $\overline{\mathbb{R}}$, on considère l'espace $Y \cup \{-\infty, \infty\}$ et on note

$$Y^\bullet = Y \cup \{\infty\},$$

où $-\infty \notin Y$ et $\infty \notin Y$ tel que $-\infty \leq_K y$, $y \leq_K \infty$ pour tout $y \in Y$ (comme $\forall y \in Y$, $y \neq \infty, y \neq -\infty$, alors on pose $y <_K \infty, -\infty <_K y$).
Ainsi, soit $(Y, \leq_K)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un ordre partiel $\leq_K$ associé à un cône propre K de Y et soit une fonction h définie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel X vers $Y^\bullet$ c'est-à-dire $h : X \longrightarrow Y^\bullet$. On peut définir, d'une manière plus générale, la convexité d'une telle fonction (se référer à [26], [41], [44], [45], [51], pour d'autres propriétés).

Définition 1.24. On dit que $h : X \longrightarrow Y^\bullet$ est K-convexe si :

$$\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \ h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq_K \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y).$$

En outre, h est dit K-concave si la fonction $-h : X \longrightarrow Y \cup \{-\infty\}$ est K-convexe.

Exemple 1.8. Toute application linéaire définie de X vers Y est K-convexe pour tout cône propre K de Y.

Tout comme dans le cas où $Y = \mathbb{R}$, on peut définir le domaine et l'épigraphe de h.

Définition 1.25. Le domaine de h est défini par :

$$\mathrm{dom}(h) = \{x \in X : h(x) <_K \infty\}.$$

Son K-épigraphe, noté K-epi h est défini par :

$$\text{K-epi}h = \{(x, y) \in X \times Y : h(x) \leq_K y\}.$$

Son K-niveau de niveau $y \in Y$ est défini par :

$$[h \leq_K y] = \{x \in \mathrm{dom}(h) : h(x) \in y - K\}.$$

Définition 1.26. On dit que :

(i) h est K-convexe (respectivement K-fermée) par épigraphe si le K-epi$h$ est convexe (respectivement fermé),

(ii) h est K-convexe (respectivement K-fermée) par niveaux si les K-niveaux de h sont convexes (respectivement fermés),

(iii) h est K-convexe fermée par épigraphe si le K-epi$h$ est convexe et fermé,

(iv) h est K-convexe fermée par niveaux si les K-niveaux de h sont convexes et fermés.

Définition 1.27. Si f est une fonction définie de Y vers $\overline{\mathbb{R}}$ alors on dit que f est K-croissante si

$$x \leq_K y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \;\text{ avec } x, y \in Y.$$

On définit de manière analogue les fonctions K-décroissantes.

Exemple 1.9. On observe qu'une fonction linéaire $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ est K-croissante si et seulement si $\varphi(y) \geq 0$ pour tout $y \in K$.
En effet, soit une fonction $\varphi : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.
Supposons que $\varphi(y) \geq 0, \;\; \forall y \in K$. Soient $x, z \in Y \;:\; x \leq_K z$, c'est-à-dire $z - x \in K$; donc $\varphi(z - x) \geq 0$ ce qui implique que $\varphi(z) \geq \varphi(x)$ par linéarité de φ. Inversement, soit $y \in K$. On a $0 \leq_K y$, comme φ est croissante alors $\varphi(y) \geq \varphi(0) = 0$.

On peut adapter les caractérisations de la convexité classique à cette généralisation de la convexité.

Théorème 1.3 ([69]). *Soit $g : Y^{\bullet} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe.*
Si $h : X \longrightarrow Y^{\bullet}$ est K-convexe et g est K-croissante alors $g \circ h$ est convexe.
En outre $g \circ h$ est convexe si $h : X \longrightarrow Y \cup \{-\infty\}$ est K-concave et g K-décroissante. En particulier, si A est une application linéaire de X vers Y alors $g \circ A$ est convexe.

1.1.3 Fonctions quadratiques et convexité

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons l'ensemble $\mathbb{S}^n$ des matrices symétriques et pour $x \in \mathbb{R}^n$ nous désignons par x^T la transposée de x. Pour $A, B \in \mathbb{S}^n$, l'écriture $A \succeq B$ signifie que la matrice $A - B$ est semi-définie positive et l'écriture $A \succ B$ signifie que la matrice $A - B$ est définie positive.
Énonçons le lemme suivant dû à Dine.

Lemme 1.1 ([28]). *Pour tout, $A_1, A_2 \in \mathbb{S}^n$, alors l'ensemble*

$$\{(x^T A_1 x, x^T A_2 x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

est convexe.

Notons que le théorème de Dine peut être vérifié s'il s'agit de plus de deux fonctions quadratiques homogènes. Polyak [53] a étendu ce résultat à trois fonctions quadratiques sous une condition supplémentaire.

Lemme 1.2 ([53]). *Soient $n \geq 3$, $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{S}^n$. Supposons qu'il existe $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 \succ 0.$$

Alors, l'ensemble

$$\{(x^T A_1 x, x^T A_2 x, x^T A_3 x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

est convexe.

Il existe une formulation plus général du Lemme de Dine utilisant la notion de cône régulier définie comme suit.

Lemme 1.3 ([39]). *Soient $A_1, A_2 \in \mathbb{S}^n$ et K un cône régulier de $\mathbb{R}^n$. Alors, l'ensemble*

$$\{(x^T A_1 x, x^T A_2 x) \ : \ x \in K\}$$

est convexe.

1.1.4 Théorèmes des alternatives et S-lemma

Une notion très utile en optimisation quadratique est le S-lemma. Notons que le S-lemma est une version quadratique du lemme de Farkas ([35]) pour un système de deux inégalités.

Lemme 1.4 ([52]). *Soient f et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies par*

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A_1 x + b_1^T x + c_1 \quad et \quad g(x) = \frac{1}{2} x^T A_2 x + b_2^T x + c_2,$$

où $A_1, A_2 \in \mathbb{S}^n$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_0) < 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $g(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow f(x) \geq 0,$

(*ii*) $\exists \lambda \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n, \ f(x) + \lambda g(x) \geq 0.$

Le théorème des alternatives de Yuan ([24]) suivant est une extension du théorème de Gordan (pour les systèmes linéaires) aux systèmes quadratiques.

Lemme 1.5 ([24]). *Soient A_1 et $A_2 \in \mathbb{S}^n$. Alors exactement une seule des assertions suivantes est vérifiée :*

(*i*) $\exists x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2}x^T A_1 x < 0, \ \frac{1}{2}x^T A_2 x < 0,$

(*ii*) $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\} : \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x^T(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)x \geq 0.$

Une généralisation du théorème des alternatives de Yuan [39, Théorème 3.2] a été obtenue à partir du Lemme 1.3.

Théorème 1.4 ([39]). *Soient f et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A_1 x \ \ et \ \ f(x) = \frac{1}{2}x^T A_2 x, \ \ où \ \ A_1, A_2 \in \mathbb{S}^n.$$

Soit K un cône régulier. Alors exactement une seule des assertions suivantes est vérifiée :

(*i*) $\exists x \in K : f(x) < 0, \ \ g(x) < 0,$

(*ii*) $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\} : \forall x \in K, \ \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) \geq 0.$

Dans [39, Corrolaire 3.1] A partir du Théorème 1.4, une forme générale du S-lemma est déduit.

Corollaire 1.8 ([39]). *Soient K un cône régulier, f et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A_1 x \ \ et \ \ f(x) = \frac{1}{2}x^T A_2 x, \ \ où \ \ A_1, A_2 \in \mathbb{S}^n.$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in K$ telle que $g(x_0) < 0$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $g(x) \leq 0, \ x \in K \Longrightarrow f(x) \geq 0,$

(*ii*) $\exists \lambda \geq 0 : \forall x \in K, \ f(x) + \lambda g(x) \geq 0.$

Le théorème des alternatives de Yuan est donné dans [39] dans le cas d'un système d'inégalités impliquant deux fonctions quadratiques non homogènes.

Théorème 1.5 ([39]). *Soient f et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A_1 x + b_1^T x + c_1 \ \ et \ \ g(x) = \frac{1}{2}x^T A_2 x + b_2^T x + c_2, \ \ où \ A_1, A_2 \in \mathbb{S}^n, \ \ b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n \ \ et \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Soient $a_0 \in \mathbb{R}^n$ et S_0 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors exactement une seule des assertions suivantes est vérifiée.

(i) $\exists x \in a_0 + S_0$: $f(x) < 0, \;\; g(x) < 0,$

(ii) $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$: $\forall x \in a_0 + S_0, \;\; \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) \geq 0.$

Remarque 1.15. Il a été observé dans [39] que le Théorème 1.5 peut ne pas être vérifié si on remplace l'ensemble $a_0 + S_0$ dans le (i) par un cône régulier.

Le Théorème 1.5 permet, dans [39] de donner une autre forme plus générale du S-lemma.

Corollaire 1.9. *[39] Soient $a_0 \in \mathbb{R}^n$ et S_0 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soient f et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A_1 x + b_1^T x + c_1 \;\; \textit{et} \;\; g(x) = \frac{1}{2}x^T A_2 x + b_2^T x + c_2, \;\; \textit{où} \;\; A_1, A_2 \in \mathbb{S}^n, \;\; b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n \;\; \textit{et} \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in a_0 + S_0$ tel que $g(x_0) < 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $g(x) \leq 0$, $x \in a_0 + S_0 \Longrightarrow f(x) \geq 0,$

(ii) $\exists \lambda \geq 0$: $\forall x \in a_0 + S_0$, $f(x) + \lambda g(x) \geq 0.$

1.1.5 Topologie faible, topologie de Mackey

Soit X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et X^* son dual topologique (l'ensemble des formes linéaires continues sur X).

Définition 1.28. La *topologie faible* notée $\sigma(X, X^*)$ ou ω est la topologie la moins fine (possédant le minimum d'ouverts) rendant continue toutes les applications $x^* \in X^*$.

Proposition 1.12 ([22])**.** *La topologie $\sigma(X, X^*)$ est séparée.*

Pour chaque $x \in X$, on considère l'application

$$\varphi_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle = f(x).$$

Définition 1.29. La *topologie faible* $*$ que l'on note $\sigma(X^*, X)$ ou ω^* est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in X}$.

Proposition 1.13 ([22])**.** *La topologie faible $*$ $\sigma(X^*, X)$ est séparée.*

Définition 1.30. La topologie de Mackey définie sur X^* notée $\tau(X^*, X)$ est la topologie la plus fine (possédant le plus grand nombre d'ouverts) sur X^* rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in X}$.

1.1.6 Fonction semi-continue

1.1.6.1 Définition de la semi-continuité

Dans cette partie, X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction. Pour $x \in X$, notons par $\mathscr{N}_X(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans X.

Définition 1.31. La fonction f est semi-continue inférieurement en $x \in X$ si

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(x) > t,\ \exists V \in \mathscr{N}_X(x) \mid V \subset [f \geq t].$$

La fonction f est semi-continue supérieurement en $x \in X$ si

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(x) < t,\ \exists V \in \mathscr{N}_X(x) \mid V \subset [f \leq t].$$

Définition 1.32. La fonction f est *semi-continue inférieurement* si elle est semi-continue inférieurement en tout point $x \in X$.

Propriété 1.7 ([4], [69]). *f est semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i) si pour tout $r \in \mathbb{R}$, la tranche inférieure de f de niveau r, $[f \leq r]$ est fermée dans X.*

Remarque 1.16. En fait, on peut énoncer cette définition de la semi-continuité en prenant $r \in \overline{\mathbb{R}}$ puisque les ensembles

$$[f \leq +\infty] = X \ \text{ et } \ [f \leq -\infty] = \bigcap_{r \in \mathbb{R}} [f \leq r]$$

seront fermés.

Propriété 1.8 ([4], [69]). *f est semi-continue supérieurement (en abrégé s.c.s) si pour tout $r \in \mathbb{R}$, la tranche inférieure stricte de niveau r de f, $[f < r]$ est ouverte dans X.*

Remarque 1.17. f est s.c.s si et seulement si $-f$ est s.c.i.

Exemple 1.10. Soit A un sous-ensemble de X, la fonction indicatrice i_A est s.c.i (respectivement s.c.s) si A est fermé (respectivement ouvert) et inversement.

Proposition 1.14 ([47]). *f est s.c.i si et seulement si son épigraphe* $\operatorname{epi} f$ *est fermé dans l'espace topologique $X \times \mathbb{R}$.*

Corollaire 1.10. *f est s.c.s si et seulement si son épigraphe strict* $\operatorname{epi}_s f$ *est ouvert dans l'espace topologique produit $X \times \mathbb{R}$.*

1.1.6.2 Semi-continuité de fonction convexe

Dans cette sous-section, X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel localement convexe séparé. On peut caractériser les fonctions semi-continues inférieurement en utilisant la topologie faible.

Théorème 1.6 ([69]). *Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est convexe et s.c.i,
(ii) f est convexe et ω-semi-continue inférieurement,
(iii) $\mathrm{epi} f$ *est convexe et fermé,*
(iv) $\mathrm{epi} f$ *est convexe et ω-fermé.*
ω-semi-continue inférieurement pour signifier que la continuité est prise par rapport à la topologie faible et ω-fermé pour dire que l'ensemble est faiblement fermé.

Preuve.
Il suffit de remarquer qu'un ensemble convexe et fermé est convexe et ω-fermé et vice versa. □

Proposition 1.15 ([47], [69]). *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i. S'il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = -\infty$, alors $f(x) = -\infty$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$.*

Théorème 1.7 ([69]). *Si la fonction convexe $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est bornée supérieurement sur un voisinage d'un point de son domaine alors, f est continue sur l'intérieur de son domaine. De plus, si f n'est pas propre alors f est identiquement égale à $-\infty$ sur l'intérieur de son domaine.*

Corollaire 1.11 ([69]). *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. Alors f est continue sur* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ *si et seulement si* $\mathrm{int}(\mathrm{epi} f)$ *est non vide dans $X \times \mathbb{R}$.*

1.1.6.3 Inf-convolution

Soient f et g deux fonctions définies de X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.33. On appelle *somme épigraphique* ou *inf-convolution* de f et g la fonction notée $f \square g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et définie par :

$$(f \square g)(x) = \inf\{f(u) + g(v) \ : \ u + v = x\}.$$

Remarque 1.18.

(i) À l'aide d'un changement de variables, on a :

$$\begin{aligned}(f\square g)(x) &= \inf\{f(x-u)+g(u)\ :\ u\in\mathbb{R}\}\\ &= \inf\{f(u)+g(x-u)\ :\ x\in\mathbb{R}\} = (g\square f)(x).\end{aligned}$$

(ii) Le domaine et l'épigraphe strict de la somme épigraphique sont donnés par

$$\mathrm{dom}(f\square g) = \mathrm{dom}(f) + \mathrm{dom}(g),$$

$$\mathrm{epi}_s(f\square g) = \mathrm{epi}_s f + \mathrm{epi}_s g.$$

Si au lieu de minimiser la somme de deux fonctions on minimise le maximum des deux fonctions, on définit une autre fonction.

Définition 1.34. On appelle *max-convolution* ou *conjugaison par tranche* de f et g la fonction notée $f\triangle g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et définie par :

$$\begin{aligned}(f\triangle g)(x) &= \inf\{f(u)\vee g(v)\ :\ u+v=x\}\\ &= \inf\{\max(f(u),g(v))\ :\ u+v=x\}.\end{aligned}$$

Remarque 1.19. On vérifie que

$$\mathrm{dom}(f\triangle g) = \mathrm{dom}(f) + \mathrm{dom}(g),$$

$$\forall r\in\mathbb{R},\ \ [f\triangle g<r] = [f<r]+[g<r].$$

La propriété suivante donne un résultat sur la convexité de l'inf-convolution et du max-convolution.

Propriété 1.9 ([69])**.** *Si les fonctions f, g sont convexes et propres alors :*

(i) $f\square g$ *et* $f\triangle g$ *sont convexes,*

(ii) $\inf f\square g = \inf f + \inf g$*,*

(iii) $\inf f\triangle g = \inf f \vee \inf g$*.*

Proposition 1.16 ([47])**.** *Si f est s.c.s, alors $f\square g$ est s.c.s pour toute fonction $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.*

Nous rappelons la notion d'inf-compacité utile en optimisation.

Définition 1.35. On dit que $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est *inf-compacte* si pour tout $r\in\mathbb{R}$, la tranche inférieure de f de niveau r est compacte.

Remarque 1.20. Si X est séparé, les compactes sont fermés et donc toute fonction définie de X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, inf-compacte est s.c.i.

Propriété 1.10 ([47]). *Les fonctions inf-compactes vérifient les propriétés suivantes :*

(i) *une fonction inf-compacte admet un minimum. De plus, si elle ne prend pas la valeur $-\infty$, alors elle est bornée inférieurement,*

(ii) *toute fonction s.c.i minorée par une fonction inf-compacte est inf-compacte,*

(iii) *si f et g sont deux fonctions à valeurs dans* $]-\infty,+\infty]$*, l'une inf-compacte, l'autre s.c.i et bornée inférieurement alors $f+g$ est inf-compacte,*

(iv) *l'enveloppe supérieure d'une famille quelconque (respectivement l'enveloppe inférieure d'une famille finie) de fonctions inf-compactes est inf-compacte.*

Le résultat suivant assure la semi-continuité inférieure d'une fonction marginale.

Lemme 1.6 ([47]). *Soit U un espace compact et $\phi : X \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction s.c.i sur l'espace produit $X \times U$. Alors la fonction marginale $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(x) = \min_{u \in U} \phi(x,u), \quad \forall x \in X,$$

est s.c.i sur l'espace X.

Proposition 1.17 ([47]). *Si f et g sont deux fonctions à valeurs dans* $]-\infty,+\infty]$ *telles que f est inf-compacte, g s.c.i et bornée inférieurement. Alors, la fonction $f \Box g$ est s.c.i et bornée inférieurement. De plus cette inf-convolution est exacte, c'est-à-dire que l'inf est atteint.*

Exemple 1.11. Si A est une partie compacte de X et B une partie fermée de X et si les fonctions indicatrices i_A et i_B satisfont les hypothèses de la Proposition 1.17, on en déduit que $i_A \Box i_B = i_{A+B}$ est s.c.i ; par conséquent que l'ensemble $A+B$ est fermé.

Proposition 1.18 ([47]). *Si X est séparé alors l'ensemble des fonctions inf-compactes à valeurs dans* $]-\infty,+\infty]$ *est stable pour l'inf-convolution.*

1.1.7 Calcul sous-différentiel

1.1.7.1 Fonction conjuguée

Dans cette sous-section, X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique, X^* son dual topologique et f une fonction de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. On note le crochet de dualité $\langle , \rangle$ associé à X et X^* et qui est défini par :

$$\forall x \in X, x^* \in X^*, \quad x^*(x) = \langle x^*, x \rangle.$$

On considère l'ensemble des fonctions affines continues minorant la fonction f c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires $x^* \in X^*$ et des réels α, tels que

$$\langle x^*, x\rangle - \alpha \leq f(x), \quad \forall x \in X,$$

qui est équivalente à

$$\alpha \geq \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}.$$

Pour x^* fixé dans X^*, le plus petit α vérifiant l'inégalité précédente est

$$\alpha_{x^*} = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}.$$

Définition 1.36. On appelle *transformée de Fenchel* ou *conjuguée de Fenchel* de la fonction f, la fonction $f^* : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Remarque 1.21. En utilisant la convention $\inf \emptyset = +\infty$ on a

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in \mathrm{dom}(f)}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Définition 1.37. Pour une fonction $h : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on définit de manière similaire la conjuguée de Fenchel par

$$h^*(x) = \sup_{x^*\in X^*}\{\langle x^*, x\rangle - h(x^*)\}, \quad \forall x \in X.$$

La remarque ci-dessus est aussi valable pour la conjuguée de h.
La conjuguée de Fenchel d'une fonction vérifie certaines propriétés.

Théorème 1.8. *Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $k : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a :*
(i) f^* est convexe et ω^*-s.c.i (faiblement semi-continue inférieurement),
(ii) k^* est convexe et s.c.i,
(iii) f vérifie l'inégalité de Young-Fenchel :

$$\forall x \in X, \forall x^* \in X^*, \ f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x\rangle,$$

(iv) $f \leq g \implies g^* \leq f^*$,
(v) si $\alpha > 0$ alors $(\alpha f)^*(x^*) = \alpha f^*(\alpha^{-1}x^*)$ pour tout $x^* \in X^*$,
(vi) si $\beta \neq 0$ alors $(f(\beta.))^*(x^*) = f^*(\beta^{-1}x^*)$ pour tout $x^* \in X^*$,
(vii) si $x_0 \in X$ et $g(x) = f(x + x_0)$ pour $x \in X$, alors $g^*(x^*) = f^*(x^*) - \langle x^*, x_0\rangle$,
(viii) si $x_0^* \in X^*$ alors $(f + x_0^*)^*(x^*) = f^*(x^* - x_0^*)$ pour tout $x^* \in X^*$,

(ix) si f, h sont propres et $\Phi : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\Phi(x, y) := f(x) + h(y)$, alors
$\Phi^*(x^*, y^*) = f^*(x^*) + h^*(y^*)$ pour tout $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$,
(x) $(f \square g)^* = f^* + g^*$.

***Preuve**.*

(i) Si f n'est pas propre alors $f^* = +\infty$ ou $f^* = -\infty$, donc f^* est constante et par conséquent f^* est convexe et ω^*-s.c.i.
Si f est propre, alors on a

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathrm{dom}(f)} \varphi_x(x^*),$$

avec la fonction $\varphi_x : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$\varphi_x(x^*) = \langle x^*, x\rangle - f(x).$$

Il est clair que pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$, φ_x est affine donc convexe, de plus φ_x est ω^*-continue par définition donc ω^*-s.c.i. Par conséquent, f^* est convexe et ω^*-s.c.i en tant que supremum d'une famille de telles fonctions.
(ii) (ii) est la version duale de (i) par conséquent on raisonne de manière analogue qu'au niveau de (i).
(iii) On a

$$\forall x^* \in X^*, \quad f^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} \geq \langle x^*, x\rangle - f(x), \quad \forall x \in X.$$

$$\Longrightarrow \forall x \in X, \forall x^* \in X^*, \quad f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x\rangle.$$

(iv) On a

$$\begin{aligned}\forall x \in X, f(x) \leq g(x) &\Longrightarrow \langle x^*, x\rangle - f(x) \geq \langle x^*, x\rangle - g(x), \quad \forall x^* \in X^* \\ &\Longrightarrow f^*(x^*) \geq g^*(x^*), \quad \forall x^* \in X^*.\end{aligned}$$

(v) Soit $\alpha > 0$, pour tout $x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned}(\alpha f)^*(x^*) &= \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - \alpha f(x)\} \\ &= \alpha \sup_{x \in X}\{\langle \frac{1}{\alpha} x^*, x\rangle - f(x)\} \\ &= \alpha f^*(\frac{x^*}{\alpha}).\end{aligned}$$

(vi) Soit $\beta \in \mathbb{R}^*$, pour tout $x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned}(f(\beta.))^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(\beta x)\}\\ &= \sup_{y\in X}\{\langle x^*, \frac{1}{\beta}y\rangle - f(y)\}\\ &=(f)^*(\frac{1}{\beta}x^*).\end{aligned}$$

(vii) Soit $x_0 \in X$, on a $g(x) = f(x + x_0)$ alors

$$\begin{aligned}\forall x^* \in X^*, g^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x + x_0)\}\\ &= \sup_{y\in X}\{\langle x^*, y - x_0\rangle - f(y)\}\\ &= \sup_{y\in X}\{\langle x^*, y\rangle - f(y)\} - \langle x^*, x_0\rangle\\ &=f^*(x^*) - \langle x^*, x_0\rangle.\end{aligned}$$

$(viii)$ Si $x_0^* \in X^*$ alors

$$\begin{aligned}(f + x_0^*)^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x) + \langle x_0^*, x\rangle\}\\ &= \sup_{x\in X}\{\langle x^* - x_0^*, x\rangle - f(x)\}\\ &=f^*(x^* - x_0^*), \quad \forall x^* \in X^*.\end{aligned}$$

(ix) Si f, h sont propres et $\Phi : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\Phi(x, y) := f(x) + h(y)$, alors

$$\begin{aligned}\Phi^*(x^*, y^*) &= \sup_{(x,y)\in X\times Y}\{\langle (x^*, y^*), (x, y)\rangle - f(x) - h(y)\rangle\}\\ &= \sup_{(x,y)\in X\times Y}\{\langle x^*, x\rangle - f(x) + \langle y^*, y\rangle - h(y)\rangle\}\\ &= \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} + \sup_{y\in Y}\{\langle y^*, y\rangle - h(y)\rangle\}\\ &=f^*(x^*) + h^*(y^*), \quad \forall (x^*, y^*) \in X^* \times Y^*.\end{aligned}$$

(x) On a

$$\begin{aligned}(f\Box g)^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \inf_{y\in X}\{f(y) + g(x - y)\}\}\\ &= \sup_{(x,y)\in X\times X}\{\langle x^*, x\rangle - f(y) - g(x - y)\}\\ &= \sup_{(z,y)\in X\times X}\{\langle x^*, z + y\rangle - f(y) - g(z)\}\\ &=f^*(x^*) + g^*(x^*), \quad \forall x^* \in X^*.\end{aligned}$$

□

Dans la suite on note $\Gamma_0(X)$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexes, s.c.i et propres et $\Gamma_0(X^*)$ l'ensemble des fonctions $h : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexes, ω^*-s.c.i et propres.

Corollaire 1.12. *Soient $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f^* \in \Gamma_0(X^*)$

$$(ii) \begin{cases} \mathrm{dom}(f) \neq \emptyset \\ \\ \exists x^* \in X^*,\ \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in X,\ f(x) \geq \langle x^*, x\rangle + \alpha. \end{cases}$$

Preuve.
Si $f^* \in \Gamma_0(X^*)$, alors $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$ et $\exists x^* \in X^*,\ \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f^*(x^*) = -\alpha$.

$$\begin{aligned} f^*(x^*) = -\alpha \quad &\Longrightarrow \langle x^*, x\rangle - f(x) \leq -\alpha, \quad \forall x \in X \\ &\Longrightarrow f(x) \geq \langle x^*, x\rangle + \alpha, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Inversement supposons (ii) vérifiée.
D'après (i) du Théorème 1.8, f^* est convexe et ω^*-s.c.i. Comme $f(x) \geq \langle x^*, x\rangle + \alpha$, alors

$$\begin{aligned} &\langle x^*, x\rangle - f(x) \leq -\alpha, \qquad x \in X, \forall x^* \in X^* \\ \Longrightarrow\ & f(x^*) = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} \leq -\alpha < +\infty, \quad \forall x^* \in X^*. \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$, alors

$$-\infty < f^*(x^*), \quad \forall x^* \in X^*.$$

□

Le résultat suivant est fondamental en théorie de la dualité.

