

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT  
SECONDAIRE ET SUPERIEUR DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET  
DE L'INNOVATION

BURKINA – FASO  
*Unité–Progrès –Justice*

SECRETARIAT GENERAL

Année universitaire : 2014-2015

UNIVERSITE POLYTECHNIQUE  
DE BOBO-DIOULASSO (UPB)



UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE  
EN SCIENCES ET TECHNIQUES

01 BP 1091 Bobo-Dioulasso 01

Tél. : (226) 20 98-51-87 Fax : (226) 20 98-25-77

Ecole Doctorale Sciences et Techniques

Laboratoire de Mathématiques et Informatique  
(L.A.M.I)

## MÉMOIRE DU DIPLOME D'ÉTUDES APPROFONDIES (D.E.A) DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Option : Analyse Numérique

Spécialité : Modélisation et Calculs Scientifiques

**Thème:**  
**MODELISATION MATHÉMATIQUE ET CONTRÔLE  
OPTIMAL DE LA DYNAMIQUE DE TRANSMISSION DU  
PALUDISME**

**Présenté par Ousmane KOUTOU**

**Soutenu publiquement le 02/Février/2017 devant le jury composé de :**

**Président :** Monsieur Ouateni DIALLO, Professeur Titulaire, USTTB, Mali

**Examineur:** Monsieur Sado TRAORE, Maître de Conférences, UPB

**Examineur :** Monsieur Jean De Dieu ZABSONRE, Maître de Conférences, UPB

**Directeur de mémoire :** Monsieur Ouateni DIALLO, Professeur Titulaire, USTTB, Mali

**Co-directeur de mémoire :** Monsieur Boureima SANGARE, Maître-Assistant, UPB

MODELISATION MATHEMATIQUE ET  
CONTROLE OPTIMAL DE LA DYNAMIQUE DE  
TRANSMISSION DU PALUDISME

Ousmane KOUTOU

23 février 2017

# Dédicaces et remerciements

*Lorsque le voyageur comprend l'objectif de son voyage, et n'a que pour vision la destination, les embuches du trajet ne lui disent plus rien.*

Je dédie cette œuvre à mon père et à ma mère. Ces deux personnes magnifiques qui ont accepté se priver de tout pour rendre possible le rêve de leur fils, d'être le meilleur qu'il est en capacité de devenir. Merci à vous d'avoir osé espérer un avenir pour moi en m'inscrivant à l'école, en y mettant tous les moyens en œuvre avant que ma conscience ne puisse prendre la relève.

Je n'aurais jamais de mots pour dire mes reconnaissances :

- au Professeur **Ouateni DIALLO**, vice-président de l'Université des Sciences, des Techniques et des Technologies de Bamako (USTTB), directeur de ce présent mémoire, dont l'histoire, le parcours et la personnalité constituent pour moi une boussole. Merci pour tout, merci pour ce risque pris avec l'inconnu.
- au Docteur **SANGARE**, co-directeur de mon mémoire pour cette grande disponibilité, cette grande écoute et cette assistance sans lesquelles mes travaux n'auraient jamais abouti. Merci pour tout, merci pour cette graine d'espérance que vous avez semé en moi et que vous n'avez jamais cessé d'arroser par vos différents soutiens, encadrements et conseils. J'ai été particulièrement touché par la grande sympathie, l'humilité et la qualité humaine du Docteur **SANGARE** qui a su créer et entretenir entre ses étudiants, une vivante relation interdépendante qui n'a conduit nullement à une perte de personnalité malgré nos différences. Merci à vous pour cette sortie d'étude sur Orodara malgré les exigences de votre emploi de temps. Elle a été pour nous si motivante et si enseignante.
- au Professeur **Sado TRAORE**, directeur de l'UFR/ST pour sa grande sagesse de leader.
- aux membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être dans ce jury. Mes remerciements vont également à l'égard des thésards **TRAORE Bakary**, **OUEDRAOGO Wendkouni**, pour nos échanges enrichissants et productifs au cours de la réalisation du présent mémoire. Je remercie mon camarade **OUEDRAOGO Hamidou** pour cette communauté de destin au cours de la rédaction de nos mémoires respectifs ; à mon ami et coach **Bienvenu** pour ses multiples entretiens qui m'ont été si motivants.

Je dédie enfin cette œuvre à tous mes enseignants d'ici et d'ailleurs, mes frères membres du laboratoire, en particulier à mon frère, ami et compagnon d'espoir **OUEDRAOGO Harouna** dont la détermination m'a toujours inspiré ; à mes élèves et à tous ceux qui, à l'ombre comme à la lumière m'ont soutenu. *Merci pour tout.*

# Résumé

Dans la dynamique de contrôle du paludisme, à travers la recherche de solutions efficaces mais dont le coût serait aussi supportable aux politiques de santé publique, plusieurs modèles mathématiques ont été proposés pour mieux apprécier la dynamique de transmission de la maladie.

A l'étude de tous ces modèles, on constate que la dynamique de la croissance de l'anophèle n'est pas prise en compte. Partant des travaux de **D. Moulay**, nous proposons alors un modèle de la croissance du vecteur basé sur les stades : **œuf**, **larve**, **nymphe** et **adulte**. Ce modèle est ensuite intégré dans un modèle de transmission vecteur-homme.

Nous proposons également un modèle de contrôle optimal qui prend en compte les différents moyens de lutte existants et préconisés par les autorités du monde de la santé.

Après une analyse mathématique séparée de chacun de ces modèles construits, nous présentons les résultats de simulations numériques afin de confirmer les résultats de l'étude mathématique.

**Mots clés :** Analyse mathématique, Simulation numérique, Contrôle optimal.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
1.1	Les biomathématiques . . . . .	6
1.2	Modélisation des maladies vectorielles . . . . .	7
1.3	Structure du mémoire . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Préalables mathématiques</b>	<b>10</b>
2.1	Quelques résultats sur les EDOs . . . . .	10
2.1.1	Généralités sur les EDOs . . . . .	10
2.1.2	Existence et unicité de solutions . . . . .	12
2.1.3	Point d'équilibre et notion de stabilité . . . . .	15
2.2	Quelques résultats en théorie de contrôle . . . . .	21
2.2.1	Définitions et préliminaires . . . . .	21
2.2.2	Contrôle optimal . . . . .	24
2.3	Quelques notions utiles sur les matrices . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Etude des modèles compartimentaux</b>	<b>28</b>
3.1	Modélisation en dynamique des populations . . . . .	28
3.1.1	Modèle de la croissance exponentielle de <b>Malthus</b> . . . . .	29
3.1.2	Modèle de la croissance logistique de <b>Verhulst</b> . . . . .	29
3.2	Quelques modèles épidémiologiques . . . . .	30
3.2.1	Premier modèle : <b>Daniel Bernoulli</b> . . . . .	30
3.2.2	Les travaux de <b>Ronald Ross</b> . . . . .	31
3.2.3	Modèle de type SIR/SI et SEIR/SEI . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Modélisation et analyse mathématique</b>	<b>35</b>
4.1	Vie de l'anophèle . . . . .	36
4.1.1	Ecologie de l'anophèle . . . . .	36

4.1.2	Habitudes alimentaires de l'anophèle . . . . .	36
4.1.3	Biologie de l'anophèle . . . . .	37
4.2	Modèle de la dynamique de croissance de l'anophèle . . . . .	38
4.3	Analyse mathématique du modèle . . . . .	40
4.3.1	Existence et unicité de solution . . . . .	40
4.3.2	Points d'équilibres . . . . .	41
4.3.3	Positivité et bornage des solutions . . . . .	47
4.3.4	Stabilité des équilibres . . . . .	52
4.4	Modèle de transmission du paludisme . . . . .	62
4.4.1	Mécanisme de transmission du paludisme . . . . .	62
4.4.2	Construction du modèle . . . . .	62
4.4.3	Interaction entre humains et moustiques . . . . .	65
4.5	Modèle synthétique croissance-transmission de la maladie . . . . .	69
4.6	Analyse mathématique . . . . .	71
4.6.1	Existence et positivité de solution . . . . .	73
4.6.2	Calcul du taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0$ . . . . .	74
4.6.3	Etude de la stabilité du point d'équilibre sans maladie . . . . .	76
4.6.4	Etude de l'influence du seuil $r$ sur $\mathcal{R}_0$ . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>79</b>
5.1	Présentation du solveur ODE45 . . . . .	79
5.2	Simulation numérique du modèle des moustiques . . . . .	80
5.2.1	Dynamique du modèle des moustiques pour $r < 1$ . . . . .	80
5.2.2	Dynamique des moustiques pour $r > 1$ . . . . .	81
5.3	Simulations numériques du modèle de transmission . . . . .	83
5.3.1	Dynamique du modèle de transmission pour $r > 1$ et $\mathcal{R}_0 > 1$ . . . . .	83
5.3.2	Dynamique du modèle de transmission pour $r > 1$ et $\mathcal{R}_0 < 1$ . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Contrôle optimal</b>	<b>88</b>
6.1	Quelques mesures de contrôle envisagées par l'OMS . . . . .	88
6.2	Formulation et étude d'un problème de contrôle optimal . . . . .	89
6.2.1	Formulation du problème . . . . .	89
6.2.2	Etude du problème . . . . .	90
6.3	Résolution numérique . . . . .	96

*TABLE DES MATIÈRES*

---

<b>7 Conclusion générale</b>	<b>98</b>
7.1 Economie du travail . . . . .	98
7.2 Perspectives futures de recherche . . . . .	99

# Liste des tableaux

3.1	Paramètres d'interaction entre les deux populations . . . . .	33
4.1	Paramètres pour les hôtes humains . . . . .	63
4.2	Paramètres pour les hôtes vecteurs . . . . .	63
4.3	Paramètres communs aux non-immuns et semi-immuns . . . . .	64
4.4	Paramètres pour les hôtes semi-immuns . . . . .	64
4.5	Paramètres de contact entre non-immuns, semi-immuns et moustiques . . .	65
4.6	Paramètres pour les hôtes non-immuns . . . . .	65
5.1	Les paramètres du modèle de la croissance de l'anophèle . . . . .	80
5.2	Les paramètres du modèle global de la transmission. . . . .	84
6.1	Tableau de lutte anti-vectorielle et paramètres de la biologie du vecteur visé	89



# Table des figures

3.1	Représentation compartimentale du modèle de type SI/SI de <b>Ross</b> . . . . .	32
3.2	Modèle de <b>Ross</b> . . . . .	33
3.3	Repartition compartimentale du modèle de type SIR/SI utilisé par <b>Moulay</b> pour le cas du chikungunya. . . . .	34
3.4	Représentation compartimentale de l'interaction entre les hôtes humains et les moustiques pour le modèle SEIR/SEI. . . . .	34
4.1	Représentation compartimentale des différents stades de la croissance de l'anophèle . . . . .	39
4.2	Représentation compartimentale de l'interaction entre les hôtes humains et les moustiques. . . . .	66
5.1	Evolution des classes $E$ , $L$ , $P$ et $A$ pour $r = 0.68$ . . . . .	81
5.2	Evolution des classes $E$ , $L$ , $P$ et $A$ pour $r = 3.80$ . . . . .	82
5.3	Evolution des moustiques adultes selon des valeurs de $r$ . . . . .	83
5.4	Evolution des susceptibles et des latents . . . . .	83
5.5	Evolution des humains non-immuns. . . . .	84
5.6	Evolution des humains semi-immuns. . . . .	85
5.7	Evolution des moustiques. . . . .	85
5.8	Courbe d'évolution des individus non-immuns. . . . .	86
5.9	Courbe d'évolution des individus semi-immuns. . . . .	87
5.10	Courbe d'évolution des individus moustiques. . . . .	87
6.1	Courbe d'évolution des individus infectés lorsqu'on applique un contrôle. . . . .	97

# Chapitre 1

## Introduction générale

*« De mon propre avis, mon résultat principal a été d'établir la loi mathématique des épidémies. Le médecin n'oubliera pas que les expressions : plus, beaucoup, moins, souvent, ne signifient rien, qu'il faut compter en médecine pour sortir du vague, que c'est un des moyens dont on ne saurait faire abstraction dans la recherche de la vérité. »*

**Ronald Ross**

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Les biomathématiques . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Modélisation des maladies vectorielles . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>1.3</b>	<b>Structure du mémoire . . . . .</b>	<b>8</b>

---

### 1.1 Les biomathématiques

Le poids des maladies infectieuses va au delà des individualités et s'étend aux collectivités incluant ainsi les familles, les communautés, les pays et le monde entier. Leur impact est à la fois social et économique. Cependant, la prise de conscience du danger que comporte un tel phénomène remonte à très longtemps. Cette prise de conscience cumulée au soucis de freiner certaines maladies vectorielles conduisant à des épidémies a nécessité une collaboration de scientifiques de plusieurs disciplines comme la biologie, l'entomologie, l'immunologie, les mathématiques, l'informatique etc. Cette collaboration entre dans le cadre d'une discipline communément appelée : biomathématique.

Les biomathématiques sont une partie de l'épidémiologie définie comme la science de base de la santé publique. Elle étudie la distribution des maladies transmissibles, les facteurs déterminants et l'application des résultats de ces études pour contrôler les dites maladies. Les mathématiques sont utiles à la démarche scientifique en générale, à la biologie et à la santé en particulier. Les modèles mathématiques, construits à base d'hypothèses sont alors souvent utilisés pour faciliter la compréhension d'une épidémie malgré des données partielles. Ils permettent également de simplifier certains processus biologiques comme

la propagation des maladies et d'en tirer plus d'informations. En somme, l'objectif des biomathématiques est de comprendre, prévoir et de contrôler l'évolution d'une épidémie ; et cela de façon efficace et peu coûteuse. Elles constituent donc un outil d'aide à la prise de décision pour des structures comme l'Organisation Mondiale de la Santé et autres organisations affiliées.

## 1.2 Modélisation des maladies vectorielles

Une maladie vectorielle est une maladie due à un parasite transmis à l'homme par un vecteur. Le cycle du parasite peut être plus ou moins compliqué mais implique, dans tous les cas, trois étapes indispensables :

- **l'infection** au cours de laquelle le parasite pénètre à l'intérieur de l'hôte,
- **la multiplication** où le parasite se reproduit à l'intérieur de son hôte,
- **la propagation** où les descendants du parasite quittent leur hôte pour en infecter d'autres.

Ces trois étapes sont toutes nécessaires au cycle de vie du parasite. En effet, le choix de ce que l'on modélise dépend plus des questions que l'on se pose que de la réalité intrinsèque du système d'étude. L'épidémiologie s'intéresse essentiellement à la variation du nombre de cas cliniques en fonction du temps et éventuellement de l'espace. Ceci implique que les modèles épidémiologiques sont fondamentalement des modèles dynamiques. Dans le cas des maladies vectorielles, il n'est pas nécessaire de modéliser explicitement la dynamique intra-hôte des parasites. La dynamique inter-hôte est à priori suffisant. Ainsi pour ces maladies, ce n'est donc pas la dynamique des parasites que l'on modélise mais plutôt la dynamique des états cliniques des individus hôtes (humains et/ou vecteurs). Plusieurs travaux ont été effectués pour le cas de la dengue, du paludisme, du choléra et plus récemment le chikungunya.

Cependant, la contribution la plus probablement importante au corpus de l'épidémiologie est celle de **Ross**, qui peut être considéré de ce fait comme le père fondateur de l'épidémiologie mathématique actuelle basée sur les modèles compartimentaux. Les modèles compartimentaux sont parfaitement adaptés à la modélisation des maladies vectorielles. Cela consiste à diviser la population hôte en autant de compartiments que d'états cliniques et à les connecter entre eux par des flux d'individus via les différents taux de transferts. Fort de sa conviction, il disait : «*De mon propre avis mon résultat principal a été d'établir la loi mathématique des épidémies*». Il ajoute : «*le médecin n'oubliera pas que les expressions : plus, beaucoup, moins, souvent, ne signifient rien, qu'il faut compter en médecine pour sortir du vague, que c'est un des moyens dont on ne saurait faire abstraction dans la recherche de la vérité*». **Ross** travailla sur le paludisme.

L'un des plus grands progrès de la modélisation du paludisme est l'inclusion de l'immunité acquise proposée par **Dietz, Molineaux et Thomas**, [38, 30]. Puis viennent les travaux sur l'immunité acquise développés par **Aron et Bailey**. Quelques travaux ont également inclus des effets environnementaux, la diffusion de la résistance aux produits,

l'évolution de l'immunité, le traitement et l'impact des stratégies de vaccination, ainsi que le délai de la période d'incubation. Pour étudier la propagation du paludisme, **Ngwa** et **Shu**, [36, 38] ont proposé un modèle compartimental du type Sensible-Exposed-Infectious-Recovered-Sensible(SEIRS) pour les humains et Sensible-Exposed-Infectious pour les moustiques, et cela en utilisant des équations différentielles ordinaires. La grande particularité de ce modèle réside dans le fait que les individus de la classe *Recovered* supposés être à l'abri de la maladie ont un niveau bas de parasites dans leur organisme et sont légèrement infectieux pour les moustiques sensibles.

Aujourd'hui encore, le paludisme est une réalité et plusieurs modèles mathématiques ont été davantage proposés. Dans sa thèse soutenue en 2009, **P. Zongo**, [38] propose un modèle de propagation du paludisme. Par ailleurs, **B. Traoré**, **F. Niyukuri** ont également travaillé sur le paludisme respectivement dans le cadre d'un DEA et d'un master, [30, 20] etc. Mais dans tous ces modèles, la dynamique de croissance du vecteur, et notamment celle des stades immatures, n'est pas prise en compte. En effet, l'importance des stades immatures n'est plus à démontrer, de par la résistance des œufs, [33].

Dans ce travail, nous proposons un modèle de la croissance de l'anophèle. Ce modèle sera ensuite intégré dans un modèle de transmission qui traduira les différentes interactions entre la population humaine et les moustiques. Cette synthèse permet de mieux appréhender la dynamique globale de la transmission du paludisme. Nous proposerons également un modèle de contrôle associé à notre modèle global de transmission et l'étude de ce modèle de contrôle permet de proposer des méthodes de lutte appropriées.

## 1.3 Structure du mémoire

Le document est structuré de la manière suivante.

Après ce chapitre introductif dans lequel nous avons présenté l'intérêt de notre sujet de mémoire et du but poursuivi, nous présenterons dans le chapitre 2, des résultats mathématiques dont nous aurons un indispensable besoin pour l'étude de nos modèles.

Le chapitre 3 sera consacré à la présentation des modèles en dynamique des populations, ainsi que quelques modèles compartimentaux en épidémiologie. Ces modèles nous inspireront fortement pour la réalisation de notre modèle.

Des données importantes sur la biologie du vecteur, des hypothèses qui conduiront à la construction de notre modèle de croissance de l'anophèle seront proposées dans le chapitre 4. En plus de cela, ce chapitre comportera des informations sur le paludisme, les hypothèses sur lesquelles reposent notre modèle de transmission. Nous finirons ce chapitre en proposant un modèle global de la dynamique de transmission du paludisme. Ce modèle de transmission est la synthèse du modèle de croissance de l'anophèle basé sur les différents stades d'évolution (œuf, larve, nymphe et adulte) et celui de la transmission. Nous ferons une étude de ces différents modèles proposés.

Le chapitre 5 comportera les simulations numériques et l'interprétation des différents

résultats numériques obtenus.

Dans le chapitre 6, après une brève présentation des moyens de lutte existants et préconisés, nous intégrons aux modèles précédemment formulés, ces différents moyens de lutttes. Cela passe par la formulation d'un problème de contrôle optimal. Et l'étude du système est donnée grâce à une application directe de quelques résultats classiques en théorie de contrôle, notamment le principe du maximum de **Pontryagin**. Les différents contrôles considérés dans ce modèle représentent la lutte anti-vectorielle, le traitement des malades et les différentes mesures de prévention de la maladie.

Enfin le dernier chapitre sera consacré à la conclusion et aux perspectives futures de recherche.

# Chapitre 2

## Préalables mathématiques

*Ce chapitre contient essentiellement les résultats mathématiques qui seront utilisés pour l'analyse et l'étude de nos modèles.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Quelques résultats sur les EDOs</b>	<b>10</b>
2.1.1	Généralités sur les EDOs	10
2.1.2	Existence et unicité de solutions	12
2.1.3	Point d'équilibre et notion de stabilité	15
<b>2.2</b>	<b>Quelques résultats en théorie de contrôle</b>	<b>21</b>
2.2.1	Définitions et préliminaires	21
2.2.2	Contrôle optimal	24
<b>2.3</b>	<b>Quelques notions utiles sur les matrices</b>	<b>26</b>

---

## 2.1 Quelques résultats sur les EDOs

Dans toute cette section,  $J$  est un intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 1$ . Si  $x$  est une fonction d'une variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , nous noterons  $x'$  sa dérivée.

### 2.1.1 Généralités sur les EDOs

**Définition. 2.1.1** Une équation différentielle sur le Banach  $\mathbb{R}^n$  est une équation de la forme

$$H(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \tag{2.1.1}$$

où

## 2.1. QUELQUES RÉSULTATS SUR LES EDOS

---

- $H$  est une fonction de  $(n + 2)$  variables sur  $J \times U$ ,
- $x$  est la fonction inconnue de  $J$  dans le Banach  $\mathbb{R}^n$ ,
- $n$  est l'ordre de l'équation différentielle.

**Remarque. 2.1.1** L'équation (2.1.1) est une forme très générale. En pratique on préfère travailler avec des équations particulières dites explicites, pour lesquelles il existe une fonction  $G$  régulière sur  $J \times \mathbb{R}^{n-1}$  de sorte que

$$x^{(n)} = G(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.1.2)$$

Dans toute la suite nous traiterons le cas des équations différentielles du premier ordre.

**Définition. 2.1.2** (Equation différentielle). Soit  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction. On appelle équation différentielle du premier ordre associée à la fonction  $f$  l'équation suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (2.1.3)$$

Si la fonction  $f$  ne dépend pas explicitement de la variable  $t$ , i.e. si  $f$  est définie sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , on dira que l'équation différentielle est autonome. Dans le cas contraire on parle d'équation non autonome. Si de plus  $f$  est affine, i.e. si  $f(t, x) = A(t)x + B(t)$  avec  $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B(t) \in \mathbb{R}^n$  pour tout  $t \in J$ , on dit que c'est une équation différentielle linéaire.

**Définition. 2.1.3** (Solution locale). Une solution de l'équation différentielle (2.1.3) est la donnée d'un couple  $(I, x)$  où  $I$  est un intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$  contenu dans  $J$  et  $x$  une fonction de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  dérivable sur  $I$  et vérifiant les conditions suivantes :

- (i)  $(t, x(t)) \in J \times U$ , pour tout  $t \in I$ ,
- (ii)  $x'(t) = f(t, x(t))$ , pour tout  $t \in I$ .

Le couple  $(I, x)$  est aussi appelé solution locale de (2.1.3).

**Définition. 2.1.4** (Prolongements de solutions). Soient  $(I_1, x_1)$  et  $(I_2, x_2)$  deux solutions de l'équation (2.1.3). On dit que  $(I_2, x_2)$  prolonge  $(I_1, x_1)$  si  $I_1 \subset I_2$  et pour tout  $t \in I_1$ ,  $x_1(t) = x_2(t)$ .

**Définition. 2.1.5** (Solution maximale) On dit qu'une solution  $(I, x)$  est maximale si elle n'admet aucun prolongement  $(\tilde{I}, \tilde{x})$  avec  $I$  inclus strictement dans  $\tilde{I}$ .

**Théorème. 2.1.1** Toute solution  $(I, x)$  de (2.1.3) admet un prolongement maximal.

**Preuve :** Voir [13] chapitre V, 1.3

**Définition. 2.1.6** (*Solution globale*). Une solution globale de (2.1.3) est une solution définie sur  $J$  pour tout entier, i.e.  $(J, x)$  est une solution globale de  $x' = f(., x)$  où  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Remarque. 2.1.2** Il existe un lien entre les deux définitions précédentes. En effet, si  $(J, x)$  est une solution de (2.1.3), alors c'est une solution maximale. Mais la réciproque est fautive en général.

Dans les problèmes concrets faisant intervenir des équations différentielles, comme en dynamique des populations, en modélisation des systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques, on connaît l'état initial du système et on souhaiterait que la solution de l'équation différentielle vérifie cette condition initiale, [33]. Ces types de problèmes sont appelés **problèmes de Cauchy** et sont définis de la manière suivante :

**Définition. 2.1.7** (*Problème de Cauchy*). Etant donné un point  $(t_0, x_0) \in J \times U$ , le problème de **Cauchy** consiste à trouver une solution  $(I, x)$  de (2.1.3) telle que  $t_0 \in I$  et  $x(t_0) = x_0$ . Le problème peut s'écrire sous forme d'un système comme suit :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

## 2.1.2 Existence et unicité de solutions

**Théorème. 2.1.2** (*Cauchy-Péano-Arzéla, [13]*). Soit  $(t_0, x_0) \in J \times U$  et supposons  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue en  $(t_0, x_0)$ . Alors il existe une solution du problème de **Cauchy** associée à l'équation différentielle (2.1.3) relatif à la condition initiale  $(t_0, x_0)$ . Et une fonction  $x$  est solution du problème de **Cauchy** si et seulement si :

- (i) Pour tout  $t \in I$ ,  $(t, x(t)) \in J \times U$ ,
- (ii)  $x$  est continue sur  $I$ .

**Preuve** : Voir [13] chapitre V, 2.4

**Corollaire. 2.1.1** On suppose  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. Alors pour tout point  $(t_0, x_0) \in J \times U$ , il existe au moins une solution maximale  $(I, x)$  de l'équation (2.1.3). De plus l'intervalle de définition  $I$  de toute solution maximale est un ouvert de  $J$ , [19].

**Théorème. 2.1.3** On suppose  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et soit  $(I, x)$  une solution maximale de (2.1.3). Alors

- (i) si  $\sup I < \sup J$  ou si  $I \not\ni \sup I = \sup J \in J$  alors  $\lim_{t \rightarrow \sup I} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} = +\infty$
- (ii) si  $\inf J < \inf I$  ou si  $I \not\ni \inf I = \inf J \in J$  alors  $\lim_{t \rightarrow \inf I} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} = +\infty$

**Preuve** : Voir [13] chapitre V,



## 2.1. QUELQUES RÉSULTATS SUR LES EDOS

---

**Remarque. 2.1.3** *En pratique, on fait surtout appel aux contraposées de ce théorème. Par exemple si  $(I, x)$  est une solution maximale de (2.1.3) qui est bornée sur  $I$ , alors  $I = J$ , i.e. que c'est une solution globale.*

**Remarque. 2.1.4** *Sous les seules hypothèses de continuité on ne peut pas garantir l'unicité de la solution. Pour ce faire, nous faisons appel au théorème de **Cauchy-Lipschitz** qui impose plus de conditions pour obtenir l'unicité, [19].*

Dans la suite de ce paragraphe, nous énoncerons des théorèmes qui assurent non seulement l'existence mais aussi l'unicité de solution au problème de **Cauchy** associé à l'équation différentielle (2.1.3) relatif à la condition initiale  $(t_0, x_0)$ . Pour cela nous présentons différentes notions d'unicité ainsi que le caractère **lipschitzien** du champ de vecteurs,  $f(t, x(t))$ , par rapport à la deuxième variable.

**Définition. 2.1.8** (*Locale lipschitziennité en un point*). Soit  $(t_0, x_0) \in J \times U$ . On dit que  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable en  $(t_0, x_0)$  s'il existe  $T_0 > 0$  et  $k > 0$  tels que

$$\forall (t, x, y) \in ]t_0 - T_0; t_0 + T_0[ \times B(x_0, r_0)^2, \| f(t, x) - f(t, y) \| \leq k \| x - y \| .$$

**Définition. 2.1.9** On dit que  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable sur  $J \times U$  si pour tout point  $(t_0, x_0) \in J \times U$ ,  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable en  $(t_0, x_0)$ .

**Définition. 2.1.10** (*Globalement Lipschitzien*). Une fonction  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite lipschitzienne (ou globalement lipschitzienne) par rapport à sa seconde variable s'il existe une fonction continue  $k : J \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$\forall t \in J, \forall (y_1, y_2) \in U \times U, \| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq k(t) \| y_1 - y_2 \| .$$

Si de plus, la fonction  $k$  est constante sur  $J$  alors  $f$  est dite globalement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur  $J \times U$ , uniformément par rapport à sa première variable.

**Remarque. 2.1.5** Si  $f$  est dite globalement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur  $J \times U$ , alors elle est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable sur  $J \times U$ .

Dans la pratique au lieu de vérifier que la fonction est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, on vérifie que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . D'où l'utilité du théorème suivant :

**Théorème. 2.1.4** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J \times U$  alors  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable sur  $J \times U$ .

**Définition.** 2.1.11 (*Unicité globale*). On dit que le problème de **Cauchy** associé à (2.1.3) relatif à la condition initiale  $(t_0, x_0) \in J \times U$ , admet une unique solution s'il existe une solution maximale  $(I, x)$  de ce problème qui soit le prolongement de toute autre solution du problème.

**Définition.** 2.1.12 (*Unicité locale*). On dit que le problème de **Cauchy** associé à (2.1.3) relatif à la condition initiale  $(t_0, x_0) \in J \times U$ , admet localement une unique solution s'il existe un voisinage  $J_0 \times U_0$  de  $(t_0, x_0)$  dans  $J \times U$  tel que le problème de **Cauchy** suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \tilde{f}(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

admette une unique solution, où  $\tilde{f}$  est la restriction de  $f$  à  $J_0 \times U_0$

Après avoir présenté quelques résultats et définitions de lipschitziennité, nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes de **Cauchy-Lipschitz** qui assurent l'existence et l'unicité de solution au problème de **Cauchy**, [13, 19, 21].

**Théorème.** 2.1.5 (*Cauchy-Lipschitz, forme locale*). Si  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable en  $(t_0, x_0) \in J \times U$  alors le problème de **Cauchy** :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.6)$$

admet une unique solution.

Cette forme locale donne directement la forme forte du théorème de **Cauchy-Lipschitz**.

**Théorème.** 2.1.6 (*Cauchy-Lipschitz, forme forte*). Si  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur  $J \times U$  alors pour tout  $(t_0, x_0) \in J \times U$ , le problème de **Cauchy** associé à (2.1.3) relatif à la condition initiale  $(t_0, x_0)$  admet une unique solution.

**Remarque.** 2.1.6 Donc si  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable et si  $(I, x)$  et  $(\tilde{I}, \tilde{x})$  sont deux solutions maximales de l'équation différentielle (2.1.3) vérifiant  $x(t_1) = \tilde{x}(t_1)$  avec  $t_1 \in I \cap \tilde{I}$  alors  $(I, x) = (\tilde{I}, \tilde{x})$ .

**Remarque.** 2.1.7 La forme faible du théorème de **Cauchy-Lipschitz** consiste simplement à prendre une fonction de classe  $C^1$ .

**Théorème.** 2.1.7 (*Cauchy-Lipschitz globale*). Si  $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, alors toutes les solutions maximales sont globales.

**Définition. 2.1.13** (Flot). Un flot sur  $\mathbb{R}^n$  est une application continue

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \longmapsto \phi(t, x) \equiv \phi_t(x)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i)  $\phi_0 = id_{\mathbb{R}^n}$ ,

(ii)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ , pour tout  $t, s \in \mathbb{R}$ .

**Définition. 2.1.14** (Flot associé à une EDO). On appelle flot de l'équation différentielle (2.1.3) et à un instant  $t_0$ , l'application  $\phi$  définie par :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (t, x_0) &\longmapsto \phi_t(x_0) = x(t; t_0, x_0) \end{aligned}$$

Par ailleurs l'application  $\phi$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_t(x_0) = f(\phi_t(x_0)) \\ \phi_{t_0}(x_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.7)$$

**Remarque. 2.1.8** Dans le cas des systèmes autonomes, le temps n'a pas de rôle intrinsèque à jouer et on pourra se limiter aux données initiales en  $t = 0$ . Pour un point  $x \in U$ , notons  $\phi(\cdot, x)$  la solution maximale  $(I, x)$  de l'équation différentielle (2.1.3) valant  $x$  en  $t = 0$ . Autrement dit,  $\phi(\cdot, x)$  est la solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x_0) = f(\phi_t(x_0)) \\ \phi(0, x) = x \end{cases} \quad (2.1.8)$$

**Définition. 2.1.15** (Semi-flot). Un semi-flot sur  $\mathbb{R}^n$  est une application continue

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ vérifiant :}$$

(i)  $\phi_0 = id_{\mathbb{R}^n}$  ;

(ii)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ , pour tout  $t, s \geq 0$ .

**Proposition. 2.1.1** On suppose  $J = \mathbb{R}$  et  $U = \mathbb{R}^n$  et  $f$  globalement lipschitzienne. Alors le flot associé à l'équation différentielle (2.1.3) est défini sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et l'application  $\mathbb{R} \longrightarrow Diff(\mathbb{R}^n)$ ,  $t \longmapsto \phi_t(\cdot)$  est un homomorphisme du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe  $Diff(\mathbb{R}^n, \circ)$ , où  $Diff(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même.

### 2.1.3 Point d'équilibre et notion de stabilité

On considère que l'équation différentielle (2.1.3) est autonome et s'écrit :

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (2.1.9)$$

avec  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  localement lipschitzienne sur  $U$ . L'objectif est d'assurer l'existence et l'unicité de solutions pour les problèmes de Cauchy.

**Définition.** 2.1.16 (*Point d'équilibre*). On appelle point d'équilibre toute solution constante de (2.1.9).

Quand l'équation (2.1.9) modélise la dynamique d'une population, un équilibre correspond bien à la notion habituelle d'« état d'équilibre », qui signifie que lorsque le système est dans l'état  $x_0$ , alors il y reste. En pratique on sait que seuls les états d'équilibre ayant certaines propriétés sont significatifs.

**Définition.** 2.1.17 (*Stabilité au sens de Lyapunov*). Soit  $(\mathbb{R}, x)$  une solution globale de l'équation (2.1.9). On dit que  $(\mathbb{R}, x)$  est stable au sens de **Lyapunov**, si pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta_{(\epsilon, t_0)} > 0$  tel que pour tout  $y_0 \in B(x(t_0), \delta_{(\epsilon, t_0)})$ , alors l'unique solution maximale du problème de **Cauchy** associé à (2.1.9) relatif à la condition initiale  $(t_0, y_0)$ , notée  $(I, x(\cdot; t_0, y_0))$ , vérifie :

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \|x(t) - x(t_0, y_0)\| \leq \epsilon$$

La solution sera dite instable, si elle n'est pas stable.

**Définition.** 2.1.18 (*Stabilité asymptotique locale*). On dit que  $(\mathbb{R}, x)$  est localement asymptotiquement stable si et seulement si  $(\mathbb{R}, x)$  est stable et pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , il existe  $\delta(t_0) > 0$  tel que pour tout  $y_0 \in B(x(t_0), \delta(t_0))$ , l'unique solution maximale du problème de **Cauchy** associé à (2.1.9) relatif à la condition initiale  $(t_0, y_0)$ ,  $(I, x(\cdot; t_0, y_0))$  est définie sur  $[t_0; +\infty[$  et vérifie :

$$\|x(t) - x(t_0, y_0)\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty \quad (2.1.10)$$

**Définition.** 2.1.19 (*Stabilité globale*). On dit  $(\mathbb{R}, x)$  est globalement asymptotiquement stable sur  $V \subset U$ , si pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , pour tout  $y_0 \in V$  l'unique solution maximale du problème de **Cauchy** associé à (2.1.9) relatif à la condition initiale  $(t_0, y_0)$ ,  $(I, x(\cdot; t_0, y_0))$  est définie sur  $[t_0; +\infty[$  et vérifie (2.1.10).

### 2.1.3.1 Cas des systèmes linéaires à coefficients constants

Considérons le cas d'une équation différentielle linéaire autonome et homogène suivante :

$$x'(t) = Ax(t), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1.11)$$

On remarque que l'ensemble des solutions d'équilibre du système est  $\ker(A)$  et donc que la solution identiquement nulle est aussi solution d'équilibre.

**Théorème.** 2.1.8 La solution du problème de **Cauchy** associé à (2.1.11) pour la donnée  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  est définie par la formule

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0, \forall t \in \mathbb{R}$$

**Théorème. 2.1.9** (*Caractérisation de la stabilité de l'équilibre  $x \equiv 0$* ).

- L'origine est un équilibre globalement asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à parties réelles strictement négatives, i.e.

$$Sp(A) \subset \{z \in \mathbb{C} / \mathcal{R}(z) < 0\}$$

- L'origine est un équilibre stable si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle négative et les valeurs propres de partie réelle nulle sont dans un espace caractéristique de dimension 1.
- Sinon l'origine est un équilibre instable.

### 2.1.3.2 Cas des systèmes non linéaires

Soit  $x_0$  une solution d'équilibre de l'équation différentielle (2.1.9), Nous linéarisons cette dernière équation en opérant un développement limité de  $f$  en  $x_0$  selon la définition :

**Définition. 2.1.20** *Le système linéarisé de (2.1.9) autour du point  $x_0$  est défini par :*

$$z'(t) = D_f(x_0)z(t) \tag{2.1.12}$$

où  $D_f$  est la différentielle de  $f$ .

### 2.1.3.3 Quelques théorèmes de stabilité locale

**Théorème. 2.1.10** (**Lyapunov**). *Si toutes les valeurs propres de  $D_f(x_0)$  sont de parties réelles strictement négatives, alors  $x_0$  est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable pour le système non linéaire.*

**Théorème. 2.1.11** *Si  $D_f(t_0, x_0)$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre  $x_0$  est instable pour le système non linéaire.*

### 2.1.3.4 Critère de **Routh-Hurwitz**

Nous serons surtout amenés à regarder précisément le signe des parties réelles des valeurs propres des matrices. Or il n'est pas toujours facile de les calculer explicitement. C'est pourquoi nous utiliserons le critère de **Routh-Hurwitz**, [33] qui donne des renseignements sur le signe des parties réelles des racines d'un polynôme à partir de ses coefficients. L'application de ce critère pour l'étude du polynôme caractéristique permet alors d'en déduire des renseignements sur la stabilité des équilibres.

On considère un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ , de degré  $n, n \in \mathbb{N}$ .

$$P(X) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} X^i$$

Notons ici que les coefficients sont notés par ordre décroissant des degrés.

**Proposition. 2.1.2** *Si tous les coefficients de  $P$  sont non nuls et de même signe alors nécessairement les zéros de  $P$  sont de parties réelles strictement négatives.*

Dans ce cas, on forme le tableau de **Routh** défini par :

$$\begin{array}{l|llll}
 X^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
 X^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
 X^{n-2} & \Delta_{n-2,1} & \Delta_{n-2,2} & \Delta_{n-2,3} & \dots \\
 X^{n-3} & \Delta_{n-3,1} & \Delta_{n-3,2} & \Delta_{n-3,3} & \dots \\
 \cdot & \cdot & & & \\
 \cdot & \cdot & & & \\
 \cdot & \cdot & & & \\
 X^1 & \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} & \dots \\
 X^0 & \Delta_{0,1} & \Delta_{0,2} & \Delta_{0,3} & \dots
 \end{array}$$

où les  $(\Delta_{i,j})_{0 \leq i \leq n-2}$  sont définis par :

$$\Delta_{i,j} = -\frac{1}{\Delta_{i-1,1}} \begin{vmatrix} \Delta_{i-2,1} & \Delta_{i-2,j+1} \\ \Delta_{i-1,1} & \Delta_{i-1,j+1} \end{vmatrix}$$

Par exemple :

$$\Delta_{n-2,1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{n-2,2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{n-2,3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{n-3,1} = -\frac{1}{\Delta_{n-2,1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ \Delta_{n-2,1} & \Delta_{n-2,2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{n-3,2} = -\frac{1}{\Delta_{n-2,1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ \Delta_{n-2,1} & \Delta_{n-2,3} \end{vmatrix}$$

Le critère de **Routh-Hurwitz** évalue le nombre de racines de  $P$  à partie réelle positive. Ce nombre est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne du tableau de **Routh**.

### 2.1.3.5 Théorie de stabilité de **Lyapunov**

La stabilité d'un point d'équilibre  $x^*$  de l'équation (2.1.9) peut être étudiée par l'exemple des valeurs propres de la partie linéarisée de  $f$  en  $x^*$ ,  $D_f(x^*)$ . Cependant, cette méthode de linéarisation attrayante par sa facilité de mise en œuvre, ne nous permet pas de conclure à la stabilité ou à l'instabilité du point d'équilibre dans tous les cas. En 1892, le mathématicien russe **A. M. Lyapunov** a introduit dans un *Problème général de la stabilité du mouvement*, un nouveau critère pour étudier la stabilité. Il a généralisé l'idée selon laquelle, pour un puits, il existe une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\|x(t) - x^*\|$  décroît

pour toute solution  $x(t)$  proche de  $x^*$ . **Lyapunov** a montré que certaines fonctions, appelées *fonctions de Lyapunov*, peuvent être utilisées comme une norme pour caractériser la stabilité. Cette méthode donne non seulement des renseignements sur la stabilité du point d'équilibre, mais aussi des propriétés sur les bassins d'attraction.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On s'intéresse aux points d'équilibre d'une équation différentielle autonome du premier ordre, définie sur  $J \times U$ , comme

$$x'(t) = f(x(t))$$

où  $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1$ , donc localement lipschitzienne sur  $J \times U$ . Ceci assure l'existence et l'unicité de solutions dans les problèmes de **Cauchy**.

**Théorème. 2.1.12 (Fonction de Lyapunov).** Soit  $x^*$  une solution d'équilibre de l'équation (2.1.9). Soit  $\Omega$  un voisinage de  $x^*$  inclus dans  $U$  et  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle que :

- (i)  $V(x^*) = 0$
- (ii)  $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\}, V(x) > 0$
- (iii)  $\forall x \in \Omega, \dot{V}(x) \leq 0$

Alors  $x^*$  est stable.

**Remarque. 2.1.9** La fonction  $V$  du théorème ( 2.1.12) est appelée fonction de **Lyapunov** associée à (2.1.9).

**Théorème. 2.1.13 (Fonction de Lyapunov stricte).** Soit  $x^*$  une solution d'équilibre de l'équation (2.1.9). Soit  $\Omega$  un voisinage de  $x^*$  inclus dans  $U$  et  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle que :

- (i)  $V(x^*) = 0$
- (ii)  $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\}, V(x) > 0$
- (iii)  $\forall x \in \Omega, \dot{V}(x) < 0$

Alors  $x^*$  est asymptotiquement stable.

**Remarque. 2.1.10** La fonction  $V$  du théorème ( 2.1.13) est appelée fonction de **Lyapunov stricte** associée à (2.1.9).

Avant de donner les liens qui existent entre ces deux fonctions et la stabilité, on introduit la notion de stabilité globale sur un ensemble.

**Définition. 2.1.21 (Stabilité globale).** Un équilibre  $x^*$  de (2.1.9) est dit globalement stable sur  $W \subset \Omega$  si et seulement si pour tout  $V \subset W$  et pour tout  $t_1 \geq 0$ , il existe  $\epsilon_{(V,t_1)} > 0$  tel que : pour tout  $y_1 \in V$ , le problème de **Cauchy** associé à (2.1.9) relatif à la condition initiale  $(t_1, y_1)$  admette une unique solution globale  $x(t; t_1, y_1)$  et  $\forall t \geq t_1, \|x^* - x(t; t_1, y_1)\| \leq \epsilon$

**Définition. 2.1.22 (Stabilité globale asymptotique).** Un équilibre  $x^*$  de (2.1.9) est dit globalement asymptotiquement stable sur  $W \subset \Omega$  si et seulement si pour tout  $V \subset W$  et

pour tout  $t_1 \geq 0$ , il existe  $\epsilon_{(V,t_1)} > 0$  tel que : pour tout  $y_1 \in V$ , le problème de **Cauchy** associé à (2.1.9) relatif à la condition initiale  $(t_1, y_1)$  admette une unique solution globale  $x(t; t_1, y_1)$  et

$$\|x^* - x(t; t_1, y_1)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

Ces fonctions permettent aussi de donner des renseignements sur les bassins attracteurs et d'attractions associés à des points d'équilibre asymptotiquement stables

**Définition. 2.1.23** (Ensemble invariant). Soit  $\Omega_i$  un ensemble inclus dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $\Omega_i$  est invariant pour l'équation différentielle (2.1.9) si pour tout  $x_0 \in \Omega_i$  et tout  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , l'unique solution maximale  $(J, x)$ , du problème de **Cauchy** associé à (2.1.9) et relatif à la condition  $(t_0, x_0)$ , reste dans  $\Omega_i$ , ( $T > 0$ ), i.e.

$$\forall t \in J, x(t) \in \Omega_i$$

**Théorème. 2.1.14** (Principe d'invariance de Lasalle, [15]). Considérons l'équation différentielle ordinaire (2.1.9). On suppose  $f$  de classe  $C^1$ .

Soit  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de classe  $C^1$ . Supposons que la dérivée orbitale  $\frac{dV}{dt}(x) \leq 0$  pour tout  $x \in U$ , et définissons

$$E := \left\{ x \in U, \frac{d}{dt}V(x) = 0 \right\}.$$

Posons  $B$  le plus grand ensemble invariant inclus dans  $E$ . Alors toutes les solutions de (2.1.9), bornées pour  $t \geq t_0$ , convergent vers  $B$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Définition. 2.1.24** (Bassin Attracteur). Soit  $\Omega_a$  un ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $\Omega_a$  est un bassin attracteur relatif à (2.1.9) si  $\Omega_a$  est un invariant par (2.1.9) et s'il existe  $\Omega^*$  contenant strictement  $\Omega_a$  tel que pour tout  $x_0 \in \Omega^*$  et tout  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $([t_0, T[, x)$ , la solution maximale du problème de **Cauchy** associé à (2.1.9) et relatif à la condition initiale  $(t_0, x_0)$ , rentre dans  $\Omega_a$  :

$$\exists t_1 > t_0, x(t_1) \in \Omega_a$$

Un tel  $\Omega^*$  est appelé bassin d'attraction relatif à  $\Omega_a$ .

**Remarque. 2.1.11** On a les remarques importantes suivantes :

1. Comme  $\Omega_a$  est un ensemble invariant pour tout (2.1.9), on a pour tout  $t > t_1, x(t) \in \Omega_a$
2. Si  $\Omega_a$  est un bassin attracteur, toute réunion de bassin attracteur relatif à  $\Omega_a$  est un bassin attracteur relatif à  $\Omega_a$ . C'est même le plus grand bassin d'attraction relatif à  $\Omega_a$  pour la relation d'inclusion.



## 2.2 Quelques résultats en théorie de contrôle

En mathématique la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Historiquement, cette théorie est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique (*principe de **Fermat**, de **Huygens**, équations d'**Euler-Lagrange***). Le point clé de la théorie de contrôle est le *Principe du Maximum de **Pontryagin***, qui généralise les *équations d'**Euler-Lagrange*** du calcul des variations. Cette théorie a alors connu un essor très important et de nombreuses applications. Les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien et nous facilitent plusieurs tâches. On les retrouve par exemple dans les systèmes de freinage ABS, les thermostats, les circuits frigorifiques, les contrôles des flux routiers, aériens, boursiers et les barrages EDF, les circuits, électriques, électroniques,...,[33, 19]

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement à la théorie du contrôle optimal non linéaire. On rappellera dans un premier temps quelques techniques d'analyse de problèmes de contrôles optimaux non linéaires, notamment le *Principe du Maximum de **Pontryagin***.

Considérons un système de contrôle général :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2.13)$$

où  $f : I \times V \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $(t_0, x_0) \in I \times V$ . On suppose que  $F : (t, x) \rightarrow f(t, x, u(t))$  vérifie les hypothèses du théorème de **Cauchy-Lipschitz** ( 2.1.7). Cela revient à supposer que les contrôles  $u(\cdot)$  appartiennent à un sous-ensemble de  $L_{loc}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ . Ces hypothèses assurent pour tout contrôle  $u$ , l'existence et l'unicité d'une solution maximale  $x_u(t)$  sur un intervalle  $J \subset U$  grâce à des versions du théorème ( 2.1.7), données dans [33]. Ce théorème nécessite des conditions plus faibles que celles énoncées précédemment dans la section (2.1). Pour simplifier l'écriture, on suppose dans la suite que  $t_0 = 0$

Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties :

- (i) un problème de contrôlabilité, où l'on se demande si l'objectif visé est atteignable,
- (ii) un problème d'optimisation, où l'on cherche parmi toutes les trajectoires possibles, celles qui se font en un coût réduit c'est à dire minimal.

Nous rappellerons dans la suite quelques outils de la théorie du contrôle optimal, issus des notes de cours du Professeur **Emmanuel Trélat** dans [33] et aussi de l'ouvrage de **Suzanne Lenhart** [??]

### 2.2.1 Définitions et préliminaires

Considérons pour le système (2.2.13) le problème de contrôle suivant : étant donné un point  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , trouvez un temps  $T$  et un contrôle  $u$  sur  $[0; T]$  tel que la trajectoire  $x_u$  associé à  $u$ , solution de (2.2.13), vérifie

$$\begin{cases} x_u(0) = x_0 \\ x_u(T) = x_1 \end{cases}$$

Alors il existe un contrôle optimal  $u$  sur  $[0, t(u)]$  tel que la trajectoire associée joint  $M_0$  à  $M_1$  en temps  $t(u)$  et en coût optimal.

**Remarque. 2.2.1** Pour un problème de contrôle optimal à temps final fixé, on impose  $t(u) = T$ . En particulier on suppose que la cible  $M_1$  est accessible depuis  $M_0$  en temps  $T$ . On a pour les systèmes affines le résultat suivant :

**Théorème. 2.2.4** Considérons le système affine dans  $\mathbb{R}^n$

$$x' = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad x(0) = x_0 \quad x(T) = x_1$$

avec le coût

$$C(T, u) = \int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt$$

où  $T > 0$  est fixé et la classe  $\mathcal{U}$  des contrôles admissibles est le sous-ensemble de  $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$  tel que

1.  $\forall u \in \mathcal{U}, x_u$  est bien définie sur  $[0, T]$  ;

2.  $\exists B_T | \forall u \in \mathcal{U}, \forall t \in [0, T], \|x_u(t)\| \leq B_T$

Si  $x_1$  est accessible depuis  $x_0$  en temps  $T$ , alors il existe un contrôle optimal reliant  $x_0$  à  $x_1$ .

- $x_1(t)$  non fixé, signifie simplement qu'il n'y a pas de restriction sur les valeurs de  $x_1(t)$ . On dit que le problème de contrôle optimal est à temps final non fixé.
- Dans la suite on ne s'intéressera qu'aux fonctions  $f, g$  continument différentiables par rapport à tous les arguments. Donc comme on ne considère que les contrôles continus par morceaux, les trajectoires associées seront toujours des fonctions différentiables par morceaux.

**Définition. 2.2.8** Un contrôle  $u$  maximisant la fonction objective  $C(T, u) = \int_0^T g(x(t), u(t)) dt$  du système (2.2.19) est appelé un contrôle optimal.

**Théorème. 2.2.5 (Fleming et Rishel).** On suppose que l'ensemble des contrôles admissibles pour le problème (2.2.13) est composé de fonctions de **Lebesgue** intégrables sur  $t_0 \leq t \leq t_1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(t, x, u)$  est convexe par rapport à  $u$  et qu'il existe des constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4 > 0$  et  $\beta > 0$  telles que

$$g(t, x, u) = \alpha(t, x) + \beta(t, x)u$$

$$|g(t, x, u)| \leq C_1(1 + |x| + |u|)$$

$$|g(t, x_1, u) - g(t, x, u)| \leq C_2|x_1 - x|(1 + |u|)$$

$$f(t, x, u) \geq C_3|u|^\beta - C_4$$

pour tout  $t_0 \leq t \leq t_1, x, x_1 \in \mathbb{R}$ . Alors il existe un contrôle optimal  $u^*$  minimisant  $C(u)$  avec  $C(u^*)$  fini.

**Remarque. 2.2.2** Les principales techniques de résolution d'un tel problème consistent à vérifier un ensemble de conditions nécessaires que le contrôle et le système adjoint doivent remplir. Ces conditions nécessaires sont données par le principe de maximum de **Pontryagin**.

### Principe du maximum de Pontryagin

Les conditions nécessaires que nous présentons ici, dérivent du principe de maximum de **Pontryagin**. C'est en effet lui qui a introduit l'idée du système adjoint.

**Théorème. 2.2.6 (Principe du maximum).** On considère le système de contrôle dans  $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.2.20)$$

où  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées sur l'intervalle  $[0, t_e(u)[$  de  $\mathbb{R}_+$  et à valeurs dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ .

Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{U}$  l'ensemble des contrôles admissibles  $u$  dont les trajectoires associées relient un point initial de  $M_0$  à un point final de  $M_1$  en temps  $t(u) < t_e(u)$ . Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle  $u$  sur  $[0, t]$  par

$$C(t, u) = \int_0^t g(s, x(s), u(s)) ds + h(t, x(t)),$$

où  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $x(\cdot)$  est la trajectoire de solution de (2.2.20) associée au contrôle  $u$ .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_1$  et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle  $u \in \mathcal{U}$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[0, T]$ , alors il existe une application  $\lambda(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue appelée vecteur adjoint et un réel  $\lambda^0 \leq 0$  tels que le couple  $(\lambda(\cdot), \lambda^0)$  soit non trivial, et tels que, pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda^0), \\ &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda^0) \end{aligned}$$

où  $H(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda^0) = \langle \lambda, f(t, x(t), u(t)) \rangle + \lambda^0 g(t, x(t), u(t))$  est l'Hamiltonien du système et à la condition de maximisation presque partout sur  $[0, T]$

$$H((t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda^0) = \max \left\{ (t, x(t), v, \lambda(t), \lambda^0), v \in \Omega \right\}$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$

## 2.3 Quelques notions utiles sur les matrices

**Définition. 2.3.1** Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. On dit que le vecteur  $x$  (respectivement la matrice  $A$ ), est strictement positif, et on note  $x \gg 0$  (respectivement  $A \gg 0$ ), si pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_i > 0$  (respectivement  $a_{ij} > 0$  pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ ).
2. On dit que le vecteur  $x$  (respectivement la matrice  $A$ ) est positif, et on note  $x > 0$  (respectivement  $A > 0$ ), si pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_i \geq 0$ ; et il existe au moins un  $i$  tel que  $x_i > 0$  (respectivement  $a_{ij} \geq 0$  pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ ; et pour au moins un couple  $(i, j)$ ,  $a_{ij} > 0$ ).
3. On dit que le vecteur  $x$  (respectivement la matrice  $A$ ) est positif largement et on note  $x \geq 0$  (respectivement  $A \geq 0$ ), si  $x > 0$  ou  $x = 0$  (respectivement  $A > 0$  ou  $A = 0$ ).

**Définition. 2.3.2** (Module de stabilité, rayon spectral). Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .

1. On appelle spectre de  $A$ , noté  $\text{Spec}(A)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .
2. On appelle module de stabilité de  $A$ , le nombre défini par :

$$\alpha(A) = \max\{\mathcal{R}_e(\lambda), \lambda \in \text{Spec}(A)\}.$$

Lorsque  $\alpha(A) < 0$ , alors on dira que la matrice  $A$  est stable.

3. On appelle rayon spectral de  $A$ , le nombre réel défini par :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Spec}(A)\}$$

4. On dit la matrice  $A$  est de **Hurwitz** si toutes ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives.

**Remarque. 2.3.1** Toute matrice de **Hurwitz** est stable.

**Définition. 2.3.3** On appelle matrice de **Metzler**, toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients extra-diagonaux sont positifs, c'est à dire  $a_{ij} \geq 0$  pour tout  $i \neq j$ .

**Théorème. 2.3.1** Si  $A$  est une matrice de **Metzler**, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est asymptotiquement stable,
- (ii)  $A$  est inversible et  $-A^{-1} \geq 0$ ,
- (iii) si  $b$  est un vecteur positif alors il existe un vecteur  $x$  positif tel que  $Ax + b = 0$ ,
- (iv) Il existe un vecteur  $c > 0$  tel que  $Ac \ll 0$ ,
- (v) Il existe  $c \gg 0$  tel que  $Ac \ll 0$ .

**Théorème. 2.3.2** (Varga). Soit  $A$  une matrice de **Metzler** inversible. Pour toute décomposition régulière de  $A$  de la forme de  $A = F + V$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $A$  est une matrice stable,
- (ii)  $\rho(-FV^{-1}) < 1$ .

# Chapitre 3

## Etude des modèles compartimentaux

*Dans ce chapitre, nous explorons un peu l'univers de la dynamique des populations et de la modélisation des maladies vectorielles. Nous y présentons quelques modèles utiles pour la suite de notre étude.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modélisation en dynamique des populations</b>	<b>28</b>
3.1.1	Modèle de la croissance exponentielle de <b>Malthus</b>	29
3.1.2	Modèle de la croissance logistique de <b>Verhulst</b>	29
<b>3.2</b>	<b>Quelques modèles épidémiologiques</b>	<b>30</b>
3.2.1	Premier modèle : <b>Daniel Bernoulli</b>	30
3.2.2	Les travaux de <b>Ronald Ross</b>	31
3.2.3	Modèle de type SIR/SI et SEIR/SEI	33

---

### 3.1 Modélisation en dynamique des populations

La dynamique des populations est une science qui explique la variation au cours du temps, du nombre d'individus dans une population. Elle est d'une utilité marginale assez grande dans la compréhension des phénomènes intervenant dans une population au cours de son évolution. La modélisation mathématique de la dynamique des populations n'est pas un phénomène récent. Cependant, elle a connu un progrès considérable au fil des siècles. De nombreux mathématiciens se sont investis considérablement dans cette discipline parmi lesquels, on trouve dans [23] et dans [21] les noms suivants :

- **Fibonacci** : fondation mathématique,
- **Buffon** : histoire naturelle,
- **Euler** : taux d'accroissement,
- **Malthus** : progression géométrique,
- **Verhulst** : croissance logistique,
- **Lotka** : bases scientifiques,

– **Volterra** : bases mathématiques.

Après la deuxième guerre mondiale, grâce aux travaux des auteurs comme **Leslie**, **Mac Arthur**, **Robert May**, **Ikka Hanski**, **Mats Gyllenberg** [21, 23, 4], l'étude de la dynamique des populations a connu de grandes avancées.

### 3.1.1 Modèle de la croissance exponentielle de Malthus

Le modèle de **Malthus**, [23, 19, 21], proposé en 1798 se fonde sur les hypothèses suivantes :

**(H1)** : pas de migrations des individus de la population

**(H2)** : le taux de natalité est proportionnel à la taille de la population  $N(t)$  à l'instant  $t$ .

Ainsi son modèle de croissance est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = (b - d)N(t) \quad (3.1.1)$$

avec  $b > 0$ ,  $d > 0$ .

–  $d$  le taux de mortalité,

–  $b$  le taux de natalité.

Ce modèle conduisant à une croissance exponentielle a l'inconvénient de ne pas tenir compte de la capacité du milieu à soutenir une croissance exponentielle.

### 3.1.2 Modèle de la croissance logistique de Verhulst

Le modèle logistique est un modèle de croissance proposé par **Pierre François Verhulst** vers 1840, [23, 20, 21]. Il a été proposé en réponse au modèle de **Malthus** qui proposait un taux d'accroissement constant sans frein conduisant à une croissance exponentielle de la population. **Verhulst** émet les hypothèses suivantes :

**(H1)** : le taux de natalité et le taux de mortalité sont des fonctions affines dépendantes de la taille de la population,

**(H2)** : lorsque les populations sont de petites tailles, elles ont tendance à croître.

Ce modèle conduit en temps continu à une fonction logistique. En notant :

–  $N(t)$  la taille de la population à l'instant  $t$ ,

–  $d$  le taux de mortalité,

–  $b$  le taux de natalité,

alors la taille de la population suit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = (b - d)N(t) \quad (3.1.2)$$

Comme  $b$  et  $d$  sont des fonctions affines alors  $b - d$  est une fonction affine. Ainsi, l'équation peut s'écrire :

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)(\alpha - \beta N(t)) \quad (3.1.3)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  des réels positifs. Puis en posant  $K = \frac{\alpha}{\beta}$ , l'équation devient alors

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) \quad (3.1.4)$$

- La fonction constante  $K$  est appelée capacité d'accueil et vérifie l'équation (3.1.3).
- Si  $b - d > 0$ , alors la population croît de façon exponentielle vers une densité infinie i.e  $N(t) \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .
- Si  $b = d$  alors la population reste constante,  $N(t) = N_0$  pour tout  $t \rightarrow +\infty$
- Si  $b - d < 0$  alors la population décroît de façon exponentielle vers une densité nulle i.e  $N(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Le problème de **Cauchy** associé à l'équation différentielle (3.1.4) relatif à la condition initiale  $(t_0, N_0)$  est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Ce système conduit à la solution logistique suivante :

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-(b-d)t}} \quad (3.1.6)$$

**Remarque. 3.1.1** On a les remarques suivantes :

- si  $b - d \leq 0$  alors  $N(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,
- si  $b - d < 0$  alors  $N(t) \rightarrow K$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Cependant,  $N(t) = K$  est une solution stationnaire. Dans ce cas, on a :

- $N(t)$  est décroissante pour tout  $t \geq 0$  si  $N_0 > K$ ,
- $N(t)$  est croissante pour tout  $t \geq 0$  si  $N_0 < K$ .

En général, lorsque la population n'est soumise à aucun aléa, sa densité atteint la capacité d'accueil  $K$ .

## 3.2 Quelques modèles épidémiologiques

### 3.2.1 Premier modèle : Daniel Bernoulli

Médecin, physicien et mathématicien, **Daniel Bernoulli** est un membre de cette illustre dynastie des savants de la ville de Bâle en Suisse, [11, 19]. En dehors de ses multiples contributions en mécanique des fluides, il est l'auteur de la première utilisation d'un modèle mathématique en médecine. A l'époque la variole faisait de nombreuses victimes, et il tenait à prouver le bien fondé d'une méthode qu'il avait importée de l'Orient : l'«*inoculation d'une personne saine par un pus infectant*». La méthode a été controversée. C'est dans ce contexte qu'en 1760 **Daniel Bernoulli** proposa à l'académie royale des

sciences de Paris son «*Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*». Il avança des arguments rationnels en faveur de l'inoculation, fondés sur un raisonnement mathématique. Bien que son modèle reçut un accueil mitigé, il est aujourd'hui considéré comme le texte fondateur de l'épidémiologie.

Pour l'élaboration de son modèle **Daniel Bernoulli**, [19, 6], adopta les hypothèses suivantes :

- (H1) : un individu infecté pour la première fois par la variole a une probabilité  $p$  de mourir et une probabilité  $1 - p$  de survivre indépendamment de son âge,
- (H2) : un individu a une probabilité  $q$  d'être infecté au cours de l'année indépendamment de son âge,
- (H3) : lorsqu'un individu survit après avoir été infecté par la variole, il est immunisé pour le reste de sa vie.

Il désigne par :

- $m(x)$  : la mortalité naturelle à l'âge  $x$  ;
- $S(x)$  : le nombre d'individus susceptibles à l'âge  $x$  n'ayant pas été infectés ;
- $R(x)$  : le nombre d'individus qui sont encore en vie à l'âge  $x$  et immunisés ;
- $P(x) = S(x) + R(x)$  le nombre total d'individus qui sont encore en vie à l'âge  $x$ .

La naissance correspond à  $x = 0$ , ainsi  $S(0) = P(0) = P_0$ .

Entre l'âge  $x$  et l'âge  $x + dx$  où  $dx$  est infiniment petit, la variation des différentes classes d'individus est donnée par le système ci-dessous :

$$\begin{cases} S'(x) = -qS(x) - m(x)S(x) \\ R'(x) = q(1 - p)S(x) - m(x)R(x) \\ P'(x) = -pqS(x) - m(x)P(x) \end{cases} \quad (3.2.7)$$

#### 3.2.2 Les travaux de Ronald Ross

A l'origine on pensait que le paludisme était causé par le mauvais air des marais, 'malaria' en latin. En 1880, **Laveran**, [30], un médecin militaire du service de santé des armées découvrit le protozoaire responsable de l'infection. **Laveran** reçut le prix Nobel de la physiologie et de la médecine en 1908.

**Ross** entre au service médical de l'armée de l'Inde en 1881. Quelques années plus tard, il décide de conduire des expériences en Inde pour prouver les hypothèses de **Laveran** et **Manson** que les moustiques sont les vecteurs responsables du paludisme. Chose qu'il réussit en 1897, en mettant en évidence le cycle du parasite dans le moustique. Cependant **Ross** s'est constamment battu pour établir l'acceptation de ce qu'il appelait son théorème du moustique. Ce théorème stipule que la réduction de la population de vecteurs était un moyen pour combattre le paludisme. Cette affirmation a connu une opposition farouche sous prétexte qu'il était impossible de débarrasser une région de tous ses moustiques. Donc il y aura toujours des moustiques et par conséquent le paludisme persistera. Cette



idée fut perçue comme vaine et non économique en termes de temps et de finances. Il était clair qu'un tel raisonnement n'est pas réaliste mais sa réfutation demande une justification quantitative c'est à dire mathématique. C'est cette nécessité de convaincre que le contrôle des moustiques est une mesure de santé publique efficace qui a conduit **Ross** à la construction de son modèle. L'étude de son modèle lui permit de prédire qu'en dessous d'un certain seuil critique de vecteurs, le paludisme disparaîtrait de lui-même.

**Remarque.** 3.2.1 *Relativement aux différents schémas qui suivront, les flèches en pointillés indiquent le sens de l'infection et les flèches pleines représentent le passage d'une classe à l'autre.*

Dans son modèle, **Ross** subdivise chacune des deux populations hôtes en deux compartiments fictifs de la façon suivante

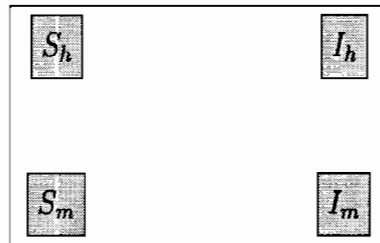


FIGURE 3.1 – Représentation compartimentale du modèle de type SI/SI de **Ross**

- $S_h(t)$  : population humaine susceptible à l'instant  $t$  ;
- $I_h(t)$  : population humaine infectieuse à l'instant  $t$  ;
- $S_m(t)$  : population de moustiques susceptibles à l'instant  $t$  ;
- $I_m(t)$  : population de moustiques infectieux à l'instant  $t$  ;
- $N_h(t)$  : population humaine totale à l'instant  $t$  ;
- $N_m(t)$  : population totale de moustiques à l'instant  $t$ .

**Ross** fait les hypothèses suivantes concernant son modèle.

- (H1) : Les deux populations hôtes (humains et moustiques) sont supposées constantes sur l'intervalle d'étude.
- (H2) : On suppose qu'il n'y a pas de surinfection et on néglige le temps d'incubation.
- (H3) : Compte tenu de sa durée de vie relativement courte, un moustique infecté n'a pas le temps de guérir.
- (H4) : Un humain susceptible devient infectieux à l'issue d'une piqûre d'un moustique infectieux et redevient susceptible après guérison ; et un moustique sain devient infectieux après piqûre d'un humain infectieux.

Ces hypothèses sont illustrées dans le schéma compartimental ci-dessous :

En passant aux proportions et en faisant le changement suivant :

$$x = \frac{I_h}{N_h}; \quad y = \frac{I_m}{N_m}; \quad m = \frac{N_m}{N_h}$$

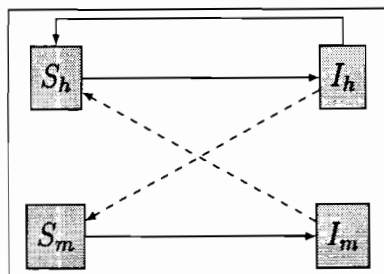


FIGURE 3.2 – Modèle de Ross.

Paramètres du modèle	
$a$	nombre moyen de pique fait par les moustiques par unité de temps
$b_{hm}$	probabilité qu'une piqûre par un moustique sain sur un humain infectieux transfère l'infection au moustique.
$b_{mh}$	probabilité qu'une piqûre par un moustique infectieux sur un humain susceptible soit infectante.
$\mu_h$	probabilité qu'un humain infecté succombe au paludisme.
$r_h$	probabilité qu'un humain infecté guérisse du paludisme.
$\mu_m$	taux de mortalité d'un moustique.

Tableau 3.1 – Paramètres d'interaction entre les deux populations

On obtient la relation :

$$\begin{cases} \dot{x} = mab_{hm}y(1-x) - rx \\ \dot{y} = ab_{mh}x(1-y) - \mu y \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Le modèle de Ross précédemment décrit est un modèle de type SI pour les deux types d'hôtes. Il décrit avec le même compartimentage l'évolution de la maladie chez les humains et chez les moustiques. Il y a également d'autres types de compartimentage comme les modèles de type SIR/SI, SEIR/SEI etc.

### 3.2.3 Modèle de type SIR/SI et SEIR/SEI

Dans les modèles de type SIR/SI, le compartimentage SIR est utilisé pour la population humaine et SI pour la population de moustiques. Comme c'est le cas par exemple du chikungunya étudié dans [19, 30], ce choix repose sur les hypothèses biologiques suivantes :

- (H1) : Absence de surinfection. Autrement dit, une fois qu'un humain a été infecté, il ne peut plus être infecté une nouvelle fois.
- (H2) : Un moustique infecté ne guérit pas en raison de sa courte durée de vie.