Théorème 1.9 ([18], [31],[69]). *Soit $f \in \Gamma_0(X)$, alors $f^* \in \Gamma_0(X^*)$ et $f^{**} := (f^*)^* = f$.*

Propriété 1.11. *Soient $f_i : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I$ (I un ensemble d'indices) une famille de fonctions. On définit la fonction $\inf_{i\in I} f_i$ par*

$$(\inf_{i\in I} f_i)(x) = \inf_{i\in I} f_i(x);$$

alors

$$(\inf_{i\in I} f_i)^* = \sup_{i\in I} f_i^*.$$

Preuve.
En effet, pour tout $x^* \in X^*$, on a :

$$\begin{aligned}
(\inf_{i\in I} f_i)^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \inf_{i\in I} f_i(x)\}\\
&= \sup_{x\in X}\sup_{i\in I}\{\langle x^*, x\rangle - f_i(x)\}\\
&= \sup_{x\in X, i\in I}\{\langle x^*, x\rangle - f_i(x)\}\\
&= \sup_{i\in I}\sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f_i(x)\}\\
&= \sup_{i\in I} f_i^*(x^*).
\end{aligned}$$

□

Définition 1.38. Considérons le sous-ensemble $A \subset X$ non vide ; la fonction support de A est notée et définie par $\sigma_A : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$\sigma_A(x^*) := \sup\{\langle x^*, x\rangle \ : \ x \in A\}, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Pour $C \subset X^*$ non vide, on définit de manière analogue la fonction support de C.

Propriété 1.12 ([18],[69])**.** *La fonction support vérifie :*

(i) σ_A *est* ω^**-s.c.i,*

(ii) *si* $B \subset X$ *est un autre sous-ensemble non vide de* X *alors*
$\sigma_{A+B} = \sigma_A + \sigma_B$ *et* $\sigma_{A\cup B} = \sigma_A \vee \sigma_B$ *;*

(iii) $\sigma_A(x^*) = (i_A)^*(x^*) = \sup_{x\in\overline{\text{co}}A}\langle x^*, x\rangle = (i_{\overline{\text{co}}A})^*(x^*) = \sigma_{\overline{\text{co}}A}(x^*), \quad \forall x^* \in X^*,$

(iv) $\text{dom}(\sigma_A) = \text{dom}((i_A)^*) = \{x^* \in X^* : \sup_{x\in A}\langle x^*, x\rangle < +\infty\}.$

1.1.7.2 Sous-différentiel

Dans cette sous section, X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel localement convexe et séparé.

Définition 1.39. Soient $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{x} \in X$ tel que $f(\overline{x}) \in \mathbb{R}$. Un élément $x^* \in X^*$ est appelé *sous-gradient* de la fonction f en $\overline{x}$ si on a la relation suivante :

$$\forall x \in X : \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \leq f(x) - f(\overline{x}). \tag{1.4}$$

L'ensemble de tous les sous-gradients de la fonction f en $\overline{x}$ est noté $\partial f(\overline{x})$, c'est-à-dire :

$$\partial f(\overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \leq f(x) - f(\overline{x}), \quad \forall x \in X\} \tag{1.5}$$

et est appelé *sous-différentiel* ou *sous-différentiel de Fenchel* de f en $\overline{x}$.
f est dite sous-différentiable en $\overline{x} \in X$, si $\partial f(\overline{x}) \neq \emptyset$.

Remarque 1.22. $0 \in \partial f(\overline{x})$ si et seulement si $f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in X$ et donc $\overline{x}$ réalise le minimum de $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ équivaut à $0 \in \partial f(\overline{x})$.

Le lemme suivant donne une caractérisation du sous-différentiel.

Lemme 1.7. *Pour $\overline{x} \in X$, si $f(\overline{x}) \in \mathbb{R}$, alors*

$$x^* \in \partial f(\overline{x}) \Longleftrightarrow f^*(x^*) + f(\overline{x}) = \langle x^*, \overline{x} \rangle. \tag{1.6}$$

Preuve.
On a

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(\overline{x}) &\Longleftrightarrow \langle x^*, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}), \quad \forall x \in X \\ &\Longleftrightarrow f(\overline{x}) - \langle x^*, \overline{x} \rangle \leq f(x) - \langle x^*, x \rangle, \quad \forall x \in X \\ &\Longleftrightarrow f^*(x^*) + f(\overline{x}) \leq \langle x^*, \overline{x} \rangle \\ &\Longleftrightarrow f^*(x^*) + f(\overline{x}) = \langle x^*, \overline{x} \rangle, \end{aligned}$$

car l'autre inégalité est celle de Fenchel. □

Lemme 1.8. *Soient $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x \in X$:*

(i) si $\partial f(x) \neq \emptyset$, alors $f(x) = f^{**}(x)$,

(ii) si $f^{**}(x) \in \mathbb{R}$, alors

$$\partial f^{**}(x) = \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) = \sup_{x^* \in X^*} \{\langle x^*, x \rangle - f^*(x^*)\}\},$$

(iii) si $f(x) = f^{**}(x) \in \mathbb{R}$, alors $\partial f(x) = \partial f^{**}(x)$.

Preuve.

(i) On a

$$\begin{aligned} \partial f(x) \neq \emptyset &\Longleftrightarrow \exists x^* \in X^* : f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x \rangle \\ &\Longleftrightarrow f(x) = \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) \\ &\Longleftrightarrow f(x) \leq f^{**}(x) \\ &\Longleftrightarrow f(x) = f^{**}(x), \end{aligned}$$

car $f^{**} \leq f$.

(ii) Il suffit d'appliquer (1.6) à la fonction $h = f^{**}$.

(iii) si $f(x) = f^{**}(x) \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f^{**}(x) &\Longleftrightarrow \langle x^*, y - x\rangle \leq f^{**}(y) - f^{**}(x), \quad \forall y \in X \\ &\Longleftrightarrow \langle x^*, y - x\rangle \leq f^{**}(y) - f(x), \quad \forall y \in X \\ &\Longrightarrow \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x), \quad \forall y \in X \\ &\Longrightarrow x^* \in \partial f(x) \Longrightarrow \partial f^{**}(x) \subset \partial f(x). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(x) &\Longleftrightarrow \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f^{**}(x), \quad \forall y \in X \\ &\Longleftrightarrow f(x) + \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y), \quad \forall y \in X. \end{aligned}$$

Soit $h(y) = f(x) + \langle x^*, y - x\rangle$, $h(y)$ est une minorante affine de f exacte au point x. Puisque la biconjuguée est le supremum des minorantes affines, alors $h(y)$ est aussi minorante affine de f^{**} exacte au point x. Donc $x^* \in \partial f^{**}(x)$.

□

De manière analogue on définit le sous-différentiel d'une fonction $h : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ en un point $\overline{x}^* \in X^*$ avec $h(\overline{x}^*) \in \mathbb{R}$ par :

$$\partial h(\overline{x}^*) = \{x \in X \mid \forall x^* \in X^*,\ \langle x^* - \overline{x}^*, x\rangle \leq h(x^*) - h(\overline{x}^*)\}.$$

Lemme 1.9. *Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction s.c.i propre, $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $x^* \in X^*$. Alors les relations suivantes sont équivalentes :*

(i) $x^* \in \partial f(x)$,

(ii) $x \in \partial f^*(x^*)$,

(iii) $f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$.

Preuve.
(i) est équivalente à (ii) par définition et l'équivalence entre (i) et (iii) découle de (1.6). □

1.2 Quelques notions sur l'optimisation

Dans cette section après avoir présenté le concept de problème d'optimisation, nous rappelons une théorie de construction de problème dual.

1.2.1 Problème d'optimisation

Soient un ensemble quelconque X, une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et K un sous-ensemble de X. Un problème d'optimisation consiste à chercher une variable physique ou de décision ou de commande de façon à optimiser (minimiser ou maximiser selon le cas) :

(i) un critère physique (action, énergie, . . .) ,

(ii) un critère technique (précision, stabilité, durée, . . .) ou

(iii) économique (coût, rentabilité,. . .),

tout en respectant certaines contraintes liées à la situation considérée.
Mathématiquement on peut modéliser un problème d'optimisation par :

$$(P) \qquad\qquad \text{minimiser } f(x), \quad \text{s.l.c} \;\; x \in K,$$

où $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction, X un ensemble, K un sous-ensemble de X et s.l.c signifie "sous les contraintes".
Le problème est caractérisé par :

(i) la fonction f appelée fonction objectif ou critère ou fonction économique,

(ii) l'ensemble K appelé ensemble des contraintes,

(iii) l'ensemble $S(P) = K \cap \text{dom}(f)$ appelé l'*ensemble admissible ou réalisable*,

(iv) la valeur du problème notée val(P) ou inf(P) est définie par :
val$(P) = \inf\limits_{x\in K} f(x) = \inf\{f(x) \;:\; x \in K\}$. L'ensemble des solutions optimales est notée Argmin$(P) = \{x \in X \;:\; f(x) = \text{val}(P)\}$.

Remarque 1.23. La maximisation d'une fonction,

$$\text{maximiser } f(x), \quad \text{s.l.c} \;\; x \in K,$$

peut se ramener à l'opposé du problème de minimisation suivant :

$$\text{minimiser } (-f(x)), \quad \text{s.l.c} \;\; x \in K.$$

Généralement l'ensemble K s'écrit sous la forme :

$$K = \{x \in X \;:\; g(x) \in C\}$$

où g est une fonction de X dans un ensemble Y et C un sous-ensemble de Y. Selon la nature des données, le problème d'optimisation porte plusieurs noms. Supposons que X et Y sont des espaces vectoriels, alors :

(i) si K et f sont convexes, le problème (P) est dit convexe,

(ii) si l'ensemble K est un cône, alors (P) est un problème d'optimisation *conique* et en particulier :
si K et f sont convexes, on parle de programmation *convexe conique*. Si de plus les données sont incertaines le problème est dit *convexe conique incertain* ;
- si f et g sont affines, $Y = \mathbb{R}^n$ et C l'orthant positif, on parle de programmation *linéaire* ;
- si f est quadratique, $Y = \mathbb{R}^n$ et K le cône de Lorentz, on parle de programmation *quadratique* ;
- si f est affine, $Y = \mathbb{S}^n$ et K le cône des matrices semi-définies positives, on parle de programmation *semi-définies positives*.

1.2.2 La théorie de la dualité

La dualité est une technique couramment utilisée en optimisation dont l'idée est la suivante : étant donné un problème d'optimisation appelé primal, on lui associe un autre problème appelé dual dont la valeur est une minorante de celle du primal. En général, la question est de savoir quand avons nous l'égalité (zero dualité ou saut de dualité nul) entre les valeurs des deux problèmes et comment passer de l'ensemble des solutions optimales de l'un des problèmes à celui de l'autre ? Une méthode de construction du dual est la dualité par perturbation qui utilise la conjugaison de Fenchel ([18], [55]).

1.2.2.1 Méthode de construction du dual par perturbation ([15], [55])

Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\text{minimiser } f(x), \quad \text{s.l.c} \quad x \in X, \tag{$\mathscr{P}$}$$

où X est un espace vectoriel topologique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction. On se donne un autre espace vectoriel topologique Y (appelé espace des perturbations) et une fonction $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant

$$F(x, 0_Y) = f(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.7}$$

La fonction F s'appelle *fonction de perturbation* associée au problème $(\mathscr{P})$.
Il résulte immédiatement de (1.7) que le problème $(\mathscr{P})$ s'écrit aussi :

$$\text{minimiser } F(x, 0_Y), \quad \text{s.l.c} \quad x \in X. \tag{$\mathscr{P}$}$$

On appelle *dual par perturbation* du problème ($\mathscr{P}$), le programme suivant :

$$\text{maximiser } (-F^*(0_{X^*}, y^*)), \quad \text{s.l.c} \quad y^* \in Y^*, \tag{$\mathscr{D}$}$$

où $F^* : X^* \times Y^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est la conjuguée de Fenchel de F.
D'après l'inégalité de Young-Fenchel, pour tout $x \in X$ et pour tout $y^* \in Y^*$, on a

$$F(x, 0_Y) + F^*(0_{X^*}, y^*) \geq \langle (x, 0_{X^*}), (0_Y, y^*) \rangle = 0 \Longleftrightarrow F(x, 0_Y) \geq -F^*(0_{X^*}, y^*).$$

D'où

$$-\infty \leq \text{val}(\mathscr{D}) \leq \text{val}(\mathscr{P}) \leq +\infty. \tag{1.8}$$

La propriété (1.8) s'appelle *dualité faible*. Il existe dans la littérature plusieurs types de conditions de qualification pour obtenir l'égalité val($\mathscr{D}$) = val($\mathscr{P}$) avec le dual admettant au moins une solution optimale. Dans la sous-section suivante nous donnons un exemple de problème d'optimisation avec une fonction de perturbation correspondante (pour plus d'exemples, on peut se référer à [55], [69]).

1.2.2.2 Exemple : problème conique

Considérons le problème suivant :

$$\text{minimiser } f(x), \quad \text{s.l.c} \;\; x \in C \text{ et } \; g(x) \in (-K), \tag{$\mathscr{P}_c$}$$

où $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe, $C \subset X$ est un convexe, K est un cône convexe fermé non vide de Y qui est un espace vectoriel topologique et $g : X \longrightarrow Y$ est une fonction convexe dans le sens que $g(\lambda x + (1-\lambda)x') - \lambda g(x) - (1-\lambda)g(x') \in K, \quad \forall x, x' \in X, \forall \lambda \in]0; 1[$.
Le problème ($\mathscr{P}_c$) est un problème d'optimisation convexe conique.
On associe au problème ($\mathscr{P}_c$), la fonction de perturbation (verticale) $\phi : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, définie par

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \text{ et } y - g(x) \in K \\ \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par un calcul direct, on obtient pour $y^* \in Y^*$,

$$-\phi^*(0_{X^*}, y^*) = \begin{cases} \inf_{x \in C} \{f(x) + \langle g(x), y^* \rangle\} & \text{si } y^* \in K^* \\ \\ -\infty & \text{sinon ,} \end{cases}$$

où

$$K^+ := \{y^* \in Y^* \mid \langle y^*, y \rangle \geq 0, \; \forall y \in K\},$$

désigne le cône polaire positif du cône K. Le dual par perturbation correspondant est alors défini par

$$\text{Maximiser } \inf_{x\in C}\{f(x) + \langle g(x), y^*\rangle\}, \quad \text{s.l.c } y^* \in K^*. \tag{$\mathscr{D}_c$}$$

Remarque 1.24. Un cas particulier du problème convexe conique est le problème de programmation convexe suivant.

$$\text{minimiser } f(x) \quad \text{s.l.c } x \in X, \ \ g_i(x) \leq 0, \ \ \forall i = 1, \ldots, n, \tag{1.9}$$

où X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f, g_1, g_2, \ldots, g_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont des fonctions convexes propres telles que $\mathrm{dom}(f) \bigcap (\cap_{i=1}^n \mathrm{dom}(g_i)) \neq \emptyset$.
La fonction de perturbation $\phi : X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ associée au problème (1.9) est définie par :

$$\phi(x, y) = f(x) + i_{\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}^n : g_i(x)\leq y_i, \ \forall \ i=1,\ldots,n\}}(x, y),$$

où les y_i sont les composantes du vecteur y.
Par suite, le problème paramétré de paramètre $y \in \mathbb{R}^n$ associé au problème (1.9) est :

$$\text{minimiser } \phi(x, y) = f(x) + i_{\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}^n : g_i(x)\leq y_i, \ \forall \ i=1,\ldots,n\}}(x, y), \quad \text{s.l.c } x \in X. \tag{1.10}$$

On a

$$-\phi^*(0_{X^*}, y^*) = \begin{cases} \inf\limits_{x\in X}\left\{f(x) + \sum\limits_{i=1}^n y_i^* g_i(x)\right\} & \text{si } y^* \in \mathbb{R}^n_+ \\ \\ -\infty & \text{sinon ,} \end{cases}$$

avec y_i^*, $i = 1, \ldots, n$, les composantes de y^*.
Le problème dual par perturbation (ou dual Lagrangien) associé au problème (1.9) est :

$$\text{maximiser } \inf_{x\in X}\left\{f(x) + \sum_{i=1}^n y_i^* g_i(x)\right\}, \quad \text{s.l.c } y^* \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.11}$$

CHAPITRE 2

Dualité pour des problèmes paramétriques

2.1 Introduction

La théorie de la dualité est importante en optimisation sous contraintes et a été longtemps étudiée. La dualité de Fenchel permet de transformer un problème initial (problème primal) en un problème d'optimisation sur l'ensemble dual (problème dual). Dans certain cas, les problèmes duaux sont plus faciles à résoudre que les problèmes primaux ([27], [30]). On sait que la valeur du problème dual est toujours inférieure à la valeur du problème primal. Un objectif en analyse convexe est de donner des conditions suffisantes garantissant la dualité forte c'est-à-dire la situation où il n'y a pas de saut de dualité et où le problème dual a au moins une solution optimale. Plusieurs conditions sont données dans le but de prouver l'existence de tel saut de dualité dans divers cadres ([19], [34], [55], [69]).

Dans ce chapitre nous donnons des conditions de qualifications de type intérieur et fermeture garantissant des résultats de dualité forte d'un problème paramétrique. Nous donnons aussi les versions duales de nos résultats de dualité forte ([5]). Nous appliquons ensuite ces propriétés de dualité forte à la minimisation du maximum de deux fonctions convexes. Dans ce cas nous généralisons des résultats de dualité forte obtenus par Traoré-Volle ([65]).

2.2 Dualité en optimisation convexe dans les espaces vectoriels topologiques

Dans la suite, U désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique.
Le lemme suivant nous sera utile pour la suite.

Lemme 2.1 ([47])**.** *Soit $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et majorée au voisinage d'un certain point de U. Alors, soit $f(u) = -\infty \ \ \forall u \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ soit f est sous-différentiable sur* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

***Preuve*.**
On obtient le résultat en remarquant que pour tout $A \subset U$, si $\mathrm{int}(A)$ est non vide et A convexe alors $\mathrm{int}(A) = A^i = A^{ri}$ où $\mathrm{int}(A)$ est l'intérieur topologique de A puis, on utilise les lemmes ci-dessous pour conclure. □

Lemme 2.2 ([4], [69])**.** *Soit $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. S'il existe $u_0 \in U$ tel que $f(u_0) = -\infty$ alors $f(u) = -\infty$ pour tout $u \in (\mathrm{dom}(f))^{ri}$.*

Lemme 2.3 ([4], [47])**.** *Soit $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. Si f est majorée au voisinage d'un certain point de U, alors f est continue sur l'intérieur de son domaine* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

Lemme 2.4 ([47])**.** *Une fonction convexe $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est sous-différentiable en chaque point où elle est finie et continue.*

2.2.1 Résultats de stabilité

Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques, X^* et Y^* leurs duaux topologiques respectifs, $y \in Y$. Considérons la fonction convexe $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et le problème paramétrique

$$\text{minimiser } F(x,y)\ ,\ \text{s.l.c } x \in X. \tag{P_y}$$

Associons à la fonction F, la fonction marginale $h : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, définie par

$$h(y) = \inf_{x\in X} F(x,y) = \inf(P_y).$$

Il est clair que

$$h^* = F^*(0_{X^*}, .). \tag{2.1}$$

Pour construire le dual de (P_y) ; introduisons la fonction de perturbation (horizontale) $G_y : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$G_y(x,u) = F(x, y+u), \ \ \forall (x,u) \in X \times Y. \tag{2.2}$$

Par un calcul direct, on a :

$$G_y^*(0_{X^*}, u^*) = F^*(0_{X^*}, u^*) - \langle u^*, y\rangle, \quad \forall u^* \in Y^*.$$

Le problème dual perturbationnel du problème (P_y) est donc :

$$\text{maximiser } - G_y^*(0_{X^*}, y^*), \text{ s.l.c } y^* \in Y^*, \qquad (D_y)$$

soit plus explicitement

$$\text{maximiser } \langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*), \text{ s.l.c } y^* \in Y^*. \qquad (D_y)$$

Nous savons que la dualité faible est toujours vérifiée c'est-à-dire :

$$-\infty \leq \sup(D_y) = h^{**}(y) \leq h(y) = \inf(P_y) \leq +\infty. \qquad (2.3)$$

Remarque 2.1. En considérant l'ensemble des solutions optimales du problème (D_y) pour un certain $y \in Y$,

$$\text{Argmin}(D_y) := \{y^* \in Y^* \mid \langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*) = \sup(D_y) \in \mathbb{R}\}$$

et en appliquant le Lemme 1.8, *(ii)* à la fonction marginale h on obtient

$$\text{Argmin}(D_y) = \partial h^{**}(y).$$

Lemme 2.5. *En considérant la fonction marginale h associée au problème (P_y), on a l'équivalence entre les deux assertions suivantes :*

(i) $\partial h(y) \neq \emptyset$,

(ii) $\inf(P_y) = \max(D_y) \in \mathbb{R}$ *c'est-à-dire* $\inf\limits_{x\in X} F(x, y) = \max\limits_{y^*\in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*)\} \in \mathbb{R}$.

Preuve.
Soit $y^* \in \partial h(y) \neq \emptyset$. En utilisant la caractérisation du sous-différentiel dans le Lemme 1.7, on a :

$$\begin{aligned} y^* \in \partial h(y) &\Longleftrightarrow h^*(y^*) + h(y) = \langle y^*, y\rangle \\ &\Longleftrightarrow h(y) = \langle y^*, y\rangle - h^*(y^*). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\inf(P_y) = h(y) = \langle y^*, y\rangle - h^*(y^*) = \langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*) \leq \sup(D_y)$$

et on conclut en utilisant la dualité faible (2.3). □

Définition 2.1. Le problème (P_y) est dit *stable* si l'une des conditions équivalentes du Lemme 2.5 est satisfaite.

Le théorème suivant donne une condition assurant la stabilité du problème (P_y).

Théorème 2.1. *Si la condition suivante est vérifiée*

$$\exists\, t \in \mathbb{R} \ : \ \operatorname{int}(\mathrm{Pr}_Y[F \leq t]) \neq \emptyset, \tag{2.4}$$

alors, soit

$$\max_{y^* \in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*)\} = \inf_{x \in X} F(x,y) \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \operatorname{int}(\mathrm{Pr}_Y(\operatorname{dom}(F))),$$

soit

$$-F^*(0_{X^*}, y^*) = \inf_{x \in X} F(x,y) = -\infty, \qquad \forall y \in \operatorname{int}(\mathrm{Pr}_Y(\operatorname{dom}(F))) \textit{ et } \forall y^* \in Y^*.$$

Preuve.
Soit la fonction $h(y) = \inf_{x \in X} F(x,y)$, h étant la fonction marginale associée à la fonction convexe F, elle est donc convexe d'après le Théorème 1.2. Soit un réel t pour lequel l'hypothèse (2.4) est vérifiée. Prenons $\overline{y} \in \operatorname{int}(\mathrm{Pr}_Y[F \leq t])$, alors il existe un voisinage $V \in \mathcal{N}_Y(\overline{y})$ dans Y tel que :

$$\forall y \in V, \exists\, \overline{x} \in X : F(\overline{x}, y) \leq t.$$

Pour tout $y \in Y$, on a :

$$h(y) \leq F(x,y), \quad \forall x \in X,$$

d'où

$$h(y) \leq F(\overline{x}, y) \leq t, \quad \forall y \in V.$$

Ainsi, h est majorée au voisinage de $\overline{y}$ et d'après le Lemme 2.1, soit

$$\partial h(y) \neq \emptyset, \qquad \forall y \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(h)) = \operatorname{int}(\mathrm{Pr}_Y(\operatorname{dom}(F))),$$

soit

$$h(y) = -\infty, \qquad \forall y \in \operatorname{int}(\mathrm{Pr}_Y(\operatorname{dom}(F))).$$

Dans le premier cas, le Lemme 2.5 donne l'égalité

$$\max_{y^* \in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*)\} = \inf_{x \in X} F(x,y) \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \operatorname{int}(\mathrm{Pr}_Y(\operatorname{dom}(F))).$$

Dans le second cas, en utilisant la dualité faible (2.3), on déduit que pour chaque $y \in Y$,

$$\langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*) \leq h(y), \qquad \forall y^* \in Y^*.$$

Il en résulte que

$$h(y) = -\infty \Longrightarrow \langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*) = -\infty \Longrightarrow -F^*(0_{X^*}, y^*) = -\infty.$$

D'où $-F^*(0_{X^*}, y^*) = h(y) = -\infty, \qquad \forall y \in \mathrm{int}(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F)))$ et $\forall y^* \in Y^*$. □

Remarque 2.2. La condition (2.4) est en particulier vérifiée s'il existe $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{dom}(F)$ tel que $F(\overline{x}, .)$ est s.c.s en $\overline{y}$.

Corollaire 2.1. *Supposons que :*

$$\exists\, t \in \mathbb{R}\ : 0_Y \in \mathrm{int}(\mathrm{Pr}_Y[F \leq t]). \tag{2.5}$$

Alors,

$$-\infty \leq \max_{y^* \in Y^*}\{-F^*(0_{X^*}, y^*)\} = \inf_{x \in X} F(x, 0_Y) < +\infty.$$

Preuve.
D'après (2.5), $h(0_Y) \neq +\infty$. En prenant $y = 0_Y$ dans le Théorème 2.1 on obtient le résultat. □

Nous allons réduire l'ensemble de la condition (2.4). Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant qui est beaucoup plus utilisé pour des espaces vectoriels topologiques localement convexes et séparés (e.v.t.l.c.s) ; mais ce lemme est aussi valable même si l'espace n'est pas séparé ([20]).

Lemme 2.6 ([20])**.** *Soit l une forme linéaire continue définie sur un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique localement convexe (e.v.t.l.c) Y ; il existe alors une forme linéaire continue définie sur Y et prolongeant l.*

Soit W un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique U. Si A est un sous-ensemble de W, nous notons $\mathrm{int}_W(A)$ l'intérieur topologique de A relative à la topologie induite sur W par la topologie de U.

Lemme 2.7. *Soit U un e.v.t.l.c, $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, $W = \mathrm{vect}(\mathrm{dom}(f))$ l'espace vectoriel engendré par* $\mathrm{dom}(f)$ *dans U. Si*

$$\exists\, t \in \mathbb{R}\ : \qquad \mathrm{int}_W([f \leq t]) \neq \emptyset, \tag{2.6}$$

alors, soit

$$f(u) = -\infty, \quad \forall u \in \mathrm{int}_W(\mathrm{dom}(f)),$$

soit

$$\partial f(u) \neq \emptyset, \quad \forall u \in \mathrm{int}_W(\mathrm{dom}(f)).$$

Preuve.
Soit k la restriction de la fonction f sur W.
Soit $\overline{u} \in \mathrm{int}_W([f \leq t]) = \mathrm{int}_W([k \leq t])$. Il existe un voisinage $V \in \mathcal{N}_W(\overline{u})$ dans W tel que :

$$\forall u \in V, \quad k(u) \leq t,$$

par conséquent k est majorée au voisinage de $\overline{u}$. D'après le Lemme 2.1 soit

$$k(u) = f(u) = -\infty, \qquad \forall u \in \mathrm{int}_W(\mathrm{dom}(k)),$$

soit

$$\partial k(u) \neq \emptyset, \qquad \forall u \in \mathrm{int}_W(\mathrm{dom}(k)).$$

Soient $v \in \mathrm{int}_W(\mathrm{dom}(f))$ et $w^* \in \partial k(v)$. D'après le Lemme 2.6, il existe une forme linéaire continue $u^* \in U^*$ prolongeant w^* sur U. Du fait que $w^* \in \partial k(v)$, pour tout $u \in W$, on a

$$k(u) \geq k(v) + \langle w^*, u - v\rangle.$$

Il en résulte que pour tout $u \in W$

$$f(u) \geq f(v) + \langle u^*, u - v\rangle.$$

Comme $\mathrm{dom}(f) \subset W$ alors $f(u) = +\infty$ pour tout $u \in U \setminus W$ et il vient que pour tout $u \in U$,

$$f(u) \geq f(v) + \langle u^*, u - v\rangle.$$

Par suite, $u^* \in \partial f(v)$ et donc $\partial f(v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in \mathrm{int}_W(\mathrm{dom}(f))$. □

Théorème 2.2. *Si X est un e.v.t, Y un e.v.t.l.c, $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, $W = \mathrm{vect}(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F)))$ et si :*

$$\exists\, t \in \mathbb{R} : \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y([F \leq t])) \neq \emptyset, \tag{2.7}$$

alors, soit

$$\max_{y^* \in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*)\} = \inf_{x \in X} F(x, y) \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))),$$

soit

$$-F^*(0_{X^*}, y^*) = \inf_{x \in X} F(x, y) = -\infty, \qquad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F)))\ \textit{et}\ \forall\, y^* \in Y^*.$$

Preuve.
Soit la fonction convexe $h : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(y) = \inf_{x\in X} F(x, y),\ \forall y \in Y$. Comme (2.7) a lieu, choisissons $v \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y([F \leq t]))$. Il existe un voisinage V de v dans W tel que pour tout $y \in V$, il existe $x \in X$ tel que

$$F(x, y) \leq t.$$

Puisque

$$h(y) \leq F(x, y)$$

on a

$$h(y) \leq t,\ \forall y \in V.$$

En appliquant le Lemme 2.7 à la fonction h avec $W = \mathrm{vect}(\mathrm{dom}(h)) = \mathrm{vect}(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}((F)))$, on a soit

$$\partial h(y) \neq \emptyset, \quad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{dom}(h)),$$

soit

$$h(y) = -\infty, \quad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{dom}(h)).$$

En utilisant le Lemme 2.5 dans le premier cas, on a :

$$\max_{y^*\in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*)\} = \inf_{x\in X} F(x, y) \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F)))$$

et dans le second cas, la dualité faible (2.3) appliquée à (P_y) donne

$$-F^*(0_{X^*}, y^*) = \inf_{x\in X} F(x, y) = -\infty, \qquad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))) \text{ et } \forall\ y^* \in Y^*.$$

□

Si X est un espace vectoriel normé (e.v.n) on peut enrichir les résultats précédents. Dans ce cas, notons par $\|\ \|$ la norme sur X, $\|\ \|_*$ la norme duale associée et $\mathbb{B}_X$ la boule unité fermée de X. L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'énonce par

$$|\langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\|_*\|x\|, \quad \forall (x, x^*) \in X \times X^*. \tag{2.8}$$

Théorème 2.3. *Soit X un e.v.n et Y un e.v.t, $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. Supposons que :*

$$\exists t \in \mathbb{R}, r > 0 : \mathrm{int}(\mathrm{Pr}_Y([F \leq t] \cap r\mathbb{B}_X \times Y)) \neq \emptyset, \tag{2.9}$$

alors, pour chaque $x^* \in X^*$, soit

$$\max_{y^*\in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - F^*(x^*, y^*)\} = \inf_{x\in X}\{F(x, y) - \langle x^*, x\rangle\} \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathrm{int}(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))),$$

soit

$$-F^*(x^*, y^*) = \inf_{x\in X}\{F(x, y) - \langle x^*, x\rangle\} = -\infty, \qquad \forall y \in \mathrm{int}(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))) \textit{ et } \forall y^* \in Y^*.$$

***Preuve*.**
Soit $x^* \in X^*$, considérons la fonction $h_{x^*} : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, définie par

$$h_{x^*}(y) = \inf_{x \in X}\{F(x,y) - \langle x^*, x\rangle\}.$$

h_{x^*} est convexe car fonction marginale de la fonction convexe $(x,y) \longmapsto F(x,y) - \langle x^*, x\rangle$. Comme la condition (2.9) est vérifiée, choisissons $v \in \text{int}(\text{Pr}_Y([F \leq t] \cap r\mathbb{B}_X \times Y))$. Il existe un voisinage $V \in \mathscr{N}_Y(v)$ dans Y tel que :

$$\forall y \in V, \exists x \in r\mathbb{B}_X : \qquad F(x,y) \leq t.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} h_{x^*}(y) &\leq F(x,y) - \langle x^*, x\rangle \\ &\leq t - \langle x^*, x\rangle \\ &\leq t - \langle x^*, x\rangle \\ &\leq t + r\|x^*\|_* \quad \text{(d'après (2.8))}. \end{aligned}$$

La fonction h_{x^*} est donc majorée dans le voisinage V et d'après le Lemme 2.1,
soit

$$\partial h_{x^*}(y) \neq \emptyset, \qquad \forall y \in \text{int}(\text{dom}(h_{x^*})),$$

soit

$$h_{x^*}(y) = -\infty, \qquad \forall y \in \text{int}(\text{dom}(h_{x^*})).$$

On a

$$\text{dom}(h_{x^*}) = \text{Pr}_Y(\text{dom}(F - \langle x^*, .\rangle)) = \text{Pr}_Y(\text{dom}(F)),$$

d'où

$$\text{int}(\text{dom}(h_{x^*})) = \text{int}(\text{Pr}_Y(\text{dom}(F))).$$

D'après le Lemme 2.5,

$$\partial h_{x^*}(y) \neq \emptyset, \qquad \forall y \in \text{int}(\text{dom}(h_{x^*})) \quad \text{est équivalent à}$$
$$\inf_{x \in X}\{F(x,y) - \langle x^*, x\rangle\} = \max_{y^* \in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - F^*(x^*, y^*)\} \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \text{int}(\text{Pr}_Y(\text{dom}(F))).$$

Dans le deuxième cas, on a

$$\begin{aligned} h_{x^*}(y) = -\infty, \ \forall y \in \text{int}(\text{dom}(h_{x^*})) &\Longrightarrow h^*_{x^*}(y^*) = +\infty, \qquad \forall y^* \in Y^* \\ &\Longrightarrow F^*(x^*, y^*) = +\infty, \qquad \forall y^* \in Y^*. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la dualité faible (2.3). □

Remarque 2.3. Le résultat précédant montre qu'on peut obtenir la stabilité du problème (P_y) dans le cas où on ajoute à la fonction objectif, une forme linéaire continue.

Tout comme dans le Théorème 2.2, en considérant le sous-espace vectoriel
$W = \mathrm{vect}(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F)))$, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.4. *Soient X un espace vectoriel normé, Y un espace vectoriel topologique, $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et $W = \mathrm{vect}(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F)))$. Supposons que*

$$\exists t \in \mathbb{R}, r > 0 : \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y([F \leq t] \cap r\mathbb{B}_X \times Y)) \neq \emptyset, \tag{2.10}$$

alors pour chaque $x^* \in X^*$, soit

$$\max_{y^* \in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - F^*(x^*, y^*)\} = \inf_{x \in X}\{F(x, y) - \langle x^*, x\rangle\} \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))),$$

soit

$$-F^*(x^*, y^*) = \inf_{x \in X}\{F(x, y) - \langle x^*, x\rangle\} = -\infty, \qquad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))) \text{ et } \forall y^* \in Y^*.$$

Preuve.
Soit $x^* \in X^*$, considérons la fonction h_{x^*} définie sur Y par

$$h_{x^*}(y) = \inf_{x \in X}\{F(x, y) - \langle x^*, x\rangle\}.$$

D'après la condition (2.10), choisissons

$$v \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y([F \leq t] \cap r\mathbb{B}_X \times Y)).$$

Il existe un voisinage V de v dans W tel que pour tout $y \in V$, il existe $x \in r\mathbb{B}_X$ tel que

$$h_{x^*}(y) \leq F(x, y) - \langle x^*, x\rangle \leq t + r\|x^*\|_*.$$

En appliquant le Lemme 2.7 à la fonction h_{x^*}, on a
soit

$$\partial h_{x^*}(y) \neq \emptyset, \qquad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))),$$

soit

$$h_{x^*}(y) = -\infty, \qquad \forall y \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))).$$

On conclut en utilisant le Lemme 2.5 et la dualité faible (2.3). □

Définition 2.2. Étant donné deux sous-ensembles A et B d'un espace vectoriel topologique, on dit que A est fermé par rapport à B si $\overline{A} \cap B = A \cap B$.

Définition 2.3. Soit X un e.v.t et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction, on appelle *enveloppe semi-continue inférieure* de f, le supremum des minorantes s.c.i de f ; on la note par $\overline{f}$.

Propriété 2.1 ([69]). *On a :*

$$\overline{f}(x) = \varphi_{\overline{\mathrm{epi} f}}(x),$$

où pour toute partie A de $X \times \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\varphi_A(x) = \inf\{t \ : \ (x,t) \in A\}.$$

On utilisera dans la suite les notations suivantes :

(i) Si A est un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique X. On note $\overline{A}^{\omega}$ la fermeture de A par rapport à la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ de X. On écrit que A est ω-fermé pour dire que A est faiblement fermé par rapport à la topologie $\sigma(X, X^*)$.

(ii) Si B est un sous-ensemble de X^*, on note $\overline{B}^{\omega^*}$ la fermeture de B par rapport à la topologie faible $* \ \sigma(X^*, X)$ de X^*. On écrit que B est ω^*-fermé pour signifier que B est faiblement fermé par rapport à la topologie $\sigma(X^*, X)$.

Le résultat suivant généralise le Théorème 9.1 de [15] dans le cas d'espaces topologiques localement convexes non nécessairement séparés.

Théorème 2.5. *Soient X et Y deux e.v.t.l.c, $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i propre et A un sous-ensemble non vide de X^*. Supposons que* $0_Y \in \mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $-\infty < \sup\limits_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y)\} = \min\limits_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*) \leq +\infty, \quad \forall x^* \in A,$

(ii) $\mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi} F^*)$ *est ω^*-fermé par rapport à l'ensemble $A \times \mathbb{R}$.*

Pour la preuve de ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.8 ([31]). *Soit $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe sur un e.v.t.l.c U. Supposons que f est minorée par une forme affine continue. Alors l'enveloppe semi-continue inférieure $\overline{f}$ de f coïncide avec la biconjuguée f^{**} de f.*

Preuve du Théorème 2.5.
Soit la fonction convexe $k : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$k(x^*) = \inf_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*).$$

Pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} k^*(x) &= \sup_{x^* \in X^*} \{\langle x^*, x\rangle - \inf_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*)\} \\ &= \sup_{x^* \in X^*, y^* \in Y^*} \{\langle x^*, x\rangle - F^*(x^*, y^*)\} \\ &= F^{**}(x, 0_Y). \end{aligned}$$

Comme F est convexe s.c.i et propre alors $F(x, 0_Y) = F^{**}(x, 0_Y) = k^*(x)$. Par conséquent k^* est propre et admet donc une minorante affine continue. En appliquant le Lemme 2.8 à la fonction k, on obtient $\overline{k}^{\omega^*} = k^{**}$.
Comme $\mathrm{epi}\overline{k}^{\omega^*} = \overline{\mathrm{epi}k}^{\omega^*}$, il en résulte que $\mathrm{epi}\overline{k}^{\omega^*} = \overline{\mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*)}^{\omega^*}$.
Supposons que (i) est vérifiée.
Soit $(x^*, r) \in (A \times \mathbb{R}) \cap \overline{\mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*)}^{\omega^*}$, on a $k^{**}(x^*) \leq r$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} k^{**}(x^*) &= \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x\rangle - k^*(x)\} \\ &= \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y)\} \\ &= \min_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*) \ \text{ (d'après } (i)). \end{aligned}$$

Il existe $y^* \in Y^*$ tel que $F^*(x^*, y^*) \leq r$ ce qui signifie que

$$(x^*, r) \in (A \times \mathbb{R}) \cap \mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*),$$

d'où

$$(A \times \mathbb{R}) \cap \overline{\mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*)}^{\omega^*} \subset (A \times \mathbb{R}) \cap \mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*) \subset (A \times \mathbb{R}) \cap \overline{\mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*)}^{\omega^*}.$$

On en déduit donc l'égalité

$$(A \times \mathbb{R}) \cap \overline{\mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*)}^{\omega^*} = (A \times \mathbb{R}) \cap \mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*).$$

Supposons que (ii) est vraie et soit $x^* \in A$.
Puisque $0_Y \in \mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))$ alors

$$\sup_{x \in X} \{\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y)\} > -\infty.$$

Si

$$\sup_{x \in X} \{\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y)\} = +\infty,$$

en remarquant que pour tout $(x, y^*) \in X \times Y^*$, on a

$$\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y) \leq F^*(x^*, y^*),$$

on en déduit que pour tout $y^* \in Y^*$, $F^*(x^*, y^*) = +\infty$ et donc

$$\min_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*) = +\infty.$$

Étudions maintenant le cas où

$$r := \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y)\} \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, $(x^*, r) \in (\mathrm{epi}k^{**}) \cap (A \times \mathbb{R}) = (\mathrm{epi}\overline{k}^{\omega^*}) \cap (A \times \mathbb{R})$ ce qui signifie que

$$(x^*, r) \in \overline{\mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*)}^{\omega^*} \cap (A \times \mathbb{R}).$$

Comme (ii) est vérifiée, alors

$$(x^*, r) \in (\mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*)) \cap (A \times \mathbb{R}).$$

Il existe donc $\overline{y}^* \in Y^*$ tel que

$$F^*(x^*, \overline{y}^*) \leq r,$$

ce qui donne

$$\inf_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*) \leq F^*(x^*, \overline{y}^*) \leq r \leq \inf_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*).$$

Ainsi,

$$r = \min_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*).$$

□

Nous donnons maintenant un résultat qui généralise la condition de qualification d'Attouch-Brézis relative à la stabilité dans les espaces de Banach.
Nous commençons par rappeler la notion de fonction *quasi-continue* introduite par Joly-Laurent dans [40] et utilisée par Moussaoui-Volle dans [48].

Définition 2.4 ([48])**.** Soit U un e.v.t.l.c. Une fonction convexe $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite *quasi-continue* si :

(i) l'enveloppe affine $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$ du domaine effectif de f est fermée et de codimension finie,

(ii) l'intérieur algébrique relatif du domaine effectif $\mathrm{dom}(f)$ de f est non vide et la restriction de f à $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$ est continue sur l'intérieur algébrique $(\mathrm{dom}(f))^i$ du domaine de f.

Théorème 2.6 ([48]). *Soient X et Y deux e.v.t.l.c séparés et $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. Supposons qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $F(x_0, .) : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ soit quasi-continue et $\overline{\mathbb{R}_+ \mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))}$ est un sous-espace vectoriel de Y. Alors, pour tout $x^* \in X^*$, on a :*

$$-\infty < \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y)\} = \min_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*) \leq +\infty.$$

Théorème 2.7. *Soient X et Y, deux espaces de Banach et $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i et propre. Supposons que*

$$\mathbb{R}_+ \mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F)) \textit{ est un sous-espace vectoriel fermé.} \tag{2.11}$$

Alors pour tout $x^* \in X^*$,

$$-\infty < \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y)\} = \min_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*) \leq +\infty.$$

Preuve.
Soit $x^* \in X^*$, on considère la fonction convexe $\Phi : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\Phi(x, y) = F(x, y) - \langle x^*, x\rangle$. Observons que $\mathrm{dom}(\Phi) = \mathrm{dom}(F)$ et $\mathbb{R}_+ \mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F))$ est un sous-espace vectoriel fermé si et seulement si $0_Y \in (\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(\Phi)))^{ri}$. La conclusion résulte du [69, Théorème 2.7.1, *(vii)*]. □

La condition de qualification d'Attouch-Brezis [1, Theorem 1.1] est

$$\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g)) \quad \text{est un sous-espace vectoriel fermé} \tag{2.12}$$

où f et g sont deux fonctions convexes s.c.i.
On peut donc observer que la condition de qualification d'Attouch-Brezis [1, Theorem 1.1] est un cas particulier de la condition (2.11).

2.2.2 Version duale des résultats de stabilité

Dans cette sous-section, nous donnons la version duale des résultats précédents dans les e.v.t.l.c.s. On note e.v.t.H.l.c pour dire que l'e.v.t.l.c est séparé. On rappelle que $\tau(X^*, X)$ est la topologie de Mackey qui est la plus fine topologie pour laquelle les formes linéaires $\langle ., x\rangle$, $x \in X$ sont continues sur X^*.
Théorème 2.1'. *Soient X un e.v.t.H.l.c, Y un e.v.t.l.c et $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i propre.*
Si la condition suivante est vérifiée

$$\exists\, t \in \mathbb{R} \ : \ \mathrm{int}_{\tau(X^*, X)}(\mathrm{Pr}_{X^*}[F^* \leq t]) \neq \emptyset. \tag{2.13}$$

Alors, soit

$$\max_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y)\} = \inf_{y^*\in Y^*} F^*(x^*, y^*) \in \mathbb{R}, \qquad \forall x^* \in \mathrm{int}_{\tau(X^*,X)}(\mathrm{Pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(F^*))),$$

soit

$$-F(x, 0_Y) = \inf_{y^*\in Y^*} F^*(x^*, y^*) = -\infty, \qquad \forall x^* \in \mathrm{int}_{\tau(X^*,X)}(\mathrm{Pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(F^*))) \text{ et } \forall x \in X.$$

Preuve.
Comme

$$F \in \Gamma_0(X \times Y) \Longleftrightarrow F^{**} = F,$$

on applique alors le Théorème 2.1 à F^* pour conclure. □

Théorème 2.2'. *Soient X un e.v.t.H.l.c, Y un e.v.t.l.c, $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i et propre et $W = \mathrm{vect}_{\tau(X^*,X)}(\mathrm{Pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(F^*)))$ l'espace vectoriel engendré par $\mathrm{Pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(F^*))$ dans X^* relativement à la topologie de Mackey. Supposons que la condition suivante soit vérifiée :*

$$\exists t \in \mathbb{R} \ : \ \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_{X^*}(F^* \leq t)) \neq \emptyset. \tag{2.14}$$

Alors, soit

$$\max_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - F(x, 0_Y)\} = \inf_{y^*\in Y^*} F^*(x^*, y^*) \in \mathbb{R}, \qquad \forall x^* \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(F^*))),$$

soit

$$-F(x, 0_Y) = \inf_{y^*\in Y^*} F^*(x^*, y^*) = -\infty, \qquad \forall x^* \in \mathrm{int}_W(\mathrm{Pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(F^*))) \text{ et } \forall x \in X.$$

Preuve.
Il suffit d'utiliser l'hypothèse (2.14) et appliquer le Lemme 2.7 à la fonction convexe h^* définie par $h(x^*) = \inf_{x^*\in X^*} F^*(x^*, y^*)$. □

Théorème 2.3'. *Soient X un e.v.t.H.l.c, Y un espace de Banach réflexif, $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i et propre et $\mathbb{B}_{Y^*}$ la boule unité fermée de Y^*. Supposons que :*

$$\exists t \in \mathbb{R}, r > 0 \ : \ \mathrm{int}_{\tau(X^*,X)}(\mathrm{Pr}_{X^*}([F^* \leq t] \cap (X^* \times r\mathbb{B}_{Y^*}))) \neq \emptyset. \tag{2.15}$$

Alors, pour chaque $y \in Y$,
soit

$$\max_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - F(x, y)\} = \inf_{y^*\in Y^*}\{F^*(x^*, y^*) - \langle y^*, y\rangle\} \in \mathbb{R}, \qquad \forall x^* \in \mathrm{int}_{\tau(X^*,X)}(\mathrm{Pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(F^*))),$$

soit

$$-F(x,y) = \inf_{y^*\in Y^*}\{F^*(x^*,y^*) - \langle y^*, y\rangle\} = -\infty, \qquad \forall x^* \in \operatorname{int}_{\tau(X^*,X)}(\operatorname{Pr}_{X^*}(\operatorname{dom}(F^*))) \textit{ et } \forall x \in X.$$

***Preuve*.**
Comme Y est de Banach reflexif alors on peut identifier Y à son bidual et comme F est convexe s.c.i et propre, alors $F = F^{**}$ et on applique le Théorème 2.3 à la fonction F^* pour conclure. □

Théorème 2.4'. *Soient X un e.v.t.H.l.c, Y un espace de Banach réflexif, $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i et propre, $\mathbb{B}_{Y^*}$ la boule unité fermée de Y^* et $W = \operatorname{vect}_{\tau(X^*,X)}(\operatorname{Pr}_{X^*}(\operatorname{dom}(F^*)))$ l'espace vectoriel engendré par $\operatorname{Pr}_{X^*}(\operatorname{dom}(F^*))$. Supposons que :*

$$\exists t \in \mathbb{R}, r > 0 \ : \ \operatorname{int}_W(\operatorname{Pr}_{X^*}([F^* \leq t] \cap (X^* \times r\mathbb{B}_{Y^*}))) \neq \emptyset. \tag{2.16}$$

Alors, pour chaque $y \in Y$,
soit

$$\max_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - F(x,y)\} = \inf_{y^*\in Y^*}\{F^*(x^*,y^*) - \langle y^*, y\rangle\} \in \mathbb{R}, \qquad \forall x^* \in \operatorname{int}_W(\operatorname{Pr}_{X^*}(\operatorname{dom}(F^*))),$$

soit

$$-F(x,y) = \inf_{y^*\in Y^*}\{F^*(x^*,y^*) - \langle y^*, y\rangle\} = -\infty, \qquad \forall x^* \in \operatorname{int}_W(\operatorname{Pr}_{X^*}(\operatorname{dom}(F^*))) \text{ et } \forall x \in X.$$

***Preuve*.**
On applique le Lemme 2.7 à la fonction h_y définie par

$$h_y(x^*) = \inf_{y^*\in Y^*}\{F^*(x^*,y^*) - \langle y, y^*\rangle\}$$

et on obtient le résultat. □

Théorème 2.5'. *Soient X et Y deux e.v.t.l.c et $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i et propre. Supposons que $0_{X^*} \in \operatorname{Pr}_{X^*}(\operatorname{dom}(F^*))$. Alors pour tout sous-ensemble non vide B de Y les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $-\infty < \sup_{y^*\in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*)\} = \min_{x\in X} F(x,y) \leq +\infty, \quad \forall y \in B,$

(ii) $\operatorname{Pr}_{Y\times\mathbb{R}}(\operatorname{epi}F)$ *est fermé par rapport à l'ensemble* $B \times \mathbb{R}$.

***Preuve*.**
Pour la preuve, on applique le Théorème 2.5 à la fonction F^* en lieu et place de F. □

Théorème 2.6'. *Soient X et Y deux e.v.t.H.l.c et $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i et propre. Supposons que*

$$\exists y_0^* \in Y^* \ : \begin{cases} F^*(., y_0^*) \text{ est } \tau(X^*, X) - \text{quasi-continue} \\ \\ \overline{(\mathbb{R}_+ \mathrm{Pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(F^*)))}^{\omega^*} \text{ est un sous-espace vectoriel.} \end{cases} \tag{2.17}$$

Alors, pour tout $y \in Y$, on a :

$$-\infty < \sup_{y^* \in Y^*} \{\langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*)\} = \min_{x \in X} F(x, y) \leq +\infty.$$

Preuve.
Pour la preuve, on applique le Théorème 2.6 à la fonction F^* en lieu et place de F. □

Remarque 2.4. (2.17)$\Longleftrightarrow \exists y_0^* \in Y^* : (F^*(., y_0^*))^*$ est ω-inf-localement compact.

Théorème 2.7'. Soient X, Y deux espaces de Banach réflexifs et $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe s.c.i et propre. Supposons que $\mathbb{R}_+ \mathrm{Pr}_{X^*}(\mathrm{dom}(F^*))$ est un sous-espace vectoriel ω^*-fermé. Alors, pour tout $y \in Y$, on a :

$$-\infty < \sup_{y^* \in Y^*} \{\langle y^*, y\rangle - F^*(0_{X^*}, y^*)\} = \min_{x \in X} F(x, y) \leq +\infty.$$

Preuve.
Notons qu'on identifie X et Y à leur bidual et que la fonction F^* vérifie les hypothèses du Théorème 2.7. On applique alors le Théorème 2.7 à F^* en lieu et place de F pour conclure. □

2.3 Dualité pour la minimisation du maximum de deux fonctions convexes

Le problème de minimisation du maximum de deux fonctions apparaît dans plusieurs domaines d'applications, parmi lesquelles on peut citer l'algèbre des ensembles flous, la minimisation du coût de production, la maximisation d'une fonction d'utilité, etc. La stabilité de ce problème apparaît dans [64] et [65]. Dans cette section nous étendons cette propriété de stabilité.
Soient X un espace vectoriel topologique, f et $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes propres. Pour un besoin de clarté on note par la suite $Y = X$. La fonction objectif du problème (P_y) est $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$F(x, y) = \max(f(x + y), g(x)), \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Ainsi on se ramène à l'étude du problème paramétrique suivant :

$$\text{minimiser } \max(f(x+y), g(x)), \qquad s.l.c \quad x \in X. \tag{P_y}$$

Propriété 2.2. *La fonction F vérifie les propriétés suivantes :*

(i) la fonction F est convexe,

(ii) pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Pr}_Y([F \le t]) = [f \le t] - [g \le t], \tag{2.18}$$

(iii) on a l'égalité suivante :

$$\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F)) = \mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g), \tag{2.19}$$

(iv) on a l'équivalence suivante :

$$y \in \mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g) \Longleftrightarrow \inf(P_y) < +\infty. \tag{2.20}$$

***Preuve*.**

(i) F est convexe en tant que maximum de deux fonctions convexes.