En rajoutant au modèle de type SIR/SI le compartiment E, composé des individus ayant subis une infection mais qui ne sont pas encore infectieux compte tenu du cycle intra-hôte du parasite, nous obtenons le modèle de type SEIR/SEI. Relativement aux modèles SIR/SI, les modèles SEIR/SEI se rapprochent beaucoup plus de la réalité et reposent sur les hypothèses suivantes :

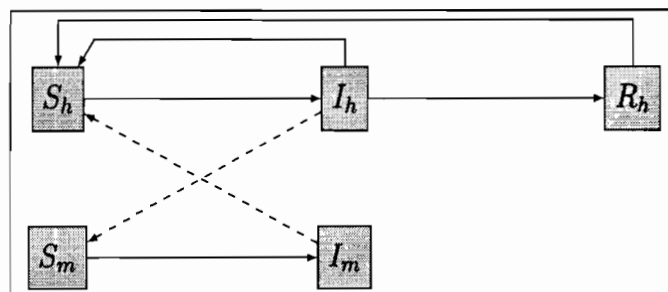


FIGURE 3.3 – Repartition compartimentale du modèle de type SIR/SI utilisé par Moulay pour le cas du chikungunya.

- (H1) : Absence de surinfection. Autrement dit, une fois qu'un humain a été infecté, il ne peut plus être infecté une nouvelle fois.
- (H2) : Compte tenu du cycle intra-hôte du parasite, un individu (humain et/ou vecteur) ayant subi une infection observe un temps de latence et passe ensuite à l'état infectieux
- (H3) : Un moustique infecté ne guérit pas en raison de sa courte durée de vie.

On le représente de la façon suivante :

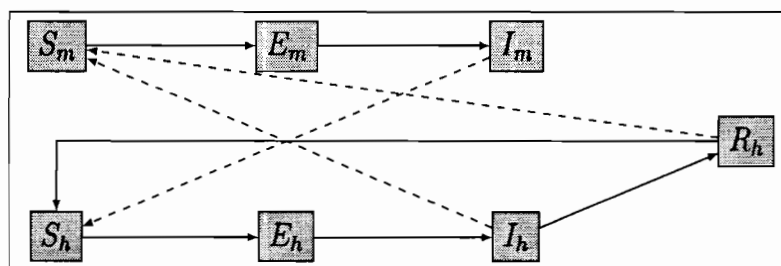


FIGURE 3.4 – Représentation compartimentale de l'interaction entre les hôtes humains et les moustiques pour le modèle SEIR/SEI.

Dans sa thèse, [38], **Pascal ZONGO** utilise ce type de compartimentage et il va plus loin en subdivisant la population humaine en deux catégories d'individus  $S_e E_e I_e$  qui sont des non-immuns et  $S_a E_a I_a$  qui sont semi-immuns. Les individus finissent dans la classe  $R_a$  des immunisés s'ils évoluent sans mourir. Nous utiliserons d'ailleurs son modèle de transmission dans la suite de notre travail.

Il existe beaucoup d'autres types de modèle. Tout compte fait, tous ces modèles répondent à des besoins spécifiques (hypothèses).

# Chapitre 4

## Modélisation et analyse mathématiques des modèles

*Dans ce chapitre nous présenterons d'abord des résultats entomologiques en vue de mieux appréhender la biologie de l'anophèle. A partir de ces enseignements, nous émettrons des hypothèses sur lesquelles repose notre modèle de la croissance dont les compartiments sont les «différents stades de l'évolution» de l'anophèle (œuf, larve, nymphe et adulte). Nous y proposerons également un modèle de la dynamique de propagation du paludisme. En plus du modèle synthétique présenté, nous ferons également une étude et une analyse singulière de chacun de ces trois modèles.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Vie de l'anophèle</b>	<b>36</b>
4.1.1	Ecologie de l'anophèle	36
4.1.2	Habitudes alimentaires de l'anophèle	36
4.1.3	Biologie de l'anophèle	37
<b>4.2</b>	<b>Modèle de la dynamique de croissance de l'anophèle</b>	<b>38</b>
<b>4.3</b>	<b>Analyse mathématique du modèle</b>	<b>40</b>
4.3.1	Existence et unicité de solution	40
4.3.2	Points d'équilibres	41
4.3.3	Positivité et bornage des solutions	47
4.3.4	Stabilité des équilibres	52
<b>4.4</b>	<b>Modèle de transmission du paludisme</b>	<b>62</b>
4.4.1	Mécanisme de transmission du paludisme	62
4.4.2	Construction du modèle	62
4.4.3	Interaction entre humains et moustiques	65
<b>4.5</b>	<b>Modèle synthétique croissance-transmission de la maladie</b>	<b>69</b>
<b>4.6</b>	<b>Analyse mathématique</b>	<b>71</b>
4.6.1	Existence et positivité de solution	73
4.6.2	Calcul du taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0$	74

4.6.3	Etude de la stabilité du point d'équilibre sans maladie . . . . .	76
4.6.4	Etude de l'influence du seuil $r$ sur $\mathcal{R}_0$ . . . . .	77

---

## 4.1 Vie de l'anophèle

Une activité de contrôle d'une maladie transmissible à l'homme par un vecteur qui se veut conséquente ne peut être exemptée du volet triptyque *parasite-vecteur-homme*. Nous avons donc besoin de comprendre la vie du vecteur. C'est dans ce contexte que nous faisons cas de quelques résultats entomologiques. En effet, l'entomologie médicale est en soi une véritable discipline scientifique dont nous avons un besoin indispensable pour l'étude des maladies vectorielles. Elle est basée notamment sur une identification spécifique des vecteurs et une connaissance approfondie de leurs écologies, leurs habitudes alimentaires et de leurs biologies.

### 4.1.1 Ecologie de l'anophèle

De façon générale, les gîtes larvaires de l'anophèle sont des eaux relativement propres par rapport à celles d'autres insectes. La connaissance des gîtes larvaires permet non seulement, d'associer certaines espèces d'anophèles à certaines formations végétales, ce qui permet de dresser des cartes écologiques identifiant les gîtes potentiels ; mais également d'apprécier l'influence des conditions environnementales sur l'intensité et la dynamique de transmission du paludisme.

### 4.1.2 Habitudes alimentaires de l'anophèle

L'agressivité de l'anophèle femelle augmente avec le coucher du soleil. Sa piqûre est en général indolore. Elle ne s'éloigne guère plus de 800 mètres de son gîte. Cependant, elle peut voyager clandestinement en avion ou en bateau, ce qui explique certains cas de paludisme chez des personnes n'ayant jamais quitté leurs zones sans paludisme comme l'Europe mais vivants à côté d'aéroports ou des ports.

Selon les espèces on distingue des anophèles de type :

- **endophages** : celles qui piquent à l'intérieur des habitations,
- **exophages** : celles qui piquent à l'extérieur des habitations,
- **antropophiles** : celles qui se nourrissent de préférence de sang humain,
- **zoophiles** : celles qui se nourrissent de préférence de sang animal,
- **antropozoophiles** : celles qui se nourrissent indifféremment de sang humain ou animal.

Logiquement, il y a un lien étroit entre endophilie et antropophilie, de même qu'entre exophilie et zoophilie. Ces caractéristiques peuvent paraître un peu théoriques mais ce sont elles qui rendront les anophèles plus ou moins aptes à transmettre facilement le

paludisme. Par exemple, plus un moustique est antropophile, plus sa capacité vectorielle augmente.

### 4.1.3 Biologie de l'anophèle

L'anophèle est un insecte à métamorphose complète (appelé insecte holométabole) de sorte que la larve, la nymphe et l'adulte ont des morphologies très différentes et adaptées à leurs modes de vie. En effet, dans la croissance de l'anophèle on distingue :

- (A) : une phase aquatique pour les stades immatures ou préimaginaux qui regroupent les œufs, les larves et les nymphes,
- (B) : une phase aérienne pour le stade adulte ou imaginal.

Cependant, chaque état a ses caractéristiques biologiques que nous pouvons exploiter dans la lutte anti-vectorielle. Dans les lignes qui suivent nous donnons de manière essentielle les caractéristiques des différents états de la croissance de l'anophèle.

#### - L'œuf

Les femelles anophèles vivent environs deux semaines à un mois et demi relativement aux conditions de leur milieu. Une femelle anophèle peut pondre tous les 2 à 3 jours 50 à 300 œufs. Les œufs ne résistent généralement pas au dessèchement du gîte. Ils éclosent 48 heures après l'oviposition. Ce délai est allongé lorsque la température diminue. Par exemple 2 et demi jours à 25°C et à environs 7 jours à 16°C. Les conditions du gîte ont une grande influence sur la croissance des œufs, [8, 18].

#### - La larve

Les larves vivent dans l'eau, s'alimentent des mues et respirent l'air atmosphérique. La durée de vie larvaire est d'une à deux semaines selon les conditions écologiques notamment la température. Mais elle est augmentée dans le cas d'hibernation qui peut s'effectuer à l'état larvaire généralement en zone tempérée. Il faut noter que la croissance des larves est aussi régulée par la capacité d'accueil des gîtes larvaires, [8].

#### - La nymphe

A la fin de la vie larvaire survient une métamorphose complète; la cuticule de la larve se fend longitudinalement pour laisser place à une nymphe aussi appelée pupa. Celle-ci représente le dernier stade de la vie pré-imaginale et de la phase aquatique. Sa durée de vie courte, est en général d'environ un à deux jours. Lors de cette phase se produisent des remaniements internes très importants qui permettent le passage en adulte. La nymphe présente quatre caractéristiques décrites dans [8] par les entomologistes **Pierre Carnevale** et **Vincent Robert** de la manière suivante :

- (a) Elle est remarquable par la coalescence de la tête et du thorax qui forment un céphalothorax volumineux auquel fait suite un abdomen segmenté en dix parties et terminé par deux palettes natatoires.
- (b) Elle est mobile grâce à des contractions brusques de l'abdomen qui lui permettent de se déplacer efficacement et d'échapper à des prédateurs.

- (c) Elle a deux trompettes respiratoires situées non plus à l'extrémité de l'abdomen comme la larve, mais reliées latéralement sur le céphalothorax. Ces trompettes respiratoires affleurent sur la surface de l'eau lorsque la nymphe est au repos.
- (d) Contrairement à la larve, la nymphe ne s'alimente pas.

### - L'adulte

La biologie de l'adulte est caractérisée par deux comportements principaux : l'alimentation et la reproduction qui, chez la femelle, s'accompagnent de la dispersion à la recherche successive de l'hôte vertébré, du site de repos et du gîte de ponte. L'ensemble de ces comportements s'inscrit dans le cycle gonotrophique qui ne concerne évidemment que la femelle. Les premiers jours de la vie imaginale permettent le durcissement de la cuticule, la prise de l'alimentation sucrée et la maturation des organes sexuels. Un délai de 24 heures est nécessaire à la femelle pour que ses pièces buccales durcissent assez pour pouvoir percer l'épiderme des hôtes vertébrés, [18, 7] et prendre un repas sanguin. La femelle a une durée de vie relativement plus longue que le mâle. Et la longévité est un facteur déterminant dans la transmission de la maladie, [8, 36].

Dans la suite nous désignerons l'état œuf par **E**, l'état larve par **L**, l'état nymphe aussi appelé pupa par **P** et enfin l'état adulte sera désigné par **A**.

## 4.2 Modèle de la dynamique de croissance de l'anophèle

Nous construisons dans cette partie un modèle de la croissance de l'anophèle en nous basant sur son cycle de vie ultérieurement décrit. Pour cela nous partons du modèle de croissance proposé par **D. Moulay** dans [19] en intégrant cette fois l'étape nymphe. Elle semble un peu proche de l'état larve, par contre ces deux états ont des caractéristiques biologiques différents. Il serait donc judicieux pour que notre modèle de croissance se rapproche davantage de la réalité, d'intégrer la phase nymphale. Il faut également noter que les aspects qui distinguent la nymphe de la larve (par exemple l'alimentation) pourraient être très utiles pour la lutte anti-vectorielle. Ainsi nous considérons dans notre modèle les stades suivants :

- $E(t)$  : le nombre d'œufs à l'instant  $t$  ;
- $L(t)$  : le nombre de larves à l'instant  $t$  ;
- $P(t)$  : le nombre de nymphes ou (pupa) à l'instant  $t$  ;
- $A(t)$  : le nombre d'adultes femelles présentes à l'instant  $t$ .

En explicitant les différents taux de transfert comme suit, les différents stades de la croissance de l'anophèle sont représentés par le graphe de la figure 4.1 : où :

- $b$  : est le taux de ponte intrinsèque des femelles ;
- $s_E, s_L, s_P$  : sont les taux de transferts respectifs du stade œuf au stade larve, du stade larve au stade nymphe et du stade nymphe au stade d'adulte ;

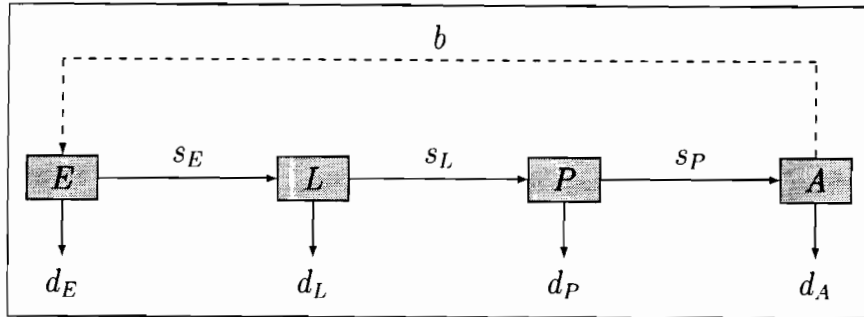


FIGURE 4.1 – Représentation compartimentale des différents stades de la croissance de l'anophèle

- $d_E, d_L, d_P, d_A$  : sont les taux de mortalité naturelle des oeufs, des larves, des nymphes et des adultes respectivement.

(H1) : On suppose que le taux de ponte intrinsèque est proportionnel au nombre de femelles présentes dans la zone.

En dynamique des populations la variation d'une classe est donnée par la formule suivante :

$$\text{variation d'une classe} = \text{entrants} - \text{sortants}$$

Et dans notre contexte, les sortants sont représentés par les transferts et les morts. Ainsi

$$(*) \quad \text{variation d'une classe} = \text{entrants} - (\text{transferts} + \text{morts})$$

En utilisant la relation (\*), la figure 4.1 peut être interprétée par le modèle simple structuré par classe ci-dessous :

$$\begin{cases} E'(t) = bA(t) - (s_E + d_E)E(t) \\ L'(t) = s_E E(t) - (s_L + d_L)L(t) \\ P'(t) = s_L L(t) - (s_P + d_P)P(t) \\ A'(t) = s_P P(t) - d_A A(t) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Dans le modèle décrit précédemment, seuls sont pris en compte les phénomènes d'explosion et d'extinction des différentes classes de la population. Il n'est pas tenu compte des possibilités qu'offre le milieu en terme de surface et de ressources alimentaires. Ces paramètres sont pourtant très importants pour l'épanouissement des différentes classes. En considérant la biologie, les habitudes alimentaires, l'écologie de l'anophèle, nous émettons les hypothèses supplémentaires suivantes sur le modèle.

(H2) : La croissance des œufs est régulée par une capacité d'accueil du gîte larvaire. En effet, les femelles anophèles sont dotées d'une capacité à détecter le meilleur gîte de ponte assurant le développement des nouveaux œufs. Plus précisément, on observe dans les gîtes de ponte très peuplés, deux types de comportements ; soit les femelles vont plus loin pour pondre soit elles déposent moins d'œufs.



- (H3) : Il faut noter que les larves respirent et ont besoin de s'alimenter. Si les ressources du milieu s'avèrent insuffisantes, on observe un comportement cannibale chez les larves. Donc leur croissance est régulée par une capacité du milieu. Cependant cet effet de cannibalisme ne sera pas pris en compte dans le présent modèle.
- (H4) : Les nymphes ne s'alimentent pas. Cependant, comme les larves elles ont une respiration aérienne et se déplacent assez facilement. C'est dans cette phase qu'a lieu une métamorphose complète permettant le passage à la phase adulte, [8].

Toutes ces hypothèses nous conduisent à l'introduction de termes non-linéaires comme dans [33] aussi appelés coefficients logistiques, relatifs aux œufs, aux larves et aux nymphes. Notre modèle final est donc décrit comme suit :

$$\begin{cases} E'(t) = bA(t) \left(1 - \frac{E(t)}{K_E}\right) - (s_E + d_E)E(t) \\ L'(t) = s_E E(t) \left(1 - \frac{L(t)}{K_L}\right) - (s_L + d_L)L(t) \\ P'(t) = s_L L(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K_P}\right) - (s_P + d_P)P(t) \\ A'(t) = s_P P(t) - d_A A(t) \end{cases} \quad (4.2.2)$$

où :

- $K_E, K_L, K_P$  : sont les capacités maximales d'accueil respectives des œufs, des larves et des nymphes ;
- $\left(1 - \frac{E(t)}{K_E}\right)$  est le taux de renouvellement des œufs ;
- $\left(1 - \frac{L(t)}{K_L}\right)$  est le taux de renouvellement des larves ;
- $\left(1 - \frac{P(t)}{K_P}\right)$  est le taux de renouvellement des nymphes.

Le modèle (4.2.2) est biologiquement bien défini sur l'ensemble

$$\Delta = \left\{ (E, L, P, A) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 0 \leq E \leq K_E \\ 0 \leq L \leq K_L \\ 0 \leq P \leq K_P \\ 0 \leq A \leq \frac{s_L}{d_A} K_L \end{array} \right\}$$

## 4.3 Analyse mathématique du modèle

### 4.3.1 Existence et unicité de solution

Le modèle (4.2.2) est décrit par un système autonome linéaire d'équations différentielles du premier ordre. On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$X'(t) = F(X(t)),$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} E(t) \\ L(t) \\ P(t) \\ A(t) \end{pmatrix}$$

et  $F$  est la fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^4$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$  définie par :

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx_4 \left(1 - \frac{x_1}{K_E}\right) - (s_E + d_E)x_1 \\ s_E x_1 \left(1 - \frac{x_2}{K_L}\right) - (s_L + d_L)x_2 \\ s_L x_2 \left(1 - \frac{x_3}{K_P}\right) - (s_P + d_P)x_3 \\ s_P x_3 - d_A x_4 \end{pmatrix}$$

où  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ . Comme  $F$  est de classe  $C^1$ , donc localement lipschitzienne, sur  $\mathbb{R}^4$ , on en déduit l'existence et l'unicité de la solution maximale au problème de **Cauchy** associé à l'équation différentielle (4.2.2) relatif à la condition initiale  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ . De plus  $F$  étant  $C^\infty$ , on en déduit que cette solution est aussi de classe  $C^\infty$ .

Dans la suite, on se restreint aux domaines de définition suivants :

$$\mathbb{R}_+^4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_+^{*4} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x > 0, y > 0, z > 0, t > 0\}$$

### 4.3.2 Points d'équilibres

Considérons le seuil  $r$  de régulation de la croissance des moustiques définit par

$$r = \left(\frac{b}{s_E + d_E}\right) \left(\frac{s_E}{s_L + d_L}\right) \left(\frac{s_L}{s_P + d_P}\right) \left(\frac{s_P}{d_A}\right).$$

**Proposition. 4.3.1** 1. Si  $r = 1$  le système (4.2.2) possède un équilibre trivial

$$X_0^* = (0, 0, 0, 0).$$

2. Si le seuil  $r < 1$ , le système (4.2.2) ne possède pas d'autres points d'équilibres.

3. si le seuil  $r > 1$ , le système (4.2.2) possède un unique point d'équilibre endémique défini par :

$$X^* = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \begin{pmatrix} \frac{K_E}{\chi_E} \\ \frac{\chi_E}{K_L} \\ \frac{\chi_L}{K_P} \\ \frac{\chi_P}{s_P K_P} \\ \frac{d_A \chi_P}{s_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^* \\ L^* \\ P^* \\ A^* \end{pmatrix}$$

### 4.3. ANALYSE MATHÉMATIQUE DU MODÈLE

où

$$\chi_E = 1 + \frac{(s_E + d_E)(E_{11} - E_{12} - E_{13})}{bs_Es_Ls_P[bs_Es_Ls_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)d_A]K_EK_LK_P};$$

où,  $E_{11}, E_{12}, E_{13}$  sont définis comme suit :

$$E_{11} = b^2s_E^2s_L^2s_P^2K_EK_L + b^2s_E^2s_Ls_P^2(s_P + d_P)K_EK_P + b^2s_Es_Ls_P^2(s_L + d_L)(s_P + d_P)K_P;$$

$$E_{12} = bs_Es_Ls_P(s_L + d_L)(s_P + d_P)K_EK_LK_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L)^2(s_P + d_P)^2d_AK_EK_LK_P;$$

$$E_{13} = bs_Es_Ls_P(s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)d_AK_EK_L + bs_Es_P(s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)^2d_AK_EK_P \\ + bs_P(s_E + d_E)(s_L + d_L)^2(s_P + d_P)^2d_AK_P;$$

$$\chi_L = 1 + \frac{(L_{11} + L_{12} + L_{13} - L_{14} - L_{15} - L_{16})(s_E + d_E)(s_L + d_L)^2}{bs_E^2s_Ls_P[bs_Es_Ls_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)d_A]K_E^2K_LK_P};$$

avec

$$L_{11} = b^2s_E^2s_L^2s_P^2(s_E + d_E)(s_P + d_P)K_EK_L;$$

$$L_{12} = b^2s_E^2s_Ls_P^2(s_E + d_E)(s_P + d_P)^2K_EK_P;$$

$$L_{13} = b^2s_E^2s_Ls_P^2(s_E + d_E)(s_P + d_P)^2K_P;$$

$$L_{14} = bs_Es_Ls_P(s_E + d_E)(s_P + d_P)d_AK_EK_L;$$

$$L_{15} = bs_Es_P(s_E + d_E)(s_P + d_P)^2d_AK_EK_P;$$

$$L_{16} = bs_P(s_L + d_L)(s_P + d_P)^2d_AK_P.$$

et enfin

$$\chi_P = 1 + \frac{(s_Es_PK_E + (s_L + d_L))(s_P + d_P)s_P}{bs_Es_Ls_PK_E - (bs_Es_PK_E - b(s_L + d_L)s_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L))(s_P + d_P)d_AK_E}.$$

**Preuve :** La recherche des points d'équilibre nous conduit à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} E' = 0 \\ L' = 0 \\ P' = 0 \\ A' = 0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} bA \left(1 - \frac{E}{K_E}\right) - (s_E + d_E)E = 0 \\ s_EE \left(1 - \frac{L}{K_L}\right) - (s_L + d_L)L = 0 \\ s_LL \left(1 - \frac{P}{K_P}\right) - (s_P + d_P)P = 0 \\ s_PP - d_AA = 0 \end{cases} \quad (4.3.4)$$

### 4.3. ANALYSE MATHÉMATIQUE DU MODÈLE

- De  $s_P P - d_A A = 0$ , on tire  $A = \frac{s_P}{d_A} P$ .

- En remplaçant  $A$  dans l'expression de  $E$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{b s_P}{d_A} P \left(1 - \frac{E}{K_E}\right) - (s_E + d_E) E &= 0 \Rightarrow \frac{b s_P}{d_A} P - \frac{b s_P}{d_A} P \frac{E}{K_E} - (s_E + d_E) E = 0 \\ \Rightarrow \left[ b \frac{s_P}{d_A K_E} P + (s_E + d_E) \right] E &= b \frac{s_P}{d_A} P \Rightarrow E = \frac{b \frac{s_P}{d_A} P}{\left[ b \frac{s_P}{d_A K_E} P + (s_E + d_E) \right]} \end{aligned}$$

- De même en remplaçant  $E$  dans l'expression de  $L$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{b s_E s_P}{d_A} P}{\left[ b \frac{s_P}{d_A K_E} P + (s_E + d_E) \right]} \left(1 - \frac{L}{K_L}\right) - (s_L + d_L) L &= 0 \\ \Rightarrow \frac{b s_E s_P}{d_A K_E} P - \frac{b s_E s_P}{d_A K_E K_L} P L - (s_L + d_L) \left( \frac{b s_P}{d_A K_E} P + (s_E + d_E) \right) L &= 0 \\ \Rightarrow \left( \frac{b s_E s_P}{d_A K_L} P + \frac{b s_P (s_L + d_L)}{d_A K_E} P + (s_E + d_E) (s_L + d_L) \right) L &= \frac{b s_E s_P}{d_A} P \\ \text{d'où } L &= \frac{\frac{b s_E s_P}{d_A} P}{\left( \frac{b s_E s_P K_E + b s_P K_L (s_L + d_L)}{d_A K_E K_L} \right) P + (s_E + d_E) (s_L + d_L)} \end{aligned}$$

- Remplaçons maintenant  $L$  dans l'expression de  $P$ , alors :

$$\frac{b s_E s_L s_P}{d_A} \left(1 - \frac{P}{K_P}\right) P - (s_P + d_P) \left( \frac{b s_E s_P K_E + b s_P K_L (s_L + d_L)}{d_A K_E K_L} \right) (P)^2$$

$$-(s_E + d_E) (s_L + d_L) (s_P + d_P) P = 0$$

Si  $P = 0$  alors  $A = L = E = 0$  et on obtient le point d'équilibre trivial  $X_0^* = (0, 0, 0, 0)$

- Supposons  $P \neq 0$ . Alors en simplifiant par  $P$  on obtient :

$$\frac{b s_E s_L s_P}{d_A} \left(1 - \frac{P}{K_P}\right) - \frac{b s_E s_P (s_P + d_P) K_E + b s_P K_L (s_L + d_L) (s_P + d_P)}{d_A K_E K_L} P$$

$$-(s_E + d_E) (s_L + d_L) (s_P + d_P) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b s_E s_L s_P}{d_A} - \frac{b s_E s_L s_P}{d_A K_P} P - \frac{b s_E s_P (s_P + d_P) K_E + b s_P K_L (s_L + d_L) (s_P + d_P)}{d_A K_E K_L} P$$

$$\begin{aligned}
 &= (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P) \\
 &\Rightarrow \left( \frac{bs_{ES} s_P (s_P + d_P) K_E + bs_P K_L (s_L + d_L) (s_P + d_P)}{d_A K_E K_L} + \frac{bs_{ES} s_L s_P}{d_A K_P} \right) P \\
 &= \frac{bs_{ES} s_L s_P}{d_A} - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P) \\
 &\Rightarrow P = \frac{\frac{bs_{ES} s_L s_P}{d_A} - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)}{\frac{bs_{ES} s_P (s_P + d_P) K_E + bs_P K_L (s_L + d_L) (s_P + d_P)}{d_A K_E K_L} + \frac{bs_{ES} s_L s_P}{d_A K_P}} \\
 &\Rightarrow P = \frac{bs_{ES} s_L s_P - d_A (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)}{\frac{bs_{ES} s_P (s_P + d_P) K_E K_P + bs_P (s_L + d_L) (s_P + d_P) K_P + bs_{ES} s_L s_P K_E K_L}{d_A K_E K_L K_P}}
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } P = \frac{(bs_{ES} s_L s_P - d_A (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)) K_E K_L K_P}{bs_{ES} s_L s_P K_E K_L + bs_{ES} s_P (s_P + d_P) K_E K_P + bs_P (s_L + d_L) (s_P + d_P) K_P}$$

Cela est une expression de  $P$  en fonction des constantes du modèle. Et comme nous avons déjà exprimé  $A$ ,  $E$  et  $L$  en fonction de  $P$  alors :

$$A = \frac{s_P}{d_A} \times \frac{(bs_{ES} s_L s_P - d_A (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)) K_E K_L K_P}{bs_{ES} s_L s_P K_E K_L + bs_{ES} s_P (s_P + d_P) K_E K_P + bs_P (s_L + d_L) (s_P + d_P) K_P};$$

$$E = \frac{\frac{bs_P}{d_A} \times \frac{[bs_{ES} s_L s_P - d_A (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)] K_E K_L K_P}{[bs_{ES} s_L s_P K_E K_L + bs_{ES} s_P (s_P + d_P) K_E K_P + bs_P (s_L + d_L) (s_P + d_P) K_P]}}{\frac{bs_P}{d_A K_E} \times \frac{[bs_{ES} s_L s_P - d_A (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)] K_E K_L K_P}{[bs_{ES} s_L s_P K_E K_L + bs_{ES} s_P (s_P + d_P) K_E K_P + bs_P (s_L + d_L) (s_P + d_P) K_P]} + (s_E + d_E)}$$

- En arrangeant soigneusement, on obtient  $E$  comme suit :

$$E = \frac{E_1}{E_2}$$

où :

$$E_1 = [bs_{ES} s_L s_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P) d_A] K_E K_L K_P$$

et

$$\begin{aligned}
 E_2 = & s_{ES} s_L (s_E + d_E) d_A K_E K_L + s_E (s_E + d_E) (s_P + d_P) d_A K_E K_P + (s_E + d_E) (s_L + d_L) (s_P + d_P) d_A K_P \\
 & + [bs_{ES} s_L s_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P) d_A] K_L K_P
 \end{aligned}$$

- De même

$$L = \frac{L_1}{L_2}$$

avec

$$L_1 = [bs_{ESLSP} - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)d_A]K_E^2K_L^2K_P$$

et

$$L_2 = s_E[bs_{ESLSP} - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)d_A]K_E^2K_LK_P + bs_{ESLSP}(s_E + d_E)(s_L + d_L)K_EK_L \\ + bs_{ESP}(s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)K_EK_P + bs_P(s_L + d_L)^2(s_P + d_P)K_P$$

- Comme le seuil  $r$  vaut :

$$r = \left( \frac{b}{s_E + d_E} \right) \left( \frac{s_E}{s_L + d_L} \right) \left( \frac{s_L}{s_P + d_P} \right) \left( \frac{s_P}{d_A} \right);$$

alors nous obtenons :

$$\left( 1 - \frac{1}{r} \right) = 1 - \frac{(s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)d_A}{bs_{ESLSP}}$$

et

$$P^* = \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \frac{K_P}{\chi_P}$$

où

$$\chi_P = 1 + \frac{(s_{ESP}K_E + (s_L + d_L))(s_P + d_P)s_P}{bs_{ESLSP}K_E - (bs_{ESP}K_E - b(s_L + d_L)s_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L))(s_P + d_P)d_AK_E}$$

Si  $r = 1$  alors  $P^* = 0$ .

Si  $r < 1$  alors  $P^* < 0$  ce qui est absurde car  $P^*$  est une quantité positive.

Et si  $r > 1$  alors  $P^*$  est bien défini.

- Comme

$$A^* = \frac{s_P}{d_A} P^*$$

alors

$$A^* = \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{s_P}{d_A} \times \frac{K_P}{\chi_P} \right)$$

Si  $r = 1$  alors  $A^* = 0$ .

Si  $r < 1$  alors  $A^* < 0$  ce qui est absurde.

Enfin si  $r > 1$  alors  $A^*$  est bien défini.

– De manière similaire,  $E^*$  est défini par :

$$E^* = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{K_E}{\chi_E}.$$

D'où l'on obtient

$$\chi_E = 1 + \frac{(E_{11} - E_{12} - E_{13})(s_E + d_E)}{bs_Es_Ls_P[bs_Es_Ls_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)d_A]K_EK_LK_P}$$

où,  $E_{11}, E_{12}, E_{13}$  sont définis :

$$E_{11} = b^2s_E^2s_L^2s_P^2K_EK_L + b^2s_E^2s_Ls_P^2(s_P + d_P)K_EK_P + b^2s_Es_Ls_P^2(s_L + d_L)(s_P + d_P)K_P$$

$$E_{12} = bs_Es_Ls_P(s_L + d_L)(s_P + d_P)K_EK_LK_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L)^2(s_P + d_P)^2d_AK_EK_LK_P$$

$$E_{13} = bs_Es_Ls_P(s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)d_AK_EK_L + bs_Es_P(s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)^2d_AK_EK_P \\ + bs_P(s_E + d_E)(s_L + d_L)^2(s_P + d_P)^2d_AK_P;$$

Lorsque  $r = 1$  alors  $E^* = 0$  et si  $r < 1$  alors  $E^* < 0$  ce qui est absurde. Par contre  $E^*$  est bien défini si  $r > 1$ .

– par ailleurs,  $L^*$  est aussi défini par :

$$L^* = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \times \frac{K_L}{\chi_L}$$

où  $\chi_L$  vaut :

$$\chi_L = 1 + \frac{(L_{11} + L_{12} + L_{13} - L_{14} - L_{15} - L_{16})(s_E + d_E)(s_L + d_L)^2}{bs_E^2s_Ls_P[bs_Es_Ls_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)d_A]K_E^2K_LK_P}$$

avec

$$L_{11} = b^2s_E^2s_L^2s_P^2(s_E + d_E)(s_P + d_P)K_EK_L$$

$$L_{12} = b^2s_E^2s_Ls_P^2(s_E + d_E)(s_P + d_P)^2K_EK_P$$

$$L_{13} = b^2s_E^2s_Ls_P^2(s_E + d_E)(s_P + d_P)^2K_P$$

$$L_{14} = bs_Es_Ls_P(s_E + d_E)(s_P + d_P)d_AK_EK_L$$

$$L_{15} = bs_Es_P(s_E + d_E)(s_P + d_P)^2d_AK_EK_P$$

$$L_{16} = bs_P(s_L + d_L)(s_P + d_P)^2d_AK_P$$

Si  $r = 1$  alors  $L^* = 0$  et si  $r < 1$  alors  $L^* < 0$  ce qui est absurde. Mais pour  $r > 1$  alors  $L^*$  est bien défini.

En résumé

- si le seuil  $r = 1$  on obtient le point d'équilibre trivial  $X_0^* = (0, 0, 0, 0)$ ,
- si le seuil  $r < 1$  alors le système (4.2.2) n'admet pas de point d'équilibre.
- si le seuil  $r > 1$  alors le système (4.2.2) admet un unique point d'équilibre  $X^* = (E^*, L^*, P^*, A^*)$  où  $E^*, L^*, P^*$  et  $A^*$  sont précédemment décrits.

### 4.3.3 Positivité et bornage des solutions

**Proposition. 4.3.2** Soient  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^4$  et  $([t_0, T[, X = (E, L, P, A)), (T \in ]t_0, +\infty])$  une solution maximale du problème de **Cauchy** associé à (4.2.2) muni de la condition initiale  $(t_0, X_0)$ .

Alors,

$$\forall t \geq t_0, X(t) \in \mathbb{R}_+^4$$

**Preuve :** Comme  $X$  est de classe  $C^\infty$ , elle admet des développements limités d'ordre 1 ou d'ordre 2.

Procédons par l'absurde.