(ii)

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Pr}_Y([F \le t]) &\Longleftrightarrow \exists x \in X : F(x,y) \le t \\ &\Longleftrightarrow \exists x \in X : \begin{cases} f(x+y) \le t \\ \\ g(x) \le t \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \exists x \in X : \begin{cases} x+y \in [f \le t] \\ \\ x \in [g \le t] \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow y \in [f \le t] - [g \le t]. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}(F)) &\Longleftrightarrow \exists x \in X : F(x+y) < +\infty \\ &\Longleftrightarrow \exists x \in X : \begin{cases} f(x+y) < +\infty \\ \\ g(x) < +\infty \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow y \in \mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g). \end{aligned}$$

(iv) $y \in \mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g) \Longleftrightarrow \exists x \in X : F(x,y) < +\infty \Longleftrightarrow \inf(P_y) < +\infty.$

□

Notons Δ_2 le simplexe de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Delta_2 = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \geq 0, \ \ \mu \geq 0 \text{ et } \lambda + \mu = 1\}.$$

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on vérifie sans peine que :

$$\max(a,b) = \max_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{\lambda a + \mu b\}. \tag{2.21}$$

On déduit de (2.21) une expression simplifiée de la conjuguée de F, qui nous permettra d'écrire le dual perturbationnel de (P_y).

Propriété 2.3. *Pour tout $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$, on a :*

$$F^*(x^*,y^*) = \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*)\}. \tag{2.22}$$

Preuve.
Pour tout $(x^*,y^*) \in X^* \times Y^*$, on a :

$$\begin{aligned}
-F^*(x^*,y^*) &= \inf_{(x,y)\in X\times Y} \{\max\{f(x+y), g(x)\} - \langle x^*, x\rangle - \langle y^*, y\rangle\} \\
&= \inf_{(x,z)\in X\times Y} \{\max\{f(z), g(x)\} - \langle x^*, x\rangle - \langle y^*, z - x\rangle\} \\
&= \inf_{(x,z)\in \mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)} \{\max\{f(z), g(x)\} - \langle x^*, x\rangle - \langle y^*, z - x\rangle\} \\
&= \inf_{(x,z)\in \mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)} \left\{ \max_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{\lambda f(z) + \mu g(x)\} - \langle x^*, x\rangle - \langle y^*, z - x\rangle \right\} \\
&= \inf_{(x,z)\in \mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)} \left\{ \max_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{\lambda f(z) - \langle y^*, z\rangle + \mu g(x) - \langle x^* - y^*, x\rangle\} \right\}.
\end{aligned}$$

Soit la fonction $\varphi : \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{dom}(g) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$\varphi((\lambda,\mu),(x,z)) = \lambda f(z) - \langle y^*, z\rangle + \mu g(x) - \langle x^* - y^*, x\rangle.$$

Pour tout $(x,z) \in \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{dom}(g)$, $\varphi(.,(x,z))$ est concave et s.c.s car affine.
Pour tout $(\lambda,\mu) \in \Delta_2$, $\varphi((\lambda,\mu),.)$ est convexe en tant que somme de fonctions convexes.
Comme le simplexe Δ_2 est un compact de $\mathbb{R}^2$, le Théorème MiniMax de Maurice Sion [60, Théorème 4.2'] donne :

$$-F^*(x^*,y^*) = \max_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \left\{ \inf_{(x,z)\in \mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)} \{\lambda f(z) - \langle y^*, z\rangle + \mu g(x) - \langle x^* - y^*, x\rangle\} \right\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F^*(x^*, y^*) &= \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \left\{ \sup_{(x,z)\in \mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)} \{\langle y^*, z\rangle - \lambda f(z) + \langle x^* - y^*, x\rangle - \mu g(x)\} \right\} \\ &= \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*)\}. \end{aligned}$$

□

Le problème dual associé au problème (P_y) peut donc s'écrire comme suit :

$$\text{Maximiser } \langle y^*, y\rangle - \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(-y^*)\}, \text{ s.l.c } y^* \in Y^*. \tag{D_y}$$

Théorème 2.8. *Supposons que :*

$$\exists t \in \mathbb{R} \ : \ \mathrm{int}([f \leq t] - [g \leq t]) \neq \emptyset. \tag{2.23}$$

Alors, soit

$$\max_{y^*\in Y^*}\{\langle y^*, y\rangle - \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(-y^*)\}\} = \inf_{x\in X} \max(f(x+y), g(y)),$$
$$\forall y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g)),$$

soit

$$-\infty = \inf_{x\in X} \max(f(x+y), g(x)) = -\min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(-y^*)\},$$
$$\forall y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g)) \textit{ et } \forall y^* \in Y^*.$$

Preuve.
D'après la Propriété 2.2, (*ii*) $\mathrm{Pr}_Y([F \leq t]) = [f \leq t] - [g \leq t]$ et donc la condition (2.23) est équivalente à la condition (2.4). La convexité de F permet de conclure à l'aide du Théorème 2.1. □

Considérons X Hausdorff, alors on obtient la version duale du Théorème 2.8.

Théorème 2.8'. *Soient X un e.v.t.H.l.c, f et g : $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes s.c.i et propres telles que* $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \neq \emptyset$*. Supposons que*

$$\exists t \in \mathbb{R} \ : \ \mathrm{int}_{\tau(X^*,X)}\left(\bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2, t_1+t_2=t} ([(\lambda f)^* \leq t_1] + [(\mu g)^* \leq t_2]) \right) \neq \emptyset. \tag{2.24}$$

Alors, on a :
soit

$$\max_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \max(f(x), g(x))\} = \inf_{y^*\in X^*} \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*)\},$$
$$\forall x^* \in \mathrm{int}_{\tau(X^*,X)}\left(\bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \mathrm{dom}((\lambda f)^*) + \mathrm{dom}((\mu g)^*) \right),$$

soit

$$-\max(f(x), g(x)) = \inf_{y^* \in X^*} \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*)\} = -\infty,$$

$$\forall x^* \in \operatorname{int}_{\tau(X^*,X)} \left(\bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \operatorname{dom}((\lambda f)^*) + \operatorname{dom}((\mu g)^*) \right) \textit{ et } \forall x \in X.$$

Preuve.

- Montrons que

$$\operatorname{Pr}_{X^*}([F^* \leq t]) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2, t_1+t_2=t} ([(\lambda f)^* \leq t_1] + [(\mu g)^* \leq t_2]).$$

On a,

$$\begin{aligned}
x^* \in \operatorname{Pr}_{X^*}([F^* \leq t]) &\iff \exists y^* \in Y^* : F^*(x^*, y^*) \leq t \\
&\iff \exists y^* \in Y^* : \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*)\} \leq t \\
&\iff \exists y^* \in Y^*, \exists(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \Delta_2 : (\overline{\lambda} f)^*(y^*) + (\overline{\mu} g)^*(x^* - y^*) \leq t \\
&\iff \exists y^* \in Y^*, \exists(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \Delta_2, \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : \begin{cases} t_1 + t_2 = t \\ (\overline{\lambda} f)^*(y^*) \leq t_1 \\ (\overline{\mu} g)^*(x^* - y^*) \leq t_2 \end{cases} \\
&\iff \exists(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \Delta_2, \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : \begin{cases} t_1 + t_2 = t \\ x^* \in [(\overline{\lambda} f)^* \leq t_1] + [(\overline{\mu} g)^* \leq t_2] \end{cases} \\
&\iff x^* \in \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2, t_1+t_2=t} ([(\lambda f)^* \leq t_1] + [(\mu g)^* \leq t_2]).
\end{aligned}$$

- Montrons que

$$\operatorname{Pr}_{X^*}(\operatorname{dom}(F^*)) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} (\operatorname{dom}((\lambda f)^*) + \operatorname{dom}((\mu g)^*)).$$

On a,

$$\begin{aligned}
x^* \in \operatorname{Pr}_{X_1^*}(\operatorname{dom}(F^*)) &\iff \exists y^* \in Y^* : F^*(x^*, y^*) < +\infty \\
&\iff \exists y^* \in Y^*, \exists(\lambda, \mu) \in \Delta_2 : \quad (\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*) < +\infty \\
&\iff \exists y^* \in Y^*, \exists(\lambda, \mu) \in \Delta_2 : \quad y^* \in \operatorname{dom}((\lambda f)^*) \quad \text{et} \quad x^* - y^* \in \operatorname{dom}((\mu g)^*) \\
&\iff x^* \in \operatorname{dom}((\lambda f)^*) + \operatorname{dom}((\mu g)^*).
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \neq \emptyset$, on conclut à l'aide du Théorème 2.1'. □

Remarque 2.5. La condition (2.24) est vérifiée dans le cas particulier où une des fonctions f^* ou g^* est s.c.s en un certain point de X^*.

Théorème 2.9. *Supposons que X est un e.v.t.l.c. Si f et g sont deux fonctions convexes s.c.i propres telles que* $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \neq \emptyset$ *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $-\infty < \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \max(f(x), g(x))\} = \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(x_1^*)+(\mu g)^*(x_2^*) : x_1^*+x_2^* = x^*\} \leq +\infty$, $\forall x^* \in X^*$.

(ii) L'ensemble $\bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} (\mathrm{epi}(\lambda f)^* + \mathrm{epi}(\mu g)^*)$ *est ω^*-fermé.*

Preuve.

Montrons que

$$\mathrm{Pr}_{X^*\times\mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \Big(\mathrm{epi}(\lambda f)^* + \mathrm{epi}(\mu g)^*\Big).$$

Notons que la fonction $F : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est définie par

$$F(x, y) = \max(f(x + y), g(x)), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

et que sa transformée de Fenchel F^* est définie par

$$F^*(x^*, y^*) = \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*)\}, \quad \forall (x^*, y^*) \in X^* \times Y^*.$$

$$\begin{aligned}
(x^*, r) \in \mathrm{Pr}_{X^*\times\mathbb{R}}(\mathrm{epi}F^*) &\Longleftrightarrow \exists y^* \in X^* : F^*(x^*, y^*) \leq r \\
&\Longleftrightarrow \exists y^* \in X^*, \exists (\lambda,\mu) \in \Delta_2 : \quad (\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*) \leq r \\
&\Longleftrightarrow \exists y^* \in X^*, \exists (\lambda,\mu) \in \Delta_2, \exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{R} : \begin{cases} r_1 + r_2 = r \\ (\lambda f)^*(y^*) \leq r_1 \\ (\mu g)^*(x^* - y^*) \leq r_2 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \exists y^* \in X^*, \exists (\lambda,\mu) \in \Delta_2, \exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{R} : \begin{cases} r_1 + r_2 = r \\ (y^*, r_1) \in \mathrm{epi}(\lambda f)^* \\ (x^* - y^*, r_2) \in \mathrm{epi}(\mu g)^* \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \Delta_2 : \Big\{(x^*, r) \in \mathrm{epi}(\lambda f)^* + \mathrm{epi}(\mu g)^* \\
&\Longleftrightarrow (x^*, r) \in \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} (\mathrm{epi}(\lambda f)^* + \mathrm{epi}(\mu g)^*).
\end{aligned}$$

On conclut à l'aide du Théorème 2.5 appliqué à la fonction F. □

Dans le but de donner la version duale du Théorème 2.9, rappelons la définition de la *somme inverse* de deux sous-ensembles de $X \times \mathbb{R}$.

Définition 2.5. Soient deux sous-ensembles M et N de $X \times \mathbb{R}$, la *somme inverse* de M et N est le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R}$ noté et défini par

$$M \perp N = \{(x + y, r) \in X \times \mathbb{R} \mid (x, r) \in M \text{ et } (y, r) \in N\}.$$

Théorème 2.9'. Soient X un e.v.t.H.l.c, f et $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes s.c.i propres telles que

$$0_{X^*} \in \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} (\mathrm{dom}((\lambda f)^*) + \mathrm{dom}((\mu g)^*)).$$

Alors pour tout sous-ensemble non vide B de X, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $-\infty < \sup\limits_{y^*\in X^*} \left\{ \langle y^*, y\rangle - \min\limits_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} \{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(-y^*)\} \right\} = \min\limits_{x\in X} \max(f(x+y), g(x)) \leq +\infty,$
$\forall y \in B$.

(ii) $\mathrm{epi} f \perp \mathrm{epi}\overline{g}$ est fermé par rapport à $B \times \mathbb{R}$,

où $\overline{g} : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est la fonction définie par $\overline{g}(x) = g(-x), \ \forall x \in X$.

Preuve.

En considérant la fonction F définie par $F(x, y) = \max(f(x + y), g(x))$, on a

$$0_{X^*} \in \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} (\mathrm{dom}((\lambda f)^*) + \mathrm{dom}((\mu g)^*))$$

équivaut à

$$0_{X^*} \in \mathrm{Pr}_{X^*}\mathrm{dom}(F^*).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pr}_{Y\times\mathbb{R}}(\mathrm{epi}F) &= \{(y, r) \in Y \times \mathbb{R} \ : \ \exists x \in X, f(x + y) \leq r \text{ et } g(x) \leq r\} \\
&= \{(y, r) \in Y \times \mathbb{R} \mid \exists x = -v, \ \exists u = x + y, \ \ f(u) \leq r \ , \ g(-v) \leq r \text{ et } u + v = y\} \\
&= \mathrm{epi} f \perp \mathrm{epi}\overline{g}.
\end{aligned}$$

On applique le Théorème 2.5' pour obtenir le résultat cherché. □

Nous étudions maintenant le problème de minimisation du maximum de deux fonctions convexes dans le cas d'espace vectoriel normé.

Théorème 2.10. *Soient X un e.v.n, f et $g : X = Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes. Supposons que*

$$\exists r > 0, t \in \mathbb{R} : \mathrm{int}([f \leq t] - [g \leq t] \cap r\mathbb{B}_X) \neq \emptyset. \tag{2.25}$$

Pour tout $x^* \in X^*$, on a soit

$$\max_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2, y^*\in X^*}\{\langle y^*, y\rangle - (\lambda f)^*(y^*) - (\mu g)^*(x^* - y^*)\} = \inf_{x\in X}\{\max(f(x+y), g(x)) - \langle x^*, x\rangle\} \in \mathbb{R},$$

$$\forall y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g)),$$

soit

$$-\min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2}\{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*)\} = \inf_{x\in X}\{\max(f(x+y), g(x)) - \langle x^*, x\rangle\} = -\infty,$$

$$\forall y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g)) \text{ et } \forall y^* \in X^*.$$

Preuve.
Il suffit de montrer que

$$\mathrm{Pr}_Y([F \le t] \times (r\mathbb{B}_X \times X)) = [f \le t] - [g \le t] \cap r\mathbb{B}_X.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
y \in \mathrm{Pr}_Y([F \le t] \times (r\mathbb{B}_X \times X)) &\iff \exists x \in X : \begin{cases} f(x+y) \le t \\ g(x) \le t \\ \|x\| \le r \end{cases} \\
&\iff \exists x \in X : \begin{cases} x + y \in [f \le t] \\ x \in [g \le t] \cap r\mathbb{B}_X \end{cases} \\
&\iff y \in [f \le t] - [g \le t] \cap r\mathbb{B}_X.
\end{aligned}$$

Par suite, on a bien

$$\mathrm{Pr}_Y([F \le t] \times (r\mathbb{B}_X \times X)) = [f \le t] - [g \le t] \cap r\mathbb{B}_X.$$

On déduit le résultat en utilisant le Théorème 2.3. □

Remarque 2.6. D. Azé [2] a obtenu une expression plus simple de la conjuguée de Legendre-Fenchel de la somme de deux fonctions convexes grâce à la condition

$$\exists r' > 0, t \in \mathbb{R} : \mathrm{int}([f \le t] \cap r'\mathbb{B}_X - [g \le t] \cap r'\mathbb{B}_X) \neq \emptyset$$

qui est en faite équivalente à la condition

$$\exists r > 0, t \in \mathbb{R} : \mathrm{int}([f \le t] - [g \le t] \cap r\mathbb{B}_X) \neq \emptyset.$$

Théorème 2.11. *Soit X un espace de Banach, f et $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes s.c.i propres telles que* $\mathbb{R}_+(\mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g))$ *soit un sous-espace fermé. Alors pour tout $x^* \in X^*$, on a*

$$-\infty < \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \max(f(x), g(x))\} = \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2, x_1^*+x_2^*=x^*}\{(\lambda f)^*(x_1^*) + (\mu g)^*(x_2^*)\} \leq +\infty.$$

Preuve.
On procède de manière analogue qu'au niveau de la preuve du Théorème 2.7 en prenant $F(x, y) = \max(f(x), g(x))$. □

Remarque 2.7. Si on prend $x^* = 0_{X^*}$ et on suppose que $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \neq \emptyset$ dans le Théorème 2.11, on obtient un résultat de Traoré-Volle [65, Théorème 7.1].

Si X est réflexif on obtient la version duale du Théorème 2.11.

Théorème 2.11' *Soient X un espace de Banach réflexif, f et $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes s.c.i propres telles que*

$$\mathbb{R}_+ \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2} (\mathrm{dom}((\lambda f)^*) + \mathrm{dom}((\mu g)^*))$$

est un sous-espace vectoriel ω^*-fermé. Alors, pour tout $y \in X$, on a

$$-\infty < \sup_{y^*\in X^*}\left\{\langle y^*, y\rangle - \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2}\{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(-y^*)\}\right\} = \min_{x\in X}\max(f(x+y), g(x)) \leq +\infty.$$

Preuve.
On applique le Théorème 2.7' à la fonction F^* définie par
$F^*(x^*, y^*) = \min_{(\lambda,\mu)\in\Delta_2}\{(\lambda f)^*(y^*) + (\mu g)^*(x^* - y^*)\}$. □

Pour terminer ce chapitre nous donnons un exemple qui motive le fait de considérer le problème de minimisation du maximum de deux fonctions convexes.

Exemple 2.1. Comme exemple de problème de minimisation du maximum de deux fonctions nous pouvons citer la somme en niveaux de deux fonction notée $\triangle$ et définie par :
Étant donné deux fonctions f et g à valeurs réelles définies sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel X, on appelle somme en niveaux de f et g la fonction $f\triangle g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$[f\triangle g](x) := \inf_{v\in X}\{f(x-v) \vee g(v)\}, \quad \forall x \in X.$$

Pour tout $y \in Y = X$, on a

$$\begin{aligned}[f \triangle g](y) &= \inf_{x \in X}\{f(y-x) \vee g(x)\} \\ &= \inf_{x \in X}\{f(x+y) \vee \overline{g}(x)\},\end{aligned}$$

où $\overline{g}(x) = g(-x)$.

Il apparaît donc que la somme en niveaux est la fonction valeur de la minimisation du maximum des deux fonctions f et $\overline{g}$. La somme en niveaux à plusieurs applications ([56]), parmi lesquelles on peut citer :

- **la fonction distance**

  Soit un e.v.n $(X, \|.\|)$, la distance d'un point $y \in X$ à un sous-ensemble non vide $C \subset X$ est la fonction $d_C : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

  $$d_C(y) := \inf_{x \in C} \|y - x\|.$$

  La fonction distance d_C est un cas particulier de la somme en niveaux. En effet,

  $$d_C(y) = [\|.\| \triangle i_C](y), \quad \forall y \in X.$$

- **minimisation d'un coût de production**

  Considérons deux usines joyant leurs efforts pour produire un vecteur $x \in \mathbb{R}^n_+$ de biens. Si la première usine produit $x_1 \in \mathbb{R}^n_+$, on note $C_1(x_1)$ son coût. De même, $C_2(x_2)$ représente le coût de production de $x_2 \in \mathbb{R}^n_+$ pour la seconde usine.

  On cherche une stratégie optimale de production pour les deux usines. Une solution consiste à trouver $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_+ : x_1 + x_2 = x$ et qui minimise sur $\mathbb{R}^n_+$ la fonction $(x_1, x_2) \longmapsto C_1(x_1) \vee C_2(x_2)$.

  $$\text{Minimiser } C_1(x_1) \vee C_2(x_2) \quad s.l.c \;\; x_1 + x_2 = x, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.26}$$

  Moyennant une modification mineure, ceci correspond à un problème de somme en niveaux. En effet, la valeur optimale du problème (2.26) est précisément $[\overline{C}_1 \triangle \overline{C}_2](x)$, où

  $$\overline{C}_1(x_i) = \begin{cases} C_i(x_i) & \text{si } \; x_i \in \mathbb{R}^n_+ \\ \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{pour } \; i = 1, 2. \tag{2.27}$$

CHAPITRE 3

Dualité robuste pour des problèmes d'optimisation convexe conique à données incertaines

3.1 Introduction

Considérons le problème d'optimisation convexe conique incertain suivant :

$$\inf_x f(x) \quad \text{s.l.c} \quad g_u(x) \in -S, \tag{P}$$

où :

- u appartient à U, un ensemble incertain,
- X et Y sont deux espaces vectoriels topologiques Hausdorff localement convexe,
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe semi-continue inférieurement propre,
- $S \subset Y$ est un cône convexe fermé non vide,
- pour chaque $u \in U$, la fonction $g_u : \text{dom}(g_u) \subset X \longrightarrow Y$ est soit S-convexe fermée par épigraphique ou soit S-convexe fermée par niveaux.

On associe au problème incertain (P) sa contrepartie robuste ([8], [9], [11]) définie par :

$$\inf_x f(x) \quad \text{s.l.c} \quad g_u(x) \in -S, \ \ \forall u \in U. \tag{RP}$$

La valeur de la contrepartie robuste inf (RP) est appelée *valeur robuste* du problème incertain (P).
Étant donné $u \in U$, une instance du problème (P) est donnée par :

$$\inf_x f(x) \quad \text{s.l.c} \quad g_u(x) \in -S. \tag{P_u}$$

On introduit le problème qui consiste à maximiser sur U la fonction qui à $u \in U$ associe la valeur de (P_u) :

$$\sup_u \inf_x \{f(x) \quad : \quad g_u(x) \in -S\} \quad \text{s.l.c} \quad u \in U. \tag{Q}$$

La valeur de (Q), $\sup(Q)$ est appelée *la pire valeur* du problème (P).
On observe que la pire valeur est une minorante de la valeur robuste et que l'inégalité entre ces deux valeurs peut être stricte.
L'objectif de ce chapitre est de donner une condition nécessaire et suffisante permettant d'obtenir l'égalité entre la valeur robuste et la pire valeur, avec exactitude de la pire valeur. On déduit de cette propriété une condition suffisante permettant d'obtenir la propriété de dualité forte robuste et on compare ce dernier résultat à celui de Jeyakumar, Li et Lee. En établissant l'égalité entre la valeur robuste et la pire valeur, nous établissons la dualité forte robuste du problème (P) ([6]).

3.2 Valeur robuste et pire valeur

Pour chaque $u \in U$, notons F_u l'ensemble admissible du problème (P_u) c'est-à-dire :

$$F_u = \{x \in \operatorname{dom}(g_u) : g_u(x) \in -S\}.$$

Nous notons aussi

$$F = \{x \in X : x \in \operatorname{dom}(g_u), \quad g_u(x) \in -S, \ \ \forall u \in U\} = \bigcap_{u \in U} F_u,$$

l'ensemble admissible de la contrepartie robuste (RP).
Considérons la fonction $p : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$p = \sup_{u \in U}(f + i_{F_u}).$$

Propriété 3.1. *La fonction p vérifie :*

(i) $p = f + i_F$,

(ii) $\operatorname{dom}(p) = F \cap \operatorname{dom}(f)$,

(iii) $\inf_X p = \inf(RP)$.

Preuve.
On a :

(i) Pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} p(x) &= \sup_{u\in U}(f + i_{F_u})(x) \\ &= f(x) + \sup_{u\in U} i_{F_u}(x) \\ &= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in F_u, \ \ \forall u \in U \\ \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \bigcap\limits_{u\in U} F_u = F \\ \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On conclut que $p = f + i_F$.

(ii) On a :

$$\mathrm{dom}(p) = \{x \in X \ : \ f(x) + i_F(x) < +\infty\} = F \cap \mathrm{dom}(f).$$

(iii) Par définition du problème (RP)

$$\begin{aligned} \inf\,(RP) &= \inf_{x\in X}\{f(x) \ : \ g_u(x) \in -S, \ \ \forall u \in U\} \\ &= \inf_{x\in X}\{f(x) \ : \ x \in F\} \\ &= \inf_{x\in X}\{f(x) + i_F(x)\} \\ &= \inf_{x\in X} p(x). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.1. *On a toujours l'inégalité :*

$$\sup\,(Q) \leq \inf\,(RP). \tag{3.1}$$

Preuve.
En effet, on a :
$\sup\,(Q) = \sup\limits_{u\in U} \inf\,(P_u) = \sup\limits_{u\in U} \inf\limits_{x\in X}(f + i_{F_u})(x) \leq \inf\limits_{x\in X} \sup\limits_{u\in U}(f + i_{F_u})(x) = \inf(RP).$ □

Nous donnons un exemple de problème qui prouve que l'inégalité (3.1) peut être stricte.

Exemple 3.1. Considérons le problème d'optimisation convexe conique incertain suivant :

$$\text{minimiser } (x_1 + x_2) \quad \text{s.l.c} \quad \frac{1}{2}\left[(2 - u_1)x_1^2 + (1 + u_2)x_2^2\right] \leq 1, \tag{P}$$

avec $(u_1, u_2) = (1, 2)$ ou $(u_1, u_2) = (\frac{1}{2}, 1)$. Dans cet exemple,

$$X = \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad Y = \mathbb{R}, \quad S = \mathbb{R}_+,$$

$$U = \left\{(1, 2), (\frac{1}{2}, 1)\right\}, \quad g_u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[(2 - u_1)x_1^2 + (1 + u_2)x_2^2\right] - 1.$$

Soit $u = (u_1, u_2) \in U$, étudions le problème

$$\min\,(x_1 + x_2) \quad \text{s.l.c} \quad g_u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[(2 - u_1)x_1^2 + (1 + u_2)x_2^2] - 1 \leq 0. \qquad (P_u)$$

- La fonction f est linéaire donc convexe.
- La hessienne de la fonction g_u est

$$\nabla^2 g_u(x) = \begin{pmatrix} 2 - u_1 & 0 \\ 0 & 1 + u_2 \end{pmatrix},$$

  et est définie positive car ses valeurs propres sont strictement positives ; par conséquent la fonction g_u est convexe.

On déduit que les conditions nécessaires de minimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) deviennent suffisantes.
Par ailleurs $g_u(0, 0) = -1 < 0$, donc la condition de qualification de Slater est vérifiée.
Ainsi $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ est une solution optimale du problème (P_u) si et seulement si $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ vérifie le système de KKT suivant : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \lambda \nabla g_u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0 \\ \lambda g_u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0 \\ g_u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \leq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 1 + \lambda(2 - u_1)\overline{x}_1 = 0 \\ 1 + \lambda(1 + u_2)\overline{x}_2 = 0 \\ \lambda g_u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0 \\ g_u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \leq 0 \\ \lambda > 0, \end{cases}$$

car $\nabla f(\overline{x}_1,\overline{x}_2)+\lambda\nabla g_u(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=0$ ce qui implique que $\lambda\neq 0$.
Par suite,

$$\begin{cases}\overline{x}_1 = \dfrac{-1}{\lambda(2-u_1)}\\[2ex] \overline{x}_2 = \dfrac{-1}{\lambda(1+u_2)}\end{cases}$$

et

$$g_u(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=\frac{1}{2}\left[(2-u_1)\frac{1}{\lambda^2(2-u_1)^2}+(1+u_2)\frac{1}{\lambda^2(1+u_2)^2}\right]-1=0.$$

On en déduit que

$$\lambda=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-u_1}+\frac{1}{1+u_2}\right)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\min(P_u) =& f(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\\ =&\overline{x}_1+\overline{x}_2\\ =&-\sqrt{2\left(\frac{1}{2-u_1}+\frac{1}{1+u_2}\right)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\min(P_u)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{8}{3}} & \text{si } u=(1,2)\\[3ex] -\sqrt{\dfrac{7}{3}} & \text{si } u=(\dfrac{1}{2},1).\end{cases}$$

Par conséquent,

$$\max(Q)=\max_u \min(P_u)=-\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

D'autre part, la contrepartie robuste du problème (P) est donnée par :

$$\min\ (x_1+x_2)\quad \text{s.l.c}\quad \begin{cases}x_1^2+3x_2^2\leq 2\\[2ex] 3x_1^2+4x_2^2\leq 4.\end{cases}\qquad (RP)$$

Notons $g_1(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2-2$ et $g_2(x_1,x_2)=3x_1^2+4x_2^2-4$.
$g_1(0,0)=-2<0$ et $g_2(0,0)=-4<0$; la condition de Slater est donc vérifiée.
$(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ est une solution optimale du problème (RP) si et seulement si $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ vérifie le système de KKT suivant :

il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \lambda_1 \nabla g_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \lambda_2 \nabla g_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0 \\ \lambda_1 g_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0 \\ \lambda_2 g_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0 \\ g_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \leq 0 \\ g_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \leq 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 \overline{x}_1 + 6\lambda_2 \overline{x}_1 = 0 \\ 1 + 6\lambda_1 \overline{x}_2 + 8\lambda_2 \overline{x}_2 = 0 \\ \lambda_1 g_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0 \\ \lambda_2 g_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0 \\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \end{cases}$$

car si $\lambda_1 = 0$, alors $\lambda_2 \neq 0$ et $g_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0$ et par un calcul explicite $\overline{x}_1 = -\frac{4\sqrt{21}}{21}$, $\overline{x}_2 = -\frac{\sqrt{21}}{7}$ et $g_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \frac{1}{21} > 0$, ce qui est absurde ; donc nécessairement $\lambda_1 \neq 0$. De même, on vérifie que $\lambda_2 \neq 0$.

On en déduit alors que

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = \dfrac{-1}{2\lambda_1 + 6\lambda_2} \\ \\ \overline{x}_2 = \dfrac{-1}{6\lambda_1 + 8\lambda_2} \\ \\ g_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0 \\ \\ g_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0. \end{cases}$$

Tout calcul fait, on trouve

$$\overline{x}_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{et} \qquad \overline{x}_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

On a donc

$$\min (RP) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = -\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Par conséquent,

$$\min (RP) = -\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{5}} > -\sqrt{\frac{7}{3}} = \max(Q).$$

Considérons l'opposé du problème (Q), c'est-à-dire

$$\inf_u \sup\{-f(x) \quad : \quad g_u(x) \in -S\} \quad \text{s.l.c} \quad u \in U. \tag{$-Q$}$$

La perturbation de la fonction objectif de $(-Q)$ par l'addition d'une forme linéaire continue nous amène à considérer une fonction $q : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$q(x^*) = \inf_{u\in U} \sup_{x\in F_u}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} = \inf_{u\in U}(f + i_{F_u})^*(x^*).$$

D'après la Propriété 1.11,

$$q^* = \sup_{u\in U}(f + i_{F_u})^{**}$$

et comme

$$\sup_{u\in U}(f + i_{F_u})^{**} \leq \sup_{u\in U}(f + i_{F_u}) = p,$$

alors

$$q^* \leq p.$$

Par conséquent,

$$p^* \leq q^{**} \leq q.$$

Rappelons que $\Gamma_0(X)$ est l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexes s.c.i propres.

Lemme 3.1 ([15]). *Soient $(h_i)_{i\in I} \subset \Gamma_0(X)$, où I est un ensemble quelconque d'indices. Supposons qu'il existe $\overline{x} \in X$ tel que $\sup_{i\in I} h_i(\overline{x}) < +\infty$. Alors*

$$\text{epi}\left(\sup_{i\in I} h_i\right)^* = \overline{co}\left(\bigcup_{i\in I} \text{epi} h_i^*\right).$$

Considérons la condition suivante :

$$(\mathscr{H}) \qquad \begin{cases} f \in \Gamma_0(X) \\ F \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset \\ g_u \quad \text{est } S\text{-convexe fermée par niveaux}, \forall u \in U. \end{cases}$$

Lemme 3.2. *Supposons que $(\mathscr{H})$ est vérifiée. Alors,*

$$\text{epi} p^* = \overline{co}\left(\bigcup_{u\in U} \text{epi}(f + i_{F_u})^*\right).$$

Preuve.
Si $(\mathscr{H})$ est vérifiée alors $f + i_{F_u} \in \Gamma_0(X)$ pour tout $u \in U$ et on a

$$q^* = \sup_{u\in U}(f + i_{F_u})^{**} = \sup_{u\in U}(f + i_{F_u}) = p.$$

Par suite, $\mathrm{dom}(q^*) = F \cap \mathrm{dom} f \neq \emptyset$ et donc il existe $x \in F \cap \mathrm{dom}(f)$ tel que

$$q^*(x) = \sup_{u\in U}(f + i_{F_u})(x) < +\infty.$$

En appliquant le Lemme 3.1 à la fonction $q^* = p$, on obtient le résultat cherché. □

Définition 3.1. Étant donné deux sous-ensembles A et B d'un espace vectoriel topologique, on dit que A est convexe fermé par rapport à B si

$$\overline{co}(A) \cap B = A \cap B.$$

Théorème 3.1. *Supposons que* $(\mathscr{H})$ *est vérifiée. Alors, pour chaque* $x^* \in X^*$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $p^*(x^*) = \min_{u\in U} \sup_{x\in F_u}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$,

(ii) $\bigcup_{u\in U} \mathrm{epi}(f + i_{F_u})^*$ *est convexe* ω^**-fermé par rapport à* $\{x^*\} \times \mathbb{R}$.

***Preuve*.**
Soit $x^* \in X^*$, on a

$$p^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \sup_{u\in U}(f + i_{F_u})(x)\}.$$

Il en résulte que

$$p^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle - \sup_{u\in U}(f + i_{F_u})(x), \quad \forall x \in X,$$

d'où

$$p^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle - (f + i_F)(x), \quad \forall x \in X.$$

Comme $\mathrm{dom}(f) \cap F \neq \emptyset$ alors $p^*(x^*) > -\infty$. On peut donc distinguer deux cas :
1^{er} cas : $p^*(x^*) = +\infty$; dans ce cas, montrons que (i) et (ii) sont toutes vraies et donc équivalentes.
Comme $p^* \leq q$ alors

$$q(x^*) = +\infty \Longleftrightarrow (f + i_{F_u})^* (x^*) = +\infty, \ \ \forall u \in U.$$

D'où

$$p^*(x^*) = q(x^*) = \min_{u\in U} \sup_{x\in F_u}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}.$$

Ainsi (i) est vraie.
D'après le Lemme 3.2, on a

$$\mathrm{epi}p^* \bigcap \left(\{x^*\} \times \mathbb{R}\right) = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{u\in U} \mathrm{epi}(f + i_{F_u})^*\right) \bigcap \left(\{x^*\} \times \mathbb{R}\right) = \emptyset,$$

car $p^*(x^*) = +\infty$.
Par conséquent

$$\left(\bigcup_{u\in U}\mathrm{epi}(f+i_{F_u})^*\right)\bigcap\left(\{x^*\}\times\mathbb{R}\right)=\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{u\in U}\mathrm{epi}(f+i_{F_u})^*\right)\bigcap\left(\{x^*\}\times\mathbb{R}\right)=\emptyset.$$

d'où *(ii)* est vérifiée.
2^e cas : $p^*(x^*)\in\mathbb{R}$.
Montrons que $(ii)\Longrightarrow(i)$.
En effet, on a :

$$(x^*,p^*(x^*))\in \mathrm{epi}p^*\bigcap\left(\{x^*\}\times\mathbb{R}\right)=\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{u\in U}\mathrm{epi}(f+i_{F_u})^*\right)\bigcap\left(\{x^*\}\times\mathbb{R}\right).$$

Comme (ii) est vérifiée, alors

$$(x^*,p^*(x^*))\in\left(\bigcup_{u\in U}\mathrm{epi}(f+i_{F_u})^*\right)\bigcap\left(\{x^*\}\times\mathbb{R}\right).$$

Il existe donc $\overline{u}\in U$ tel que

$$(x^*,p^*(x^*))\in\mathrm{epi}(f+i_{F_{\overline{u}}})^*,$$

ce qui implique que

$$(f+i_{F_{\overline{u}}})^*(x^*)\leq p^*(x^*).$$

Par définition de q, on a

$$q(x^*)=\inf_{u\in U}(f+i_{F_u})^*(x^*)\leq(f+i_{F_{\overline{u}}})^*(x^*)\leq p^*(x^*)$$

et comme $p^*\leq q$, on en déduit que

$$p^*(x^*)=\min_{u\in U}\sup_{x\in F_u}\{\langle x^*,x\rangle-f(x)\},\quad\text{d'où }\ (i).$$

Montrons que $(i)\Longrightarrow(ii)$.
Soit

$$(x^*,r)\in\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{u\in U}\mathrm{epi}(f+i_{F_u})^*\right)\cap\left(\{x^*\}\times\mathbb{R}\right).$$

D'après le Lemme 3.2, $p^*(x^*)\leq r$ et comme (i) est vérifiée alors il existe $\overline{u}\in U$ tel que

$$p^*(x^*)=(f+i_{F_{\overline{u}}})^*(x^*)\leq r,$$

ce qui signifie que

$$(x^*,r)\in\mathrm{epi}(f+i_{F_{\overline{u}}})^*.$$

D'où,

$$(x^*, r) \in \bigcup_{u\in U} \operatorname{epi}(f + i_{F_u})^*.$$

Il en résulte que

$$\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{u\in U} \operatorname{epi}(f + i_{F_u})^*\right) \cap (\{x^*\} \times \mathbb{R}) \subset \bigcup_{u\in U} \operatorname{epi}(f + i_{F_u})^* \cap \Big(\{x^*\} \times \mathbb{R}\Big);$$

par conséquent,

$$\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{u\in U} \operatorname{epi}(f + i_{F_u})^*\right) \cap \Big(\{x^*\} \times \mathbb{R}\Big) = \bigcup_{u\in U} \operatorname{epi}(f + i_{F_u})^* \cap \Big(\{x^*\} \times \mathbb{R}\Big), \text{ d'où } (ii).$$

□

Corollaire 3.1. *Supposons que ($\mathscr{H}$) est vérifiée. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $-\infty \leq \max_{u\in U} \inf (P_u) = \inf (RP) < +\infty$,

(ii) $\bigcup_{u\in U} \operatorname{epi}(f + i_{F_u})^*$ *est convexe ω^*-fermé par rapport à* $\{0_{X^*}\} \times \mathbb{R}$.

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} p^*(0_{X^*}) &= \sup_{x\in X}\{-(f + i_F)(x)\} \\ &= -\inf_{x\in X}\{(f + i_F)(x)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent ; $p^*(0_{X^*}) = -\inf (RP)$, autrement dit $-p^*(0_{X^*}) = \inf (RP)$.

En prenant $x^* = 0_{X^*}$ dans le Théorème 3.1, la condition (i) devient

$$\begin{aligned} p^*(0_{X^*}) &= \min_{u\in U} \sup_{x\in F_u}\{-f(x)\} \\ &= \min_{u\in U} \sup_{x\in X}\{-f(x) - i_{F_u}(x)\} \\ &= -\max_{u\in U} \inf_{x\in X}\{f(x) + i_{F_u}(x)\} \\ &= -\max_{u\in U} \inf (P_u). \end{aligned}$$

Autrement dit

$$-p^*(0_{X^*}) = \max_{u\in U} \inf (P_u).$$

Comme $\operatorname{dom}(p) \neq \emptyset$ alors pour tout $x^* \in X^*$,

$$-\infty < p^*(x^*) \leq +\infty,$$

donc

$$-\infty \leq -p^*(x^*) < +\infty.$$

Ainsi, en utilisant l'égalité $-p^*(0_{X^*}) = \inf(RP)$ on a

$$-\infty \leq \max_{u\in U} \inf(P_u) = \inf(RP) < +\infty.$$

Quant à l'assertion (*ii*) du Théorème 3.1, elle devient "$\bigcup_{u\in U} \mathrm{epi}(f + i_{F_u})^*$ est convexe ω^*-fermé par rapport à $\{0_{X^*}\} \times \mathbb{R}$".
Par suite, on obtient l'équivalence entre (*i*) et (*ii*). □

Corollaire 3.2. *Supposons que ($\mathscr{H}$) est vérifiée. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $p^*(x^*) = \min_{u\in U} \sup_{x\in F_u}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}, \quad \forall x^* \in X^*,$

(ii) $\bigcup_{u\in U} \mathrm{epi}(f + i_{F_u})^*$ *est convexe* ω^**-fermé.*

Preuve.
Observons que pour tout sous-ensemble $A \subset X^* \times \mathbb{R}$, on a :
A est convexe fermé dans $X^* \times \mathbb{R}$ si et seulement si A convexe fermé par rapport à $\{x^*\} \times \mathbb{R}$, pour tout $x^* \in X^*$.
En effet, si A est convexe fermé dans $X^* \times \mathbb{R}$, alors pour tout $x^* \in X^*$, on a :

$$\overline{co}(A) \cap (\{x^*\} \times \mathbb{R}) = A \cap (\{x^*\} \times \mathbb{R}).$$

Inversement, si A est convexe fermé par rapport à $\{x^*\} \times \mathbb{R}$ pour tout $x^* \in X^*$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\overline{co}(A) &= \overline{co}(A) \cap (X^* \times \mathbb{R}) \\
&= \overline{co}(A) \cap \Big(\bigcup_{x^*\in X^*} (\{x^*\} \times \mathbb{R})\Big) \\
&= \bigcup_{x^*\in X^*} \overline{co}(A) \cap (\{x^*\} \times \mathbb{R}) \\
&= \bigcup_{x^*\in X^*} A \cap (\{x^*\} \times \mathbb{R}) \\
&= A \cap (X^* \times \mathbb{R}) = A.
\end{aligned}$$

Avec cette précédente observation, (*i*) est équivalente à (*ii*) d'après le Théorème 3.1. □

On note par

$$S^+ = \{\lambda \in Y^* \ : \ \langle \lambda, y\rangle \geq 0, \ \forall y \in S\},$$

le *cône polaire positif* de S.
Étant donné une fonction $g : \mathrm{dom}(g) \subset X \longrightarrow Y$ et $\lambda \in S^+$, on note $\lambda g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

la fonction définie par

$$\lambda g(x) = \begin{cases} \langle \lambda, g(x) \rangle & \text{si } x \in \mathrm{dom}(g) \\ \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous considérons la tranche de niveau $y = 0_Y$ de g que l'on note :

$$g^{-1}(-S) = \{x \in \mathrm{dom}(g) \ : \ g(x) \in -S\}$$

et l'ensemble

$$K_g = \bigcup_{\lambda \in S^+} \mathrm{epi}(\lambda g)^*,$$

qui peut être vu comme le *cône caractéristique* associé au système d'inégalités ([33])

$$\{x \in \mathrm{dom}(g) \ : \ \lambda g(x) \leq 0, \ \ \forall \lambda \in S^+\}.$$

Nous allons montrer sans aucune hypothèse de convexité sur g que l'ensemble K_g est un cône convexe.

Propriété 3.2. *Pour toute fonction $g : \mathrm{dom}(g) \subset X \longrightarrow Y$ tel que $g^{-1}(-S) \neq \emptyset$, on a :*

(i) $i_{g^{-1}(-S)} = \sup\limits_{\lambda \in S^+} (\lambda g)$,

(ii) K_g *est un cône convexe.*

Preuve.

Montrons d'abord (i).

Notons que

$$i_{g^{-1}(-S)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in g^{-1}(-S) \\ \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et distinguons deux cas.

- 1^er cas : si $x \notin g^{-1}(-S)$ c'est-à-dire $i_{g^{-1}(-S)}(x) = +\infty$, alors $g(x) \notin -S$. d'après le théorème de séparation de Hahn-Banach appliqué à $\{g(x)\}$ et $-S$, il existe $(y^*, r) \in Y^* \times \mathbb{R}$ tel que

  $$\langle y, y^* \rangle < r < \langle g(x), y^* \rangle, \quad \forall y \in -S.$$

  Si on prend $y = 0_Y$, il vient alors que $r > 0$ et donc $y^* \in S^+$. Par suite,

  $$\sup_{\lambda \in S^+} (\lambda g)(x) \geq \langle g(x), n y^* \rangle > 0, \quad \forall n \geq 1.$$

  En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient

  $$\sup_{\lambda \in S^+} (\lambda g)(x) = +\infty.$$

- $2^{\text{ème}}$ cas : si $x \in g^{-1}(-S)$ c'est-à-dire $i_{g^{-1}(-S)}(x) = 0$ alors $g(x) \in -S$ autrement dit $-g(x) \in S$. Ainsi, pour tout $\lambda \in S^+$,

$$\langle \lambda, -g(x) \rangle \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\langle \lambda, g(x) \rangle \leq 0$$

et donc

$$\sup_{\lambda \in S^+} (\lambda g)(x) = 0,$$

car $0_{Y^*} \in Y^*$.

Vérifions maintenant (*ii*).
Montrons que K_g est un cône. Soit $(x^*, r) \in K_g$ et $t > 0$. Il existe $\lambda \in S^+$ tel que $(\lambda g)^*(x^*) \leq r$ et de plus, on a

$$\begin{aligned}(t\lambda g)^*(tx^*) &= \sup_{x \in X} \{\langle tx^*, x \rangle - t\lambda g(x)\} \\ &= t \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x \rangle - \lambda g(x)\} \\ &= t(\lambda g)^*(x^*).\end{aligned}$$

Par conséquent, $(t\lambda g)^*(tx^*) = t(\lambda g)^*(x^*) \leq tr$. Il vient que $t(x^*, r) \in K_g$ car $t\lambda \in S^+$ et par suite, K_g est un cône.
Montrons que K_g est convexe. Pour cela, il suffit de montrer qu'il est stable par l'addition. Soient $(x_1^*, r_1), (x_2^*, r_2) \in K_g$, il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in S^+$ tels que

$$(x_1^*, r_1) \in \operatorname{epi}(\lambda_1 g)^* \text{ et } (x_2^*, r_2) \in \operatorname{epi}(\lambda_2 g)^*,$$

c'est-à-dire

$$(\lambda_1 g)^*(x_1^*) \leq r_1 \text{ et } (\lambda_2 g)^*(x_2^*) \leq r_2.$$

Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned}\langle x_1^* + x_2^*, x \rangle - (\lambda_1 + \lambda_2) g(x) &= \langle x_1^*, x \rangle - \lambda_1 g(x) + \langle x_2^*, x \rangle - \lambda_2 g(x) \\ &\leq (\lambda_1 g)^*(x_1^*) + (\lambda_2 g)^*(x_2^*) \\ &\leq r_1 + r_2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup_{x \in X} \{\langle x_1^* + x_2^*, x \rangle - (\lambda_1 + \lambda_2) g(x)\} \leq r_1 + r_2,$$

d'où

$$((\lambda_1 + \lambda_2) g)^*(x_1^* + x_2^*) \leq r_1 + r_2,$$

c'est-à-dire
$$(x_1^* + x_2^*, r_1 + r_2) \in \mathrm{epi}((\lambda_1 + \lambda_2)g)^*.$$
Ainsi,
$$(x_1^*, r_1) + (x_2^*, r_2) \in K_g,$$
car $(\lambda_1 + \lambda_2) \in S^+$; d'où K_g est convexe. □

Proposition 3.2. *Pour toute fonction* $g : \mathrm{dom}(g) \subset X \longrightarrow Y$*, S-convexe par épigraphe telle que* $g^{-1}(-S) \neq \emptyset$*, on a*
$$\mathrm{epi}\sigma_{g^{-1}(-S)} = \overline{K_g}.$$

Preuve.
Soit la fonction $H : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par
$$\begin{aligned} H(x, y) &= i_{\text{S-epi}g}(x, -y) \\ &= i_{\text{S-epi}g} \circ L(x, y), \end{aligned}$$
où $L : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ est l'application linéaire involutive continue définie par
$$L(x, y) = (x, -y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$
On a
$$\begin{aligned} H^*(x^*, y^*) &= \sup_{(x,y)\in X\times Y} \{\langle (x^*, y^*), (x, y)\rangle - H(x, y)\} \\ &= \sup_{(x,y)\in X\times Y} \{\langle (x^*, y^*), (x, y)\rangle - i_{\text{S-epi}g}(x, -y)\} \\ &= \sup_{(x,-y)\in \text{S-epi}g} \{\langle (x^*, y^*), (x, y)\rangle\} \\ &= \sup_{-y-g(x)\in S} \{\langle (x^*, y^*), (x, y)\rangle\} \\ &= \sup_{x\in X, s\in S} \{\langle (x^*, y^*), (x, -s - g(x))\rangle\} \\ &= \sup_{x\in X, s\in S} \{\langle x^*, x\rangle + \langle y^*, -s - g(x)\rangle\} \\ &= \sup_{x\in X, s\in S} \{\langle x^*, x\rangle - \langle y^*, s\rangle - \langle y^*, g(x)\rangle\} \\ &= \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \inf_{s\in S}\{\langle y^*, s\rangle + \langle y^*, g(x)\rangle\}\} \\ &= \begin{cases} (y^*g)^*(x^*) & \text{si} \quad y^* \in S^+ \\ \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$
Par ailleurs,
$$\mathrm{epi}H = L(\text{S-epi}g) \times [0, +\infty[,$$

donc H est convexe s.c.i.
De plus, $\mathrm{dom}(H) = L(\text{S-epi g})$ et du fait que $g^{-1}(-S) \neq \emptyset$ alors il existe $x \in X$ tel que $-g(x) \in S$. On en déduit que $(x, 0_Y) \in$ S-epi g et donc H est propre. Ainsi, $H \in \Gamma_0(X \times Y)$ et on a, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} H(x, 0_Y) &= H^{**}(x, 0_Y) \\ &= \sup_{x^* \in X^*, \lambda \in Y^*} \{\langle x^*, x\rangle + \langle \lambda, 0_Y\rangle - H^*(x^*, \lambda)\} \\ &= \sup_{x^* \in X^*, \lambda \in S^+} \{\langle x^*, x\rangle - (\lambda g)^*(x^*)\} \\ &= \sup_{\lambda \in S^+} \left\{ \sup_{x^* \in X^*} \{\langle x^*, x\rangle - (\lambda g)^*(x^*)\} \right\} \\ &= \sup_{\lambda \in S^+} (\lambda g)^{**}(x). \end{aligned}$$

Par définition de H, on a aussi

$$H(x, 0_Y) = i_{\text{S-epig}}(x, 0_Y) = i_{g^{-1}(-S)}(x);$$

ce qui implique que

$$i_{g^{-1}(-S)} = \sup_{\lambda \in S^+} (\lambda g)^{**}.$$

Comme $g^{-1}(-S) \neq \emptyset$ alors il existe $x \in X$ tel que

$$\sup_{\lambda \in S^+} (\lambda g)^{**}(x) < +\infty,$$

et d'après le Lemme 3.1, on a

$$\mathrm{epi}(i_{g^{-1}(-S)})^* = \mathrm{epi}(\sup_{\lambda \in S^+} (\lambda g)^{**})^* = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \mathrm{epi}(\lambda g)^{***} \right).$$

Rappelons que $\sigma_{g^{-1}(-S)} = i^*_{g^{-1}(-S)}$, alors il vient que

$$\mathrm{epi}\sigma_{g^{-1}(-S)} = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \mathrm{epi}(\lambda g)^{***} \right) = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \mathrm{epi}(\lambda g)^{*} \right);$$

d'où,

$$\mathrm{epi}\sigma_{g^{-1}(-S)} = \overline{\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \mathrm{epi}(\lambda g)^{*} \right)} = \overline{K_g},$$

car K_g est convexe d'après de la Propriété 3.2-*(ii)*. □

Rappelons un résultat sur l'épigraphe de la conjuguée de la somme de deux fonctions.