Supposons donc qu'il existe  $\bar{t}_1 > t_0$  tel que

$$\forall t > \bar{t}_1, X(t) \notin \mathbb{R}_+^4 \quad (4.3.5)$$

On pose

$$t_1 = \min\{t/X(t) \notin \mathbb{R}_+^4\}, \quad (4.3.6)$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, t_0 \leq t < t_1, X(t) \in \mathbb{R}_+^4.$$

Il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$\forall t_1 \leq t < t_1 + \epsilon, X(t) \notin \mathbb{R}_+^4 \quad (4.3.7)$$

On sait que  $X^* = (0, 0, 0, 0)$  est un point d'équilibre. Alors par unicité des solutions, on a  $X(t_1) \neq (0, 0, 0, 0)$ .

Pour  $t = t_1$ , nous pouvons énumérer douze cas possibles. En l'occurrence,

$$\begin{aligned} & (0, L(t_1), P(t_1), A(t_1)), (0, 0, P(t_1), A(t_1)), (0, 0, 0, A(t_1)), (E(t_1), L(t_1), P(t_1), 0) \\ & (E(t_1), L(t_1), 0, 0), (E(t_1), 0, 0, 0), (E(t_1), 0, 0, A(t_1)), (0, L(t_1), P(t_1), 0) \\ & (E(t_1), 0, P(t_1), 0), (0, L(t_1), 0, A(t_1)), (0, L(t_1), 0, 0), (0, 0, P(t_1), 0) \end{aligned}$$

avec  $E(t_1)$ ,  $L(t_1)$ ,  $P(t_1)$  et  $A(t_1)$  respectivement strictement positifs.

1. Considérons le cas  $X(t_1) = (0, L(t_1), P(t_1), A(t_1))$ , où  $(L(t_1), P(t_1), A(t_1)) \in \mathbb{R}_+^{*3}$ . La première équation du système (4.2.2) devient alors  $E'(t_1) = bA(t_1) > 0$  car  $A(t_1) > 0$  et  $E(t_1) = 0$ . Comme  $X(t)$  est de classe  $C^\infty$ , chacune de ses composantes l'est ; et par suite un développement limité d'ordre 1 de  $E(t)$  au voisinage de  $t_1$  est donné par :

$$E(t) = E'(t_1)(t - t_1) + o(t - t_1), t \rightarrow t_1.$$

Ainsi il existe  $\bar{\epsilon} > 0$  tel que pour tout  $t \in ]t_1; t_1 + \bar{\epsilon}]$ , on a  $E(t) > 0$ . De plus, par continuité, il existe  $\bar{\bar{\epsilon}} > 0$  tel que  $L(t) > 0$ ,  $P(t) > 0$  et  $A(t) > 0$  et cela pour tout  $t \in [t_1; t_1 + \bar{\bar{\epsilon}}]$ , d'où,  $t \in [t_1; t_1 + \min\{\bar{\epsilon}, \bar{\bar{\epsilon}}\}]$ ,

$$X(t) \in \mathbb{R}_+^4.$$

Ce résultat contredit la définition de  $t_1$  dans (4.3.6).



2. Considérons  $X(t_1) = (0, 0, 0, A(t_1))$  avec  $A(t_1) > 0$ . On montre comme précédemment (à l'aide d'un dl à l'ordre 2 de  $L(t)$ ), qu'il existe  $\bar{\epsilon} > 0$  tel que pour tout  $t \in ]t_1; t_1 + \bar{\epsilon}]$  on a,  $L(t) > 0$ . De plus, on a  $P(t_1) = 0$ ,  $P'(t_1) = 0$ ,  $P''(t_1) = 0$  et  $P'''(t_1) = s_L L''(t_1)$ . Et comme  $L''(t_1) = s_E E'(t_1) = s_E b A(t_1) > 0$  car  $A(t_1) > 0$ , on a alors  $P'''(t_1) = s_E s_L b A(t_1) > 0$ . Par suite, un développement limité à l'ordre 3 de  $P(t)$  est donné par :

$$P(t) = P'''(t_1) \frac{(t - t_1)^3}{6} + o((t - t_1)^3), t \rightarrow t_1.$$

On en déduit qu'il existe  $\bar{\epsilon} > 0$  tel que pour tout  $t \in ]t_1; t_1 + \bar{\epsilon}]$ , on a

$$P(t) > 0$$

et par suite, comme  $A(t_1) > 0$ , il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que pour tout  $t \in ]t_1; t_1 + \epsilon_1]$ , on a

$$X(t) \in \mathbb{R}_+^4$$

ce qui contredit la condition (4.3.7).

3. On procède de la même manière pour tous les autres cas ci-dessus énumérés.

**Lemme. 4.3.1** *L'ensemble*

$$\Delta = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq K_E \\ 0 \leq y \leq K_L \\ 0 \leq z \leq K_P \\ 0 \leq t \leq \frac{s_L}{d_A} K_L \end{array} \right. \right\}$$

*est positivement invariant par le système (4.2.2).*

**Preuve :** Soit  $(t_0, X_0 = (E_0, L_0, P_0, A_0)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^4$  et  $([t_0, T[, X = (E, L, P, A))$  une solution maximale du problème de **Cauchy** associé à (4.3.3) muni de la condition initiale  $(t_0, X_0)$ ,  $(T \in ]t_0, +\infty])$ . Soit  $t_1 \in [t_0, T[$ . Nous devons montrer que

- si  $E(t_1) \leq K_E$  alors pour tout  $t_1 \leq t \leq T$ ,  $E(t) \leq K_E$
- si  $L(t_1) \leq K_L$  alors pour tout  $t_1 \leq t \leq T$ ,  $L(t) \leq K_L$
- si  $P(t_1) \leq K_P$  alors pour tout  $t_1 \leq t \leq T$ ,  $P(t) \leq K_P$
- si  $A(t_1) \leq \frac{s_L}{d_A} K_P$  alors pour tout  $t_1 \leq t \leq T$ ,  $A(t) \leq \frac{s_L}{d_A} K_P$

1. En effet montrons que, pour tout  $t \in [t_0; T[, E(t) \leq K_E$ .

On suppose qu'il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que  $t_1 \leq t_1 + \epsilon_1 < T$  et  $E(t_1 + \epsilon_1) > K_E$ . On pose

$$t_1^* = \inf\{t \geq t_1 | E(t) > K_E\}$$

Puisque  $E(t_1^*) = K_E$ , alors un développement limité à l'ordre 1 de  $E(t)$  au voisinage de  $t_1^*$  est donné par :

$$E(t) = K_E + E'(t_1^*)(t - t_1^*) + o(t - t_1^*), t \rightarrow t_1^*$$

De plus d'après la première équation du système (4.2.2) on obtient en substituant  $E(t_1^*)$  par  $K_E$  :

$$E'(t_1^*) = -(s_E + d_E)K_E < 0,$$

donc il existe  $\bar{\epsilon}$  tel que pour tout  $t_1^* \leq t < t_1^* + \bar{\epsilon}$ ,  $E(t) < K_E$ , ce qui est absurde du fait de notre hypothèse. On en déduit que pour tout  $t \in [t_0; T[$ ,  $E(t) \leq K_E$ .

2. Montrons maintenant que pour tout  $t \in [t_0; T[$ ,  $L(t) \leq K_L$

On suppose qu'il existe  $\epsilon_1$  tel que pour tout  $t_1 \leq t_1 + \epsilon_1 < T$  et,  $L(t_1 + \epsilon_1) > K_L$ . On pose

$$t_1^* = \inf\{t \geq t_1 | L(t) > K_L\}$$

On sait que  $L(t_1^*) = K_L$ , donc un développement de  $L(t)$  à l'ordre 1 au voisinage de  $t_1^*$  s'écrit :

$$L(t) = K_L + L'(t_1^*)(t - t_1^*) + o(t - t_1^*), t \rightarrow t_1^*.$$

De la deuxième équation du système (4.2.2), on obtient en remplaçant  $L(t_1^*)$  par  $K_L$  que

$$L'(t_1^*) = -(s_L + d_L)K_L.$$

Et donc  $L'(t_1^*) < 0$ . Par conséquent, il existe  $\bar{\epsilon} > 0$  tel que pour tout  $t_1^* \leq t < t_1^* + \bar{\epsilon}$ ,  $L(t) < K_L$ . Ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi pour tout  $t \in [t_0; T[$ ,  $L(t) \leq K_L$ .

3. Montrons aussi que pour tout  $t \in [t_0; T[$ ,  $P(t) \leq K_P$

On suppose qu'il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que  $t_1 \leq t_1 + \epsilon_1 < T$  et  $P(t_1 + \epsilon_1) > K_P$ . On pose

$$t_1^* = \inf\{t \geq t_1 | P(t) > K_P\}$$

Comme  $P(t_1^*) = K_P$ , alors un développement limité à l'ordre 1 de  $P(t)$  au voisinage de  $t_1^*$  est donné par :

$$P(t) = K_P + P'(t_1^*)(t - t_1^*) + o(t - t_1^*), t \rightarrow t_1^*$$

De plus d'après la troisième équation du système (4.2.2) on obtient en substituant  $P(t_1^*)$  par  $K_P$  :

$$P'(t_1^*) = -(s_P + d_P)K_P < 0,$$

par suite, il existe  $\bar{\epsilon} > 0$  tel que pour tout  $t_1^* \leq t < t_1^* + \bar{\epsilon}$   $P(t) < K_P$ , ce qui est absurde du fait de notre hypothèse. On en déduit que pour tout  $t \in [t_0; T[$ ,  $P(t) \leq K_P$ .

4. Montrons enfin que pour tout  $t \in [t_0; T[$ ,  $A(t) \leq \frac{s_P}{d_A}K_P$

On suppose l'existence d'un  $\epsilon_1 > 0$  tel que  $t_1 \leq t_1 + \epsilon_1 < T$   $A(t_1 + \epsilon_1) > \frac{s_P}{d_A}K_P$ .

On pose

$$t_1^* = \inf\left\{t \geq t_1, A(t) > \frac{s_P}{d_A}K_P\right\}.$$

On a  $A(t_1^*) = \frac{s_P}{d_A}K_P$ , et par ailleurs, puisque  $P(t_1^*) = K_P$ , alors

$$A'(t_1^*) = s_P P(t_1^*) - d_A A(t_1^*) = s_P K_P - d_A \times \frac{s_P}{d_A} K_P = 0$$

i.e.  $A'(t_1^*) = 0$  et

$$A''(t_1^*) = s_P P'(t_1^*) - d_A A'(t_1^*) = s_P P'(t_1^*) = -s_P(s_P + d_P)K_P$$

i.e.  $A''(t_1^*) = -s_P(s_P + d_P)K_P < 0$

Un développement limité de  $A(t)$  à l'ordre 2 au voisinage de  $t_1^*$  s'écrit alors :

$$A(t) = \frac{s_P}{d_A}K_P + A'(t_1^*)(t - t_1^*) + A''(t_1^*)\frac{(t - t_1^*)^2}{2} + o((t - t_1^*)^2), t \rightarrow t_1^*$$

Dans ce cas, il existe donc  $\bar{\epsilon} > 0$  tel que pour tout  $t_1^* < t \leq t_1^* + \bar{\epsilon}/ A(t) < \frac{s_P}{d_A}K_P$ .

Ce qui est absurde.

En conclusion, pour tout,  $t \in [t_0; T[, A(t) \leq \frac{s_P}{d_A}K_P$ .

**Proposition. 4.3.3** *L'ensemble  $\Delta$  est un bassin d'attraction relatif à (4.2.2).*

**Preuve :** Soit  $(t_0, X_0 = (E_0, L_0, P_0, A_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^4 \setminus \Delta$  et  $([t_0, T[, X = (E, L, P, A)$  une solution globale du problème de **Cauchy** associé à (4.2.2) muni de la condition initiale  $(t_0, X_0)$

Le lemme (4.3.1) nous dit que  $\Delta$  est invariant. Il nous reste à montrer qu'il existe  $t$  tel que  $X(t) \in \Delta$ .

- On suppose que pour tout  $t \in [t_0, +\infty[, E(t) > K_E$ . D'après la première équation du système (4.2.2), on a :

$$E'(t) = bA(t) \left( 1 - \frac{E(t)}{K_E} \right) - (s_E + d_E)E(t).$$

Et comme suite la quantité  $bA(t) \left( 1 - \frac{E(t)}{K_E} \right) < 0$  alors

$$E'(t) < -(s_E + d_E)K_E.$$

Par comparaison et par intégration entre  $t_0$  et  $t$ , puisque l'intégrale conserve les inégalités alors, on obtient :

$$\int_{t_0}^t E'(t)dt \leq - \int_{t_0}^t (s_E + d_E)K_E dt, \quad \forall t \geq t_0$$

Par conséquent nous avons

$$E(t) \leq E_0 - (s_E + d_E)K_E(t - t_0), \quad t \leq t_0$$

En prenant  $t_1 = t_0 + \frac{E_0 - K_E}{(s_E + d_E)K_E}$ , alors

$$\begin{aligned} E(t_1) &\leq E_0 - (s_E + d_E)K_E \times \left( t_0 + \frac{E_0 - K_E}{(s_E + d_E)K_E} - t_0 \right) \\ &\leq E_0 - (E_0 - K_E) \\ &\leq K_E \end{aligned}$$

$E(t_1) \leq K_E$ , ce qui contredit l'hypothèse. Donc pour tout  $t > t_1, E(t) \leq K_E$ .

- Si  $L(t_1) \leq K_L$ , alors la solution  $L(t)$  est définie dans  $\Delta$  qui est invariant. Sinon, supposons que pour tout  $t \in [t_1; +\infty[$ ,  $t_1$  précédemment défini,  $L(t) > K_L$ . Alors pour tout  $t \in [t_1; +\infty[$ , et grâce à la deuxième équation du système (4.2.2), on a donc  $L'(t) < -(s_L + d_L)$ . Alors par comparaison, après intégration entre  $t_1$  et  $t$  on obtient pour tout  $t \in [t_1; +\infty[$  :

$$L(t) \leq L(t_1) - (s_L + d_L)K_L(t - t_1)$$

En considérant  $t_2 = t_1 + \frac{(L(t_1) - K_L)}{(s_L + d_L)K_L}$ , alors

$$\begin{aligned} L(t_2) &\leq L(t_1) - (s_L + d_L)K_L \left( 1 + \frac{(L(t_1) - K_L)}{(s_L + d_L)K_L} - t_1 \right) \\ &\leq L(t_1) - (s_L + d_L)K_L \times \frac{(L(t_1) - K_L)}{(s_L + d_L)K_L} \\ &\leq L(t_1) - (L(t_1) - K_L) \\ &\leq K_L, \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe  $t_2 > t_1$  tel que  $L(t_2) \leq K_L$  ce que contredit l'hypothèse. Ainsi pour tout  $t > t_2$ , on a

$$L(t) \leq K_L$$

- Si  $P(t) \leq K_P$ , alors la solution  $P(t)$  est définie dans  $\Delta$  qui est invariant. Sinon, supposons que pour tout  $t \in [t_2; +\infty[$ ,  $P(t) > K_P$ . De la troisième équation du système (4.2.2), on a pour tout  $t \in [t_2; +\infty[$ ,

$$P'(t) = s_L L(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K_P} \right) - (s_P + d_P)P(t).$$

et comme  $\left( 1 - \frac{P(t)}{K_P} \right) < 0$  alors

$$P'(t) < -(s_P + d_P)K_P.$$

Par comparaison et aussi en intégrant entre  $t_3$  et  $t$  alors on obtient

$$P(t) \leq P(t_3) - (s_P + d_P)K_P(t - t_3), \quad t \leq t_3$$

En prenant  $t_3 = t_2 + \frac{P(t_2) - K_P}{(s_P + d_P)K_P}$ , alors

$$\begin{aligned} P(t_3) &\leq P(t_2) - (s_P + d_P)K_P \times \left( t_2 + \frac{P(t_2) - K_P}{(s_P + d_P)K_P} - t_2 \right) \\ &\leq P(t_2) - (P(t_2) - K_P) \\ &\leq K_P \end{aligned}$$

Par suite, il existe  $t_3 > t_2$  tel que  $P(t_3) \leq K_P$  ce qui contredit l'hypothèse de départ. D'où

$$\forall t \in [t_3; +\infty[, P(t) \leq K_P$$

- $A(t) \leq \frac{s_P}{d_A} K_P$ , la solution  $A(t)$  est définie dans  $\Delta$  qui est invariant. Dans le cas contraire, supposons que pour tout  $t \in [t_3; +\infty[$ ,  $A(t) > \frac{s_P}{d_A} K_P$ . Alors pour tout  $t \in [t_3; +\infty[$ , la dernière équation du système (4.2.2), nous donne

$$A'(t) < s_P(P(t) - K_P)$$

Comme  $P(t)$  est aussi borné d'après ce qui précède alors, il existe une constante  $c > 0$  tel que  $A'(t) \leq c$ . Par comparaison et aussi en intégrant entre  $t_3$  et  $t$ , on a pour tout  $t \in [t_3; +\infty[$ ,

$$A(t) \leq A(t_3) - c(t - t_3)$$

Posons  $t_4 = t_3 + \frac{A(t_3) - \frac{s_P}{d_A} K_P}{c}$ , alors

$$\begin{aligned} A(t_4) &\leq A(t_3) - c \left( t_3 + \frac{A(t_3) - \frac{s_P}{d_A} K_P}{c} - t_3 \right) \\ &\leq \frac{s_P}{d_A} K_P \end{aligned}$$

D'où la contradiction de notre hypothèse.

En conclusion, pour tout  $t \geq \max(t_1, t_2, t_3, t_4)$ , on a  $(E(t), L(t), P(t), A(t)) \in \Delta$ .

**Corollaire. 4.3.1** Soit  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^4$ . La solution maximale  $(I, X)$  du problème de **Cauchy** relatif à (4.2.2) et associé à la condition initiale  $(t_0, X_0)$  est globale, i.e.  $I = [t_0; +\infty[$ .

**Preuve :** Considérons  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^4$ , la solution maximale du problème de **Cauchy** relatif à (4.2.2) et associé à la condition initiale  $(t_0, X_0)$ . On sait par la proposition (4.3.3) et le lemme (4.3.1) que cette solution est bornée. Et par suite elle est globale.

#### 4.3.4 Stabilité des équilibres

**Théorème. 4.3.1** L'équilibre  $X_0^* = (0, 0, 0, 0)$  est localement asymptotiquement stable si et seulement si  $r < 1$ .

**Preuve :** La stabilité locale de l'équilibre  $X_0^* = (0, 0, 0, 0)$  est donnée par la matrice jacobienne du système (4.2.2) évaluée en ce point. On la notera  $DF(X_0^*)$  et on a

$$DF(X_0^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(X_0^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_4}(X_0^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(X_0^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(X_0^*) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(X_0^*) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(X_0^*) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(X_0^*) & \frac{\partial f_3}{\partial x_4}(X_0^*) \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1}(X_0^*) & \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(X_0^*) & \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(X_0^*) & \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(X_0^*) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(s_E + d_E) & 0 & 0 & b \\ s_E & -(s_L + d_L) & 0 & 0 \\ 0 & s_L & -(s_P + d_P) & 0 \\ 0 & 0 & s_P & -d_A \end{pmatrix}$$

La matrice  $DF(X_0^*)$  peut être décomposée sous la forme  $DF(X_0^*) = M + N$  où  $M$  est une matrice positive définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ s_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_P & 0 \end{pmatrix}$$

et  $N$  est une matrice diagonale définie comme suit :

$$N = \begin{pmatrix} -(s_E + d_E) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(s_L + d_L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(s_P + d_P) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_A \end{pmatrix}$$

Et par suite

$$P = -MN^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{b}{d_A} \\ \frac{s_E}{s_E + d_E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_L}{s_L + d_L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_P}{s_P + d_P} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $P$  est donné par :  $X^4 - r$  et  $\rho(P) = \sqrt[4]{r}$ . Par suite d'après le théorème de **Varga**,  $DF(X_0^*)$  est asymptotiquement stable si et seulement si  $r < 1$ .

**Théorème. 4.3.2** *L'équilibre*

$$X^* = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \begin{pmatrix} \frac{K_E}{\chi_E} \\ \frac{K_L}{\chi_L} \\ \frac{K_P}{\chi_P} \\ \frac{d_A}{\chi_P} \end{pmatrix}$$

*est localement asymptotiquement stable si et seulement si  $r > 1$ .*

**Preuve :** Pour la démonstration nous évaluons la matrice jacobienne de  $F$  au point d'équilibre  $X^*$  qui s'écrit  $DF(X^*) = M + N$  où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & B \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$B = b \left( 1 - \frac{1}{\chi_E} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \right) \quad C = s_E \left( 1 - \frac{1}{\chi_L} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \right)$$

$$E = s_L \left( 1 - \frac{1}{\chi_P} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \right) \quad G = s_P$$

et

$$N = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H \end{pmatrix}$$

avec les coefficients  $A$ ,  $D$ ,  $F$  et  $H$  définis par :

$$A = \frac{bs_P K_P}{d_A \chi_P K_E} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + (s_E + d_E) \quad D = \frac{s_E K_E}{K_L \chi_P} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + (s_L + d_L)$$

$$F = \frac{S_L K_L}{K_P \chi_L} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + (s_P + d_P) \quad H = d_A$$

La matrice  $M$  est positive si et seulement si  $r > 1$ . Par ailleurs, la matrice diagonale  $N$  est inversible et ses valeurs propres sont toutes négatives si et seulement si  $r > 1$ . Ainsi

$$-MN^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha_1 = \frac{b \left( 1 - \frac{1}{\chi_E} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \right)}{d_A} \quad \alpha_2 = \frac{s_E \left( 1 - \frac{1}{\chi_L} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \right)}{\frac{bs_P K_P}{d_A \chi_P K_E} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + (s_E + d_E)}$$

$$\alpha_3 = \frac{s_L \left( 1 - \frac{1}{\chi_P} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \right)}{\frac{s_E K_E}{K_L \chi_P} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + (s_L + d_L)} \quad \alpha_4 = \frac{s_P}{\frac{S_L K_L}{K_P \chi_L} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + (s_P + d_P)}$$

Le polynôme caractéristique de  $-MN^{-1}$  est  $X^4 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ . Et son rayon spectral vaut

$$\rho(-MN^{-1}) = \sqrt[4]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$$

D'après le théorème de **Varga**,  $DF(X^*)$  est asymptotiquement stable si et seulement si  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 < 1$ .

Considérons le polynôme  $P$  défini par  $P = X^4 + \alpha_1 X^3 + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X + \alpha_4$  avec

$$\alpha_1 = \frac{s_E^2 s_L^2 s_P^2}{(s_L + d_L)^2 (s_P + d_P)^2} + \frac{s_L^2 s_P^2}{(s_P + d_P)^2} + s_P^2 + d_A^2$$

$$\alpha_2 = \frac{s_E^2 s_L^4 s_P^4}{(s_L + d_L)^2 (s_P + d_P)^4} + \frac{s_E^2 s_L^2 s_P^2}{(s_L + d_L)^2 (s_P + d_P)^2} + \frac{s_L^2 s_P^2}{(s_P + d_P)^2} + s_P^2 d_A^2 + s_P^2 + d_A^2$$

$$\alpha_3 = \frac{s_L^2 s_P^2}{(s_P + d_P)^2} \left( \frac{s_E^2 d_A^2}{(s_L + d_L)^2} + \frac{s_E^2}{(s_L + d_L)} \times (s_P^2 + d_A^2) + d_A^2 \right)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} \times \frac{s_L^2 s_P^2}{(s_L + d_L)^2 (s_P + d_P)^4} \left( r^2 + 2d_A^2 s_E^2 s_L^2 s_P^2 \left( \frac{5}{2} - r \right) \right)$$

Enonçons à présent quelques hypothèses

(H1) :  $\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 > 0$

(H2) :  $\alpha_1 (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4) - \alpha_3^2 > 0$

**Théorème.** 4.3.3 *Sous les hypothèses (H1) et (H2), le point d'équilibre trivial est globalement asymptotiquement stable si et seulement si  $r < 1$ .*

**Preuve :** On cherche la fonction de **Lyapunov** associée au point d'équilibre  $X_0^*$  sous la forme

$$V : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z, t) \rightarrow \frac{1}{2} (a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 t^2)$$

où  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  est une constante de  $\mathbb{R}_+^{*4}$ . On a  $V(X_0^*) = 0$  et pour tout  $(x, y, z, t) \in \Delta \setminus \{X_0^*\}$ ,  $V(x, y, z, t) > 0$ .

Calculons la dérivée orbitale, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z, t) &= a_1 x \left( bt \left( 1 - \frac{x}{K_E} \right) - (s_E + d_E)x \right) \\ &+ a_2 y \left( s_E x \left( 1 - \frac{y}{K_L} \right) - (s_L + d_L)y \right) \\ &+ a_3 z \left( s_L y \left( 1 - \frac{z}{K_P} \right) - (s_P + d_P)z \right) + a_4 t (s_P z - d_A t) \end{aligned}$$

En posant  $X = (x, y, z, t)^t$  et  $M = -D + R$  avec

$$D = \begin{pmatrix} a_1(s_E + d_E) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2(s_L + d_L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(s_P + d_P) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 d_A \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 b \\ a_2 s_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 s_L & 0 \\ 0 & 0 & a_4 s_P & 0 \end{pmatrix}$$

Considérons le produit scalaire de  $\mathbb{R}^4$ , on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z, t) &= X^t \begin{pmatrix} -a_1(s_E + d_E) & 0 & 0 & a_1 b \\ a_2 s_E & -a_2(s_L + d_L) & 0 & 0 \\ 0 & a_3 s_L & -a_3(s_P + d_P) & 0 \\ 0 & 0 & a_4 s_P & -a_4 d_A \end{pmatrix} X \\ &- \left( a_1 \frac{b}{K_E} x^2 t + a_2 \frac{s_E}{K_L} y^2 x + a_3 \frac{s_L}{K_P} z^2 y \right) \end{aligned}$$



Donc

$$\dot{V}(x, y, z, t) = \langle AX, X \rangle - \left( a_1 \frac{b}{K_E} x^2 t + a_2 \frac{s_E}{K_L} y^2 x + a_3 \frac{s_L}{K_P} z^2 y \right)$$

On construit alors la matrice symétrique suivante

$$S_0 = -D + \frac{1}{2} (R^t + R)$$

telle que

$$S_0 = \begin{pmatrix} -a_1(s_E + d_E) & \frac{a_2 s_E}{2} & 0 & \frac{a_1 b}{2} \\ \frac{a_2 s_E}{2} & -a_2(s_L + d_L) & \frac{a_3 s_L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_3 s_L}{2} & -a_3(s_P + d_P) & \frac{a_4 s_P}{2} \\ \frac{a_1 b}{2} & 0 & \frac{a_4 s_P}{2} & -a_4 d_A \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{aligned} \langle S_0 X, X \rangle &= -\langle DX, X \rangle + \frac{1}{2} (\langle R^t X, X \rangle + \langle RX, X \rangle) \\ &= -\langle DX, X \rangle + \frac{1}{2} (\langle X, RX \rangle + \langle RX, X \rangle) \\ &= -\langle DX, X \rangle + \langle RX, X \rangle \\ &= \langle (-D + R)X, X \rangle \\ &= \langle MX, X \rangle \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de  $S_0$  est

$$P(X) = \frac{1}{4} (P_1(X) + P_2(X) + P_3(X) + P_4(X) + Q(X))$$

où

$$P_1(X) = (X - a_1(s_E + d_E))(X - a_2(s_L + d_L)) \left[ (X - a_3(s_P + d_P))(X - a_4 d_A) - a_4^2 s_P^2 \right]$$

$$P_2(X) = (X - a_3(s_P + d_P))(X - a_4 d_A) \left[ (X - a_1(s_E + d_E))(X - a_2(s_L + d_L)) - a_2^2 s_E^2 \right]$$

$$P_3(X) = (X - a_1(s_E + d_E))(X - a_4 d_A) \left[ (X - a_2(s_L + d_L))(X - a_3(s_P + d_P)) - a_3^2 s_L^2 \right]$$

$$P_4(X) = (X - a_2(s_L + d_L))(X - a_3(s_P + d_P)) \left[ (X - a_1(s_E + d_E))(X - a_4 d_A) - a_1^2 b^2 \right]$$

et enfin

$$Q(X) = (X - a_1(s_E + d_E))(X - a_2(s_L + d_L))(X - a_3(s_P + d_P))(X - a_4 d_A) + \frac{1}{4} (a_1 a_3 b s_L - a_2 a_4 s_E s_P)^2$$

### 4.3. ANALYSE MATHÉMATIQUE DU MODÈLE

Nous voulons utiliser le critère de **Routh-Hurwitz**. Pour ce faire il faut que les coefficients du polynôme caractéristique de  $S_0$  soient tous strictement positifs.

Pour une certaine clarté, nous allons réécrire les polynômes  $P_1(X)$ ,  $P_2(X)$ ,  $P_3(X)$ ,  $P_4(X)$  et  $Q(X)$  de la façon suivante :

$$P_1(X) = (X - a_1(s_E + d_E))(X - a_2(s_L + d_L)) \left[ X^2 + (a_3(s_P + d_P) + a_4d_A)X + a_4\beta_1 \right]$$

$$\text{avec } \beta_1 = a_3(s_P + d_P)d_A - a_4s_P^2$$

$$P_2(X) = (X - a_3(s_P + d_P))(X - a_4d_A) \left[ X^2 + (a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L))X - a_2\beta_2 \right]$$

$$\text{où } \beta_2 = a_1(s_E + d_E)(s_L + d_L) - a_2s_E^2$$

$$P_3(X) = (X - a_1(s_E + d_E))(X - a_4d_A) \left[ X^2 + (a_2(s_L + d_L) + a_3(s_P + d_P))X - a_3\beta_3 \right]$$

$$\text{avec } \beta_3 = a_2(s_L + d_L)(s_P + d_P) - a_3s_L^2$$

$$P_4(X) = (X - a_2(s_L + d_L))(X - a_3(s_P + d_P)) \left[ X^2 + (a_1(s_E + d_E) + a_4d_A)X + a_1\beta_4 \right]$$

$$\text{avec } \beta_4 = a_4(s_E + d_E)d_A - a_1b^2$$

et

$$Q(X) = X^4 + \alpha_1X^3 + \alpha_2X^2 + \alpha_3X + \alpha_4$$

et les  $\alpha_i$  sont définis par

$$\alpha_1 = a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L) + a_3(s_P + d_P) + a_4d_A;$$

$$\alpha_2 = a_1a_2(s_E + d_E)(s_L + d_L) + a_3a_4(s_P + d_P)d_A + (a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L))(a_3(s_P + d_P) + a_4d_A);$$

$$\alpha_3 = a_1a_2(s_E + d_E)(s_L + d_L)(a_3(s_P + d_P) + a_4d_A) + a_3a_4(s_P + d_P)d_A(a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L));$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} \left( a_1^2a_3^2b^2s_L^2 + a_2^2a_4^2s_E^2s_P^2 + 2a_1a_2a_3a_4d_A(s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)(2 - r) \right).$$

En posant

$$a_1 = \frac{s_E^2s_L^2s_P^2}{(s_E + d_E)(s_L + d_L)^2(s_P + d_P)^2}; \quad a_2 = \frac{s_L^2s_P^2}{(s_L + d_L)(s_P + d_P)^2}; \quad a_3 = \frac{s_P^2}{s_P + d_P}; \quad a_4 = d_A$$

on obtient

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \quad \beta_4 = d_A^2(s_E + d_E)(1 - r^2) \geq 0$$

Par ailleurs en remplaçant les  $a_i$  par leurs expressions respectives alors les  $\alpha_i$  deviennent :

$$\alpha_1 = \frac{s_E^2s_L^2s_P^2}{(s_L + d_L)^2(s_P + d_P)^2} + \frac{s_L^2s_P^2}{(s_P + d_P)^2} + s_P^2 + d_A^2$$

$$\alpha_2 = \frac{s_E^2s_L^4s_P^4}{(s_L + d_L)^2(s_P + d_P)^4} + \frac{s_E^2s_L^2s_P^2}{(s_L + d_L)^2(s_P + d_P)^2} + \frac{s_L^2s_P^2}{(s_P + d_P)^2} + s_P^2d_A^2 + s_P^2 + d_A^2$$

$$\alpha_3 = \frac{s_L^2 s_P^2}{(s_P + d_P)^2} \left( \frac{s_E^2 d_A^2}{(s_L + d_L)^2} + \frac{s_E^2}{(s_L + d_L)} \times (s_P^2 + d_A^2) + d_A^2 \right)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} \times \frac{s_L^2 s_P^2}{(s_L + d_L)^2 (s_P + d_P)^4} \left( r^2 + 2d_A^2 s_E^2 s_L^2 s_P^2 \left( \frac{5}{2} - r \right) \right)$$

On sait que  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_4 > 0$  pour  $r < 1$ .

De plus dès que  $\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 > 0$  et  $\alpha_1(\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4) - \alpha_3^2 > 0$  alors, le critère **Routh-Hurwitz** nous permet de conclure que la matrice  $S_0$  n'a que des valeurs propres à parties réelles strictement négatives. Et donc elle est définie négative.

Ainsi pour tout  $(x, y, z, t) \in \Delta \setminus \{X_0^*\}$ , on a

$$\dot{V}(x, y, z, t) = \langle S_0 X, X \rangle - \left( a_1 \frac{b}{K_E} x^2 t + a_2 \frac{s_E}{K_L} y^2 x + a_3 \frac{s_L}{K_P} z^2 y \right) \leq \langle S_0 X, X \rangle < 0$$

Donc  $V$  est une fonction de **Lyapunov** stricte et donc le point d'équilibre triviale est globalement asymptotiquement stable.

Soit  $P = X^4 + \gamma_1 X^3 + \gamma_2 X^2 + \gamma_3 X + \gamma_4$  avec

$$\gamma_1 = a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L) + a_3(s_P + d_P) + a_4 d_A;$$

$$\gamma_2 = a_1 a_2 (s_E + d_E)(s_L + d_L) + a_3 a_4 (s_P + d_P) d_A + (a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L))(a_3(s_P + d_P) + a_4 d_A);$$

$$\gamma_3 = (a_4 a_3 (s_P + d_P) d_A (a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L)) + a_1 a_2 (s_E + d_E)(s_L + d_L) (a_3(s_P + d_P) + a_4 d_A));$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{4} \left( a_1 a_3 (s_E + d_E) \left( \frac{x^*}{t^*} \right) (s_P + d_P) \left( \frac{z^*}{y^*} \right) - a_2 a_4 (s_L + d_L) s_P \left( \frac{y^*}{x^*} \right) \right)^2$$

$$+ a_1 a_2 a_3 a_4 d_A (s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)$$

Enonçons à présent quelques hypothèses

**(H3)** :  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$ ,  $\gamma_3 > 0$  et  $\gamma_4 > 0$

**(H4)** :  $\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 > 0$

**(H5)** :  $\gamma_1(\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_4) - \gamma_3^2 > 0$

**Théorème. 4.3.4** *Sous les hypothèses (H3), (H4) et (H5), le point d'équilibre non trivial  $X^*$  est globalement asymptotiquement stable dans  $\Delta$  si et seulement si  $r > 1$ .*

**Preuve** : On se place dans le cas où  $r > 1$ . Soit  $X^* = (E^*, L^*, P^*, A^*) = (x^*, y^*, z^*, t^*)$

Pour prouver la stabilité globale du point d'équilibre  $X^*$ , on introduit la fonction de **Lyapunov**  $V_1$  définie par  $V_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$$V_1(x, y, z, t) = \frac{1}{2} (a_1(x - x^*)^2 + a_2(y - y^*)^2 + a_3(z - z^*)^2 + a_4(t - t^*)^2)$$

où  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)^t \in \mathbb{R}_+^{*4}$  est un vecteur constant positif. Puisque  $r > 1$ ,  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$  et  $t^*$  sont tous positifs.

### 4.3. ANALYSE MATHÉMATIQUE DU MODÈLE

On a :  $V_1(X^*) = 0$  et  $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}_+^4 \setminus \{X^*\}$ ,  $V_1(x, y, z, t) > 0$ . Donc la fonction  $V_1$  est bien définie et la dérivée orbitale de  $V_1$  le long des solutions du système (4.2.2) est :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x, y, z, t) &= a_1(x - x^*) \left( bt \left( 1 - \frac{x}{K_E} \right) - (s_E + d_E)x \right) \\ &+ a_2(y - y^*) \left( s_E x \left( 1 - \frac{y}{K_L} \right) - (s_L + d_L)y \right) \\ &+ a_3(z - z^*) \left( s_L y \left( 1 - \frac{z}{K_P} \right) - (s_P + d_P)z \right) + a_4(t - t^*)(s_P z - d_A t)\end{aligned}$$

Notons  $\tilde{x} = x - x^*$ ,  $\tilde{y} = y - y^*$ ,  $\tilde{z} = z - z^*$ ,  $\tilde{t} = t - t^*$  et  $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})^t$

Alors

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x, y, z, t) &= \tilde{X}^t \begin{pmatrix} -a_1(s_E + d_E) & 0 & 0 & a_1 b \left( 1 - \frac{x^*}{K_E} \right) \\ a_2 s_E \left( 1 - \frac{y^*}{K_L} \right) & -a_2(s_L + d_L) & 0 & 0 \\ 0 & a_3 s_L \left( 1 - \frac{z^*}{K_P} \right) & -a_3(s_P + d_P) & 0 \\ 0 & 0 & a_4 s_P & -a_4 d_A \end{pmatrix} \tilde{X} \\ &- \left( a_1 \frac{b}{K_E} x^{*2} t + a_2 \frac{s_E}{K_L} y^{*2} x + a_3 \frac{s_L}{K_P} z^{*2} y \right)\end{aligned}$$

Soit  $A_1 = -D + R_1$  avec

$$\begin{aligned}D &= \begin{pmatrix} a_1(s_E + d_E) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2(s_L + d_L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(s_P + d_P) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 d_A \end{pmatrix}; \\ R_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 b \left( 1 - \frac{x^*}{K_E} \right) \\ a_2 s_E \left( 1 - \frac{y^*}{K_L} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 s_L \left( 1 - \frac{z^*}{K_P} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 s_P & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En considérant le produit scalaire de  $\mathbb{R}^4$ , la dérivée orbitale se réécrit de la manière suivante :

$$\dot{V}_1(x, y, z, t) = \langle A_1 \tilde{X}, \tilde{X} \rangle - \left( a_1 \frac{b}{K_E} \tilde{x}^2 t + a_2 \frac{s_E}{K_L} \tilde{y}^2 x + a_3 \frac{s_L}{K_P} \tilde{z}^2 y \right)$$

On construit ainsi la matrice symétrique  $S_1$  suivante :

$$S_1 = -D + \frac{1}{2} (R_1^t + R_1)$$

$$= \begin{pmatrix} -a_1(s_E + d_E) & \frac{a_2 s_E}{2} \left(1 - \frac{y^*}{K_L}\right) & 0 & \frac{a_1 b}{2} \left(1 - \frac{x^*}{K_E}\right) \\ \frac{a_2 s_E}{2} \left(1 - \frac{y^*}{K_L}\right) & -a_2(s_L + d_L) & \frac{a_3 s_L}{2} \left(1 - \frac{z^*}{K_P}\right) & 0 \\ 0 & \frac{a_3 s_L}{2} \left(1 - \frac{z^*}{K_P}\right) & -a_3(s_P + d_P) & \frac{a_4 s_P}{2} \\ \frac{a_1 b}{2} \left(1 - \frac{x^*}{K_E}\right) & 0 & \frac{a_4 s_P}{2} & -a_4 d_A \end{pmatrix}$$

Comme  $X^*$  est un point d'équilibre, nous pouvons tirer les expressions suivantes :

$$\left(1 - \frac{x^*}{K_E}\right) = \frac{s_E + d_E}{b} \times \frac{x^*}{t^*}; \quad \left(1 - \frac{y^*}{K_L}\right) = \frac{s_L + d_L}{s_E} \times \frac{y^*}{x^*}; \quad \left(1 - \frac{z^*}{K_P}\right) = \frac{s_P + d_P}{s_L} \times \frac{z^*}{y^*}$$

et par suite la matrice  $S_1$  devient :

$$S_1 = \begin{pmatrix} -a_1(s_E + d_E) & \frac{a_2}{2} (s_L + d_L) \frac{y^*}{x^*} & 0 & \frac{a_1}{2} (s_E + d_E) \frac{x^*}{t^*} \\ \frac{a_2}{2} (s_L + d_L) \frac{y^*}{x^*} & -a_2(s_L + d_L) & \frac{a_3}{2} (s_P + d_P) \frac{z^*}{y^*} & 0 \\ 0 & \frac{a_3}{2} (s_P + d_P) \frac{z^*}{y^*} & -a_3(s_P + d_P) & \frac{a_4 s_P}{2} \\ \frac{a_1}{2} (s_E + d_E) \frac{x^*}{t^*} & 0 & \frac{a_4 s_P}{2} & -a_4 d_A \end{pmatrix}$$

Alors on a,  $\langle A_1 \tilde{X}, \tilde{X} \rangle = \langle S_1 \tilde{X}, \tilde{X} \rangle$

Le polynôme caractéristique de  $S_1$  s'écrit :

$$P_1 = \frac{1}{4} (G_1(X) + G_2(X) + G_3(X) + G_4(X) + Q(X))$$

où

$$G_1(X) = (X - a_1(s_E + d_E)) (X - a_2(s_L + d_L)) \left( (X - a_3(s_P + d_P)) (X - a_4 d_A) - a_4^2 s_P^2 \right)$$

$$G_2(X) = (X - a_3(s_P + d_P)) (X - a_4 d_A) \left( (X - a_1(s_E + d_E)) (X - a_2(s_L + d_L)) - a_2^2 (s_L + d_L)^2 \left( \frac{y^*}{x^*} \right)^2 \right)$$

$$G_3(X) = (X - a_1(s_E + d_E)) (X - a_4 d_A) \left( (X - a_2(s_L + d_L)) (X - a_3(s_P + d_P)) - a_3^2 (s_P + d_P)^2 \left( \frac{z^*}{y^*} \right)^2 \right)$$

$$G_4(X) = (X - a_2(s_L + d_L)) (X - a_3(s_P + d_P)) \left( (X - a_1(s_E + d_E)) (X - a_4 d_A) - a_1^2 (s_E + d_E)^2 \left( \frac{x^*}{t^*} \right)^2 \right)$$

$$Q(X) = (X - a_1(s_E + d_E)) (X - a_2(s_L + d_L)) (X - a_3(s_P + d_P)) (X - a_4 d_A) \\ + \frac{1}{4} \left( a_1 a_3 (s_E + d_E) \left( \frac{x^*}{t^*} \right) (s_P + d_P) \left( \frac{z^*}{y^*} \right) - a_2 a_4 (s_L + d_L) s_P \left( \frac{y^*}{x^*} \right) \right)^2$$

Comme pour le cas du point d'équilibre trivial, on peut réécrire les polynômes  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  et  $G_4$  de la manière suivante :

$$P_1 = \frac{1}{4} (G_1(X) + G_2(X) + G_3(X) + G_4(X) + Q(X))$$

où

$$G_1(X) = (X - a_1(s_E + d_E))(X - a_2(s_L + d_L)) \left[ X^2 + (a_3(s_P + d_P) + a_4d_A)X + a_4\beta_4 \right];$$

$$\text{avec } \beta_4 = a_3(s_P + d_P)d_A - a_4s_P^2$$

$$G_2(X) = (X - a_3(s_P + d_P))(X - a_4d_A) \left[ X^2 + (a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L)) + a_2(s_L + d_L)\beta_2 \right];$$

$$\text{avec } \beta_2 = a_1(s_E + d_E) - a_2(s_L + d_L) \left( \frac{y^*}{x^*} \right)^2$$

$$G_3(X) = (X - a_1(s_E + d_E))(X - a_4d_A) \left[ X^2 + (a_2(s_L + d_L) + a_3(s_P + d_P))X + a_3(s_P + d_P)\beta_3 \right];$$

$$\text{avec } \beta_3 = a_2(s_L + d_L) - a_3(s_P + d_P) \left( \frac{z^*}{y^*} \right)^2$$

$$G_4(X) = (X - a_2(s_L + d_L))(X - a_3(s_P + d_P)) \left[ X^2 + (a_1(s_E + d_E) + a_4d_A)X + a_1(s_E + d_E)\beta_1 \right];$$

$$\text{avec } \beta_1 = a_4d_A - a_1(s_E + d_E) \left( \frac{x^*}{t^*} \right)^2$$

Le polynôme caractéristique de  $S_1$  peut être écrit sous la forme suivante

$$P = X^4 + \gamma_1X^3 + \gamma_2X^2 + \gamma_3X + \gamma_4$$

$$\gamma_1 = a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L) + a_3(s_P + d_P) + a_4d_A;$$

$$\gamma_2 = a_1a_2(s_E + d_E)(s_L + d_L) + a_3a_4(s_P + d_P)d_A + (a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L))(a_3(s_P + d_P) + a_4d_A);$$

$$\gamma_3 = (a_4a_3(s_P + d_P)d_A(a_1(s_E + d_E) + a_2(s_L + d_L)) + a_1a_2(s_E + d_E)(s_L + d_L)(a_3(s_P + d_P) + a_4d_A));$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{4} \left( a_1a_3(s_E + d_E) \left( \frac{x^*}{t^*} \right) (s_P + d_P) \left( \frac{z^*}{y^*} \right) - a_2a_4(s_L + d_L)s_P \left( \frac{y^*}{x^*} \right) \right)^2$$

$$+ a_1a_2a_3a_4d_A(s_E + d_E)(s_L + d_L)(s_P + d_P)$$

Ainsi  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  et  $\gamma_4$  sont strictement positifs et dès que  $\gamma_1\gamma_2 - \gamma_3 > 0$  et  $\gamma_1(\gamma_1\gamma_3 - \gamma_1\gamma_4) - \gamma_3^2 > 0$ , le polynôme caractéristique  $P_1$  de  $S_1$  a toutes ses valeurs propres à parties réelles strictement négatives. Et par suite la matrice  $S_1$  est définie négative. Autrement dit

$$\langle A_1\tilde{X}, \tilde{X} \rangle = \langle S_1\tilde{X}, \tilde{X} \rangle \leq 0.$$

On en déduit que

$$\forall (x, y, z, t) \in \Delta \setminus \{X^*\}, \quad \dot{V}_1(x, y, z, t) > 0$$

En conclusion  $V_1$  est une fonction de **Lyapunov** stricte, et alors le point d'équilibre non triviale  $X^*$  est globalement asymptotiquement stable.

**Remarque.** 4.3.1 *En prenant*

$$a_1 = \frac{(s_P + d_P)^2 d_A^2}{(s_E + d_E) s_P^2} \times \left( \frac{t^*}{x^*} \right)^2; \quad a_2 = \frac{(s_P + d_P)^2 d_A^2}{(s_L + d_L) s_P^2} \times \left( \frac{t^*}{y^*} \right)^2$$

$$a_3 = s_P + d_P; \quad a_4 = \frac{(s_P + d_P)^2 d_A}{s_P^2}$$

*on obtient*

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0.$$

*Dans ce cas en exprimant les coefficients du polynôme caractéristique en fonction de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  et  $\beta_4$ , on peut conclure.*

## 4.4 Modèle de transmission du paludisme

### 4.4.1 Mécanisme de transmission du paludisme

Le paludisme est transmis à l'homme par la femelle d'un moustique du genre **anophèle**. La maladie est due à un parasite du genre plasmodium inoculé à l'issue de la piqûre. Ces parasites sont *P.falciparum*, *P.vivax*, *P.malariae*, *P.ovale* et plus récemment *P.knowlesi*. Cependant le plus pathogène est *P.malariae* mais demeure un cas rare. Par contre *P.falciparum* est un cas fréquent et est donc une cause importante de la mortalité infantile. En effet, un sporozoite est injecté dans le sang périphérique par un moustique infecté. Les parasites se développent chez l'homme et dans le cycle, certains deviennent des gamétocytes en attente d'être ingérés par un moustique. Le parasite continue donc son développement et envahit les glandes salivaires du moustique mettant fin au cycle, [26, 30, 38].

### 4.4.2 Construction du modèle

Nous donnons d'abord quelques définitions et hypothèses importantes pour la suite de notre travail.

#### 4.4.2.1 Généralités : définitions et notations

**Définition.** 4.4.1

- **Un susceptible** : individu capable de contracter le paludisme et de devenir infecté. Il n'a pas le parasite dans son organisme.
- **Un Latent** : individu ayant contracté le paludisme mais ne le transmet pas d'abord.
- **Un infectieux** : individu ayant un niveau élevé de gamétocytes dans son sang et qui peut souffrir et mourir de la maladie.

- **Un immun** : individu ayant acquis une certaine immunité naturelle face à la maladie après de multiples infections. Il tolère le parasite sous la forme gamétocyte dans son sang. Il est supposé être légèrement infectieux.
- **Un semi-immun** : individu non vulnérable ayant acquis au moins une certaine immunité contre le paludisme dans sa vie même s'il l'a perdu.
- **Un non-immun** : individu vulnérable n'ayant jamais acquis une certaine immunité contre le paludisme.

Un hôte (humain ou moustique) sera considéré **malade** du paludisme s'il est soit à l'état latent, infectieux ou immun relativement aux humains et soit à l'état latent ou infectieux relativement aux moustiques.

Pour la cohérence de notre document nous utilisons les notations indicielles suivantes : l'indice **e** pour désigner les non-immuns, l'indice **a** pour désigner les semi-immuns et l'indice **m** pour désigner les moustiques. Sous l'hypothèse que notre zone d'étude n'est pas étrangère au paludisme, nous considérons par la suite les notations des tableaux donnés ci-dessous :

Notations	Description
$S_e$	classe des susceptibles non-immuns.
$S_a$	classe des individus susceptibles semi-immuns.
$E_e$	classe des individus latents non-immuns.
$E_a$	classe des individus latents semi-immuns.
$I_e$	classe des individus infectieux non-immuns.
$I_a$	classe des individus infectieux semi-immuns.
$R_a$	classe des individus semi-immuns immuns.

Tableau 4.1 – Paramètres pour les hôtes humains

Notations	Description
$S_m$	classe des moustiques susceptibles.
$E_m$	classe des moustiques latents.
$I_m$	classe des moustiques infectieux.

Tableau 4.2 – Paramètres pour les hôtes vecteurs

Pour les hôtes humains, les **non-immuns** suivent le schéma  $S_e E_e I_e S_e$  jusqu'à devenir des **semi-immuns** et les semi-immuns suivent le schéma  $S_a E_a I_a R_a S_a$ . En effet, en raison de sa durée courte de vie, un moustique infecté n'a pas le temps de guérir. Ainsi pour la



population vectorielle les **non-immuns** suivront le schéma  $S_m E_m I_m$ .

La population humaine totale à chaque instant  $t$  est donnée par :

$$N_h(t) = S_e(t) + E_e(t) + I_e(t) + S_a(t) + E_a(t) + I_a(t) + R_a(t)$$

La population totale des moustiques est donnée par :

$$N_m(t) = S_m(t) + E_m(t) + I_m(t)$$

#### 4.4.2.2 Les hypothèses du modèle

- (H1) : Nous supposons qu'un immigré est soit non-immun soit semi-immun.
- (H2) : Nous supposons que le seul mode de contamination est la piqûre de moustique infecté.
- (H3) : On suppose qu'un individu qui arrive nouvellement dans notre zone d'étude a une probabilité  $p$  d'être non-immun et une probabilité  $1 - p$  d'être semi-immun.
- (H4) : Nous supposons que tous les recrues sont susceptibles.
- (H5) : Nous supposons que la mortalité naturelle  $f_h$  (resp.  $f_m$ ) constante.
- (H6) : Les probabilités  $c_{me}, c_{ma}, c_{em}, c_{am}, \tilde{c}_{am}$  sont dans l'intervalle  $[0, 1]$ , les paramètres  $\nu_e, \nu_a, \nu_m, \alpha_e, \alpha_a, \beta_a$  et  $n_a$  sont supposés être strictement positifs excepté le taux de mortalité induite,  $\gamma_e \geq 0$  et  $\gamma_a \geq 0$ .

Nous définissons les paramètres suivants pour la construction du modèle étudié.

Paramètres	Description biologique
$\Lambda_h$	taux de recrutement constant des humains (il comporte les naissances).
$p$	probabilité pour qu'un nouveau recrue soit un non-immun.
$1 - p$	probabilité pour qu'un nouveau recrue soit semi-immun.

Tableau 4.3 – Paramètres communs aux non-immuns et semi-immuns

Paramètres	Description biologique
$\nu_a$	taux de passage de la classe latente à la classe infectieuse.
$\alpha_a$	taux de passage de la classe infectieuse à la classe des immuns.
$\beta_a$	taux de perte d'immunité des immuns.

Tableau 4.4 – Paramètres pour les hôtes semi-immuns

Paramètres	Description biologique
$n_a$	nombre moyen de piqûre que fait un moustique par unité de temps.
$c_{me}$	probabilité qu'une piqûre par un moustique infectieux sur un non-immun susceptible transfère l'infection au non-immun.
$c_{ma}$	probabilité qu'une piqûre par un moustique infectieux sur un semi-immun susceptible transfère l'infection au semi-immun.
$c_{em}$	probabilité qu'une piqûre par un moustique susceptible sur un non-immun infectieux transfère l'infection au moustique.
$c_{am}$	probabilité qu'une piqûre par un moustique susceptible sur un semi-immun infectieux transfère l'infection au moustique.
$\tilde{c}_{am}$	probabilité qu'une piqûre par un moustique susceptible sur un semi-immun immun transfère l'infection au moustique.

Tableau 4.5 – Paramètres de contact entre non-immuns, semi-immuns et moustiques

Paramètres	Description biologique
$\nu_e$	taux de passage de la classe latente à la classe infectieuse.
$\alpha_e$	taux de passage de la classe infectieuse à la classe immun.
$\gamma_e$	taux de mortalité induit par le paludisme aux non-immuns.
$\gamma_a$	taux de mortalité induit par le paludisme aux semi-immuns.

Tableau 4.6 – Paramètres pour les hôtes non-immuns

Partant de toutes ces hypothèses émises plus haut, la dynamique inter-hôte a été illustrée comme dans [38, 30, 19] mais en y intégrant l'apport dû au dernier stade de la phase pré-imaginale dans la population de vecteurs susceptibles, c'est à dire le transfert des nymphes dans la population de moustiques susceptibles capables de piquer. Cette étape intermédiaire entre la larve et l'adulte est fondamentale pour le passage au stade adulte et présente des caractéristiques énormes. Sa prise en compte traduit mieux la chronologie de la croissance et aussi la proportion d'œufs qui parviennent réellement au stade adulte. Ainsi la dynamique de propagation est traduite par le graphe présenté ci-dessous.

### 4.4.3 Interaction entre humains et moustiques

Lorsqu'un moustique infectieux pique un non-immun (resp. semi-immun) susceptible, le parasite entre dans l'organisme du non-immun (resp. semi-immun) avec une certaine probabilité  $c_{me}$  (resp.  $c_{ma}$ ) et le non-immun (resp. semi-immun) entre dans la classe  $E_e$  (resp.  $E_a$ ). Après un certain temps, le non-immun (resp. semi-immun) passe de la classe latente à la classe  $I_e$  (resp.  $I_a$ ) au taux  $\nu_e$  (resp.  $\nu_a$ ). Les non-immuns infectieux retournent dans la classe  $S_e$  au taux  $\rho_e$  par guérison ou migrent dans la classe  $R_a$  après acquisition de leur immunité aux taux  $\alpha_e$ . Selon la mémoire immunologique, l'immunité des semi-immuns infectieux présents dans la classe  $I_a$  peut être rapidement restaurée quand ils

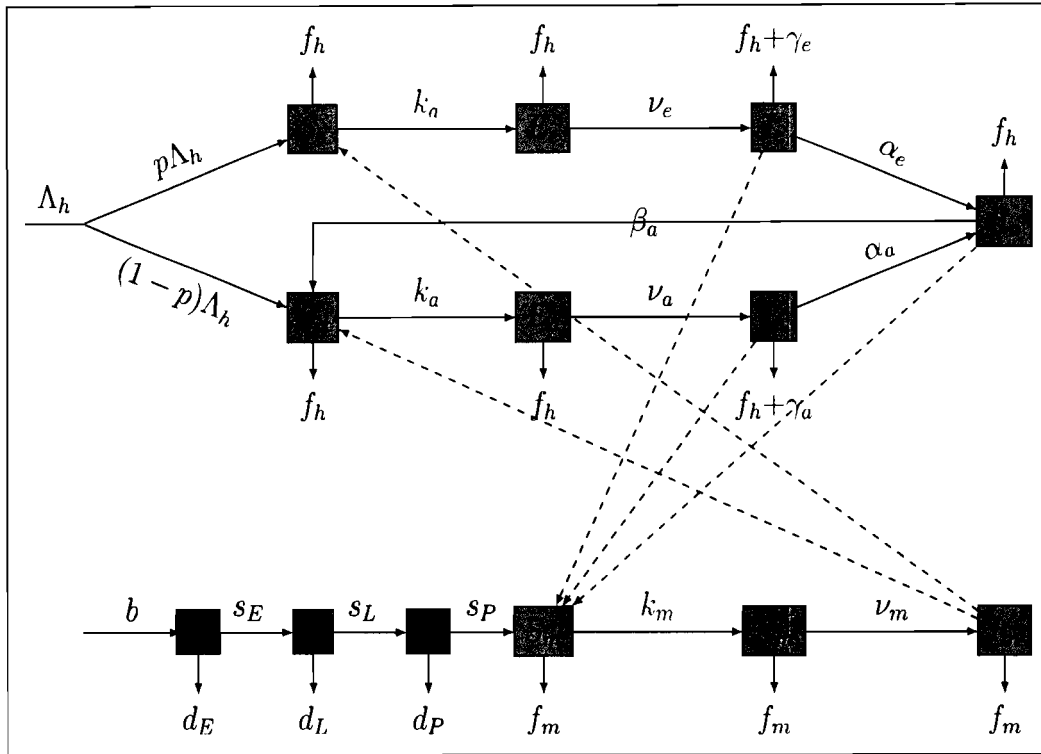


FIGURE 4.2 – Représentation compartimentale de l’interaction entre les hôtes humains et les moustiques.

commencent à être ré-exposés à l’infection. Par conséquent, nous supposons que les semi-immuns infectieux se déplacent dans la classe des immuns  $R_a$ , au taux  $\alpha_a$  avant de devenir susceptible. Les individus dans la classe  $R_a$  ; peuvent perdre leur immunité s’ils n’ont pas une exposition continue à l’infection et donc peuvent retourner dans la classe des sensibles  $S_e$ . Les non-immuns quittent la population à travers une mortalité naturelle constante,  $f_h$  et à travers une mortalité due au paludisme au taux  $\gamma_e$ . Par ailleurs les semi-immuns quittent la population à travers la mortalité naturelle constante,  $f_h$  et aussi à travers une mortalité  $\gamma_a$  due au paludisme. Nous remarquerons que  $\gamma_e > \gamma_a$  car les non-immuns sont plus vulnérables que les semi-immuns. Quand un moustique susceptible pique un non-immun infectieux (resp. semi-immun, resp. immun) le parasite entre dans l’organisme du moustique avec une certaine probabilité  $c_{em}$  (resp.  $c_{am}$ ,  $\tilde{c}_{am}$ ) et le moustique migre de la classe des susceptibles à la classe des latents  $E_m$ . Quelques temps après, ils quittent la classe  $E_m$  pour la classe  $I_m$  où ils y demeurent à vie.

### Calcul de la force d’infection

#### Définition. 4.4.2

- La force d’infection des moustiques sur un humain non-immun correspond au ratio moustiques infectés-humains multiplié par la moyenne de piqûre d’un moustique, le tout multiplié par la probabilité d’infection d’une piqûre sur un non-immun,  $k_e$ .

- La force d'infection des moustiques sur un humain semi-immun correspond au ratio moustiques infectés-humains multiplié par la moyenne de piqûre d'un moustique, le tout multiplié par la probabilité d'infection d'une piqûre sur un semi-immun,  $k_a$
- La force d'infection des non-immuns infectieux sur les moustiques est le ration non-immuns infectieux multiplié par la moyenne de piqûre d'un moustique sur un non-immun infectieux, le tout multiplié par la probabilité d'infection des non-immuns sur les moustiques.

De façon équivalente, on définit la force d'infection des semi-immuns sur les moustiques et celle des immunisés infectieux sur les moustiques.

- La force d'infection des humains sur les moustiques est la somme de ces trois forces d'infection (non-immuns infectieux, semi-immuns infectieux et immunisés infectieux),  $k_m$

En effet  $\frac{I_m}{N_h}$  correspond à la proportion des moustiques infectieux par humain et  $c_{ma}n_a$  (resp.  $c_{me}n_a$ ) correspond au nombre de piqûres donnant une infection d'un moustique sur les semi-immuns (resp. non-immuns), alors chaque semi-immun (resp. non-immun) recevra  $c_{ma}n_a \frac{I_m}{N_h}$  (resp.  $c_{me}n_a \frac{I_m}{N_h}$ ) piqûres donnant une infection. On a donc :

$$k_a = c_{ma}n_a \frac{I_m}{N_h} \quad (4.4.8)$$

$$k_e = c_{me}n_a \frac{I_m}{N_h} \quad (4.4.9)$$

Pour le calcul de la force d'infection des humains aux moustiques, remarquons qu'il y a trois catégories d'individus infectieux : les non-immuns infectieux ( $I_e$ ), les semi-immuns infectieux ( $I_a$ ) et enfin les immuns ( $R_a$ ). Ainsi donc, de façon analogue on obtient :

$$k_m = c_{am}n_a \frac{I_a}{N_h} + c_{em}n_a \frac{I_e}{N_h} + \tilde{c}_{am}n_a \frac{R_a}{N_h} \quad (4.4.10)$$

En faisant le bilan de masse dans chaque compartiment à l'instant  $t + \Delta t$  on obtient :

$$\begin{aligned} S_e(t + \Delta t) &= S_e(t) + [p\Lambda_h - (f_h + k_e)S_e(t)] \Delta t \\ E_e(t + \Delta t) &= E_e(t) + [k_e S_e(t) - (f_h + \nu_e)E_e(t)] \Delta t \\ I_e(t + \Delta t) &= I_e(t) + [\nu_e E_e(t) - (f_h + \gamma_e + \alpha_e)I_e(t)] \Delta t \\ S_a(t + \Delta t) &= S_a(t) + [(1-p)\Lambda_h - (f_h + k_a)S_a(t) + \beta_a R_a(t)] \Delta t \\ E_a(t + \Delta t) &= E_a(t) + [k_a S_a(t) - (f_h + \nu_a)E_a(t)] \Delta t \\ I_a(t + \Delta t) &= I_a(t) + [\nu_a E_a(t) - (f_h + \gamma_a + \alpha_a)I_a(t)] \Delta t \\ R_a(t + \Delta t) &= R_a(t) + [\alpha_e I_e(t) + \alpha_a I_a(t) - (f_h + \beta_a)R_a(t)] \Delta t \\ S_m(t + \Delta t) &= S_m(t) + [s_P P(t) - (f_m + k_m)S_m(t)] \Delta t \\ E_m(t + \Delta t) &= E_m(t) + [k_m S_m(t) - (f_m + \nu_m)E_m(t)] \Delta t \\ I_m(t + \Delta t) &= I_m(t) + [\nu_m E_m(t) - f_m I_m(t)] \Delta t \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \frac{S_e(t + \Delta t) - S_e(t)}{\Delta t} &= p\Lambda_h - (f_h + k_e)S_e(t) \\ \frac{E_e(t + \Delta t) - E_e(t)}{\Delta t} &= k_e S_e(t) - (f_h + \nu_e)E_e(t) \\ \frac{I_e(t + \Delta t) - I_e(t)}{\Delta t} &= \nu_e E_e(t) - (f_h + \gamma_e + \alpha_e)I_e(t) \\ \frac{S_a(t + \Delta t) - S_a(t)}{\Delta t} &= (1 - p)\Lambda_h - (f_h + k_a)S_a(t) + \beta_a R_a(t) \\ \frac{E_a(t + \Delta t) - E_a(t)}{\Delta t} &= k_a S_a(t) - (f_h + \nu_a)E_a(t) \\ \frac{I_a(t + \Delta t) - I_a(t)}{\Delta t} &= \nu_a E_a(t) - (f_h + \gamma_a + \alpha_a)I_a(t) \\ \frac{R_a(t + \Delta t) - R_a(t)}{\Delta t} &= \alpha_e I_e(t) + \alpha_a I_a(t) - (f_h + \beta_a)R_a(t) \\ \frac{S_m(t + \Delta t) - S_m(t)}{\Delta t} &= s_P P(t) - (f_m + k_m)S_m(t) \\ \frac{E_m(t + \Delta t) - E_m(t)}{\Delta t} &= k_m S_m(t) - (f_m + \nu_m)E_m(t) \\ \frac{I_m(t + \Delta t) - I_m(t)}{\Delta t} &= \nu_m E_m(t) - f_m I_m(t) \end{aligned}$$

$$\text{Si } \Delta t \rightarrow 0 \quad \frac{dS_e(t)}{dt} = p\Lambda_h - (f_h + k_e)S_e \quad (4.4.11)$$

$$\frac{dE_e(t)}{dt} = k_e S_e - (f_h + \nu_e)E_e \quad (4.4.12)$$

$$\frac{dI_e(t)}{dt} = \nu_e E_e - (f_h + \gamma_e + \alpha_e)I_e \quad (4.4.13)$$

$$\frac{dS_a(t)}{dt} = (1 - p)\Lambda_h + \beta_a R_a - (f_h + k_a)S_a \quad (4.4.14)$$

$$\frac{dE_a(t)}{dt} = k_a S_a - (f_h + \nu_a)E_a \quad (4.4.15)$$

$$\frac{dI_a(t)}{dt} = \nu_a E_a - (f_h + \gamma_a + \alpha_a)I_a \quad (4.4.16)$$

$$\frac{dR_a(t)}{dt} = \alpha_e I_e + \alpha_a I_a - (f_h + \beta_a)R_a \quad (4.4.17)$$

$$\frac{dS_m(t)}{dt} = s_P P - (f_m + k_m)S_m \quad (4.4.18)$$

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = k_m S_m - (f_m + \nu_m)E_m \quad (4.4.19)$$

$$\frac{dI_m(t)}{dt} = \nu_m E_m - f_m I_m \quad (4.4.20)$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dS_e(t)}{dt} = p\Lambda_h - (f_h + k_e)S_e(t) \\
 \frac{dE_e(t)}{dt} = k_e S_e(t) - (f_h + \nu_e)E_e(t) \\
 \frac{dI_e(t)}{dt} = \nu_e E_e(t) - (f_h + \gamma_e + \alpha_e)I_e(t)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dS_a(t)}{dt} = (1-p)\Lambda_h + \beta_a R_a(t) - (f_h + k_a)S_a(t) \\
 \frac{dE_a(t)}{dt} = k_a S_a(t) - (f_h + \nu_a)E_a(t) \\
 \frac{dI_a(t)}{dt} = \nu_a E_a(t) - (f_h + \gamma_a + \alpha_a)I_a(t) \\
 \frac{dR_a(t)}{dt} = \alpha_e I_e(t) + \alpha_a I_a(t) - (f_h + \beta_a)R_a(t)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dS_m(t)}{dt} = s_P P(t) - (f_m + k_m)S_m(t) \\
 \frac{dE_m(t)}{dt} = k_m S_m(t) - (f_m + \nu_m)E_m(t) \\
 \frac{dI_m(t)}{dt} = \nu_m E_m(t) - f_m I_m(t)
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (4.4.21)$$

## 4.5 Modèle synthétique croissance-transmission de la maladie

Dans cette partie, nous proposons un modèle de la dynamique globale de la transmission du paludisme. Ce modèle est la synthèse du modèle de croissance de l'anophèle et du modèle de transmission. Notre objectif est de mieux appréhender l'influence de la dynamique de croissance des vecteurs sur celle de la transmission de la maladie. Ce qui reviendra à observer l'influence du seuil qui gouverne la croissance des moustiques sur le taux de reproduction de base du modèle du paludisme. Notre modèle couplé se présente

de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dE(t)}{dt} = bA(t) \left( 1 - \frac{E(t)}{K_E} \right) - (s_E + d_E)E(t) \\ \frac{dL(t)}{dt} = s_E E(t) \left( 1 - \frac{L(t)}{K_L} \right) - (s_L + d_L)L(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = s_L L(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K_P} \right) - (s_P + d_P)P(t) \\ \frac{dA(t)}{dt} = s_P P(t) - d_A A(t) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_e(t)}{dt} = p\Lambda_h - (f_h + k_e)S_e(t) \\ \frac{dE_e(t)}{dt} = k_e S_e(t) - (f_h + \nu_e)E_e(t) \\ \frac{dI_e(t)}{dt} = \nu_e E_e(t) - (f_h + \gamma_e + \alpha_e)I_e(t) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_a(t)}{dt} = (1-p)\Lambda_h + \beta_a R_a(t) - (f_h + k_a)S_a(t) \\ \frac{dE_a(t)}{dt} = k_a S_a(t) - (f_h + \nu_a)E_a(t) \\ \frac{dI_a(t)}{dt} = \nu_a E_a(t) - (f_h + \gamma_a + \alpha_a)I_a(t) \\ \frac{dR_a(t)}{dt} = \alpha_e I_e(t) + \alpha_a I_a(t) - (f_h + \beta_a)R_a(t) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_m(t)}{dt} = s_P P(t) - (f_m + k_m)S_m(t) \\ \frac{dE_m(t)}{dt} = k_m S_m(t) - (f_m + \nu_m)E_m(t) \\ \frac{dI_m(t)}{dt} = \nu_m E_m(t) - f_m I_m(t) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.5.22)$$

**Remarque.** 4.5.1 *En effet, le modèle synthétique s'obtient en couplant le modèle de la croissance et de celui de la dynamique de propagation de la maladie. Le terme liant est dû à la nouvelle vague d'anophèles femelles qui survivent aux aléas de la phase préimaginale. Ce terme est donc  $s_P P(t)$ .*

Pour la suite nous concentrerons notre étude sur le modèle (4.4.21) et nous observerons l'influence du seuil

$$r = \left( \frac{b}{s_E + d_E} \right) \left( \frac{s_E}{s_L + d_L} \right) \left( \frac{s_L}{s_P + d_P} \right) \left( \frac{s_P}{d_A} \right)$$

et qui gouverne la croissance de l'anophèle sur le taux de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  que nous expliciterons, donc sur la dynamique de propagation du paludisme plus précisément.