Lemme 3.3. *[17, Theorem 2.1] Pour toutes fonctions $h_1, h_2 \in \Gamma_0(X)$ telles que* $\mathrm{dom}(h_1) \cap \mathrm{dom}(h_2) \neq \emptyset$*, on a*

$$\mathrm{epi}(h_1 + h_2)^* = \overline{\left(\mathrm{epi} h_1^* + \mathrm{epi} h_2^*\right)}.$$

Nous allons maintenant étudier le cas où les fonctions g_u sont S-convexes fermées par épigraphe.
Renforçons la condition $(\mathscr{H})$ en considérant la condition suivante :

$$(\mathscr{H}') \qquad \begin{cases} f \in \Gamma_0(X) \\ F \cap \mathrm{dom}(f) \neq \emptyset \\ g_u \quad \text{est } S\text{-convexe fermée par epigraphe}, \ \forall u \in U. \end{cases}$$

Proposition 3.3. *Supposons que $(\mathscr{H}')$ est vérifiée. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\inf(RP) = \max(Q)$,

(ii) $\bigcup_{u \in U} \overline{(\mathrm{epi} f^* + K_{g_u})}$ *est convexe ω^*-fermé par rapport à* $\{0_{X^*}\} \times \mathbb{R}$.

Preuve.
Puisque $F \neq \emptyset$, on a $F_u = g_u^{-1}(-S) \neq \emptyset$, pour tout $u \in U$. D'après la Proposition 3.2, on a

$$\mathrm{epi}\sigma_{F_u} = \mathrm{epi} i_{F_u}^* = \overline{K_{g_u}}, \qquad \forall u \in U.$$

En utilisant le Lemme 3.3, on a pour tout $u \in U$,

$$\begin{aligned} \mathrm{epi}(f + i_{F_u})^* &= \overline{(\mathrm{epi} f^* + \mathrm{epi} i_{F_u}^*)} \\ &= \overline{(\mathrm{epi} f^* + \mathrm{epi} i_{F_u}^*)} \\ &= \overline{(\mathrm{epi} f^* + \overline{K_{g_u}})} \\ &= \overline{(\mathrm{epi} f^* + K_{g_u})}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\bigcup_{u \in U} \mathrm{epi}(f + i_{F_u})^* = \bigcup_{u \in U} \overline{(\mathrm{epi} f^* + K_{g_u})}.$$

On conclut en utilisant le Corollaire 3.1. □

3.3 Dualité forte robuste

Dans cette section, à l'aide du problème (Q), nous établissons la dualité forte robuste du problème incertain (P).

Pour chaque $u \in U$, on associe au problème (P_u) son dual lagrangien :

$$\sup_{\lambda} \inf_{x\in X}\{f(x) + \lambda g_u(x)\} \qquad \text{s.l.c} \quad \lambda \in S^+. \tag{D_u}$$

Le dual "optimiste" du problème incertain (P) ([7], [16], [36], [43]) est défini par :

$$\sup_{(u,\lambda)} \inf_{x\in X}\{f(x) + \lambda g_u(x)\} \qquad \text{s.l.c} \quad (u,\lambda) \in U \times S^+. \tag{ODP}$$

La dualité forte robuste est dite vérifiée pour le problème convexe conique incertain (P) si la valeur de la contrepartie robuste coïncide avec celle du dual optimiste où cette dernière est atteinte. Autrement dit, la dualité forte robuste est vérifiée si :

$$\inf(RP) = \max(ODP). \tag{3.2}$$

Cette terminologie de dualité forte robuste a été introduite dans [43]. Aussi, on rencontre cette notion dans [7] et [36] sous le nom "primal worst eqals dual best".

Proposition 3.4. *La valeur du dual optimiste est toujours plus petite que la pire valeur c'est-à-dire :*

$$\sup(ODP) \leq \sup(Q). \tag{3.3}$$

Preuve.
La dualité faible lagrangienne entre (P_u) et (D_u) pour chaque $u \in U$ donne

$$\sup_{\lambda\in S^+} \inf_{x\in X}\{f(x) + \lambda g_u(x)\} \leq \inf(P_u).$$

En prenant le sup sur U, on obtient

$$\sup(ODP) = \sup_{\lambda\in S^+, u\in U} \inf_{x\in X}\{f(x) + \lambda g_u(x)\} \leq \sup_{u\in U} \inf(P_u) = \sup(Q).$$

□

Proposition 3.5. *Si la dualité forte robuste est vérifiée, alors*

$$\inf(RP) = \max(Q).$$

Preuve.
D'après la Proposition 3.1, on a

$$\sup(Q) \leq \inf(RP)$$

et la Proposition 3.4 donne

$$\sup(ODP) \leq \sup(Q).$$

Ces deux propositions couplées à la dualité forte robuste nous permettent d'affirmer que

$$\max(ODP) = \sup(Q) = \inf(RP).$$

Il existe donc $(\overline{u}, \overline{\lambda}) \in U \times S^+$ tel que

$$\inf_{x\in X}\{f(x) + \overline{\lambda} g_{\overline{u}}(x)\} = \inf(RP) = \sup(Q) \geq \inf(P_{\overline{u}}) \geq \inf_{x\in X}\{f(x) + \overline{\lambda} g_{\overline{u}}(x)\}.$$

Par conséquent,

$$\inf(P_{\overline{u}}) = \sup(Q) = \sup_{u\in U}\{\inf(P_u)\} = \inf(RP).$$

D'où,

$$\sup(Q) = \max(Q) = \inf(RP).$$

□

Dans le but d'obtenir la dualité forte robuste, nous rappelons deux résultats de dualité épigraphique.

Lemme 3.4. *[15, Theorem 8.3] Supposons que $f \in \Gamma_0(X)$, $g : \mathrm{dom}(g) \subset X \longrightarrow Y$ est S-convexe fermée par épigraphe et $g^{-1}(-S) \bigcap \mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\displaystyle\inf_{g(x)\in(-S)}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle\} = \max_{\lambda\in S^+}\inf_{g(x)\in(-S)}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle + \lambda g(x)\}, \qquad \forall x^* \in X^*,$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in S^+}\mathrm{epi}(f + \lambda g)^*$ *est ω^*-fermé.*

Lemme 3.5. *[29, Corollary 5] Supposons que $f \in \Gamma_0(X)$, $g : \mathrm{dom}(g) \subset X \longrightarrow Y$ est S-convexe fermée par épigraphe et $g^{-1}(-S) \bigcap \mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\displaystyle\inf_{g(x)\in(-S)}\{f(x)\} = \max_{\lambda\in S^+}\inf_{g(x)\in(-S)}\{f(x) + \lambda g(x)\},$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in S^+}\mathrm{epi}(f + \lambda g)^*$ *est ω^*-fermé par rapport à $\{0_{X^*}\} \times \mathbb{R}$.*

Proposition 3.6. *Supposons que $(\mathscr{H}')$ est vérifiée et que pour tout $u \in U$, l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in S^+}\mathrm{epi}(f + \lambda g_u)^*$ est ω^*-fermé par rapport à $\{0_{X^*}\} \times \mathbb{R}$; alors,*

$$\sup(ODP) = \sup(Q).$$

Preuve.
Pour chaque $u \in U$, en appliquant le Lemme 3.5 à la fonction g_u, on obtient

$$\inf_{x\in F_u}\{f(x)\} = \max_{\lambda\in S^+}\inf_{g_u(x)\in(-S)}\{f(x) + \lambda g_u(x)\}.$$

En prenant le supremum sur U, on obtient :

$$\sup(Q) = \sup(ODP).$$

□

Remarque 3.1. Considérons l'exemple 3.1. Du fait que la condition de qualification de Slater est vérifiée, en se référant par exemple à la Remarque 4.3 de [23] on peut en déduire que l'ensemble $\bigcup_{\lambda\geq 0} \operatorname{epi}(f+\lambda g_u)^*$ est fermé. Ainsi, concernant toujours l'exemple 3.1, il résulte de la Proposition 3.6, que

$$\sup(Q) = \sup(ODP),$$

et donc

$$\sup(ODP) < \inf(RP).$$

Notons par

$$\operatorname{Argmin}(Q) := \{u \in U \ : \ \inf(P_u) = \sup(Q)\},$$

l'ensemble des solutions optimales de (Q).

Théorème 3.2. *Supposons qu'en plus de la condition ($\mathscr{H}$), les conditions suivantes sont aussi vérifiées :*

$$\bigcup_{u\in U} \operatorname{epi}(f+i_{F_u})^* \ \textit{ est convexe } \omega^*\textit{-fermé par rapport à } \{0_{X^*}\}\times\mathbb{R}, \tag{3.4}$$

$$\exists\, \overline{u} \in \operatorname{Argmin}(Q) : \ \begin{cases} g_{\overline{u}} \ \textit{ est } S\textit{-convexe fermée par épigraphe} \\ \\ \displaystyle\bigcup_{\lambda\in S^+} \operatorname{epi}(f+\lambda g_{\overline{u}})^* \textit{ est } \omega^*\textit{-fermé par rapport à } \{0_{X^*}\}\times\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors, la dualité forte robuste est vérifiée.

***Preuve*.**
D'après le Corollaire 3.1 et la condition (3.4), on a :

$$\inf(RP) = \max(Q);$$

il existe donc $\overline{u} \in U$ vérifiant (3.5) tel que

$$\inf(RP) = \max(Q) = \inf(P_{\overline{u}}).$$

Il résulte du Lemme 3.5 que

$$\inf(RP) = \inf(P_{\overline{u}}) = \max(D_{\overline{u}})$$

et par définition du dual optimiste, on a

$$\inf(RP) = \max(D_{\overline{u}}) \leq \sup(ODP).$$

D'après la Proposition 3.4, on a

$$\sup(ODP) \leq \sup(Q),$$

d'où

$$\sup(ODP) \leq \sup(Q) \leq \inf(RP) = \max(D_{\overline{u}}) \leq \sup(ODP),$$

et donc

$$\inf(RP) = \max(ODP).$$

□

On dit que la propriété de dualité forte robuste est vérifiée en un point $x^* \in X^*$ si

$$\inf_{x\in F}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle\} = \max_{\lambda\in S^+, u\in U} \inf_{x\in X}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle + \lambda g_u(x)\}. \tag{3.6}$$

Si $x^* = 0_{X^*}$, on retrouve la propriété de dualité forte robuste.
Si la propriété de dualité forte robuste est vérifiée en tout $x^* \in X^*$, on dit que la propriété de dualité forte stable robuste est vérifiée pour le problème (P).

Corollaire 3.3. *Supposons que $(\mathscr{H}')$ est vérifiée et*

$$\bigcup_{u\in U} \overline{\mathrm{epi} f^* + K_{g_u}} \text{ est convexe } \omega^*\text{-fermé,} \tag{3.7}$$

$$\forall u \in U, \quad \bigcup_{\lambda\in S^+} \mathrm{epi}(f + \lambda g_u)^* \text{ est } \omega^*\text{-fermé.} \tag{3.8}$$

Alors, la dualité forte stable robuste est vérifiée.

Preuve.
D'après le Lemme 3.3 et la Proposition 3.2, on a

$$\bigcup_{u\in U} \mathrm{epi}(f + i_{F_u})^* = \bigcup_{u\in U} \overline{\mathrm{epi} f^* + K_{g_u}}.$$

$\bigcup_{u\in U} \mathrm{epi}(f + i_{F_u})^*$ est donc convexe ω^*-fermé et par conséquent, d'après le Corollaire 3.2, pour tout $x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in F}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle\} &= \max_{u\in U} \inf_{x\in F_u}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle\} \\
&= \inf_{x\in F_{\overline{u}}}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle\} \text{ (pour un certain } \overline{u} \in U) \\
&= \max_{\lambda\in S^+} \inf_{x\in X}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle + \lambda g_{\overline{u}}(x)\} \text{ (d'après le Lemme 3.4 et (3.8))} \\
&= \inf_{x\in X}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle + \overline{\lambda} g_{\overline{u}}(x)\} \text{ (pour un certain } \overline{\lambda} \in S^+) \\
&\leq \sup_{u\in U, \lambda\in S^+} \inf_{x\in X}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle + \lambda g_u(x)\}.
\end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 3.1 et la Proposition 3.4 à la fonction $f - \langle x^*, .\rangle$, on obtient :

$$\sup_{u\in U,\lambda\in S^+} \inf_{x\in X}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle + \lambda g_u(x)\} \leq \inf_{x\in F}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle\}.$$

D'où l'égalité

$$\inf_{x\in F}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle\} = \max_{\lambda\in S^+,u\in U} \inf_{x\in X}\{f(x) - \langle x^*, x\rangle + \lambda g_u(x)\}.$$

□

Remarque 3.2. Si pour tout $u \in U$, la fonction $g_u : X \longrightarrow Y$ est S-convexe par épigraphe et continue, alors pour tout $\lambda \in S^+$, la fonction λg_u est convexe et continue. Ainsi, à partir du théorème de Moreau-Rockafellar [54], on déduit que

$$\text{epi}(f + \lambda g_u)^* = \text{epi} f^* + \text{epi}(\lambda g_u)^*.$$

Dans ce cas, la condition

$$\forall u \in U, \quad \bigcup_{\lambda\in S^+} \text{epi}(f + \lambda g_u)^* \text{ est } \omega^*\text{-fermé}$$

devient

$$\forall u \in U, \quad \text{epi} f^* + K_{g_u} \text{ est } \omega^*\text{-fermé}.$$

La dualité forte robuste a été établie dans [43, Corollaire 3.1] dans le cas où les fonctions $g_u : X \longrightarrow Y$ sont S-convexes par épigraphe et continues sous la condition

$$\text{epi} f^* + \bigcup_{u\in U} K_{g_u} \text{ est convexe } \omega^*\text{-fermé}. \tag{3.9}$$

Proposition 3.7. *La condition*

$$\bigcup_{u\in U} \overline{\text{epi} f^* + K_{g_u}} \text{ est convexe } \omega^*\text{-fermé} \tag{3.10}$$

est plus faible que la condition (3.9).

***Preuve*.**
En effet, on a

$$\text{epi} f^* + \bigcup_{u\in U} K_{g_u} \subset \bigcup_{u\in U} \overline{(\text{epi} f^* + K_{g_u})} \subset \overline{\left(\text{epi} f^* + \bigcup_{u\in U} K_{g_u}\right)} \subset \overline{co}\left(\text{epi} f^* + \bigcup_{u\in U} K_{g_u}\right).$$

Si la condition (3.9) est vérifiée alors, les inclusions ci-dessus deviennent des égalités et en particulier, on a

$$\bigcup_{u\in U} \overline{(\text{epi} f^* + K_{g_u})} = \overline{co}\left(\text{epi} f^* + \bigcup_{u\in U} K_{g_u}\right);$$

ce qui permet de conclure. □

CHAPITRE 4

Optimisation quadratique à données incertaines

4.1 Introduction

Considérons le problème quadratique suivant :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & \frac{1}{2}x^T A x + a^T x \\ s.l.c \quad & \frac{1}{2}x^T B x + b^T x + \beta \leq 0, \\ & Hx = d, \end{aligned} \tag{QP}$$

où $A \in \mathbb{S}^n$, $a, b \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^m$, H est une matrice d'ordre $m \times n$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $(B, b) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^n$. Lorsque les données a et b sont tous nuls le problème (QP) est dit homogène et dans le cas contraire il est dit non homogène.

Les problèmes de la forme de (QP) apparaissent dans plusieurs domaines d'applications tels que la communication sans fil et le traitement du signal ([32], [46], [49], [59]). Le problème (QP) est largement étudié dans la littérature ([42],[50]) notamment en sa forme particulière appelée "trust-region problem" où il n'y a pas de contrainte d'égalité ([25], [38], [62], [63], [68]). Les caractéristiques du problème qui peuvent être étudiées sont entre autre le saut de dualité ([24], [62]), la relaxation de la programmation semi-définie ([52], [67]) et la caractérisation de la solution ([39]). Dans les applications concrètes, les données sont souvent incertaines dues à la modélisation ou aux erreurs de mesure. Par conséquent, comment développer une approche mathématique capable de traiter les incertitudes dans les données devient une question cruciale en optimisation mathématique. Plusieurs approches ont été développées telles que l'approche déterministe ([9],[10], [11], [12], [13], [14], [21], [36], [43], [57]) et l'approche stochastique ([58]).

Jeyakumar et Li ([37]) ont considéré le problème (QP) sans la contrainte d'égalité avec des incertitudes au niveau de la contrainte d'inégalité. Ils ont caractérisé dans ce cas les solutions de la contrepartie robuste.

Nous considérons le problème (QP) avec des données incertaines au niveau de la contrainte d'inégalité, dans le cas homogène puis dans le cas non homogène. Du faite de la présence de la contrainte d'égalité, les versions robustes du théorème des alternatives et du S-lemma établies par Jeyakumar et Li ne nous permettent pas d'établir la caractérisation des solutions optimales robustes. Nous établissons donc d'autres versions robustes plus générales de ces résultats. Dans chacun de ces cas, notre objectif est de donner une condition nécessaire et suffisante permettant de caractériser les solutions de la contrepartie robuste du problème.

4.2 Solution robuste d'un problème quadratique homogène à données incertaines

Nous considérons le problème d'optimisation quadratique homogène avec une contrainte d'inégalité soumise à une incertitude et une contrainte d'égalité :

$$\begin{array}{ll} & \text{minimiser} \;\; \frac{1}{2}x^T Ax \\ s.l.c & \begin{cases} \frac{1}{2}x^T Bx \leq \beta \\ \\ Hx = d, \end{cases} \end{array} \tag{UQP}$$

où $A \in \mathbb{S}^n, \beta \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^m$, $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathbb{S}^n$ est incertain et appartient à un ensemble incertain $U = \{B_0 + \mu B_1 \;:\; \mu \in [\mu_0, \mu_1]\}$, où $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R} \;:\; \mu_0 \leq \mu_1$ et $B_0, B_1 \in \mathbb{S}^n$. On définie la contrepartie robuste du problème (UQP) par :

$$\begin{array}{ll} & \text{minimiser} \;\; \frac{1}{2}x^T Ax \\ s.l.c & \begin{cases} \frac{1}{2}x^T Bx \leq \beta, \;\; \forall B \in U \\ \\ Hx = d. \end{cases} \end{array} \tag{RCQ}$$

Définition 4.1. x_0 est une solution optimale robuste du problème (UQP) si x_0 est une solution optimale du problème (RCQ).

Dans le but de caractériser les solutions robustes du problème (UQP) nous allons établir un résultat plus général du S-lemma à partir d'un théorème des alternatives robustes.

Théorème 4.1. *Soient $A, B_0, B_1 \in \mathbb{S}^n$, $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}\ :\ \mu_0 \leq \mu_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{R}^n$ et S_0 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Supposons que l'ensemble*

$$\{(x^T Ax, x^T(B_0 + \mu_0 B_1)x, x^T(B_0 + \mu_1 B_1)x)\ :\ x \in a_0 + S_0\} \tag{4.1}$$

est convexe.
Alors, exactement une seule des assertions suivantes est vérifiée :

(i) $\exists x \in a_0 + S_0\ :\ \frac{1}{2}x^T Ax < \alpha, \quad \frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x < \beta, \quad \forall\, \mu \in [\mu_0, \mu_1]$,

(ii)

$$\begin{cases} \exists(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\},\ \exists\, \mu \in [\mu_0, \mu_1] : \\ \forall x \in a_0 + S_0, \quad \lambda_0 \left(\frac{1}{2}x^T Ax - \alpha\right) + \lambda_1 \left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x - \beta\right) \geq 0. \end{cases}$$

***Preuve*.**
Montrons que $(ii) \Longrightarrow$ non(i).
Supposons que (ii) est vérifié. Si (i) est vérifié alors

$$\exists x \in a_0 + S_0,\ :\ \frac{1}{2}x^T Ax - \alpha < 0 \ \text{ et }\ \frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x - \beta < 0,\ \ \forall \mu \in [\mu_1, \mu_2].$$

Par suite, $\forall(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$,

$$\lambda_0(\frac{1}{2}x^T Ax - \alpha) + \lambda_1(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x - \beta) < 0.$$

Ce qui contredit (ii), donc non(i) est vérifiée.
Montrons maintenant que non$(i) \Longrightarrow (ii)$.
Pour cela, montrons que l'ensemble

$$S_U = \{(x^T Ax, \max_{B \in U} x^T Bx)\ :\ x \in a_0 + S_0\} + \mathrm{int}\mathbb{R}^2_+$$

est convexe, où $U = \{B_0 + \mu B_1\ :\ \mu \in [\mu_0, \mu_1]\}$.
Soient $(e_0, b_0), (e_1, b_1) \in S_U$, $\exists x_0, x_1 \in a_0 + S_0$, $\exists(\lambda_0, \gamma_0), (\lambda_1, \gamma_1) \in \mathrm{int}\mathbb{R}^2_+$ tels que

$$\begin{cases} x_0^T Ax_0 + \lambda_0 = e_0 \quad ; \quad \max_{B \in U} x_0^T Bx_0 + \gamma_0 = b_0 \\ x_1^T Ax_1 + \lambda_1 = e_1 \quad ; \quad \max_{B \in U} x_1^T Bx_1 + \gamma_1 = b_1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_0^T Ax_0 < e_0 \quad ; \quad \max_{B \in U} x_0^T Bx_0 < b_0 \\ x_1^T Ax_1 < e_1 \quad ; \quad \max_{B \in U} x_1^T Bx_1 < b_1 \end{cases} \tag{4.2}$$

Comme pour chaque x fixé dans a_0+S_0, l'application $\mu \longmapsto x^T(B_0+\mu B_1)x$ est affine alors elle atteint son maximum en un point extrémal de $[\mu_0,\mu_1]$ qui est μ_0 ou μ_1. D'où, pour tout $x \in a_0+S_0$,

$$\max_{B\in U} x^T Bx = \max\{x^T(B_0+\mu_0 B_1)x, x^T(B_0+\mu_1 B_1)x\}.$$

Par conséquent, le système (4.2) devient

$$\begin{cases} x_0^T A x_0 < e_0 \ ; \ x_0^T(B_0+\mu_0 B_1)x_0 < b_0 \ ; \ x_0^T(B_0+\mu_1 B_1)x_0 < b_0 \\ \\ x_1^T A x_1 < e_1 \ ; \ x_1^T(B_0+\mu_0 B_1)x_1 < b_1 \ ; \ x_1^T(B_0+\mu_1 B_1)x_1 < b_1, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} (e_0,b_0,b_0) \in \{\left(x^TAx, x^T(B_0+\mu_0B_1)x, x^T(B_0+\mu_1B_1)x\right) : x \in a_0+S_0\} + \mathrm{int}\mathbb{R}^3_+ \\ \\ (e_1,b_1,b_1) \in \{\left(x^TAx, x^T(B_0+\mu_0B_1)x, x^T(B_0+\mu_1B_1)x\right) : x \in a_0+S_0\} + \mathrm{int}\mathbb{R}^3_+. \end{cases}$$

Par hypothèse, l'ensemble

$$\{(x^TAx, x^T(B_0+\mu_0B_1)x, x^T(B_0+\mu_1B_1)x) : x \in a_0+S_0\} + \mathrm{int}\mathbb{R}^3_+$$

est convexe. Il en résulte que pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda(e_0,b_0,b_0)+(1-\lambda)(e_1,b_1,b_1) \in \{(x^TAx, x^T(B_0+\mu_0B_1)x, x^T(B_0+\mu_1B_1)x) : x \in a_0+S_0\}+\mathrm{int}\mathbb{R}^3_+.$$

D'où, il existe $x_2 \in a_0+S_0$ tel que :

$$\begin{cases} x_2^TAx_2 < \lambda e_0 + (1-\lambda)e_1 \\ \\ x_2^T(B_0+\mu_0B_1)x_2 < \lambda b_0 + (1-\lambda)b_1 \\ \\ x_2^T(B_0+\mu_1B_1)x_2 < \lambda b_0 + (1-\lambda)b_1, \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} x_2^TAx_2 < \lambda e_0 + (1-\lambda)e_1 \\ \\ \max\limits_{B\in U} x_2^T Bx_2 < \lambda b_0 + (1-\lambda)b_1. \end{cases}$$

Ainsi, $\lambda(e_0,b_0)+(1-\lambda)(e_1,b_1) \in S_U$, ce qui signifie que S_U est convexe.
Comme (i) n'est pas vérifiée, alors $(2\alpha,2\beta) \notin S_U$. En appliquant le théorème de séparation entre $\{(2\alpha,2\beta)\}$ et S_U, on a :

$$\exists(\lambda_0,\lambda_1) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\} \ : \ \forall x \in a_0+S_0, \ \ \lambda_0(x^TAx) + \lambda_1 \max_{B\in U} x^TBx \geq 2\alpha\lambda_0 + 2\beta\lambda_1.$$

Par suite,

$$\lambda_0(\frac{1}{2}x^TAx-\alpha)+\lambda_1(\frac{1}{2}\max_{B\in U}x^TBx-\beta)\geq 0.$$

Comme

$$\max_{B\in U}x^TBx=\max\{x^T(B_0+\mu_0B_1)x,x^T(B_0+\mu_1B_1)x\}$$

alors

$$\forall x\in a_0+S_0,\ \frac{1}{2}\max\{x^T(\lambda_0A+\lambda_1(B_0+\mu_0B_1))x,x^T(\lambda_0A+\lambda_1(B_0+\mu_1B_1))x\}-(\lambda_0\alpha+\lambda_1\beta)\geq 0.$$

Par conséquent, le système

$$\begin{cases} x\in a_0+S_0 \\ \frac{1}{2}x^T(\lambda_0A+\lambda_1(B_0+\mu_0B_1))x<\lambda_0\alpha+\lambda_1\beta \\ \frac{1}{2}x^T(\lambda_0A+\lambda_1(B_0+\mu_1B_1))x<\lambda_0\alpha+\lambda_1\beta \end{cases}$$

n'a pas de solution. D'après le Théorème 1.5, il existe $(\delta_0,\delta_1)\in\mathbb{R}^2_+\setminus\{(0,0)\}$ tel que

$$\begin{aligned}\forall x\in a_0+S_0,\quad &\delta_0\left(\frac{1}{2}x^T(\lambda_0A+\lambda_1(B_0+\mu_0B_1))x-\lambda_0\alpha+\lambda_1\beta\right)+\\ &\delta_1\left(\frac{1}{2}x^T(\lambda_0A+\lambda_1(B_0+\mu_1B_1))x-\lambda_0\alpha+\lambda_1\beta\right)\geq 0;\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\forall x\in a_0+S_0,\quad \bar\lambda_0\left(\frac{1}{2}x^TAx-\alpha\right)+\bar\lambda_1\left(\frac{1}{2}x^T(B_0+\mu B_1)x-\beta\right)\geq 0,$$

où

$$\bar\lambda_0=\lambda_0(\delta_0+\delta_1),\quad \bar\lambda_1=\lambda_1(\delta_0+\delta_1)\quad \text{et}\quad \mu=\frac{\delta_0\mu_0+\delta_1\mu_1}{\delta_0+\delta_1}.$$

Par construction, on a $(\bar\lambda_0,\bar\lambda_1)\in\mathbb{R}^2_+\setminus\{(0,0)\}$ et $\mu\in[\mu_0,\mu_1]$.
Finalement,

$$\begin{gathered}\exists(\bar\lambda_0,\bar\lambda_1)\in\mathbb{R}^2_+\setminus\{(0,0)\},\ \exists\,\mu\in[\mu_0,\mu_1]:\\ \forall x\in a_0+S_0,\quad \bar\lambda_0\left(\frac{1}{2}x^TAx-\alpha\right)+\bar\lambda_1\left(\frac{1}{2}x^T(B_0+\mu B_1)x-\beta\right)\geq 0.\end{gathered}$$

D'où (*ii*). □

On déduit du Théorème 4.1 une version robuste du S-lemma.