En additionnant les équations de (4.4.11) à (4.4.17) on obtient :

$$\frac{N_h(t)}{dt} = \Lambda_h - f_h N_h - \gamma_e I_e - \gamma_a I_a \quad (4.5.23)$$

De même en additionnant les équations de (4.4.18) à (4.4.20) on obtient :

$$\frac{N_m(t)}{dt} = s_P P - f_m N_m \quad (4.5.24)$$

Notre modèle de transmission est régi par le domaine  $\Delta'$  défini par :

$$\Delta' = \left\{ (S_e, E_e, I_e, S_a, E_a, I_a, R_a, S_m, E_m, I_m) \in \mathbb{R}_+^{10} \mid \begin{array}{l} 0 \leq S_e + E_e + I_e + S_a + E_a + I_a + R_a \leq \frac{\Lambda_h}{f_h} \\ 0 \leq S_m + E_m + I_m \leq \frac{s_P}{f_m} K_P \end{array} \right\}$$

## 4.6 Analyse mathématique

Dans cette section nous analysons les aspects mathématiques du modèle étudié. Nous définissons et déterminons le point d'équilibre sans maladie du modèle étudié et le taux de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$ .

**Définition. 4.6.1** (*DFE et points d'équilibre endémique*)

1. Un point d'équilibre endémique est un point d'équilibre où la maladie persiste dans la population.
2. Un point d'équilibre sans maladie ou DFE (*Desease-Free- Equilibrium*) est un point d'équilibre où il n'y a pas de maladie dans la population. Ainsi, on dit que  $X_e$  est un point d'équilibre du modèle (4.4.21) si  $f(X_e) = 0$  alors  $X(t) = X_e$  pour tout  $t \geq t_0$ .

Le modèle (4.4.21) est décrit par un système autonome d'équations différentielles du premier ordre. Il peut être représenté sous la forme  $X'(t) = F(X(t))$  où  $X(t) = (S_e, E_e, I_e, S_a, E_a, I_a, R_a, S_m, E_m, I_m)^t$

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(S_e, \dots, I_m) \\ f_2(S_e, \dots, I_m) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{10}(S_e, \dots, I_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\Lambda_h - (f_h + k_e)S_e \\ k_e S_e - (f_h + \nu_e)E_e \\ \nu_e E_e - (f_h + \gamma_e + \alpha_e)I_e \\ (1-p)\Lambda_h + \beta_a R_a - (f_h + k_a)S_a \\ k_a S_a - (f_h + \nu_a)E_a \\ \nu_a E_a - (f_h + \gamma_a + \alpha_a)I_a \\ \alpha_e I_e + \alpha_a I_a - (f_h + \beta_a)R_a \\ s_P P - (f_m + k_m)S_m \\ k_m S_m - (f_m + \nu_m)E_m \\ \nu_m E_m - f_m I_m \end{pmatrix} \quad (4.6.25)$$



**Proposition.** 4.6.1 *Le système (4.4.21) admet :*

- un point d'équilibre DFE trivial (i.e sans moustiques et sans maladie)  $X_0^*$  si  $r \leq 1$  qui est défini par :

$$X_0^* = \left( \frac{p}{f_h} \Lambda_h; 0; 0; \frac{1-p}{f_h} \Lambda_h; 0; 0; 0; 0; 0; 0 \right),$$

- un point d'équilibre sans maladie non trivial (i.e absence de maladie et présence de moustiques) si  $r > 1$  et défini par :

$$X_1^* = \left( \frac{p}{f_h} \Lambda_h; 0; 0; \frac{1-p}{f_h} \Lambda_h; 0; 0; 0; \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{s_P K_P}{f_m \chi_P}\right); 0; 0 \right)$$

avec

$$\chi_P = 1 + \frac{(s_E s_P K_E + (s_L + d_L))(s_P + d_P) s_P}{b s_E s_L s_P K_E - (b s_E s_P K_E - b(s_L + d_L) s_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L))(s_P + d_P) d_A K_E}.$$

**Preuve :** En rappel, un point  $X^*$  est dit *point d'équilibre* si  $f(X^*) = 0$ . Pour calculer les points d'équilibre sans maladie du modèle de transmission donné par le système (4.4.21), on distinguera les cas suivants :

- la situation où l'on a absence de maladie et aussi absence de moustiques. Nous avons alors  $S_m^* = E_m^* = I_m^* = 0$  et  $E_e^* = I_e^* = E_a^* = I_a^* = R_a^* = 0$ . Le point d'équilibre est donné par  $X_0^* = (S_e^*; 0; 0; S_a^*; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$  et appelé point d'équilibre trivial.

$S_e^*$  et  $S_a^*$  s'obtiennent par les résolutions suivantes, en remarquant que l'on a de plus  $k_e = k_a = k_m = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{dS_e(t)}{dt} = 0 &\Leftrightarrow p\Lambda_h - f_h S_e^* = 0 \\ &\Leftrightarrow S_e^* = \frac{p}{f_h} \Lambda_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_a(t)}{dt} = 0 &\Leftrightarrow (1-p)\Lambda_h - f_h S_a^* = 0 \\ &\Leftrightarrow S_a^* = \frac{1-p}{f_h} \Lambda_h \end{aligned}$$

$$N_h^* = S_e^* + S_a^* = \frac{1}{f_h} \Lambda_h$$

Dans ce cas

$$X_0^* = \left( \frac{p}{f_h} \Lambda_h; 0; 0; \frac{1-p}{f_h} \Lambda_h; 0; 0; 0; 0; 0; 0 \right)$$

- la situation où l'on a absence de maladie mais présence de moustiques dans la zone d'étude. Alors le point d'équilibre sans maladie est donné par :  $X_1^* = (S_e^*; 0; 0; S_a^*; 0; 0; S_m^*; 0; 0; 0)$ . Il reste à déterminer  $S_m^*$ . Il suffit de résoudre l'équation

$$\begin{aligned} \frac{dS_m(t)}{dt} = 0 &\Leftrightarrow s_P P^* - f_m S_m^* = 0 \\ &\Leftrightarrow S_m^* = \frac{s_P}{f_m} P^* \end{aligned}$$

où  $P^*$  est obtenu dans l'étude du modèle de la croissance de l'anophèle et donné par :

$$P^* = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{K_P}{\chi_P}\right)$$

avec

$$\chi_P = 1 + \frac{(s_E s_P K_E + (s_L + d_L))(s_P + d_P) s_P}{b s_E s_L s_P K_E - (b s_E s_P K_E - b(s_L + d_L) s_P - (s_E + d_E)(s_L + d_L))(s_P + d_P) d_A K_E}.$$

Ainsi le point d'équilibre non trivial sans maladie est

$$X_1^* = \left(\frac{p}{f_h} \Lambda_h; 0; 0; \frac{1-p}{f_h} \Lambda_h; 0; 0; 0; \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{s_P K_P}{f_m \chi_P}\right); 0; 0\right)$$

### 4.6.1 Existence et positivité de solution

**Lemme.** 4.6.1 *Le système (4.4.21) admet une unique solution et cette solution est bornée.*

*De plus le domaine*

$$\Delta' = \left\{ (S_e, E_e, I_e, S_a, E_a, I_a, R_a, S_m, E_m, I_m) \in \mathbb{R}_+^{10} \mid \begin{array}{l} 0 \leq S_e + E_e + I_e + S_a + E_a + I_a + R_a \leq \frac{\Lambda_h}{f_h} \\ 0 \leq S_m + E_m + I_m \leq \frac{s_P}{f_m} K_P \end{array} \right\}$$

*est positivement invariant et attire toutes les orbites positives dans  $\mathbb{R}_+$ .*

**Preuve :** Comme  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc localement lipschitzienne, sur  $\mathbb{R}^{10}$ , on en déduit l'existence et l'unicité de la solution au problème de **Cauchy** associé au système (4.4.21) relatif à la condition initiale  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{10}$ . De plus  $F$  étant  $\mathcal{C}^\infty$ , on en déduit que cette solution est aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On sait que

$$\frac{dN_h(t)}{dt} = \Lambda_h - f_h N_h - \gamma_e I_e - \gamma_a I_a \leq \Lambda_h - f_h N_h$$

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dN_h(t)}{dt} = \Lambda_h - f_h N_h(t).$$

En utilisant la méthode de la variation de la constante, entre  $t_0$  et  $t$ , on obtient la solution sous la forme suivante :

$$N_h(t) = \frac{\Lambda_h}{f_h} + \left(N_0 - \frac{\Lambda_h}{f_h}\right) e^{-f_h(t-t_0)}$$

Par conséquent,  $N_h(t) \leq \frac{\Lambda_h}{f_h}$  dès que la condition initiale  $N_0 \leq \frac{\Lambda_h}{f_h}$ .

D'où la bornitude de  $\Delta'$  et on l'on en déduit donc l'existence globale des solutions dans  $[0; +\infty[$  On montre de même que toutes les solutions de l'équation différentielle  $\frac{dN_m(t)}{dt} = s_P P - f_m N_m$  sont toutes inférieures à  $\frac{s_P}{f_m} K_P$  dès que la condition initiale  $N_0 \leq \frac{s_P}{f_m} K_P$

Par ailleurs, si nous supposons que  $N_h(t) > \frac{\Lambda_h}{f_h}$  (respectivement  $N_m(t) > \frac{s_P}{f_m} K_P$ ), on obtient  $\frac{dN_h(t)}{dt} < \Lambda_h - f_h \times \frac{\Lambda_h}{f_h}$  i.e  $\frac{dN_h(t)}{dt} < 0$  (respectivement  $\frac{dN_m(t)}{dt} < 0$ ). Dans ce cas la population humaine (et aussi celle des moustiques) serait décroissante et comme le domaine est compacte alors toutes les solutions y demeurent.

### 4.6.2 Calcul du taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0$

Pour se faire disposons  $X(t)$  de la façon suivante

$$X(t) = (E_e, I_e, E_a, I_a, R_a, E_m, I_m, S_e, S_a, S_m).$$

En linéarisant le système (4.4.21) au voisinage du point d'équilibre non trivial  $X_1^*$ , on obtient le système différentiel linéaire suivant

$$X'(t) = BX(t)$$

où  $B$  désigne la matrice jacobienne de  $F$  au point  $X_1^*$ , est définie de la façon suivante :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad (4.6.26)$$

avec les matrices  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  et  $B_{22}$  définies respectivement par :

$$B_{11} = \begin{pmatrix} -(f_h + \nu_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{me} n_a \frac{S_e^*}{N_h^*} \\ \nu_e & -(f_h + \gamma_e + \alpha_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(f_h + \nu_a) & 0 & 0 & 0 & c_{ma} n_a \frac{S_a^*}{N_h^*} \\ 0 & 0 & \nu_a & -(f_h + \gamma_a + \alpha_a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_e & 0 & \alpha_a & -(f_h + \beta_a) & 0 & 0 \\ 0 & c_{em} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*} & 0 & c_{am} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*} & \tilde{c}_{am} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*} & -(f_h + \nu_m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_m & -f_m \end{pmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{me} n_a \frac{S_e^*}{N_h^*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_a & 0 & -c_{ma} n_a \frac{S_a^*}{N_h^*} \\ 0 & -c_{em} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*} & -\tilde{c}_{am} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*} & -c_{am} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{22} = \begin{pmatrix} -f_h & 0 & 0 \\ 0 & -f_h & 0 \\ 0 & 0 & -f_m \end{pmatrix}$$

La sous-matrice  $B_{11}$  est appelée matrice de *transmission*, elle est de **Metzler** stable et sa décomposition régulière est donnée par :  $B_{11} = F + V$  où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{me}n_a \frac{S_e^*}{N_h^*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{ma}n_a \frac{S_a^*}{N_h^*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{em}n_a \frac{S_m^*}{N_h^*} & 0 & c_{am}n_a \frac{S_m^*}{N_h^*} & \tilde{c}_{am}n_a \frac{S_m^*}{N_h^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$V = \begin{pmatrix} -(f_h + \nu_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_e & -(f_h + \gamma_e + \alpha_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(f_h + \nu_a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_a & -(f_h + \gamma_a + \alpha_a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_e & 0 & \alpha_a & -(f_h + \beta_a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(f_h + \nu_m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_m & -f_m \end{pmatrix}$$

Dans la suite nous adopterons les notations suivantes :

$$A^* = f_h + \nu_e, \quad B^* = f_h + \gamma_e + \alpha_e, \quad C^* = f_h + \nu_a, \quad D^* = f_h + \gamma_a + \alpha_a, \quad E^* = f_h + \beta_a, \quad F^* = f_h + \nu_m$$

La matrice  $V$  est inversible et de **Metzler** stable. En considérant les notations ci-dessus, son inverse s'écrit :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\nu_e} & -\frac{1}{B^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C^*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C^*D^*}{\alpha_a\nu_a} & -\frac{1}{D^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C^*D^*E^*}{\alpha_a\nu_a} & -\frac{1}{D^*E^*} & -\frac{1}{E^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{F^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu_m}{f_m F^*} & -\frac{1}{f_m} \end{pmatrix}$$

**Définition.** 4.6.2 On appelle matrice de la prochaine génération du modèle (4.4.21) la matrice  $-FV^{-1}$  que l'on notera  $K$  et définie par :

$$K = -FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{57} \\ 0 & K_{62} & 0 & K_{64} & K_{65} & 0 & 0 \\ 0 & K_{72} & 0 & K_{74} & K_{75} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients non nuls sont donnés par :

$$\begin{aligned} K_{17} &= \frac{1}{A^*} \times c_{me} n_a \frac{S_e^*}{N_h^*}, & K_{27} &= \frac{\nu_e}{A^* B^*} \times c_{me} n_a \frac{S_e^*}{N_h^*}, & K_{37} &= \frac{1}{C^*} \times c_{ma} n_a \frac{S_a^*}{N_h^*}, & K_{47} &= \frac{\nu_a}{C^* D^*} \times c_{ma} n_a \frac{S_a^*}{N_h^*}, \\ K_{57} &= \frac{\alpha_a \nu_a}{C^* D^* E^*} \times c_{ma} n_a \frac{S_a^*}{N_h^*}, & K_{62} &= \frac{1}{F^*} \times c_{em} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*}, & K_{64} &= \frac{1}{F^*} \times c_{am} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*}, & K_{65} &= \frac{1}{F^*} \times \bar{c}_{am} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*}, \\ K_{72} &= \frac{\nu_m}{F^*} \times \frac{1}{f_m} \times c_{em} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*}, & K_{74} &= \frac{\nu_m}{F^*} \times \frac{1}{f_m} \times c_{am} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*}, & K_{75} &= \frac{\nu_m}{F^*} \times \frac{1}{f_m} \times \bar{c}_{am} n_a \frac{S_m^*}{N_h^*}. \end{aligned}$$

**Proposition.** 4.6.2 Le taux de reproduction de base noté  $\mathcal{R}_0$  du modèle (4.4.21) est donné par :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1}) = \sqrt{K_{27}K_{72} + K_{47}K_{74} + K_{57}K_{75}}$$

**Preuve :** Par définition le taux de reproduction de base est le rayon spectral de la matrice de prochaine génération. Et le rayon spectral est le maximum des valeurs propres. Le polynôme caractéristique de la matrice de prochaine génération vaut :

$$\begin{aligned} P_K(X) &= \det(K - XI_7) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{17} \\ 0 & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{27} \\ 0 & 0 & -X & 0 & 0 & 0 & K_{37} \\ 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 0 & K_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & K_{57} \\ 0 & K_{62} & 0 & K_{64} & K_{65} & -X & 0 \\ 0 & K_{72} & 0 & K_{74} & K_{75} & 0 & -X \end{vmatrix} \\ &= -X^7 + (K_{27}K_{72} + K_{47}K_{74} + K_{57}K_{75}) X^5 \end{aligned}$$

Et par suite  $R_0 = \rho(K) = \sqrt{K_{27}K_{72} + K_{47}K_{74} + K_{57}K_{75}}$

### 4.6.3 Etude de la stabilité du point d'équilibre sans maladie

Dans cette partie nous donnons des conditions sur  $\mathcal{R}_0$  pour la stabilité de notre modèle.

**Définition. 2.2.1** (*Application entrée-sortie*). Soit  $T > 0$ . L'application entrée-sortie en temps  $T$  du système contrôlé (2.2.13) initialisé à  $x_0$  est l'application

$$\begin{aligned} E_T : \mathcal{U} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto x_u(T) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des contrôles admissibles, i.e. l'ensemble des contrôles  $u$  tel que la trajectoire associée est bien définie sur  $[0; T]$ . Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps  $T$  associée à un contrôle  $u$  est le point final de la trajectoire associée à  $u$ .

**Définition. 2.2.2** (*Système linéarisé*). Considérons le système (2.2.13) où  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \geq 1$ . Le système le long de la trajectoire  $x_u$  est défini par :

$$\begin{cases} y'_v(t) = A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(0) = 0 \end{cases}$$

où pour tout  $t \in [0; T]$ ,  $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t))$ ,  $B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t))$

**Proposition. 2.2.1** Considérons le système (2.2.13) où  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \geq 1$  et soit  $\mathcal{U} \subset L^\infty([0; T], \mathbb{R}^m)$  le domaine de définition de  $E_T$ , c'est à dire l'ensemble des contrôles dont la trajectoire associée est bien définie sur  $[0; T]$ . Alors  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $L^\infty([0; T], \mathbb{R}^m)$  et  $E_T$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  au sens  $L^\infty$ . De plus la différentielle (au sens de **Fréchet**) de  $E_T$  en un point de  $\mathcal{U}$  est donnée par le système linéarisé en  $u$ , noté  $dE_T(u)$  et vérifie pour tout  $v \in L^\infty([0; T], \mathbb{R}^m)$

$$dE_T(u).v = y_v(T) = M(T) \int_0^T M^{-1}(s)B(s)v(s)ds$$

où  $M$  est la résolvante du système linéarisé, i.e. la solution matricielle de  $M' = AM$ ,  $M(0) = I$

**Définition. 2.2.3** (*Ensemble accessible*). L'ensemble accessible en temps  $T$  pour le système (2.2.13), noté  $\text{Acc}(x_0, T)$  est l'ensemble des extrémités au temps  $T$  des solutions du système partant de  $x_0$  au temps  $t = 0$ . Autrement dit, c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps  $T$ . C'est l'ensemble des destinations possibles en temps  $T$  du système (2.2.13) en faisant varier le contrôle  $u$ .

**Théorème. 2.2.1** Considérons le système de contrôle (2.2.13), où la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{1+n+m}$  et les contrôles  $u$  appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{U}$  des fonctions mesurables à valeurs dans un compact  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . On suppose que :

- (i) il existe un réel positif  $b$  tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par  $b$  sur  $[0; T]$ , i.e.

$$\exists b > 0 / \forall u \in \mathcal{U}, \forall t \in [0; T], \|x_u(t)\| \leq b \quad (2.2.14)$$

(ii) pour tout  $(t, x)$ , l'ensemble des vecteurs vitesses

$$V(t, x) = \{f(t, x, u) | u \in \Omega\} \quad (2.2.15)$$

est un convexe.

Alors l'ensemble  $Acc(x_0, t)$  est un compact et varie continûment en  $t$  sur  $[0; T]$ .

**Définition. 2.2.4** Le système (2.2.13) est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis  $x_0$  si

$$\mathbb{R}^n = \cup_{T \geq 0} Acc(x_0, T)$$

Il est dit contrôlable en temps  $T$  si  $\mathbb{R}^n = Acc(x_0, T)$

**Théorème. 2.2.2** Considérons le système (2.2.13) où  $f(x_0, u_0) = 0$ . Notons  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$  et  $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$ . On suppose que

$$rg(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = n$$

Alors le système est localement contrôlable en  $x_0$ .

**Définition. 2.2.5** (Fonction continue par morceaux). Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  (fini ou infini). On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $[a; b]$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $I$  telle que : pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $f$  est continue sur l'intervalle ouvert  $]a_{i-1}; a_i[$ , admet une limite finie à droite en  $a_{i-1}$  et une limite finie à gauche en  $a_i$ .

**Définition. 2.2.6** (Contrôle singulier). Soit  $u$  un contrôle défini sur  $[0; T]$  tel que sa trajectoire associée  $x_u$  issue de  $x(0) = x_0$  est définie sur  $[0; T]$ . On dit que le contrôle  $u$  (ou la trajectoire  $x_u$ ) est singulier si la différentielle de **Fréchet**  $dE_T(u)$  de l'application entrée-sortie au point  $u$  n'est pas surjective. Sinon, on dit qu'il est régulier.

**Définition. 2.2.7** Considérons le système (2.2.13) où  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{1+n+m}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors l'Hamiltonien du système est la fonction définie par

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, u, \lambda) &\mapsto H(t, x, u, \lambda) = \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle \end{aligned}$$

où  $\langle, \rangle$  est le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition. 2.2.2** Soit  $u$  un contrôle singulier sur  $[0; T]$  pour le système de contrôle (2.2.13), et soit  $x(\cdot)$  la trajectoire singulière associée. Alors il existe une application absolument continue  $\lambda : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , appelée vecteur adjoint, telle que les équations

suivantes sont vérifiées pour presque tout  $t \in [0; T]$

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \quad (2.2.16)$$

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \quad (2.2.17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0, \quad (2.2.18)$$

où  $H$  est l'Hamiltonien du système. L'équation (2.2.18) est appelée équation des contraintes.

## 2.2.2 Contrôle optimal

En plus d'un problème de contrôle, on se donne un problème d'optimisation. Le problème que l'on se pose ici, consiste à trouver une fonction de contrôle continue par morceaux  $u(t)$  ainsi que la solution associée  $x_u(t)$  qui minimise ou maximise une certaine fonction coût  $C(T, u)$ . Le problème de contrôle optimal se pose sous la forme :

$$\begin{cases} x' = f(x, u) & x(0) = x_0 & x(T) = x_1 \\ \min C(T, u) \text{ ou } \max C(T, u) & ; C(T, u) = \int_0^T g(x(t), u(t))dt \end{cases} \quad (2.2.19)$$

**Théorème.** 2.2.3 *Considérons le système de contrôle (2.2.13) où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^{1+n+m}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , les contrôles sont à valeurs dans un compact  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ , et où éventuellement on a les contraintes sur l'état*

$$c_1(x) \leq 0, \dots, c_r(x) \leq 0,$$

où  $c_1, \dots, c_r$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux compacts de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $M_1$  est accessible depuis  $M_0$ . Soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble des contrôles à valeurs dans  $\Omega$  joignant  $M_0$  à  $M_1$ . Soit une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{1+n+m}$ , et  $h$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère le coût

$$C(u) = h(t(u), x(t(u))) + \int_0^{t(u)} g(t, x(t), u(t))dt,$$

où  $t(u)$  est tel que  $x(t(u)) \in M_1$ . On suppose que

- il existe un réel positif  $b$  tel que pour tout  $u$  la trajectoire associée à un contrôle  $u \in \mathcal{U}$  est uniformément bornée par  $b$  sur  $[0, t(u)]$ , i.e

$$\exists b > 0 \forall u \in \mathcal{U}, \text{ et } t \in [0, t(u)], \|x_u(t)\| \leq b$$

- pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ , l'ensemble des vecteurs vitesses augmentés

$$\tilde{V} = \{(f(t, x, u), g(t, x, u)) | u \in \Omega\}$$

est convexe.



**Théorème.** 4.6.1 *L'état d'équilibre  $X_1^*$  du système (4.4.21) est localement asymptotiquement stable si  $R_0 < 1$  et instable si  $R_0 > 1$*

**Preuve :** Le théorème (4.6.1) nous dit que le point d'équilibre sans maladie (DFE) est localement asymptotiquement stable si la matrice jacobienne du système (4.5.22) a en ce point toutes ses valeurs propres à parties réelles strictement négatives.

En effet, la matrice  $B_{11}$  est une matrice de Metzler stable dont la décomposition régulière  $B_{11} = F + V$  est tel que

$$K = -FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{57} \\ 0 & K_{62} & 0 & K_{64} & K_{65} & 0 & 0 \\ 0 & K_{72} & 0 & K_{74} & K_{75} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et par suite  $B_{11}$  est asymptotiquement stable si et seulement si  $\rho(K) = R_0 < 1$  et donc le point d'équilibre sans maladie est aussi asymptotiquement stable.

Par ailleurs si  $\rho(K) = R_0 > 1$ , alors l'équilibre  $X_1^*$  est instable.

#### 4.6.4 Etude de l'influence du seuil $r$ sur $\mathcal{R}_0$

Nous avons obtenu précédemment que

$$R_0^2 = K_{27}K_{72} + K_{47}K_{74} + K_{57}K_{75}.$$

Une expression explicite de  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $r$  est donnée par :

$$R_0 = f_\kappa(r) = \sqrt{\kappa \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \quad (4.6.27)$$

où

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\nu_e}{A^*B^*} \times c_{me}n_a \frac{S_e^*}{N_h^*} \times \frac{\nu_m}{F^*} \times \frac{1}{f_m^2} \times c_{em}n_a \frac{s_P K_P}{\chi_P N_h^*} \\ &+ \frac{\nu_a}{C^*D^*} \times c_{ma}n_a \frac{S_a^*}{N_h^*} \times \frac{\nu_m}{F^*} \times \frac{1}{f_m^2} \times c_{am}n_a \frac{s_P K_P}{\chi_P N_h^*} \\ &+ \frac{\alpha_a \nu_a}{C^*D^*E^*} \times c_{ma}n_a \frac{S_a^*}{N_h^*} \times \frac{\nu_m}{F^*} \times \frac{1}{f_m^2} \times \tilde{c}_{am}n_a \frac{s_P K_P}{N_h^*} \end{aligned}$$

Nous allons donc étudier la fonction  $f_\kappa(r)$  sur  $]1; +\infty[$ . Pour tout  $r > 1$ ,  $f$  est dérivable et sa dérivée vaut :

$$f'_\kappa(r) = \frac{\kappa}{r^2 \sqrt{\kappa \left(1 - \frac{1}{r}\right)}} > 0.$$

Ainsi  $\mathcal{R}_0$  est une fonction croissante du seuil  $r$ .

**Théorème. 4.6.2**      Posons  $r_0 = \frac{\kappa}{\kappa - 1}$ ,  $\kappa \neq 1$ .

- Si  $1 < r < r_0$  alors le point d'équilibre  $X_1^*$  est localement asymptotiquement stable,
- si  $r > r_0$  alors le point d'équilibre  $X_1^*$  est instable.

**Preuve :** Le point d'équilibre est stable si et seulement si

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0 < 1 &\Leftrightarrow \sqrt{\kappa \left(1 - \frac{1}{r}\right)} < 1 \\ &\Leftrightarrow r < \frac{\kappa}{\kappa - 1}.\end{aligned}$$

Il suffit de poser  $r_0 = \frac{\kappa}{\kappa - 1}$ ,  $\kappa \neq 1$

Il est instable si  $r > r_0$ .

**Remarque. 4.6.1** *La dynamique de croissance de l'anophèle a un impact considérable sur la dynamique de propagation du paludisme.*

# Chapitre 5

## Simulations numériques

*L'objectif de ce chapitre est de confirmer par des résultats numériques les hypothèses et les résultats mathématiques établis pour les modèles étudiés. Également nous présenterons assez brièvement le logiciel de calcul scientifique MATLAB*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Présentation du solveur ODE45 . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>5.2</b>	<b>Simulation numérique du modèle des moustiques . . . . .</b>	<b>80</b>
5.2.1	Dynamique du modèle des moustiques pour $r < 1$ . . . . .	80
5.2.2	Dynamique des moustiques pour $r > 1$ . . . . .	81
<b>5.3</b>	<b>Simulations numériques du modèle de transmission . . . . .</b>	<b>83</b>
5.3.1	Dynamique du modèle de transmission pour $r > 1$ et $\mathcal{R}_0 > 1$ .	83
5.3.2	Dynamique du modèle de transmission pour $r > 1$ et $\mathcal{R}_0 < 1$ .	86

---

### 5.1 Présentation du solveur ODE45

L'évolution des outils informatiques a profondément influencé les méthodes de travail des ingénieurs et des chercheurs ainsi que l'enseignement. Le traitement numérique des données et leur visualisation, ainsi que les techniques de modélisation et de simulation se sont notamment généralisées. Dans le domaine, un logiciel commercial est devenu, ces dernières années, presque incontournable, MATLAB de la société **The Maths Works**1. MATLAB est un puissant logiciel scientifique de calcul numérique, de programmation et de visualisation graphique. Il est énormément utilisé pour la simulation numérique des problèmes aux équations différentielles ordinaires.

La version actuelle de MATLAB dispose de plusieurs bibliothèques de solveurs pour des résolutions numériques approchées de différents types d'équations différentielles ordinaires. En l'occurrence nous pouvons citer ODE45, ODE23, ODE113, ODE15s, ODE23s, ODE23t, ODE23tb et ODE15i. Pour la simulation numérique de nos différents résultats,

nous utiliserons le solveur ODE45 qui est obtenu grâce à la méthode de **Runge-Kutta-Merson** à pas adaptif d'ordre 4 et 5, car il intègre la résolution des systèmes de type autonome. Sa syntaxe est

$$[T, Y] = ODE45(ODEFUN, TSAN, Y0, OPTIONS)$$

- les vecteurs  $T$  et  $Y$  représentent respectivement les instants  $t_i$  et les solutions  $Y(t_i)$ , correspondantes,
- $ODEFUN$  désigne la fonction décrivant le système d'ODEOs,
- $TSAN$  est l'intervalle de temps d'intégration et les instants intermédiaires auxquelles on souhaite obtenir les solutions,
- $Y0$  est le vecteur initial, il s'agit des conditions initiales du système,
- $OPTIONS$  représente les différentes options retenues pour les solveurs.

**Remarque.** 5.1.1 *Nos différentes simulations ont été réalisées sur un Pc, processeur Intel (R) CPU N280 de mémoire vive 1.70GHZ.*

## 5.2 Simulation numérique du modèle des moustiques

### 5.2.1 Dynamique du modèle des moustiques pour $r < 1$

Dans cette partie nous simulons numériquement le modèle (4.2.2) afin de mieux comprendre son comportement général et valider également les résultats mathématiques obtenus. Pour ce faire, nous utiliserons les paramètres donnés dans le tableau ci-après recueillis dans la littérature scientifique, [38, 30].

Paramètres	Extinction	Persistance
$b$	2	4
$s_E$	0.6	0.7
$d_E$	0.3	0.2
$s_L$	0.4	0.5
$d_L$	0.3	0.2
$s_P$	0.25	0.15
$d_P$	0.15	0.15
$d_A$	0.7	0.35
$K_E$	1000	1000
$K_L$	500	500
$K_P$	400	400

Tableau 5.1 – Les paramètres du modèle de la croissance de l'anophèle

Pour les conditions initiales données par  $E(0) = 400$ ,  $L(0) = 115$ ,  $P(0) = 100$ ,  $A(0) = 250$ , on obtient les figures suivantes :

## 5.2. SIMULATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE DES MOUSTIQUES

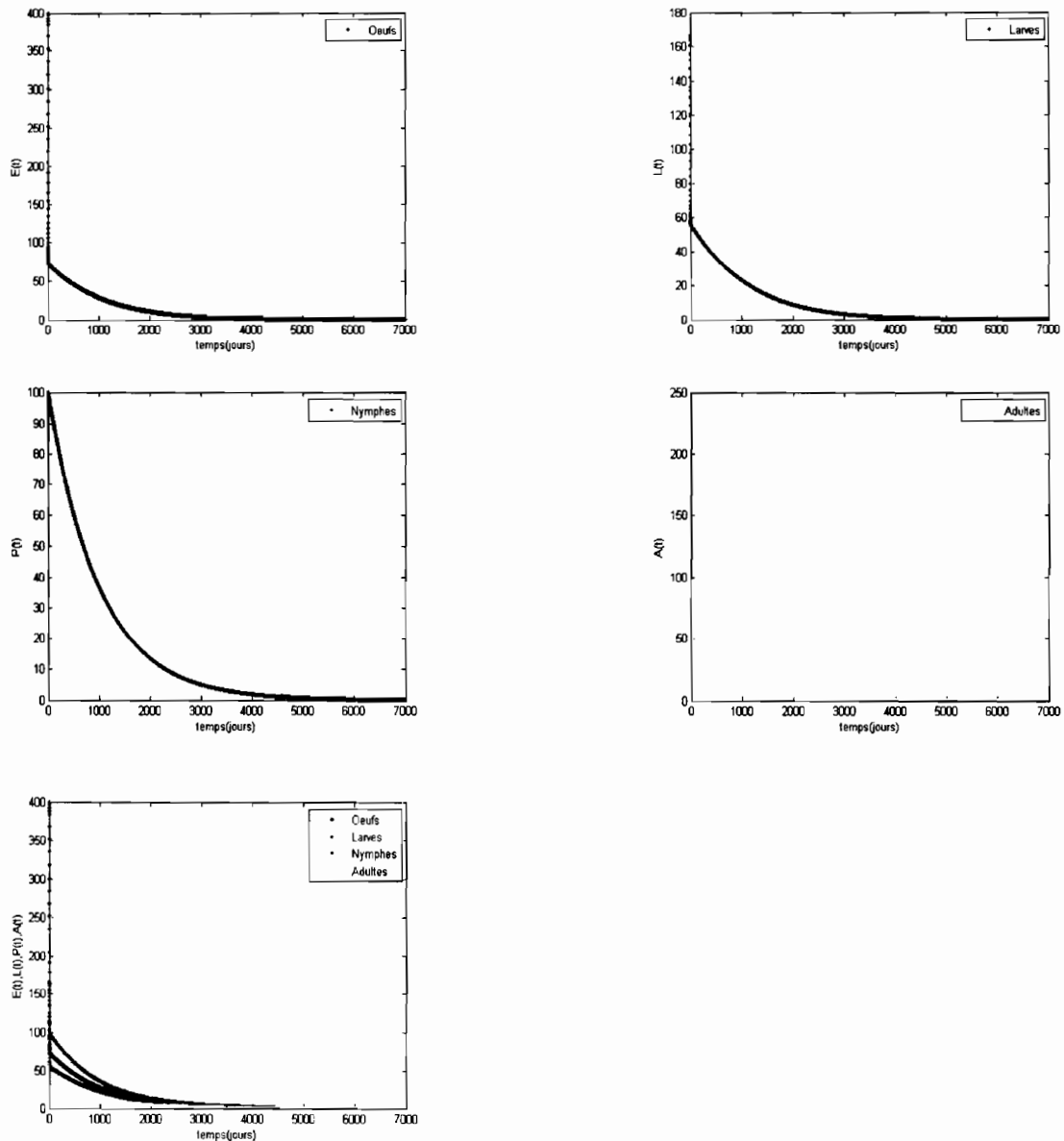


FIGURE 5.1 – Evolution des classes  $E$ ,  $L$ ,  $P$  et  $A$  pour  $r = 0.68$ .

Les courbes de la figure 5.1 décrivent respectivement l'évolution des différentes classes de la croissance de l'anophèle pour  $r = 0.68 < 1$ . En effet, on observe une extinction des différentes classes à partir d'un certain temps. Par ailleurs, on constate que le point d'équilibre  $X_0^* = (0, 0, 0, 0)$  est globalement asymptotiquement stable, ce qui confirme le résultat obtenu au théorème (4.3.3).

### 5.2.2 Dynamique des moustiques pour $r > 1$

A présent nous allons étudier le comportement du modèle (4.2.2) lorsque le seuil  $r$  est strictement supérieur à 1. Pour cela, en considérant les conditions initiales données par  $E(0) = 80$ ,  $L(0) = 50$ ,  $P(0) = 10$ ,  $A(0) = 50$ , on obtient les figures suivantes :

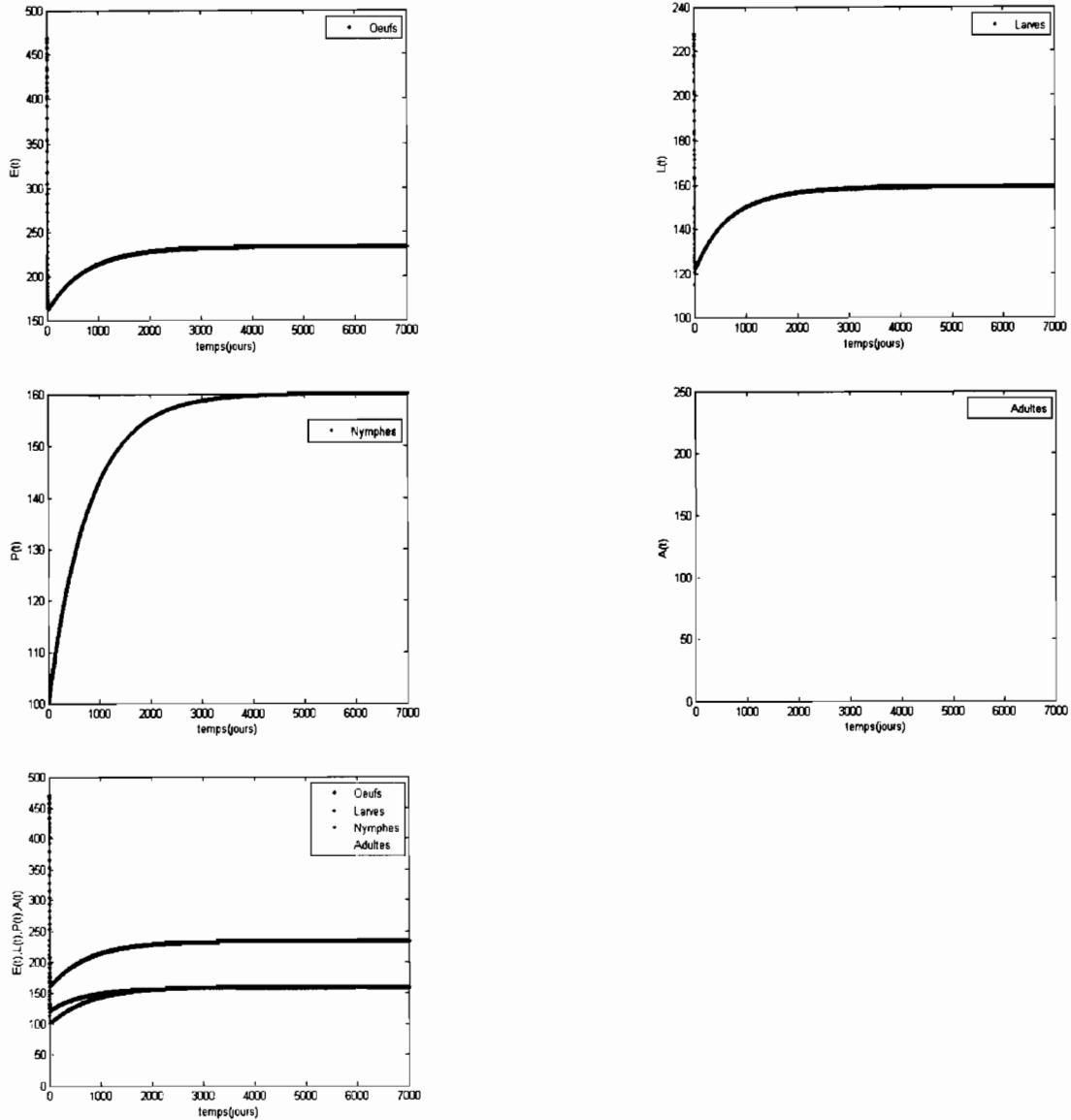


FIGURE 5.2 – Evolution des classes  $E$ ,  $L$ ,  $P$  et  $A$  pour  $r = 3.80$

Les courbes de la figure 5.2 décrivent respectivement l'évolution des différentes classes de la croissance de l'anophèle pour  $r = 3.80 > 1$ . On constate que la solution  $(E, L, P, A)$  du système (4.2.2) converge vers le point d'équilibre endémique

$$(E^*, L^*, P^*, A^*) = (230, 160, 160, 70)$$

qui est globalement asymptotiquement stable comme l'illustre le théorème (4.3.4).

**Remarque. 5.2.1** *On constate que le seuil  $r$  influence considérablement l'évolution des moustiques adultes comme le montre la figure 5.3. Plus le seuil croît plus le nombre de moustiques adultes augmente. Ce seuil pourrait donc être un facteur très important dans la dynamique de transmission du paludisme. Il pourrait être un paramètre de contrôle du paludisme.*

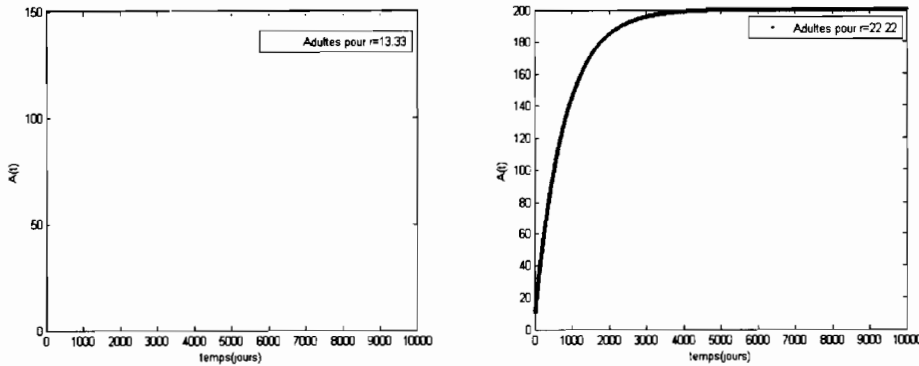


FIGURE 5.3 – Evolution des moustiques adultes selon des valeurs de  $r$ .

### 5.3 Simulations numériques du modèle de transmission

#### 5.3.1 Dynamique du modèle de transmission pour $r > 1$ et $\mathcal{R}_0 > 1$

Ici nous nous intéressons à la simulation numérique du modèle de la transmission du paludisme sous l'influence du modèle des moustiques à travers le seuil  $r$ . Pour mieux appréhender la transmission de la maladie, nous supposons que  $r > 1$ . Les paramètres donnés dans le tableau 5.2 seront utilisés pour l'obtention des résultats numériques.

En considérant les conditions initiales :  $S_e(0) = 500$ ,  $E_e(0) = 200$ ,  $I_e(0) = 500$ ,  $S_a(0) = 250$ ,  $E_a(0) = 150$ ,  $I_a(0) = 150$ ,  $R_a(0) = 100$ ,  $S_m(0) = 500$ ,  $E_m(0) = 150$ ,  $I_m(0) = 150$ ,  $E(0) = 500$ ,  $L(0) = 400$ ,  $P(0) = 300$ ,  $A(0) = 800$ , les valeurs pour les paramètres relatifs aux moustiques :  $b = 8$ ,  $s_E = 0.7$ ,  $d_E = 0.2$ ,  $s_L = 0.5$ ,  $d_L = 0.2$ ,  $s_P = 0.15$ ,  $d_P = 0.1$  et les valeurs numériques du tableau 5.2 dans le cas de la persistance, alors nous obtenons  $r = 26.66$ ,  $\mathcal{R}_0 = 2.15$  et les figures suivantes :

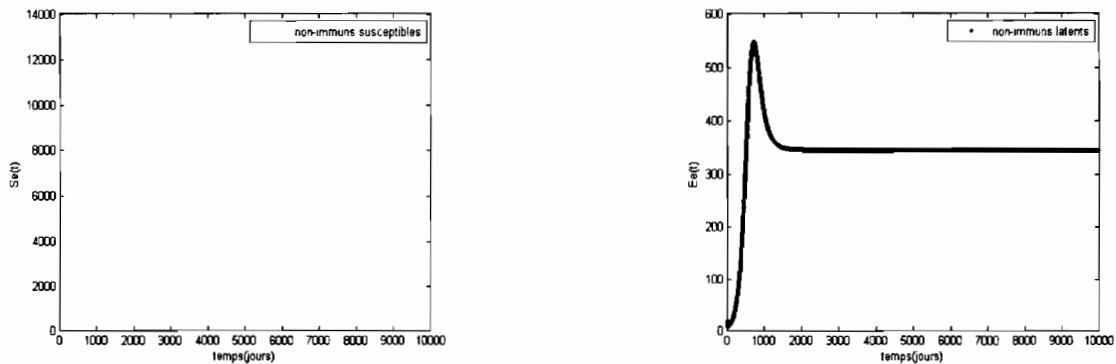


FIGURE 5.4 – Evolution des susceptibles et des latents

La figure 5.4 décrit l'évolution des individus non-immuns dans les différentes classes.

Paramètres	extinction	persistance
$p$	0.25	0.8
$\Lambda_h$	10	50
$c_{me}$	0.021	0.03
$c_{ma}$	0.012	0.022
$c_{em}$	0.11	0.45
$c_{am}$	0.08	0.35
$\tilde{c}_{am}$	0.008	0.002
$\nu_e$	0.10	0.10
$\nu_a$	0.06	0.09
$\nu_m$	0.083	0.083
$\alpha_a$	0.01	0.01
$\alpha_e$	0.001	0.001
$\gamma_e$	0.000018	0.000018
$\gamma_a$	0.00003	0.00003
$\beta_a$	0.0055	0.0027
$f_h$	0.00063	0.00063
$f_m$	0.1	0.1
$n_a$	0.25	0.5

Tableau 5.2 – Les paramètres du modèle global de la transmission.

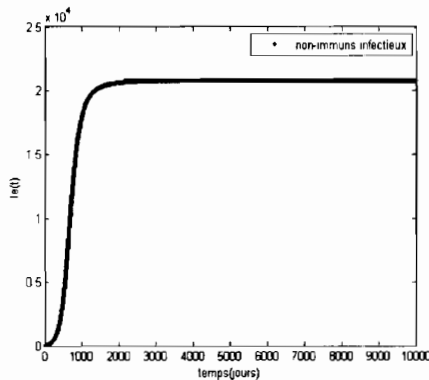


FIGURE 5.5 – Evolution des humains non-immuns.

On constate qu'il y a beaucoup de non-immuns infectés. On observe également une croissance rapide du nombre d'infectés sur la période de 0 à 5 mois.

La figure 5.5 décrit l'évolution des individus semi-immuns dans les différentes classes. On constate qu'il y a moins d'individus latents et infectieux. Cependant, le nombre d'individus immunisés est très élevé, ce qui traduit le fait que la zone est endémique.

La figure 5.6 décrit l'évolution des individus dans les différentes classes des moustiques.

**Remarque. 5.3.1** Pour  $\mathcal{R}_0 = 2.15 > 1$ , la solution



### 5.3. SIMULATIONS NUMÉRIQUES DU MODÈLE DE TRANSMISSION

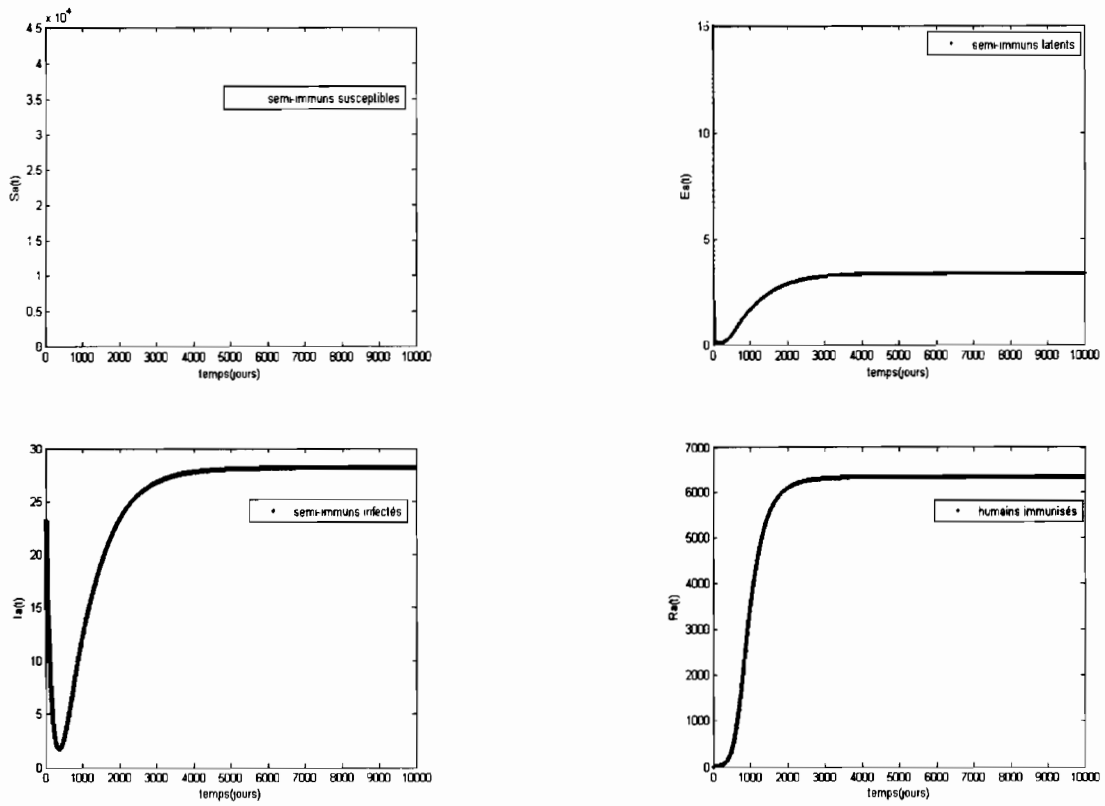


FIGURE 5.6 – Evolution des humains semi-immuns.

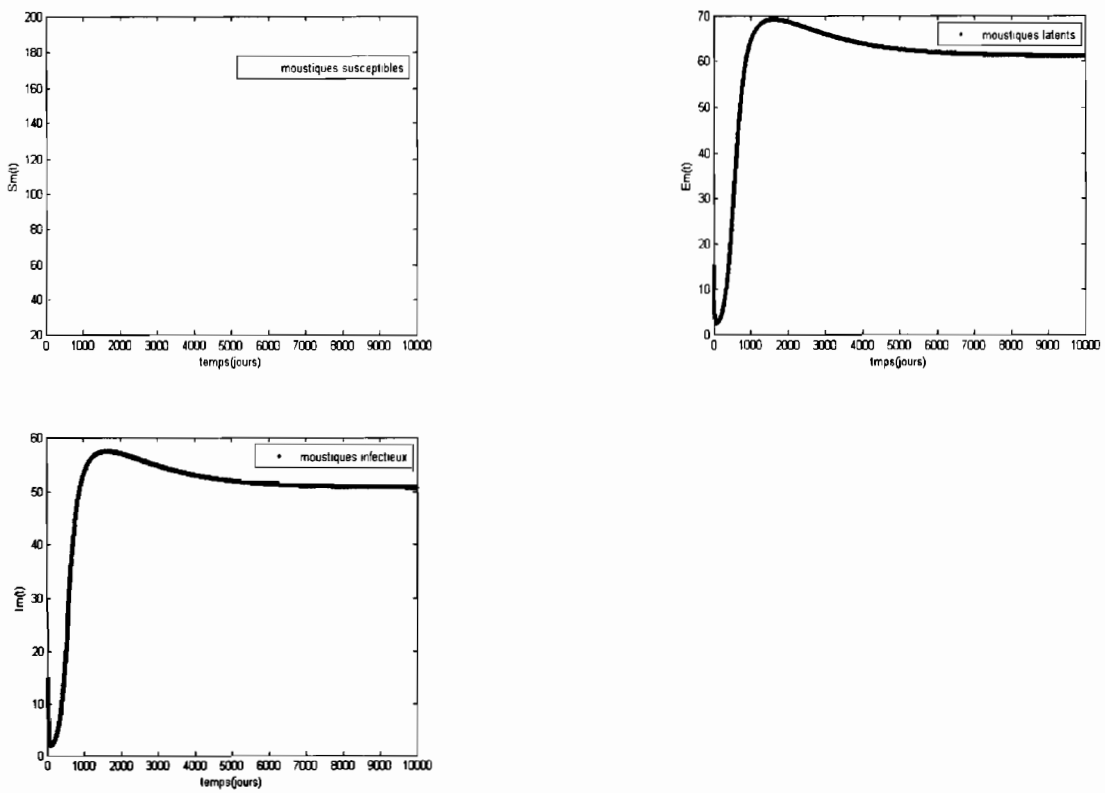


FIGURE 5.7 – Evolution des moustiques.

$(S_e, E_e, I_e, S_a, E_a, I_a, R_a, S_m, E_m, I_m)$  du modèle (4.4.21) converge vers l'équilibre endémique  $(8200, 350, 210000, 420000, 3, 28, 6400, 190, 60, 60)$  et la maladie persiste.

### 5.3.2 Dynamique du modèle de transmission pour $r > 1$ et $\mathcal{R}_0 < 1$

En considérant les conditions initiales  $S_e(0) = 500, E_e(0) = 200, I_e(0) = 500, S_a(0) = 250, E_a(0) = 150, I_a(0) = 150, R_a(0) = 100, S_m(0) = 500, E_m(0) = 150, I_m(0) = 150, E(0) = 500, L(0) = 400, P(0) = 300, A(0) = 800$ , ainsi que les valeurs définies pour les vecteurs, nous allons étudier le comportement du modèle au voisinage du point d'équilibre sans maladie. Pour cela nous considérons les valeurs correspondantes au cas de l'extinction.

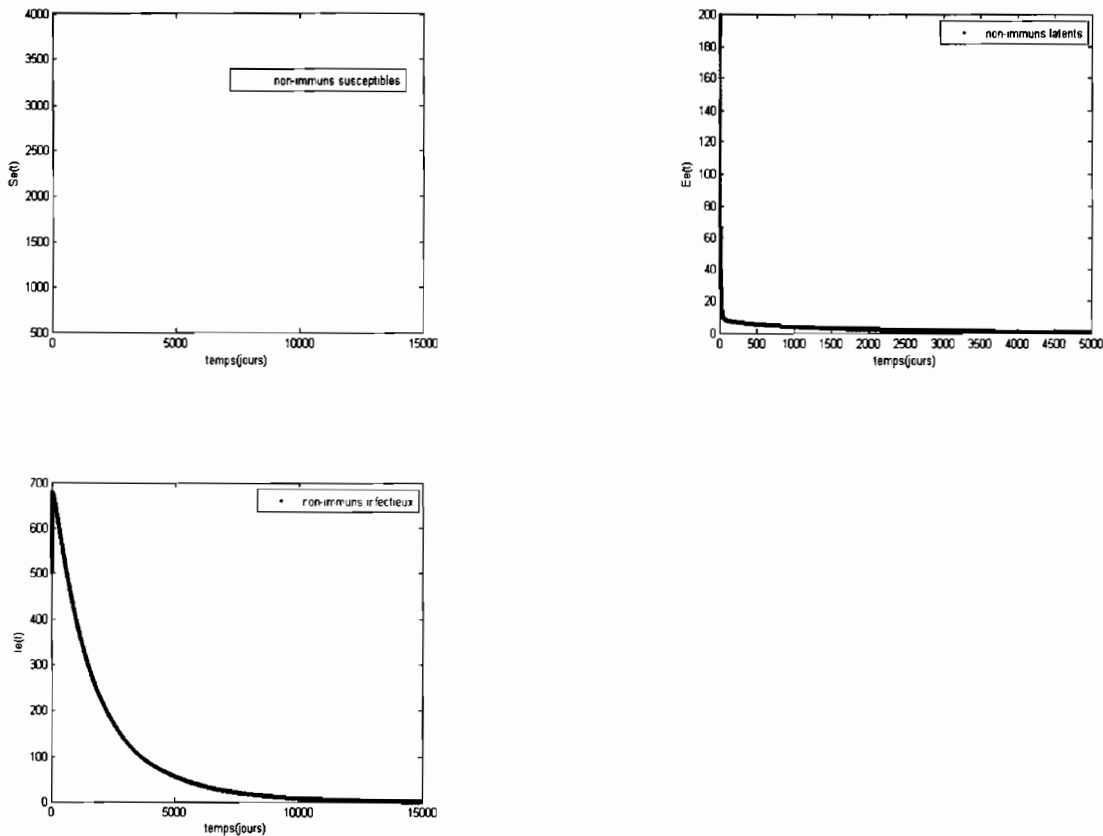


FIGURE 5.8 – Courbe d'évolution des individus non-immuns.

Avec les paramètres utilisés, on obtient  $r = 26.66 > 1$  et  $\mathcal{R}_0 = 0.24 < 1$ . On constate une extinction de la maladie dans toutes les populations et la solution du modèle converge vers l'équilibre sans maladie  $(4000, 0, 0, 12000, 0, 0, 0, 3000, 0, 0)$  qui est globalement asymptotiquement stable.

### 5.3. SIMULATIONS NUMÉRIQUES DU MODÈLE DE TRANSMISSION

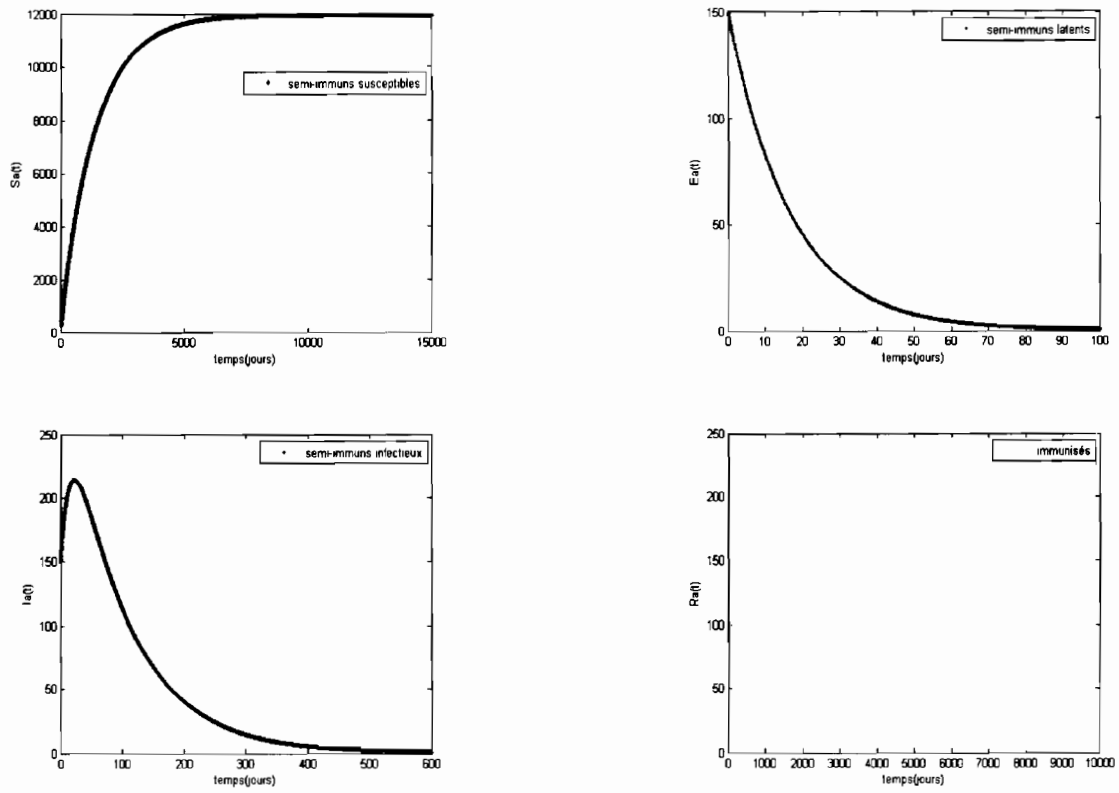


FIGURE 5.9 – Courbe d'évolution des individus semi-immuns.

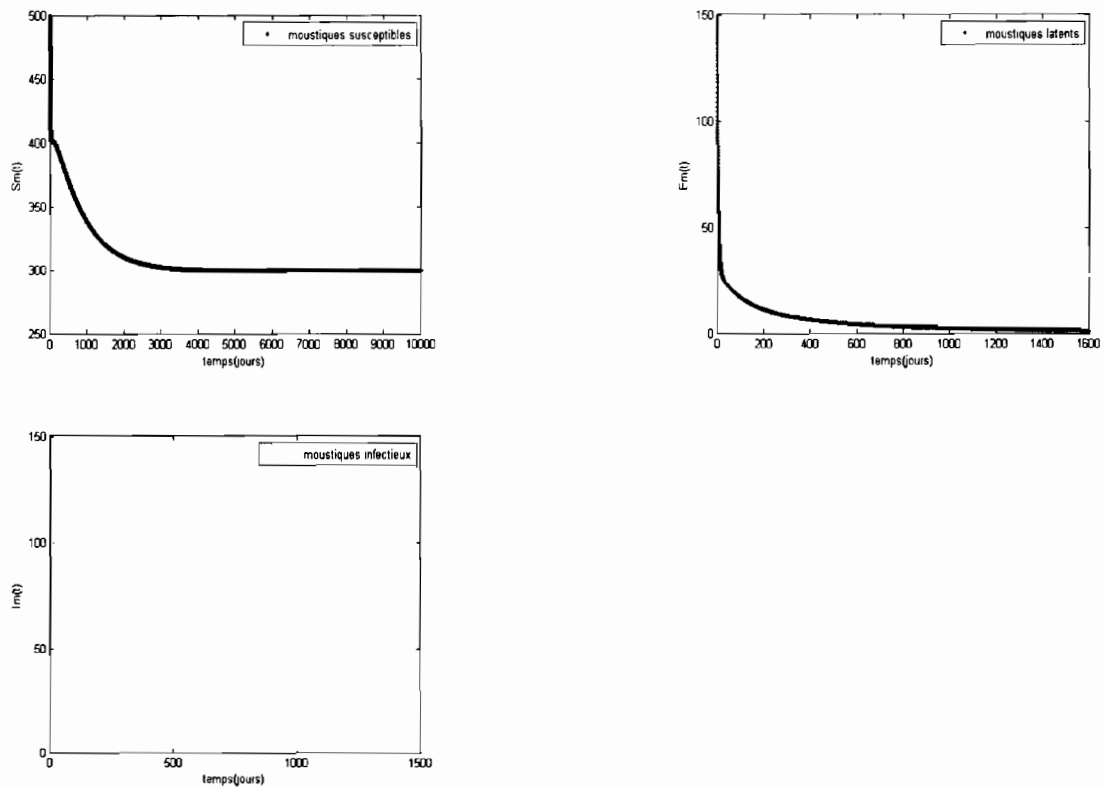


FIGURE 5.10 – Courbe d'évolution des individus moustiques.

# Chapitre 6

## Contrôle optimal

*Dans ce chapitre intitulé contrôle optimal, notre objectif est de proposer parmi les mesures de contrôle actuellement préconisées par l’OMS, lesquelles conduisent à des résultats satisfaisants et peu coûteux. Pour cela nous rappelons d’abord les méthodes de lutte disponibles et en partant de celles-ci, nous introduisons des paramètres de contrôle dans notre modèle synthétique. Notre modèle de contrôle sera étudié afin de proposer des moyens efficaces de lutte contre la propagation du paludisme.*

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Quelques mesures de contrôle envisagées par l’OMS . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>6.2</b>	<b>Formulation et étude d’un problème de contrôle optimal . .</b>	<b>89</b>
6.2.1	Formulation du problème . . . . .	89
6.2.2	Etude du problème . . . . .	90
<b>6.3</b>	<b>Résolution numérique . . . . .</b>	<b>96</b>

---

### 6.1 Quelques mesures de contrôle envisagées par l’OMS

La stratégie actuelle de lutte contre le paludisme demande que les moyens de lutte anti-vectorielle appliqués soient les mieux adaptés à la situation locale, aux capacités existantes, au risque palustre (WHO 2006). La réduction des compétences et capacités vectorielles peuvent être envisagées en ciblant un ou plusieurs éléments de la biologie du vecteur. Nous trouvons dans [18] une belle illustration à travers le tableau suivant :

Méthode de lutte	Éléments de la biologie du vecteur ciblée			
	Densité	Contact	Longévité	Compétence
Lutte anti-vectorielle	✓			
Moustiquaires imprégnés	✓	✓	✓	
Aspersions intra-domiciliaires	✓		✓	
Bâches murales imprégnés	✓		✓	
Grillages de fenêtres		✓		
Répulsifs		✓		
Pulvérisations spatiales	✓		✓	
Lutte Génétique	✓			✓

Tableau 6.1 – Tableau de lutte anti-vectorielle et paramètres de la biologie du vecteur visé

## 6.2 Formulation et étude d'un problème de contrôle optimal

### 6.2.1 Formulation du problème

Avec le modèle synthétique proposé dans le chapitre 4, nous intégrons des contrôles.

- (i) Le premier contrôle  $u_1$  modélise l'effort de prévention sur l'intervalle de temps  $[0; T]$ . Ces efforts peuvent être individuels et collectifs. La lutte individuelle réside assez souvent dans l'utilisation des répulsifs, des crèmes, le port des vêtements longs et couvrant dans la soirée, l'utilisation des moustiquaires imprégnés (méthode préconisée par l'OMS), [18, 19, 7]. La lutte collective passe par la sensibilisation des autorités sur le danger que comporte le risque d'infection, les moyens de lutte individuelle etc.
- (ii) Le second contrôle  $u_2$  modélise le traitement des malades sur l'intervalle de temps  $[0; T]$ . Il faut noter l'absence d'un traitement spécifique comme le vaccin. Ainsi le contrôle  $u_2$  modélise l'utilisation des produits existants, l'isolement des malades dans les centres médicaux ou dans les hôpitaux et cela pour éviter des nouvelles contaminations. Nous désignerons par  $\delta_0$  le taux de guérison dû au traitement, [19, 12].
- (iii) Le troisième contrôle  $u_3$  modélise la lutte anti-vectorielle sur l'intervalle de temps  $[0; T]$ . Elle comprend l'action des services de lutte anti-vectorielle qui vise à éliminer les moustiques. Cela passe par l'utilisation des produits chimiques pour la destruction des œufs, des larves et aussi des nymphes. Il y a également l'effort des citoyens à détruire les gîtes larvaires autour des habitations, [18, 19].  $\epsilon$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  représentent respectivement l'efficacité des produits chimiques sur les œufs, les larves, nymphes et à la destruction des gîtes larvaires.

Le modèle de contrôle se présente donc comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dE(t)}{dt} = bA(t) \left( 1 - \frac{E(t)}{K_E} \right) - (s_E + d_E)E(t) - \epsilon u_3 E(t) \\
 \frac{dL(t)}{dt} = s_E E(t) \left( 1 - \frac{L(t)}{K_L} \right) - (s_L + d_L)L(t) - d_1 u_3 L(t) \\
 \frac{dP(t)}{dt} = s_L L(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K_P} \right) - (s_P + d_P)P(t) - d_2 u_3 P(t) \\
 \frac{dA(t)}{dt} = s_P P(t) - d_A A(t)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dS_e(t)}{dt} = p\Lambda_h - (f_h + k_e(1 - u_1))S_e(t) \\
 \frac{dE_e(t)}{dt} = k_e(1 - u_1)S_e(t) - (f_h + \nu_e)E_e(t) \\
 \frac{dI_e(t)}{dt} = \nu_e E_e(t) - (f_h + \gamma_e + \alpha_e)I_e(t) - \rho_e u_2 I_e(t)
 \end{array} \right. \quad (6.2.1) \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dS_a(t)}{dt} = (1 - p)\Lambda_h + \beta_a R_a(t) - (f_h + k_a(1 - u_1))S_a(t) \\
 \frac{dE_a(t)}{dt} = k_a(1 - u_1)S_a(t) - (f_h + \nu_a)E_a(t) \\
 \frac{dI_a(t)}{dt} = \nu_a E_a(t) - (f_h + \gamma_a + \alpha_a)I_a(t) - \rho_a u_2 I_a(t) \\
 \frac{dR_a(t)}{dt} = \alpha_e I_e(t) + \alpha_a I_a(t) - (f_h + \beta_a)R_a(t)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dE_m(t)}{dt} = k_m(1 - u_1)(A - I_m) - (f_m + \nu_m + k_m(1 - u_1))E_m(t) \\
 \frac{dI_m(t)}{dt} = \nu_m E_m(t) - f_m I_m(t)
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

## 6.2.2 Etude du problème

**Théorème.** 6.2.1 *L'ensemble  $\Delta \times \Delta'$  est positivement invariant par le système (4.5.22)*

**Preuve :** Du système (6.2.1) nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} E'(t) \geq - \left( \frac{b}{K_E} + s_E + d_E + \epsilon \right) E \\ L'(t) \geq - \left( \frac{s_E}{K_L} + s_L + d_L + d_1 \right) L \\ P'(t) \geq - \left( \frac{s_L}{K_P} + s_P + d_P + d_2 \right) P \\ A'(t) \geq -d_A A \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} S'_e(t) \geq -(f_h + k_e)S_e \\ E'_e(t) \geq -(f_h + \nu_e)E_e \\ I'_e(t) \geq -(f_h + \gamma_e + \alpha_e + \rho_e)I_e \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} S'_a(t) \geq -(f_h + k_a)S_a \\ E'_a(t) \geq -(f_h + \nu_a)E_a \\ I'_a(t) \geq -(f_h + \gamma_a + \alpha_a + \rho_a)I_a \\ R'_a(t) \geq -(f_h + \beta_a)R_a \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} E'_m(t) \geq -(f_m + \nu_m + k_m)E_m \\ I'_m(t) \geq -f_m I_m \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.2.2)$$

En utilisant l'inégalité de **Gronwall**, on en déduit donc que toutes les variables du système (6.2.1) sont positives.