Corollaire 4.1. *Soient $A,B_0,B_1\in\mathbb{S}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $a_0\in\mathbb{R}^n$, S_0 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mu_0,\mu_1\in\mathbb{R}\ :\ \mu_0\leq\mu_1$. Supposons que l'ensemble*

$$\{(x^TAx,x^T(B_0+\mu_0B_1)x,x^T(B_0+\mu_1B_1)x)\ :\ x\in a_0+S_0\}$$

est convexe et qu'il existe $x_0\in a_0+S_0$ tel que $\frac{1}{2}x_0^T(B_0+\mu B_1)x_0-\beta<0$, $\forall\mu\in[\mu_0,\mu_1]$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad x \in a_0 + S_0, \;\; \frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x - \beta \leq 0, \;\; \forall \mu \in [\mu_0, \mu_1] \Longrightarrow \frac{1}{2}x^T Ax - \alpha \geq 0,$$

$$(ii) \;\; \exists \lambda \geq 0, \;\; \exists \mu \in [\mu_0, \mu_1] \;:\; \forall x \in a_0 + S_0, \; \frac{1}{2}x^T Ax - \alpha + \lambda\Big[\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x - \beta\Big] \geq 0.$$

Preuve.

Si (ii) est vérifiée, on a

$$\frac{1}{2}x^T Ax - \alpha \geq -\lambda\Big[\frac{1}{2}x^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)x - \beta\Big], \;\; \forall x \in a_0 + S_0.$$

Soit $x \in a_0 + S_0$ tel que

$$\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x - \beta \leq 0, \;\; \forall \mu \in [\mu_0, \mu_1],$$

en particulier, pour $\mu = \bar{\mu}$, on a

$$\frac{1}{2}x^T Ax - \alpha \geq -\lambda\Big[\frac{1}{2}x^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)x - \beta\Big] \geq 0$$

et (i) est vérifiée.

Il reste à montrer que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Supposons que (i) est vérifiée. Il n'existe donc pas de $x \in a_0 + S_0$ tel que

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x - \beta \leq 0, \;\; \forall \mu \in [\mu_0, \mu_1] \\ \\ \frac{1}{2}x^T Ax - \alpha < 0; \end{cases}$$

ce qui veut dire que le système

$$\begin{cases} x \in a_0 + S_0 \\ \\ \frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x - \beta < 0, \;\; \forall \mu \in [\mu_0, \mu_1] \\ \\ \frac{1}{2}x^T Ax - \alpha < 0, \end{cases}$$

n'a pas de solutions. D'après le Théorème 4.1, $\exists (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}, \;\; \exists \bar{\mu} \in [\mu_0, \mu_1] \;:$

$$\forall x \in a_0 + S_0, \;\; \lambda_0 \left(\frac{1}{2}x^T Ax - \alpha\right) + \lambda_1 \left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)x - \beta\right) \geq 0.$$

Si $\lambda_0 = 0$ alors $\lambda_0 \neq 0$ et on a

$$\forall x \in a_0 + S_0, \;\; \lambda_1 \left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)x - \beta\right) \geq 0,$$

en particulier, pour $x = x_0$,

$$\lambda_1 \left(\frac{1}{2}x_0^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)x_0 - \beta\right) \geq 0;$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$\frac{1}{2}x^T(B_0+\mu B_1)x-\beta<0,\ \forall\mu\in[\mu_0,\mu_1].$$

Par conséquent, $\lambda_0\neq 0$ et on en déduit que

$$\forall x\in a_0+S_0,\ \ \frac{1}{2}x^TAx-\alpha+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{2}x^T(B_0+\bar{\mu}B_1)x-\beta\right)\geq 0.$$

Il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}_+,\ \mu\in[\mu_0,\mu_1]$ tels que

$$\forall x\in a_0+S_0,\ \ \frac{1}{2}x^TAx-\alpha+\lambda\left(\frac{1}{2}x^T(B_0+\mu B_1)x-\beta\right)\geq 0, \text{d'où } (ii).$$

□

Nous allons maintenant caractériser les solutions optimales robustes du problème (UQP). Considérons $F=\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ \frac{1}{2}x^TBx\leq\beta,\ \forall B\in U \text{ et } Hx=d\}$.

Théorème 4.2. *Soient $a_0=\bar{x}\in F$, c'est-à-dire une solution admissible robuste de (UQP) et $S_0=\ker H$. Supposons que :*

$$\exists x_0\in a_0+S_0\ :\ \frac{1}{2}x_0^T(B_0+\mu B_1)x_0-\beta<0,\ \ \forall\mu\in[\mu_0,\mu_1]$$

et que l'ensemble

$$\{(x^TAx, x^T(B_0+\mu_0B_1)x, x^T(B_0+\mu_1B_1)x)\ :\ x\in a_0+S_0\} \textit{ est convexe.}$$

Alors, $\bar{x}$ est une solution optimale robuste du problème (UQP) si et seulement s'il existe $\lambda\geq 0,\ \bar{\mu}\in[\mu_0,\mu_1]$ tels que

$$\begin{cases}\lambda\Big[\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0+\bar{\mu}B_1)\bar{x}-\beta\Big]=0\\[2ex] \exists y\in\mathbb{R}^m\ :\ (A+\lambda(B_0+\bar{\mu}B_1))\bar{x}+H^Ty=0\\[2ex] z^T(A+\lambda(B_0+\bar{\mu}B_1))z\geq 0,\ \forall z\in\ker H.\end{cases}\tag{4.3}$$

***Preuve*.**
Soient $\bar{x}$ une solution optimale robuste du problème (UQP) et
$S_0=\ker H:=\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ Hx=0\}$. On a

$$x\in\bar{x}+S_0,\ \frac{1}{2}x^T(B_0+\mu B_1)x\leq\beta,\ \forall\mu\in[\mu_0,\mu_1]\Longrightarrow\frac{1}{2}x^TAx\geq\frac{1}{2}\bar{x}^TA\bar{x}.$$

Soit $\alpha=\frac{1}{2}\bar{x}^TA\bar{x}$. D'après le Corollaire 4.1

$$\exists\lambda\geq 0,\ \exists\bar{\mu}\in[\mu_0,\mu_1]\ :\ \forall x\in a_0+S_0,\ \frac{1}{2}x^TAx-\alpha+\lambda\Big[\frac{1}{2}x^T(B_0+\bar{\mu}B_1)x-\beta\Big]\geq 0;\tag{4.4}$$

en particulier, pour $x = \bar{x}$, on a

$$\lambda\Big[\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)\bar{x} - \beta\Big] \geq 0,$$

comme $\bar{x}$ vérifie les contraintes du problème (RCQ), on a aussi

$$\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)\bar{x} - \beta \leq 0.$$

On en déduit que

$$\lambda\Big[\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)\bar{x} - \beta\Big] = 0.$$

D'où, d'après (4.4), la fonction $h_{\bar{\mu}} : \bar{x} + S_0 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$h_{\bar{\mu}}(x) = \frac{1}{2}x^TAx - \alpha + \lambda\Big[x^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)x - \beta\Big],$$

atteint son minimum en $\bar{x}$ sur $\bar{x} + S_0$.

Comme $\bar{x} + S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Hx = d\}$, alors la condition nécessaire d'optimalité de $h_{\bar{\mu}}$ sur $\bar{x} + S_0$ est :

$$\begin{cases} \exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ \nabla h_{\bar{\mu}}(\bar{x}) + H^Ty = 0 & \text{(condition de 1}^{\text{er}}\text{ ordre)} \\ \\ z^T\nabla^2 h_{\bar{\mu}}(\bar{x})z \geq 0, \ \forall z \in \ker H & \text{(condition de 2}^{\text{nd}}\text{ ordre);} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ (A + \lambda(B_0 + \bar{\mu}B_1))\bar{x} + H^Ty = 0 \\ \\ z^T(A + \lambda(B_0 + \bar{\mu}B_1))z \geq 0, \ \forall z \in \ker H. \end{cases}$$

En récapitulatif, $\bar{x}$ vérifie : il existe $\lambda \geq 0, \ \bar{\mu} \in [\mu_0, \mu_1]$ tels que

$$\begin{cases} \lambda\Big[\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)\bar{x} - \beta\Big] = 0 \\ \\ \exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ (A + \lambda(B_0 + \bar{\mu}B_1))\bar{x} + H^Ty = 0 \\ \\ z^T(A + \lambda(B_0 + \bar{\mu}B_1))z \geq 0, \ \forall z \in \ker H. \end{cases}$$

Inversement, soit $\bar{x} \in F$ et supposons qu'il existe $\lambda \geq 0, \ \bar{\mu} \in [\mu_0, \mu_1]$ tels que (4.3) soit vérifié.

Soit la fonction $h_{\bar{\mu}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$h_{\bar{\mu}}(x) = \frac{1}{2}x^TAx - \alpha + \lambda\Big[x^T(B_0 + \bar{\mu}B_1)x - \beta\Big].$$

Pour tout $x \in F$, on a

$$h_{\bar{\mu}}(x) = h_{\bar{\mu}}(\bar{x}) + (x - \bar{x})^T\nabla h_{\bar{\mu}}(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T\nabla^2 h_{\bar{\mu}}(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

Comme $H(x-\bar{x}) = Hx - H\bar{x} = d - d = 0$ alors, d'après le système (4.3),

$$\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T \nabla^2 h_{\bar{\mu}}(\bar{x})(x-\bar{x}) = \frac{1}{2}(x-\bar{x})^T (A + \lambda(B_0 + \bar{\mu}B_1))(x-\bar{x}) \geq 0.$$

De plus, d'après toujours le système (4.3),

$$(x-\bar{x})^T \nabla h_{\bar{\mu}}(\bar{x}) = (x-\bar{x})^T((A+\lambda(B_0+\bar{\mu}B_1))\bar{x}) = (x-\bar{x})^T(-H^T y) = ((-y^T H)(x-\bar{x}))^T = 0.$$

Par suite, on a $h_{\bar{\mu}}(x) - h_{\bar{\mu}}(\bar{x}) \geq 0$, ce qui implique que

$$\frac{1}{2}x^T Ax + \lambda(\frac{1}{2}x^T(B_0+\bar{\mu}B_1)x - \beta) - \frac{1}{2}\bar{x}^T A\bar{x} - \lambda(\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0+\bar{\mu}B_1)\bar{x} - \beta) \geq 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2}x^T Ax \geq -\lambda(\frac{1}{2}x^T(B_0+\bar{\mu}B_1)x - \beta) + \frac{1}{2}\bar{x}^T A\bar{x} + \lambda(\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0+\bar{\mu}B_1)\bar{x} - \beta).$$

On a

$$\lambda(\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0+\bar{\mu}B_1)\bar{x} - \beta) = 0,$$

d'après le système (4.3) et comme x est une solution admissible robuste de (UQP) alors

$$\lambda(\frac{1}{2}x^T(B_0+\bar{\mu}B_1)x - \beta) \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}x^T Ax \geq \frac{1}{2}\bar{x}^T A\bar{x}$$

et donc, $\bar{x}$ est une solution optimale robuste de (UQP). □

Nous faisons remarquer que la caractérisation des solutions optimales robustes des problèmes quadratiques homogènes incertains donnés dans ([37]) est un cas particulier du Théorème 4.2.

Corollaire 4.2. *Supposons que $H := 0, d = 0$ et $\beta > 0$. De plus, supposons que l'ensemble*

$$\{(x^T Ax, x^T(B_0+\mu_0 B_1)x, x^T(B_0+\mu_1 B_1)x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n\} \text{ est convexe.}$$

Alors, $\bar{x}$ est une solution optimale robuste du problème (UQP) si et seulement s'il existe $\lambda \geq 0,\ \bar{\mu} \in [\mu_0, \mu_1]$ tels que

$$\begin{cases} \lambda\Big[\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0+\bar{\mu}B_1)\bar{x} - \beta\Big] = 0 \\ \\ (A+\lambda(B_0+\bar{\mu}B_1))\bar{x} = 0 \\ \\ (A+\lambda(B_0+\bar{\mu}B_1)) \succeq 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Preuve.

Il suffit de prendre $H = 0$, $d = 0$ et $\beta > 0$ dans le Théorème 4.2. □

4.3 Solutions robustes d'un problème quadratique non homogène à données incertaines

Nous considérons dans cette partie le problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & \frac{1}{2}x^T Ax + a^T x & (UNH) \\ s.l.c \quad & \frac{1}{2}x^T Bx + b^T x + \beta \leq 0, \\ & Hx = d, \end{aligned}$$

où $A \in \mathbb{S}^n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$,$\beta \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^m$, H est une matrice d'ordre $m \times n$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $(B, b) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^n$ est incertain et appartient à un ensemble incertain $V = V_0 \times V_1$ avec $V_0 = \{B_0 + \mu B_1 \ : \ \mu \in [\mu_0, \mu_1]\}, V_1 = \{b_0 + \delta b_1 \ : \ \delta \in [\delta_0, \delta_1]\}$ où $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R} \ : \ \mu_0 \leq \mu_1$, $\delta_0, \delta_1 \in \mathbb{R} \ : \ \delta_0 \leq \delta_1$, $B_0, B_1 \in \mathbb{S}^n$ et $b_0, b_1 \in \mathbb{R}^n$.

La contrepartie robuste du problème (UNH) est :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & \frac{1}{2}x^T Ax + a^T x & (RCNH) \\ s.l.c \quad & \frac{1}{2}x^T Bx + b^T x + \beta \leq 0, \quad \forall (B, b) \in V, \\ & Hx = d. \end{aligned}$$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{R}^n$, S_0 sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et

$$\Omega = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T Q_0 \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T Q_1 \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right) : (x, t) \in S_0 \times \mathbb{R} \right\},$$

un ensemble avec

$$P = \begin{pmatrix} A & \overline{a} \\ \overline{a}^T & 2\overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & (Aa_0 + a) \\ (Aa_0 + a)^T & 2(\frac{1}{2}a_0^T Aa_0 + a^T a_0 + \alpha) \end{pmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} B_0 + \mu_0 B_1 & (B_0 + \mu_0 B_1)a_0 + b_0 + \delta_0 b_1 \\ ((B_0 + \mu_0 B_1)a_0 + b_0 + \delta_0 b_1)^T & 2\left(\frac{1}{2}a_0^T (B_0 + \mu_0 B_1)a_0 + (b_0 + \delta_0 b_1)^T a_0 + \beta\right) \end{pmatrix}$$

et

$$Q_1 = \begin{pmatrix} B_0 + \mu_1 B_1 & (B_0 + \mu_1 B_1)a_0 + b_0 + \delta_1 b_1 \\ ((B_0 + \mu_1 B_1)a_0 + b_0 + \delta_1 b_1)^T & 2\left(\frac{1}{2}a_0^T (B_0 + \mu_1 B_1)a_0 + (b_0 + \delta_1 b_1)^T a_0 + \beta\right) \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.3. *Supposons que l'ensemble Ω est convexe. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\frac{1}{2}\max\limits_{B\in V_0} x^T Bx + \max\limits_{b\in V_1} b^T x + \beta \leq 0, \quad x \in a_0 + S_0 \Longrightarrow \dfrac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha \geq 0,$

(ii)

$$\exists(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}, \exists\mu \in [\mu_0, \mu_1], \exists\delta \in [\delta_0, \delta_1] \ : \ \forall x \in a_0 + S_0,$$

$$\lambda_0 \left(\frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha\right) + \lambda_1 \left(\frac{1}{2}x^T (B_0 + \mu B_1)x + (b_0 + \delta b_1)^T x + \beta\right) \geq 0.$$

Preuve.

Il est clair que $(ii) \Longrightarrow (i)$. Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

(i) entraine que le système suivant n'a pas de solution sur $a_0 + S_0$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha < 0 \\ \\ \frac{1}{2}\max\limits_{B\in V_0} x^T Bx + \max\limits_{b\in V_1} b^T x + \beta < 0 \\ \\ x \in a_0 + S_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

(4.6) est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha < 0 \\ \\ \frac{1}{2}x^T Bx + b^T x + \beta < 0, \quad \forall (B,b) \in V \\ \\ x \in a_0 + S_0. \end{cases}$$

De plus, le système (4.6) est équivalent au système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a_0 + x)^T A(a_0 + x) + a^T (a_0 + x) + \alpha < 0 \\ \\ \frac{1}{2}(a_0 + x)^T B(a_0 + x) + b^T (a_0 + x) + \beta < 0, \quad \forall (B,b) \in V \\ \\ x \in S_0, \end{cases} \tag{4.7}$$

en ce sens que si x', x sont respectivement solutions optimales de (4.7) et de (4.6) alors $x = a_0 + x'$. Par suite, le système (4.7) n'a pas de solutions si et seulement si le système (4.6) n'a pas de solution.

Une réécriture du système (4.7) donne le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T Ax + \overline{a}^T x + \overline{\alpha} < 0 \\ \\ \frac{1}{2}x^T Bx + \overline{b}^T x + \overline{\beta} < 0, \quad \forall (B,b) \in V \\ \\ x \in S_0 \\ \\ \text{avec } \ \overline{a} = Aa_0 + a \ \ , \ \ \overline{\alpha} = \frac{1}{2}a_0^T Aa_0 + a^T a_0 + \alpha, \\ \\ \qquad \ \ \overline{b} = Ba_0 + b \ \ , \ \ \overline{\beta} = \frac{1}{2}a_0^T Ba_0 + b^T a_0 + \beta. \end{cases} \tag{4.8}$$

Montrons que le système homogène suivant issu de l'homogénéisation du système (4.8) n'a pas de solutions sur $S_0 \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T Ax + t\overline{a}^T x + \overline{\alpha}t^2 < 0 \\ \\ \frac{1}{2}x^T Bx + t\overline{b}^T x + \overline{\beta}t^2 < 0, \quad \forall (B,b) \in V \\ \\ x \in S_0, t \in \mathbb{R} \\ \\ \text{avec } \ \overline{a} = Aa_0 + a \ \ , \ \ \overline{\alpha} = \frac{1}{2}a_0^T Aa_0 + a^T a_0 + \alpha, \\ \\ \qquad \ \ \overline{b} = Ba_0 + b \ \ , \ \ \overline{\beta} = \frac{1}{2}a_0^T Ba_0 + b^T a_0 + \beta. \end{cases} \tag{4.9}$$

Supposons qu'il existe $(x_0, t_0) \in S_0 \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_0^T Ax_0 + t_0\overline{a}^T x_0 + \overline{\alpha}t_0^2 < 0 \\ \\ \frac{1}{2}x_0^T Bx_0 + t_0\overline{b}^T x_0 + \overline{\beta}t_0^2 < 0, \quad \forall (B,b) \in V. \end{cases}$$

Si $t_0 \neq 0$, en divisant les inégalités par t_0^2, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{t_0}\right)^T A\left(\frac{x_0}{t_0}\right) + \overline{a}^T\left(\frac{x_0}{t_0}\right) + \overline{\alpha} < 0 \\ \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{t_0}\right)^T B\left(\frac{x_0}{t_0}\right) + \overline{b}^T\left(\frac{x_0}{t_0}\right) + \overline{\beta} < 0, \quad \forall (B,b) \in V, \end{cases}$$

comme $\frac{x_0}{t_0} \in S_0$, alors le système (4.8) a une solution, ce qui est une contradiction car le système (4.8) n'a pas de solutions sur S_0.

Si $t_0 = 0$, alors x_0 vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_0^T A x_0 < 0 \\ \\ \frac{1}{2}x_0^T B x_0 < 0, \quad \forall B \in V_0. \end{cases}$$

Posons $x_n = nx_0, \quad n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}x_n^T A x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}x_n^T A x_n + \overline{a}^T x_n + \overline{\alpha} = -\infty$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}x_n^T B x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}x_n^T B x_n + \overline{b}^T x_n + \overline{\beta} = -\infty, \quad \forall (B, b) \in V.$$

On observe que pour n assez grand, x_n est une solution du système (4.8), ce qui est une contradiction. On conclut que le système (4.9) n'a pas de solutions sur $S_0 \times \mathbb{R}$ c'est-à-dire que le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^T A x + t(Aa_0 + a)^T x + (\frac{1}{2}a_0^T A a_0 + a^T a_0 + \alpha)t^2 < 0 \\ \\ \frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x + t\big[(B_0 + \mu B_1)a_0 + (b_0 + \delta b_1)\big]^T x + (\frac{1}{2}a_0^T B a_0 + (b_0 + \delta b_1)^T a_0 + \beta)t^2 < 0, \\ \forall (\mu, \delta) \in [\mu_0, \mu_1] \times [\delta_0, \delta_1] \\ \\ x \in S_0, t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.10}$$

n'a pas de solutions sur $S_0 \times \mathbb{R}$.

Si $\mu_0 < \mu_1$, Soient :

$$D = \begin{pmatrix} A & \overline{a} \\ \overline{a}^T & 2\overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & (Aa_0 + a) \\ \\ (Aa_0 + a)^T & 2(\frac{1}{2}a_0^T A a_0 + a^T a_0 + \alpha) \end{pmatrix},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} B_0 & B_0 a_0 + b_0 + \frac{\delta_0\mu_1 - \delta_1\mu_0}{\mu_1 - \mu_0} b_1 \\ \\ \left(B_0 a_0 + b_0 + \frac{\delta_0\mu_1 - \delta_1\mu_0}{\mu_1 - \mu_0} b_0\right)^T & 2\left(\frac{1}{2}a_0^T B_0 a_0 + \left(b_0 + \frac{\delta_0\mu_1 - \delta_1\mu_0}{\mu_1 - \mu_0} b_1\right)^T a_0 + \beta\right) \end{pmatrix}$$

et

$$M_1 = \begin{pmatrix} B_1 & B_1 a_0 + \frac{\delta_1 - \delta_0}{\mu_1 - \mu_0} b_1 \\ \\ \left(B_1 a_0 + \frac{\delta_1 - \delta_0}{\mu_1 - \mu_0} b_1\right)^T & 2\left(\frac{1}{2}a_0^T B_1 a_0 + \frac{\delta_1 - \delta_0}{\mu_1 - \mu_0} b_1^T a_0\right). \end{pmatrix}$$

D'après (4.10), le système suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} < 0 \\ \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T (M_0 + \mu M_1) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} < 0, \quad \forall \mu \in [\mu_0, \mu_1], \end{cases}$$

n'a pas de solutions sur $S_0 \times \mathbb{R}$.
De plus, on a :

$$\left\{\left(\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}^T D\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}^T (M_0+\mu_0 M_1)\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}^T (M_0+\mu_1 M_1)\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}\right) : (x,t)\in S_0\times\mathbb{R}\right\} = \Omega$$

est convexe par hypothèse, donc d'après le Théorème 4.1, $\exists(\lambda_0,\lambda_1)\in\mathbb{R}^2_+\setminus\{(0,0)\}$,
$\exists\mu\in[\mu_0,\mu_1]\ :\ \forall(x,t)\in S_0\times\mathbb{R}$,

$$\lambda_0\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}^T D\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}\right)+\lambda_1\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}^T (M_0+\mu M_1)\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}\right)\geq 0. \tag{4.11}$$

On a

$$(4.11) \Longleftrightarrow \lambda_0\left(\frac{1}{2}x^TAx+t(Aa_0+a)^Tx+(\frac{1}{2}a_0^TAa_0+a^Ta_0+\alpha)t^2\right)+$$

$$\lambda_1\left(\frac{1}{2}x^T(B_0+\mu B_1)x+t[(B_0+\mu B_1)a_0+(b_0+\delta b_1)]^Tx+(\frac{1}{2}a_0^TBa_0+(b_0+\delta b_1)^Ta_0+\beta)t^2\right)\geq 0$$

avec

$$\delta=\frac{(\mu_1-\mu)\delta_0+(\mu-\mu_0)\delta_1}{(\mu_1-\mu_0)}\in[\delta_0,\delta_1].$$

Pour $t=1$, on a

$$\lambda_0\left(\frac{1}{2}x^TAx+(Aa_0+a)^Tx+(\frac{1}{2}a_0^TAa_0+a^Ta_0+\alpha)\right)+$$

$$\lambda_1\left(\frac{1}{2}x^T(B_0+\mu B_1)x+[(B_0+\mu B_1)a_0+(b_0+\delta b_1)]^Tx+(\frac{1}{2}a_0^TBa_0+(b_0+\delta b_1)^Ta_0+\beta)\right)\geq 0$$

ce qui est équivalent à

$$\lambda_0\left(\frac{1}{2}(x+a_0)^TA(x+a_0)+a^T(x+a_0)+\alpha\right)+$$

$$\lambda_1\left(\frac{1}{2}(x+a_0)^T(B_0+\mu B_1)(x+a_0)+(b_0+\delta b_1)^T(x+a_0)+\beta\right)\geq 0.$$

Par suite,

$$\exists(\lambda_0,\lambda_1)\in\mathbb{R}^2_+\setminus\{(0,0)\}\ ,\ \exists\mu\in[\mu_0,\mu_1],\exists\delta\in[\delta_0,\delta_1]:\forall x\in a_0+S_0,$$

$$\lambda_0\left(\frac{1}{2}x^TAx+a^Tx+\alpha\right)+\lambda_1\left(\frac{1}{2}x^T(B_0+\mu B_1)x+(b_0+\delta b_1)^Tx+\beta\right)\geq 0.$$

Si $\mu_0=\mu_1$, posons

$$D=\begin{pmatrix}A & (Aa_0+a)\\ (Aa_0+a)^T & 2(\frac{1}{2}a_0^TAa_0+a^Ta_0+\alpha)\end{pmatrix},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} B_0 + \mu_0 B_1 & (B_0 + \mu_0 B_1)a_0 + b_0 \\ ((B_0 + \mu_0 B_1)a_0 + b_0)^T & 2\left(\frac{1}{2}a_0^T(B_0 + \mu_0 B_1)a_0 + b_0^T a_0 + \beta\right) \end{pmatrix}$$

et

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & b_1 \\ b_1^T & 2b_1^T a_0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on a bien

$$D = P, \quad (M_0 + \delta_0 M_1) = Q_0, \quad (M_0 + \delta_1 M_1) = Q_1,$$

d'où l'ensemble

$$\left\{\left(\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T (M_0 + \delta_0 M_1)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T (M_0 + \delta_1 M_1)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\right) : (x,t) \in S_0 \times \mathbb{R}\right\}$$

est convexe par hypothèse.