Par ailleurs, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} E'(t) \leq bA(t) \left( 1 - \frac{E(t)}{K_E} \right) - (s_E + d_E)E(t) \\ L'(t) \leq s_E E(t) \left( 1 - \frac{L(t)}{K_L} \right) - (s_L + d_L)L(t) \\ P'(t) \leq s_L L(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K_P} \right) - (s_P + d_P)P(t) \\ A'(t) \leq s_P P(t) - d_A A(t) \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} S'_e(t) \leq p\Lambda_h - (f_h + k_e)S_e(t) \\ E'_e(t) \leq k_e S_e(t) - (f_h + \nu_e)E_e(t) \\ I'_e(t) \leq \nu_e E_e(t) - (f_h + \gamma_e + \alpha_e)I_e(t) \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} S'_a(t) \leq (1-p)\Lambda_h + \beta_a R_a(t) - (f_h + k_a)S_a(t) \\ E'_a(t) \leq k_a S_a(t) - (f_h + \nu_a)E_a(t) \\ I'_a(t) \leq \nu_a E_a(t) - (f_h + \gamma_a + \alpha_a)I_a(t) \\ R'_a(t) \leq \alpha_e I_e(t) + \alpha_a I_a(t) - (f_h + \beta_a)R_a(t) \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} S'_m(t) \leq s_P P(t) - (f_m + k_m)S_m(t) \\ E'_m(t) \leq k_m S_m(t) - (f_m + \nu_m)E_m(t) \\ I'_m(t) \leq \nu_m E_m(t) - f_m I_m(t) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.2.3)$$

La partie droite des inégalités correspond au modèle synthétique de celui de la croissance de l'anophèle et de la transmission du paludisme sans les paramètres de contrôle. Dans les sections (4.3) et (4.6), nous avons montré que les solutions du système étaient bien définies dans  $\Delta \times \Delta'$ . Ainsi comme précédemment en utilisant l'inégalité de **Gronwall**, on en déduit que les solutions sont bornées.

Au système (4.5.22), on associe le problème de contrôle optimal muni de la fonction objectif

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_0^T (A_1 E(t) + A_2 L(t) + A_3 P(t) + A_4 I_m(t) + A_5 I_e(t) + B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2 + B_3 u_3^2) dt$$

Les premiers termes représentent le gain pour les populations  $E, L, P, I_m, I_e$  que l'on désire réduire considérablement. Les constantes  $B_1, B_2$  et  $B_3$  sont positives et correspondent aux poids qui permettent de régulariser le contrôle pour la prévention, le traitement et la lutte anti-vectorielle respectivement. Les contrôles sont supposés sous forme de fonctions quadratiques. Il existe également d'autres types de fonctions dans la littérature, cependant il est naturel de considérer des fonctions quadratiques qui font analogie avec l'énergie.

Notre objectif consiste à limiter la transmission de la maladie. Pour cela nous procédons par une réduction de moustiques et des humains infectés. Nous empêchons aussi la prolifération de la population de moustiques en s'attaquant aux états immatures grâce aux larvicides.

On cherche alors les contrôles  $(u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  qui minimisent le coût :

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min \{ (u_1, u_2, u_3) \mid (u_1, u_2, u_3) \in \Gamma \} \quad (6.2.4)$$

où

$$\Gamma = \{ (u_1, u_2, u_3) \mid u_i(t) \in C^0([0, T]) \text{ par morceaux et } a_i \leq u_i(t) \leq b_i, i = 1, 2, 3 \}$$

est l'ensemble des contrôles et  $a_i, b_i$  sont des constantes appartenant à  $[0, 1]$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Le problème de contrôle optimal est résolu lorsque nous déterminons  $(u_1^*, u_2^*, u_3^*) \in \Gamma$  qui vérifie (6.2.4).

Pour cela le travail que nous allons faire consiste à :

- montrer l'existence d'un contrôle optimal,
- donner une caractérisation du contrôle optimal,
- obtenir des représentations numériques

### Existence et caractérisation d'un contrôle optimal

L'existence d'un contrôle optimal est obtenue par le théorème de **Fleming** et **Rishel**, [33]

**Théorème. 6.2.2** *Considérons le problème de contrôle optimal associé au système (4.5.22). Il existe un contrôle  $(u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  et une solution  $(E^*, L^*, P^*, I_m^*, I_e^*)$  correspondante qui minimise  $J(u_1, u_2, u_3)$  sur  $\Gamma$  tel que*

$$J(u_1, u_2, u_3) = J(u_1^*, u_2^*, u_3^*), \quad (u_1, u_2, u_3) \in \Gamma$$



**Preuve :** Pour pouvoir utiliser les résultats de **Fleming**, nous devons vérifier que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) L'ensemble des contrôles et celui des solutions correspondantes sont non vides.
- (ii) L'ensemble  $\Gamma$  des contrôles est convexe et fermé dans  $L^2(0, T)$ .
- (iii) Le champ de vecteurs du système d'état est borné par une fonction linéaire du contrôle.
- (iv) L'intégrande de la fonction objective est convexe.
- (v) Il existe des constantes  $c_1, c_2, c_3$  et  $\beta > 0$  telles que l'intégrande de la fonction objective soit bornée par  $c_1(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2)^{\frac{\beta}{2}} - c_2$ .
  - On vérifie ces conditions grâce à un résultat de **Lukes**, [33], qui assure l'existence des solutions pour le système (4.5.22) à coefficients constants, ce qui donne la condition (i).
  - L'ensemble  $\Gamma$  est donné par définition, donc la condition (ii) est vérifiée.
  - Le champ de vecteurs du système (4.5.22) vérifie la condition (iii) puisqu'il est borné (voir les sections (4.3), (4.6)).
  - Il existe  $c_1, c_2$  et  $\beta > 1$  vérifiant

$$A_1 E(t) + A_2 L(t) + A_3 P(t) + A_4 I_m(t) + A_5 I_e(t) + B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2 + B_3 u_3^2 \geq c_1(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2)^{\frac{\beta}{2}} - c_2$$

puisque les variables d'états sont bornées.

On en déduit alors l'existence d'un contrôle optimal  $(u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  qui minimise la fonction objectif  $J(u_1, u_2, u_3)$ .

Nous allons à présent nous intéresser à la caractérisation d'un contrôle optimal puisque nous venons d'en montrer l'existence.

Soient  $Z = (E, L, P, I_m, I_e) \in \Delta \times \Delta'$ ,  $U = (u_1, u_2, u_3) \in \Gamma$  et

$R = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13})$  où les  $\lambda_i$  sont les variables adjointes.

On définit alors le Lagrangien ou l'Hamiltonien associé au problème par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Z, U, R) = & A_1 E(t) + A_2 L(t) + A_3 P(t) + A_4 I_m(t) + A_5 I_e(t) + B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2 + B_3 u_3^2 \\ & + \lambda_1 \left[ bA(t) \left( 1 - \frac{E(t)}{K_E} \right) - (s_E + d_E)E(t) - \epsilon u_3 E(t) \right] \\ & + \lambda_2 \left[ s_E E(t) \left( 1 - \frac{L(t)}{K_L} \right) - (s_L + d_L)L(t) - d_1 u_3 L(t) \right] \\ & + \lambda_3 \left[ s_L L(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K_P} \right) - (s_P + d_P)P(t) - d_2 u_3 P(t) \right] \\ & + \lambda_4 [s_P P(t) - d_A A(t)] \\ & + \lambda_5 [p\Lambda_h - (f_h + k_e(1 - u_1))S_e(t)] \\ & + \lambda_6 [k_e(1 - u_1)S_e(t) - (f_h + \nu_e)E_e(t)] \\ & + \lambda_7 [\nu_e E_e(t) - (f_h + \gamma_e + \alpha_e + \rho_e u_2)I_e(t)] \\ & + \lambda_8 [(1 - p)\Lambda_h + \beta_a R_a(t) - (f_h + k_a(1 - u_1))S_a(t)] \\ & + \lambda_9 [k_a(1 - u_1)S_a(t) - (f_h + \nu_a)E_a(t)] \\ & + \lambda_{10} [\nu_a E_a(t) - (f_h + \gamma_a + \alpha_a + \rho_a u_2)I_a(t)] \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda_{11} [\alpha_e I_e(t) + \alpha_a I_a(t) - (f_h + \beta_a) R_a(t)] \\
 & + \lambda_{12} [k_m(1 - u_1)(A - I_m) - (f_m + \nu_m + k_m(1 - u_1))E_m(t)] \\
 & + \lambda_{13} [\nu_m E_m(t) - f_m I_m(t)] \\
 & - w_{11}(u_1 - a_1) - w_{12}(b_1 - u_1) - w_{21}(u_2 - a_2) \\
 & - w_{22}(b_2 - u_2) - w_{31}(u_3 - a_3) - w_{32}(b_3 - u_3)
 \end{aligned}$$

où les  $w_{ij}(t) \geq 0$  sont les coefficients de pénalité et vérifient :

$$w_{11}(t)(u_1(t) - a_1) = w_{12}(t)(b_1 - u_1(t)) = 0, \text{ pour le contrôle } u_1^*$$

$$w_{21}(t)(u_2(t) - a_2) = w_{22}(t)(b_2 - u_2(t)) = 0, \text{ pour le contrôle } u_2^*$$

$$w_{31}(t)(u_3(t) - a_3) = w_{32}(t)(b_3 - u_3(t)) = 0, \text{ pour le contrôle } u_3^*$$

**Théorème. 6.2.3** Soit  $(u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  un contrôle optimal donné et soit  $E^*, L^*, P^*, A^*, I_m^*, I_e^*$  la solution du système (6.2.2). Alors il existe un ensemble de variables adjointes  $R = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13})$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 &= - \left[ A_1 + \lambda_1 \left( -b \frac{A}{K_E} \right) - (s_E + d_E + \epsilon u_3) + \lambda_2 \left( 1 - \frac{L}{K_L} \right) \right] \\
 \dot{\lambda}_2 &= - \left[ A_2 + \lambda_2 \left( -s_E \frac{L}{K_L} - (s_L + d_L + d_1 u_3) \right) + \lambda_3 \left( 1 - \frac{P}{K_P} \right) \right] \\
 \dot{\lambda}_3 &= - \left[ A_3 + \lambda_3 \left( -s_L \frac{P}{K_P} - (s_P + d_P + d_2 u_3) \right) + \lambda_4 s_P \right] \\
 \dot{\lambda}_4 &= - \left[ -\lambda_4 d_A + \lambda_1 b \left( 1 - \frac{E}{K_E} \right) + \lambda_{12} k_m (1 - u_1) \right] \\
 \dot{\lambda}_5 &= - (-\lambda_6 (f_h + k_e (1 - u_1)) + \lambda_6 k_e (1 - u_1)) \\
 \dot{\lambda}_6 &= - (-\lambda_7 (f_h + \nu_e) + \lambda_7) \\
 \dot{\lambda}_7 &= - (-\lambda_7 (f_h + \gamma_e + \alpha_e + \rho_e u_2) + \lambda_1 \alpha_e) \\
 \dot{\lambda}_8 &= - (-\lambda_8 (f_h + k_a (1 - u_1)) + \lambda_9 k_a (1 - u_1)) \\
 \dot{\lambda}_9 &= - (-\lambda_9 (f_h + \nu_a) + \lambda_{10} \nu_a) \\
 \dot{\lambda}_{10} &= - (-\lambda_{10} (f_h + \gamma_a + \alpha_a + \rho_a u_2) + \lambda_{11} \alpha_a) \\
 \dot{\lambda}_{11} &= - (-\lambda_{11} (f_h + \beta_a) + \lambda_8 \beta_a) \\
 \dot{\lambda}_{12} &= - (-\lambda_{12} (f_m + \nu_m + k_m (1 - u_1)) + \lambda_{12} \nu_m) \\
 \dot{\lambda}_{13} &= - (-\lambda_{13} f_m - \lambda_{12} k_m (1 - u_1))
 \end{aligned} \right. \quad (6.2.6)$$

avec la condition  $\lambda_i(T) = 0, \forall i = 1, \dots, 13$ .

Les contrôles  $u_1^*, u_2^*$  et  $u_3^*$  sont alors représentés de la manière suivante :

$$u_1^* = \frac{1}{2B_1} ((\lambda_6 - \lambda_5)k_e S_e + (\lambda_9 - \lambda_8)k_a S_a + \lambda_{12}k_m(A - E_m - I_m))$$

$$u_2^* = \frac{1}{2B_2} (\lambda_7 \rho_e I_e + \lambda_{10} \rho_a I_a),$$

$$u_3^* = \frac{1}{2B_3} (\lambda_1 \epsilon E + \lambda_2 d_1 L + \lambda_3 d_2 P)$$

**Preuve :** La forme du système adjoint muni d'une condition terminale découle du *principe du maximum de Pontryagien* [33]. On détermine la différentielle du Lagrangien par

rapport aux variables du système et on en déduit le système adjoint (6.2.6)

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E}, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L}, \quad \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P}, \quad \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A}, \quad \dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_e}, \quad \dot{\lambda}_6 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_e}, \quad \dot{\lambda}_7 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_e}, \\ \dot{\lambda}_8 &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_a}, \quad \dot{\lambda}_9 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_a}, \quad \dot{\lambda}_{10} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_a}, \quad \dot{\lambda}_{11} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_a}, \quad \dot{\lambda}_{12} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_m}, \quad \dot{\lambda}_{13} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_m}.\end{aligned}$$

Les contrôles optimaux  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  et  $u_3^*$  s'obtiennent en résolvant l'équation de contrainte donnée par la différentielle du Lagrangien par rapport à  $U = (u_1, u_2, u_3)$ .

Nous avons alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} = 0$$

et après résolution on obtient :

$$\begin{aligned}u_1^* &= \frac{1}{2B_1} [(\lambda_6 - \lambda_5)k_e S_e + (\lambda_9 - \lambda_8)k_a S_a + \lambda_{12}k_m(A - E_m - I_m) + w_{11} - w_{12}], \\ u_2^* &= \frac{1}{2B_1} [\lambda_7 \rho_e I_e + \lambda_{10} \rho_a I_a + w_{21} - w_{22}], \\ u_3^* &= \frac{1}{2B_1} (\lambda_1 \epsilon E + \lambda_2 d_1 L + \lambda_3 d_2 P + w_{31} - w_{32})\end{aligned}$$

Pour obtenir une expression des contrôles optimaux sans  $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, w_{31}, w_{32}$ , on utilise les techniques standards. On considère les trois (03) cas possibles.

- Soit l'ensemble  $\{t|a_1 < u_1^* < b_1\}$ , on a alors  
 $w_{11}(u_1^* - a_1) = w_{12}(b_1 - u_1^*) = 0 \Rightarrow w_{11} = w_{12} = 0$  car  $u_1^* - a_1 \neq 0$  et  $b_1 - u_1^* \neq 0$   
et par suite  $u_1^* = \frac{1}{2B_1} ((\lambda_6 - \lambda_5)k_e S_e + (\lambda_9 - \lambda_8)k_a S_a + \lambda_{12}k_m(A - E_m - I_m))$
- Dans l'ensemble  $\{t|u_1^* = b_1\}$  on a  $w_{21}(u_1^* - a_2) = w_{22}(b_1 - u_1^*) = 0 \Rightarrow w_{11} = 0$   
d'où

$$b_1 = u_1^* = \frac{1}{2B_1} ((\lambda_6 - \lambda_5)k_e S_e + (\lambda_9 - \lambda_8)k_a S_a + \lambda_{12}k_m(A - E_m - I_m) - w_{12})$$

et par conséquent  $\frac{1}{2B_1} ((\lambda_6 - \lambda_5)k_e S_e + (\lambda_9 - \lambda_8)k_a S_a + \lambda_{12}k_m(A - E_m - I_m)) \leq b_1$   
car  $w_{12}(t) > 0$

- Soit l'ensemble  $\{t|u_1^* = a_1\}$ , alors  $w_{11}(u_1^* - a_1) = w_{12}(b_1 - u_1^*) = 0 \Rightarrow w_{12} = 0$   
d'où

$$a_1 = u_1^* = \frac{1}{2B_1} [(\lambda_6 - \lambda_5)k_e S_e + (\lambda_9 - \lambda_8)k_a S_a + \lambda_{12}k_m(A - E_m - I_m) + w_{11}]$$

ainsi donc

$$\frac{1}{2B_1} ((\lambda_6 - \lambda_5)k_e S_e + (\lambda_9 - \lambda_8)k_a S_a + \lambda_{12}k_m(A - E_m - I_m)) \leq a_1$$

puisque  $w_{11}(t) > 0$ .

En définitive,

$$u_1^* = \max \left\{ a_1, \min \left\{ b_1, \frac{1}{2B_1} ((\lambda_6 - \lambda_5)k_e S_e + (\lambda_9 - \lambda_8)k_a S_a + \lambda_{12}k_m(A - E_m - I_m)) \right\} \right\}$$

- Soit l'ensemble  $\{t|a_2 < u_1^* < b_2\}$ , on a  
 $w_{21}(u_2^* - a_2) = w_{22}(b_2 - u_2^*) = 0 \Rightarrow w_{21} = w_{22} = 0$  car  $u_2^* - a_2 \neq 0$  et  $b_2 - u_2^* \neq 0$   
D'où le contrôle  $u_2^* = \frac{1}{2B_2} (\lambda_7 \rho_e I_e + \lambda_{10} \rho_a I_a)$
- Dans l'ensemble  $\{t|u_2^* = b_2\}$  on a  $w_{21}(u_2^* - b_2) = w_{22}(b_2 - u_2^*) = 0 \Rightarrow w_{21} = 0$   
et par suite  $b_2 = u_2^* = \frac{1}{2B_2} (\lambda_7 \rho_e I_e + \lambda_{10} \rho_a I_a - w_{22})$  et comme  $w_{22}(t) > 0$  alors  
 $\frac{1}{2B_2} (\lambda_7 \rho_e I_e + \lambda_{10} \rho_a I_a) \geq b_2$
- Soit l'ensemble  $\{t|u_2^* = a_2\}$  alors on a  $w_{21}(u_2^* - a_2) = w_{22}(b_2 - u_2^*) = 0 \Rightarrow w_{22} = 0$   
d'où  $a_2 = u_2^* = \frac{1}{2B_2} (\lambda_7 \rho_e I_e + \lambda_{10} \rho_a I_a) \leq a_2$  car  $w_{21}(t) > 0$  et par conséquent

$$u_2^* = \max \left\{ a_2, \min \left\{ b_2, \frac{1}{2B_2} (\lambda_7 \rho_e I_e + \lambda_{10} \rho_a I_a) \right\} \right\}$$

- Soit  $\{t|a_3 < u_3^* < b_3\}$  on a,  
 $w_{31}(u_3^* - a_3) = w_{32}(b_3 - u_3^*) = 0 \Rightarrow w_{31} = w_{32} = 0$  car  $u_3^* - a_3 \neq 0$  et  $b_3 - u_3^* \neq 0$   
Ainsi le contrôle optimal  $u_3^*$  est :

$$u_3^* = \frac{1}{2B_3} (\lambda_1 \epsilon E + \lambda_2 d_1 L + \lambda_3 d_2 P)$$

- Considérons l'ensemble  $\{t|u_3^* = a_3\}$ , on a donc  
 $w_{31}(u_3^* - a_3) = w_{32}(b_3 - u_3^*) = 0 \Rightarrow w_{31} = 0$   
par suite

$$u_3^* = \frac{1}{2B_3} (\lambda_1 \epsilon E + \lambda_2 d_1 L + \lambda_3 d_2 P - w_{32})$$

d'où  $\frac{1}{2B_3} (\lambda_1 \epsilon E + \lambda_2 d_1 L + \lambda_3 d_2 P) \geq b_3$  car  $w_{32}(t) > 0$

- Dans l'ensemble  $\{t|u_3^* = a_3\}$ , on a  $w_{31}(u_3^* - a_3) = w_{32}(b_3 - u_3^*) = 0 \Rightarrow w_{32} = 0$   
par suite

$$a_3 = u_3^* = \frac{1}{2B_3} (\lambda_1 \epsilon E + \lambda_2 d_1 L + \lambda_3 d_2 P + w_{31})$$

d'où  $\frac{1}{2B_3} (\lambda_1 \epsilon E + \lambda_2 d_1 L + \lambda_3 d_2 P) \leq a_3$  puisque  $w_{31} > 0$   
et par suite

$$u_3^* = \max \left\{ a_3, \min \left\{ b_3, \frac{1}{2B_3} (\lambda_1 \epsilon E + \lambda_2 d_1 L + \lambda_3 d_2 P) \right\} \right\}$$

## 6.3 Résolution numérique

Dans cette section, nous donnons quelques résultats numériques afin de mieux comprendre le comportement du modèle sous l'influence des contrôles  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Nous supposons dans ce cas que la population humaine prend conscience de la gravité de la maladie et préconise des méthodes de lutte pour réduire l'intensité de la maladie. Cette lutte consiste à réduire la prolifération des moustiques, le nombre de malades ainsi que

### 6.3. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

d'autres méthodes pour éviter les piqûres des moustiques. Soient  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{u}_2$  et  $\tilde{u}_3$  l'efficacité des contrôles  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  respectivement.

Considérons les conditions initiales  $S_e(0) = 50$ ,  $E_e(0) = 20$ ,  $I_e(0) = 50$ ,  $S_a(0) = 25$ ,  $E_a(0) = 15$ ,  $I_a(0) = 15$ ,  $R_a(0) = 10$ ,  $S_m(0) = 50$ ,  $E_m(0) = 15$ ,  $I_m(0) = 15$ ,  $E(0) = 50$ ,  $L(0) = 40$ ,  $P(0) = 30$ ,  $A(0) = 80$ , les valeurs qui correspondent aux conditions de persistance de la maladie pour les paramètres suivants :  $c_{me} = 0.07$ ,  $c_{ma} = 0.022$ ,  $c_{am} = 0.35$ ,  $c_{em} = 0.45$ ,  $\tilde{c}_{am} = 0.002$

Les résultats numériques pour  $\tilde{u}_3 = 0.05$ ,  $\tilde{u}_1 = 0.45$  et  $\tilde{u}_2 = 0.015$  sont donnés par la figure 6.1

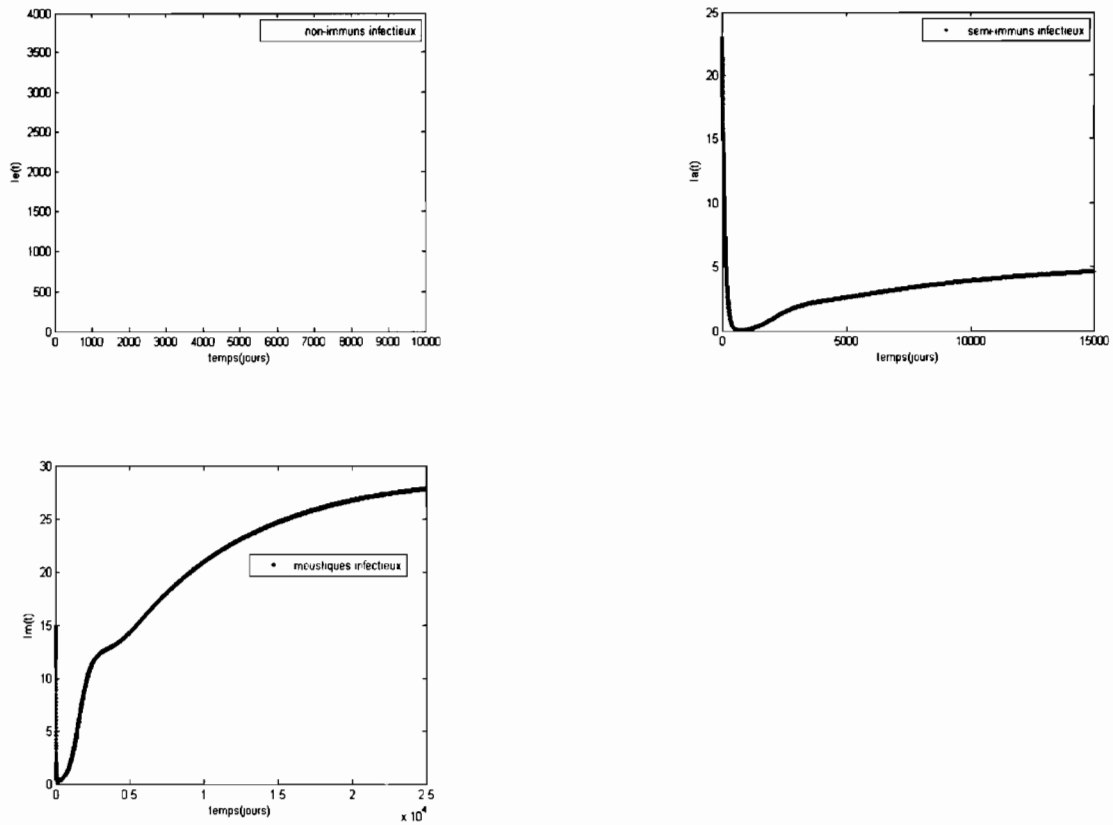


FIGURE 6.1 – Courbe d'évolution des individus infectés lorsqu'on applique un contrôle.

On constate une nette régression des individus infectés lorsqu'on applique un contrôle et cette régression est plus perceptible si l'on intensifie le contrôle.

# Chapitre 7

## Conclusion générale

*Les choses les plus irrésistibles sont celles qui sont rédigées par la raison et présentées par le sentiment.*

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Economie du travail . . . . .</b>	<b>98</b>
<b>7.2</b>	<b>Perspectives futures de recherche . . . . .</b>	<b>99</b>

---

### 7.1 Economie du travail

Le paludisme est une maladie endémique qui sévit dans la ceinture de pauvreté du monde notamment en Afrique. Plusieurs modèles mathématiques ont été proposés pour l'étude de la dynamique de propagation. Cependant, dans tous ces modèles proposés la dynamique de croissance de la population vectorielle est ignorée.

Partant de la biologie du vecteur, nous avons proposé un modèle de la dynamique de croissance en se basant notamment sur les différents stades de l'évolution du vecteur. Nous avons également proposé un modèle de la dynamique de propagation du paludisme. Après une étude singulière de chacun des deux modèles proposés, nous avons joint le modèle de croissance à celui de la propagation pour en faire un modèle synthétique que nous avons également étudié. L'analyse mathématique des modèles nous a permis de définir un seuil  $r$  pour le modèle de croissance qui nous renseignerait entièrement sur l'évolution de la population vectorielle et l'impact de ce seuil sur la transmission du paludisme. Plusieurs propositions et résultats fondamentaux ont été également obtenus. Par ailleurs, cette étude nous a permis d'obtenir une valeur  $r_0$  à partir de laquelle nous avons pu juger de la stabilité de notre équilibre endémique. Enfin la simulation numérique de ces différents résultats mathématiques nous a permis de mieux comprendre le comportement général du modèle synthétique et par dessus, proposer parmi les stratégies de contrôle préconisées par l'OMS, lesquelles s'avèrent être plus efficaces et peu coûteuses.

## 7.2 Perspectives futures de recherche

Pour nos travaux futurs, nous prévoyons construire une fonction de **Lyapunov** pour l'étude de la stabilité global du modèle de transmission. Notons également que les facteurs climatiques influencent considérablement la mortalité des moustiques et le nombre de piqûre des moustiques. Il serait donc plus réaliste de prendre en compte ces facteurs dans la dynamique de croissance des moustiques ainsi que celle de la transmission du paludisme.

# Bibliographie

- [1] **S. Ahmed.** On almost periodic solutions of the competing species problems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102(1988), 855 – 861.
- [2] **J. L. Aron.** Mathematical modeling of immunity to malaria, *Math. Biosci.*, 90(1988),N : 2p.395-396.3,10.
- [3] **G. Aronsson and R. B. Kellogg.** On a differential equation arising from compartmental analysis, *Math. Biosciences*, 38(1973), 113 – 122.
- [4] **M. Alassane.** Modélisation et simulations numériques de l'épidémie du VIH-SIDA au Mali. Thèse, *Université de Bamako*. Juillet 2012.
- [5] **A. Berman and R. J. Plemmons.** Nonnegative matrices in the mathematical sciences, *SIAM*, 1994.
- [6] **D. Bernoulli.** Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir , *Mem. Math. Phys. Acad. Roy. Sci.*, Paris (1760), p 145
- [7] **P. Cailly.** Modélisation de la dynamique spatio-temporelle d'une population de moustiques, sources de nuisances et vecteurs d'agents pathogènes.Santé publique et épidémiologique. *Oniris, Ecole Nationale Vétérinaire, Agroalimentaire et de l'Alimentation Nantes Atlantiques; Université Nantes Angers Le Mans (UNAM)*, 2011.
- [8] **P. Carnevale , V. Robert** Les anophèles, Biologie, transmission du plasmodium et lutte anti-vectorielle
- [9] **N. Chitnis.** Using mathematical models in controlling the spread of malaria, PhD Thesis (*Applied Mathematic 2005*), *University of Arizona*.
- [10] **E. A. Coddington and N. Levinson.** Theory of ordinary differential equations [by] Earl A. Coddington [and] Norman Levinson. McGraw-Hill, New York, 1995
- [11] **Dietz, Klaus, Heesterbeek, .** Daniel Bernoulli's epidemiological model revisited, *Mathematical biosciences*, Novembre 2002, **180**, 1-2 p1-21.
- [12] **S. Lenhart and J. T. Workman.** Optimal control applied to biological models.2007
- [13] **P. Demailly.** Analyse numérique et équations différentielles. *Collection Grenoble sciences*, 1996
- [14] **O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek and J. A. J. Metz.** On the definition and computation of the basic reproduction ratio  $R_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous population, *Journal. Math. Biol.* **28**(1990), pp 347-382



- [15] **J. Dieudonné.** Foundations of modern analysis. *Pure and Applied Mathematics*, Vol. X. *Academic Press*, New York, 1960 Analyse numérique et équations différentielles. *Collection Grenoble sciences*, 1996
- [16] **G. Macdonald.** The epidemiology and control of malaria, *Oxford University Press*, London, 1957.
- [17] **L. Molineaux, K. Dietz, A. Thomas.** Further epidemiological evaluation of a malaria model, *Bull World Organ* 1978 ; **56** : 565-571.
- [18] **Moiroux.** Modélisation du risque d'exposition aux moustiques vecteurs du plasmodium spp. dans un contexte de lutte anti-vectorielle.. Ecologie, environnement. Université de Montpellier II, 2012.
- [19] **D. Moulay.** Modélisation et analyse mathématique de systèmes dynamiques en épidémiologie. Application au cas du Chikungunya. Thèse de doctorat. *Université du Havre*, 2011.
- [20] **F. Niyukuri.** Modélisation Mathématique de la dynamique de la propagation de la malaria. Université de Montréal, 2014
- [21] **W. Ouédraogo.** Modélisation proie-prédateur : cas d'une population de poisson-plancton. *Université polytechnique de Bobo*, 2014
- [22] **W. Ouédraogo, B. Sangaré et S. Traoré.** A mathematical Study of Cannibalism In the Fish-Plankton Model By Taking Into Account The Cathing Effect, *AMO*, Volum **18**, 2016.
- [23] **J. S. Pierre.** La dynamique des populations et ses modèles. Octobre 2010
- [24] **C. Prévost.** Etude mathématique et numérique d'équations aux dérivées partielles liées à la physique et à la biologie. *Thèse de l'université d'Orléans*, 2004.
- [25] **R. Ross.** The prevention of malaria, *John Murray*, London, 1991.
- [26] **G. Sallet.** Modélisation Mathématique et Maladie Infectieuse, *INRIA-IRD-UMMISCO*, 2010.
- [27] **B. Sangaré.** Adaptation dynamique de maillage pour la résolution des équations aux dérivés partielles dépendant du temps en une dimension (1D) ; thèse de doctorat unique, *Université de Ouagadougou-Université de Bamako*, juillet 2012.
- [28] **B. Sangaré, O. Diallo and L. Somé.** A New MATLAB Implementation and Analysis of A Moving Grid Method For Systemd of One-Dimensional Time-Dependent Partial Differential Equations Based on The Equidistribution Principle, *Int. J. Appl. Math.* **25**(2012), no.1, 66-85.
- [29] **T. Smith, Ross A., Maire N., Rogier C., Trape J. F., Molineaux L.** And epidemiologic model of the incidence of acute illness in Plasmodium falciparum malaria, *Am J. Trop. Med. Hyg.* **75**(suppl 2) : 2005, 56-62.
- [30] **B. Traoré.** Modélisation mathématique de la dynamique de propagation du paludisme. Mémoire de DEA, *Université Polytechnique de Bobo*, 2015.

- [31] **B. Traoré, B. Sangaré et S. Traoré.** A model of malaria transmission with structured vecteurs population and seasonality, submitted in journal of *applied mathematical journal*.
- [32] **B. Traoré, B. Sangaré et S. Traoré.** A seasonality model of malaria transmission with human host structured, en préparation, submitted in *applied mathematical journal*.
- [33] **E. Trélat.** Contrôle optimal : théorie et applications. *Université d'Orléans*, 2008. Notes de cours.
- [34] **P. Van den Driessche and J. Watmough.** Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Math. Biosci.* **180**(2002).
- [35] **P. F. Verhulst.** P. F. Verhulst, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, *Correspondence Mathématique et Physique* 10, 113-121 (1838)
- [36] **Yi N., Zhang Q., Mao K., Yang D., Li Q.** Analysis and control of an SEIR epidemic system with nonlinear transmission rate, *Mathematical and computer Modelling* **50**, 1498-1513, 2009
- [37] **J. Zhou and H. W. Hethcote.** Population size dependent incidence in models for diseases without immunity, *Journal. math. Biol.* **32**(1994),pp.809 – 834 .
- [38] **P. Zongo.** Modélisation mathématique de la dynamique de la propagation du paludisme. Thèse de doctorat unique. *Université de Ouagadougou*, 2009