Comme

$$(4.10) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} < 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T (M_0 + \delta M_1)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} < 0, \quad \forall \delta \in [\delta_0, \delta_1], \end{cases}$$

alors d'après le Théorème 4.1, $\exists(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\exists \delta \in [\delta_0, \delta_1]$: $\forall (x,t) \in S_0 \times \mathbb{R}$,

$$\lambda_0 \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\right) + \lambda_1 \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T (M_0 + \delta M_1)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\right) \geq 0.$$

Pour $t = 1$, on a

$$\lambda_0 \left(\frac{1}{2}x^T Ax + (Aa_0 + a)^T x + (\frac{1}{2}a_0^T Aa_0 + a^T a_0 + \alpha)\right) +$$

$$\lambda_1 \left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu_0 B_1)x + [(B_0 + \mu_0 B_1)a_0 + (b_0 + \delta b_1)]^T x + (\frac{1}{2}a_0^T Ba_0 + (b_0 + \delta b_1)^T a_0 + \beta)\right) \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\exists(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}, \exists \delta \in [\delta_0, \delta_1] \ : \ \forall x \in a_0 + S_0,$$

$$\lambda_0 \left(\frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha\right) + \lambda_1 \left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu_0 B_1)x + (b_0 + \delta b_1)^T x + \beta\right) \geq 0.$$

$\square$

Corollaire 4.3. *Supposons qu'il existe $x_0 \in a_0 + S_0$ tel que :*

$$\frac{1}{2}x_0^T Bx_0 + b^T x_0 + \beta < 0, \quad \forall (B, b) \in V, \tag{4.12}$$

et que l'ensemble Ω est convexe.
Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\frac{1}{2}\max_{B\in V_0} x^T Bx + \max_{b\in V_1} b^T x + \beta \leq 0, \quad x \in a_0 + S_0 \Longrightarrow \dfrac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha \geq 0,$

(ii)

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \exists \mu \in [\mu_0, \mu_1], \exists \delta \in [\delta_0, \delta_1] \ : \ \forall x \in a_0 + S_0,$$

$$\left(\frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}x^T (B_0 + \mu B_1)x + (b_0 + \delta b_1)^T x + \beta\right) \geq 0.$$

***Preuve*.**
Il suffit de montrer que $(i) \Longrightarrow (ii)$ car il est clair que $(ii) \Longrightarrow (i)$. Supposons que (i) est vérifié.
D'après le Théorème 4.3, on a

$$\exists (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}, \exists \mu \in [\mu_0, \mu_1], \exists \delta \in [\delta_0, \delta_1] \ : \ \forall x \in a_0 + S_0,$$

$$\lambda_0\left(\frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha\right) + \lambda_1\left(\frac{1}{2}x^T (B_0 + \mu B_1)x + (b_0 + \delta b_1)^T x + \beta\right) \geq 0.$$

Si $\lambda_0 = 0$, alors $\lambda_1\left(\frac{1}{2}x_0^T (B_0 + \mu B_1)x_0 + (b_0 + \delta b_1)^T x_0 + \beta\right) \geq 0$ et d'après (4.12), $\lambda_1 = 0$, ce qui contredit le fait que $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0)$. Par conséquent $\lambda_0 \neq 0$ et il en résulte que

$$\left(\frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha\right) + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{2}x^T (B_0 + \mu B_1)x + (b_0 + \delta b_1)^T x + \beta\right) \geq 0.$$

□

Nous allons maintenant caractériser les solutions optimales robustes du problème (UNH).

Théorème 4.4. *Soient $\bar{x}$ une solution admissible robuste du problème (UNH). Supposons que $\alpha = -(\frac{1}{2}\bar{x}^T A\bar{x} + a^T \bar{x})$, $\quad a_0 = \bar{x}$, $\quad S_0 = \ker(H)$ et qu'il existe $x_0 \in a_0 + S_0$ tel que*

$$\frac{1}{2}x_0^T Bx_0 + b^T x_0 + \beta < 0, \quad \forall (B, b) \in V, \tag{4.13}$$

et que l'ensemble

$$\left\{\left(\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T Q_0 \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}^T Q_1 \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\right) : (x, t) \in S_0 \times \mathbb{R}\right\}$$

est convexe. Alors, $\bar{x}$ est une solution optimale robuste du problème (UNH) si et seulement si : $\exists\lambda \in \mathbb{R}_+, \exists\mu \in [\mu_0, \mu_1], \exists\delta \in [\delta_0, \delta_1]$:

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \mu B_1)\bar{x} + (b_0 + \delta b_1)^T\bar{x} + \beta\right) = 0 \\ \exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ (A + \lambda(B_0 + \mu B_1))\bar{x} + a + \lambda(b_0 + \delta b_1) + H^T y = 0 \\ z^T(A + \lambda(B_0 + \mu B_1))z \geq 0, \quad si\ Hz = 0. \end{cases}$$

Preuve.
Soient $\bar{x}$ une solution optimale robuste du problème (UNH). On a

$$\frac{1}{2}\max_{B\in V_0} x^T Bx + \max_{b\in V_1} b^T x + \beta \leq 0, \quad x \in \bar{x} + S_0 \Longrightarrow \frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha \geq 0.$$

D'après le Corollaire 4.3,

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}_+, \exists\mu \in [\mu_0, \mu_1], \exists\delta \in [\delta_0, \delta_1], \quad \forall x \in \bar{x} + S_0,$$

$$\left(\frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x + (b_0 + \delta b_1)^T x + \beta\right) \geq 0.$$

En particulier, pour $x = \bar{x}$, on a

$$\lambda\left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)\bar{x} + (b_0 + \delta b_1)^T\bar{x} + \beta\right) \geq 0.$$

Comme $\bar{x}$ vérifie les contraintes du problème $(RCNH)$, on a aussi

$$\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \mu B_1)\bar{x} + (b_0 + \delta b_1)^T\bar{x} + \beta \leq 0.$$

On en déduit que

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \mu B_1)\bar{x} + (b_0 + \delta b_1)^T\bar{x} + \beta\right) = 0.$$

Par conséquent, la fonction h_μ définie par

$$h_\mu(x) = \left(\frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x + (b_0 + \delta b_1)^T x + \beta\right),$$

atteint son minimum en $\bar{x}$ sur $\bar{x} + S_0$.
Comme $\bar{x} + S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Hx = d\}$, alors la condition nécessaire d'optimalité de h_μ sur $\bar{x} + S_0$ est :

$$\begin{cases} \exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ \nabla h_\mu(\bar{x}) + H^T y = 0 \\ z^T\nabla^2 h_\mu(\bar{x})z \geq 0, \quad \text{si } Hz = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ (A + \lambda(B_0 + \mu B_1))\bar{x} + a + \lambda(b_0 + \delta b_1) + H^T y = 0 \\ \\ z^T(A + \lambda(B_0 + \mu B_1))z \geq 0, \quad \text{si } z \in \ker H. \end{cases}$$

On déduit que $\bar{x}$ vérifie :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \exists \mu \in [\mu_0, \mu_1], \exists \delta \in [\delta_0, \delta_1]$:

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \mu B_1)\bar{x} + (b_0 + \delta b_1)^T\bar{x} + \beta\right) = 0 \\ \\ \exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ (A + \lambda(B_0 + \mu B_1))\bar{x} + a + \lambda(b_0 + \delta b_1) + H^T y = 0 \\ \\ z^T(A + \lambda(B_0 + \mu B_1))z \geq 0, \quad \text{si } z \in \ker H. \end{cases}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}_+, \mu \in [\mu_0, \mu_1], \delta \in [\delta_0, \delta_1]$, tels que

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \mu B_1)\bar{x} + (b_0 + \delta b_1)^T\bar{x} + \beta\right) = 0 \\ \\ \exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ (A + \lambda(B_0 + \mu B_1))\bar{x} + a + \lambda(b_0 + \delta b_1) + H^T y = 0 \\ \\ z^T(A + \lambda(B_0 + \mu B_1))z \geq 0, \quad \text{si } z \in \ker H. \end{cases} \tag{4.14}$$

Soit

$$h_\mu(x) = \left(\frac{1}{2}x^T A x + a^T x\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x + (b_0 + \delta b_1)^T x + \beta\right)$$

et une solution admissible robuste x de (UNH). On a

$$h_\mu(x) = h_\mu(\bar{x}) + (x - \bar{x})^T \nabla h_\mu(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \nabla^2 h_\mu(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

Comme $H(x - \bar{x}) = Hx - H\bar{x} = 0$ alors, d'après le système (4.14),

$$\frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \nabla^2 h_\mu(\bar{x})(x - \bar{x}) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T(A + \lambda(B_0 + \mu B_1))(x - \bar{x}) \geq 0.$$

De plus,

$$(x-\bar{x})^T \nabla h_\mu(\bar{x}) = (x-\bar{x})^T((A+\lambda(B_0+\mu B_1))\bar{x}+a^T+(b_0+\delta b_1)^T) = (x-\bar{x})^T(-H^T y) = ((y^T H)(x-\bar{x}))^T = 0.$$

Par suite, on a $h_\mu(x) - h_\mu(\bar{x}) \geq 0$, ce qui implique que

$$\frac{1}{2}x^T A x + a^T x \geq \frac{1}{2}\bar{x}^T A\bar{x} + a^T\bar{x} + \lambda\left(\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0 + \mu B_1)\bar{x} + (b_0 + \delta b_1)^T\bar{x} + \beta\right) - \lambda\left(\frac{1}{2}x^T(B_0 + \mu B_1)x + (b_0 + \delta b_1)^T x + \beta\right).$$

On a $\lambda\left(\frac{1}{2}\bar{x}^T(B_0+\mu B_1)\bar{x}+(b_0+\delta b_1)^T\bar{x}+\beta\right)=0$, d'après le système (4.14) et comme x est une solution admissible robuste de (UNH) alors

$$\lambda\left(\frac{1}{2}x^T(B_0+\mu B_1)x+(b_0+\delta b_1)^T x+\beta\right)\leq 0.$$

Par conséquent, $\frac{1}{2}x^TAx+a^Tx\geq\frac{1}{2}\bar{x}^TA\bar{x}+a^T\bar{x}$ et donc $\bar{x}$ est une solution optimale robuste de (UNH). $\square$

Conclusion et perspectives

Conclusion

L'objet de cette thèse était d'étudier la stabilité d'un problème d'optimisation paramétrique, la dualité forte robuste pour un problème convexe conique à données incertaines et de caractériser les solutions optimales robustes d'un problème quadratique à données incertaines. La stabilité assure le saut de dualité nul entre la valeur du problème paramétrique et son dual paramétrique. La dualité forte robuste quant à elle annule le saut de dualité entre la valeur robuste et la valeur du dual "optimiste".

Nous avons commencé par rappeler les notions nécessaires à l'étude de ces problèmes d'optimisation. En utilisant des techniques de dualité et des conditions d'intériorité, nous avons établi un résultat très général de stabilité (Théorème 2.1) dans les e.v.t pour un problème d'optimisation convexe paramétrique. Par le biais de la topologie induite, ce résultat reste vrai en réduisant l'espace de travail (Théorème 2.2). Ces résultats restent vrais dans le cas des e.v.n avec la fonction objectif perturbée par une forme linéaire continue (Théorème 2.3, Théorème 2.4). En utilisant des critères de fermetures, nous obtenons le Théorème 2.5 dans les e.v.t.l.c, qui généralise un résultat de Boţ obtenu dans les e.v.t.H.l.c ([15]). Par un choix judicieux des espaces, nous avons pu établir les versions duales de ces résultats de stabilité. Un cas particulier d'optimisation convexe paramétrique est la minimisation du maximum de deux fonctions convexes. Ce problème a fait l'objet d'étude par une approche de la conjugaison par tranches, en particulier un résultat de stabilité a été énoncé dans [65, Théorème 7.1]. En utilisant nos résultats de stabilité ci-dessus, on obtient une généralisation de ce résultat (Théorème 2.11).

On considère un problème d'optimisation convexe conique à données incertaines, on introduit la notion de pire valeur et on rappelle la notion bien connue de la valeur robuste. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'égalité entre la valeur robuste et la pire valeur, avec exactitude de la pire valeur (Corollaire 3.1). Nous avons ensuite rappelé la notion de dual "optimiste" et nous avons remarqué que sa valeur est toujours inférieure à la pire valeur. On établit d'une part que si la propriété de dualité forte robuste est vérifiée alors on a l'égalité entre la valeur robuste et la pire valeur (Proposition 3.5), avec exactitude de la pire valeur. D'autre part, on montre que si la pire valeur est égale à la valeur robuste, avec exactitude de la pire valeur, on a la propriété de dualité forte robuste moyennant une hypothèse (Théorème 3.2). Nous avons ensuite établi la dualité forte stable robuste (Corollaire 3.3). Notons que Jeyakumar et collaborateurs ([43]) ont établi la propriété de dualité forte pour ce problème avec des données continues, que nous avons réussi à affaiblir par un critère de fermeture des épigraphes.

L'étude des problèmes d'optimisation quadratique que nous avons développée dans ce mémoire est une généralisation des travaux de Jeyakumar et Li ([37]). Ces auteurs ont obtenu dans un cas particulier, une caractérisation des solutions robustes de ces problèmes via des versions robustes du S-lemma et du théorème des alternatives. Nous avons établi des versions robustes plus générales du S-lemma (Corollaire 4.1) et du théorème des alternatives (Théorème 4.1). Nous avons, à partir de ces résultats, donné une caractérisation des solutions optimales robustes du problème quadratique homogène à données incertaines, qui généralise celles de Jeyakumar et Li ([37]). Par une homogénéisation, dans le cas non homogène nous avons obtenu également une caractérisation des solutions optimales robustes du problème quadratique non homogène à données incertaines.

Perspectives

L'étude des problèmes paramétriques ouvre la voie à une perspective qui est d'étudier les problèmes paramétriques sous incertitudes. Il s'agit des problèmes de la forme :

$$\inf \; F_u(x, y)\,, \; \text{s.l.c } x \in X, \qquad (P_y)$$

où X et Y sont deux espaces vectoriels topologiques, y fixé dans Y, U est un ensemble incertain non vide et pour tout $u \in U$, la fonction $F_u : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe.
On associe au problème (P_y) sa contrepartie robuste,

$$\inf \sup_{u \in U} F_u(x, y), \quad \text{s.l.c } x \in X \qquad (RP_y)$$

et son dual optimiste

$$\sup\{\langle y^*, y\rangle - F_u^*(0, y^*)\}, \quad \text{s.l.c } u \in U, y^* \in Y^*. \qquad (ODP_y)$$

La dualité forte robuste que nous avons établi pour les problèmes convexes coniques à données incertaines est intéressante du faite que le dual optimiste nous donne une information sur la valeur robuste du problème initial. Par contre la dualité forte robuste ne nous donne aucune information sur les solutions optimales robustes. Il serait donc intéressant d'établir une relation donnant une information sur les solutions optimales robustes. En perspective, la question de la dualité totale robuste du problème incertain, c'est-à-dire la situation garantissant l'égalité entre la valeur du dual optimiste et la valeur robuste avec les deux valeurs atteintes reste posée.
Il est bien connu que le rayon de stabilité est un indicateur de la robustesse. Ainsi une perspective intéressante serait l'approche du problème quadratique incertain par la notion de rayon de stabilité.

Bibliographie

[1] H. Attouch and M. Brézis. Duality for the sum of convex functions in general banach spaces. *Aspects of Mathematics and its applications, Elsevier Science Publisher B. V.*, pages 125–133, 1986.

[2] D. Azé. Duality for the sum of convex functions in general normed spaces. *Birkhfäser Verlag, Basel, 62*, pages 554–561, 1994.

[3] A. Baccari and A. Trad. On the classical necessary second-order optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints. *SIAM J. Optim. 15*, pages 394–408, 2005.

[4] V. Barbu and T. Precupanu. *Convexity and Optimization in Banach Spaces*. Springer Monographs in Mathematics, 2012.

[5] M. Barro, A. Ouédraogo and S. Traoré. Duality for the sup of two convex functions. accepted for publication in AFrican Mathematics Annals (AFMA).

[6] M. Barro, A. Ouédraogo and S. Traoré. On uncertain conical convex optimization problems. accepted for publication in Pacific Journal of Optimization (PJO).

[7] A. Beck and A. Ben-Tal. Duality in robust optimization : primal worst equals dual best. *Oper. Res. Lett. 37*, pages 1–6, 2009.

[8] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust convex optimization. *Math. Oper. Res. 23*, 1998.

[9] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust optimization - methodology and applications. *Math. Program.*, feb 2002.

[10] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. A selected topics in robust convex optimization. *Math. Program. B 112*, pages 125–158, 2008.

[11] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui and A. Nemirovski. Robust optimization. *Princeton University Press, Princeton*, 2009.

[12] A. Ben-Tal, S. Boyd and A. Nemirovski. Extending scope of robust optimization : comprehensive robust counterparts of uncertain problems. *Math. Program. 107(12)*, pages 63–89, 2006.

[13] D. Bertsimas and D. Brown. Constructing uncertainty sets for robust linear optimization. *Oper. Res. 57*, pages 1483–1495, 2009.

[14] D. Bertsimas, D. Pachamanova and M. Sim. Robust linear optimization under general norms. *Oper. Res. Lett. 32*, pages 510–516, 2004.

[15] R. I. Boţ. *Conjugate duality in convex optimization*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[16] R. I. Boţ, V. Jeyakumar and G.Y. Li. Robust duality in parametric convex optimization. *Set-Valued Var. Anal. 21*, pages 177–189, 2013.

[17] R.I. Boţ and G. Wanka. A weaker regularity condition for subdifferential calculus and fenchel duality in infinite dimensional spaces. *Nonlinear Anal. 64*, pages 2787–2804, 2006.

[18] F. Bonnans. *Optimisation continue, cours et problèmes corrigés*. Dunod, Paris, 2006.

[19] J. M. Borwein, V. Jeyakumar, A. Lewis and Wolkowicz. Constrained approximation via convex programming. *preprint, University of Waterloo, Waterloo, Ontario*, 1988.

[20] N. Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiques*. Masson, Paris, 1981.

[21] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

[22] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[23] R. S. Burachik and V. Jeyakumar. A dual condition for the convex subdifferential sum formula with applications. *J. Convex Anal. 12*, pages 279–290, 2005.

[24] X. Chen and Y. X. Yuan. A note on quadratic forms. *Math. Program., 86*, pages 187–197, 1999.

[25] T. F. Coleman, J. Liu and W Yuan. A new trust-region algorithm for equality constrained optimization. *Computational Optimization and Applications, 21, n° 2*, pages 177–199, 2002.

[26] C. Combari, M. Laghdir and L. Thibault. Sous-différentiels de fonctions convexes composées. *Ann. Math. Qué. 18*, pages 119–148, 1994.

[27] K. Deimling. Nonlinear functional analysis. *Springer-Verlag, Berlin*, 1985.

[28] L. L. Dines. On the mapping of quadratic forms. *Bull. Amer. Math. Soc., 47*, pages 494–498, 1941.

[29] N. Dinh, G. Vallet and M. Volle. Functional inequalities and theorems of the alternative involving composite functions. *J. Global Optim. 59*, pages 837–863, 2014.

[30] I. Ekeland and R. Temam. Convex analysis and variational problems. translated from the french. *Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York Vol. 1.*, 1976.

[31] I. Ekeland and R. Téman. *Analyse convexe et Problèmes variationels*. Bordas, 1974.

[32] C.A. Floudas and V. Visweswaran. "quadratic optimization," in handbook of global optimization. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, Nonconvex Optim. Appl, 2*, pages 217–269, 1995.

[33] M. A. Goberna and M. A. López. Linear semi-infinite optimization. *Jonh Wiley and Sons Ltd, Chichester*, 1998.

[34] R. B. Holmes. Geometric functional analysis. *Springer-Verlag, Berlin*, 1975.

[35] V. Jeyakumar. Farkas lemma : Generalizations. *Encylopedia of optimization, Kluwer Boston, USA, 2*, pages 87–91, 2000.

[36] V. Jeyakumar and G. Li. Strong duality in robust convex programming : complete characterizations. *SIAM J. Optim. 20*, pages 3384–3407, 2010.

[37] V. Jeyakumar and G. Y. Li. Robust solutions of quadratic optimization over single quadratic constraint under interval uncertainty. *J Glob. Optim 55*, pages 209–226, 2013.

[38] V. Jeyakumar, A.M. Rubinov and Z.Y Wu. Non-convex quadratic minimization problems with quadratic constraints : Global optimality conditions. *Math. Program. Ser. A 110*, pages 521–541, 2007.

[39] V. Jeyakumar, G. M. Lee and G. Y. Li. Alternative theorems for quadratic inequality systems and global quadratic optimization. *SIAM J. Optim., 20(2)*, pages 983–1001, 2009.

[40] J. L. Joly and P. J. Laurent. Stability and duality in convex minimization problem. *Révue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, Tome 5, n°2*, pages 3–42, 1971.

[41] M. Laghdir and M. Volle. A general formula for the horizon function of convex composite function. *Arch. Math. 3*, pages 291–302, 1999.

[42] G. Li and Y. Wang. Global optimality conditions for nonlinear programming problems with linear equality constraints. *Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics*, 2014.

[43] G. Y. Li, V. Jeyakumar and G.M. Lee. Robust conjugate duality for convex optimization under uncertainty with application to data classification. *Nonlinear Anal. 74*, pages 2327–2341, 2011.

[44] D. T. Luc. Theory of vector optimization. *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, 1989.

[45] M. Aït Mansour, A. Metrane and M. Théra. Lower semicontinuous regularization for vector-valued mappings. *J. Global Optim. 35*, pages 283–309, 2006.

[46] E. Matskani, N. D. Sidiropoulos and Z.-Q. Luo. Convex approximation techniques for joint multiuser downlink beamforming and admission control. *IEEE Trans. Wirel. Commun. 7*, pages 2682–2693, 2008.

[47] J.J. Moreau. *Fonctionnelles convexes*. Séminaire Jean Leray, n˚2, (1966-1967), 1-108.

[48] M. Moussaoui and M. Volle. Quasicontinuity and united functions in convex duality theory. *Communication on Applied nonlinear analysis 4, n˚4*, pages 73–89, 1997.

[49] P. Pardalos and H. Romeijn. Handbook in global optimization. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2*, 2002.

[50] J. M. Peng and Y.-X. Yuan. Optimality conditions for the minimization of a quadratic with two quadratic constraints. *SIAM Journal on Optimization, vol. 7, n˚ 3*, pages 579–594, 1997.

[51] J. P. Penot and M. Théra. Semi-continuous mappings in general topology. *Arch. Math. 38*, pages 158–166, 1982.

[52] I. Pólik and T. Terlaky. A survey of the s-lemma. *SIAM Rev., 49*, pages 371–418, 2007.

[53] B.T Polyak. J. optim. theory appl. 99. *J. Optim. Theory Appl.*, pages 563–583, 1998.

[54] R. T. Rockafellar. Extension of fenchel's duality for convex functions. *Duke Math. J. 33*, pages 81–90, 1966.

[55] R. T Rockafellar. *Conjugate Duality and optimization*. SIAM, 1974.

[56] A. Seeger and M. Volle. On a convolution operation obtained by adding level sets : classical and new results. *Operation Research bf 29, n˚ 2*, pages 131–154, 1995.

[57] A. Shapiro. Stochastic programming approach to optimization under uncertainty. *Math. Program. Ser. B 112*, pages 183–220, 2008.

[58] A. Shapiro, D. Dentcheva and A. Ruszczynski. Lectures on stochastic programming : Modeling and theory. *SIAM, Philadelphia*, 2009.

[59] N. D. Sidiropoulos, T.N Davidson. and Z. Q. Luo. Transmit beamforming for physical layer multicasting. *IEEE Trans. Signal Process. 54*, pages 2239–2251, 2006.

[60] M. Sion. On general minmax theorem. *Pacific Journal of Mathematics, 8, n° 1*, 1958.

[61] A. L. Soyster. Convex programming with set-inclusive constraints and applications in exact linear programming. *Oper. Res 21*, pages 1154–1157, 1973.

[62] R. J. Stern and H. Wolkowicz. Indefinite trust region subproblems and nonsymmetric eigenvalue perturbations. *SIAM J. Optim. 5*, pages 286–313, 1995.

[63] W. Sun and Y. X. Yuan. A conic trust-region method for nonlinearly constrained optimization. *Annals of Operations Research, 103*, pages 175–191, 2001.

[64] S. Traoré and M. Volle. Subdifferentiability, lower semicontinuity and exactness of the level sum of two convex functions on general hausdorff locally convex spaces. *Recent Developments in Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 429*, pages 346–356, 1995.

[65] S. Traoré and M. Volle. On the level sum of two convex functions on banach spaces. *Journal of Convex Analysis 3, n° 1*, pages 141–151, 1996.

[66] H. Tuy. *Convex analysis and global optimization*. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[67] Y. Y. Ye and S. Z. Zhang. New results of quadratic minimization. *SIAM J. Optim. 14*, pages 245–267, 2003.

[68] Y. X. Yuan. On a subproblem of trust region algorithms for constrained optimization. *Math. Program. 47*, pages 53–63, 1990.

[69] C. Zălinescu. *Analysis in general vector spaces*. World Scientific Publishing Co. late. Ltd., 2002.