

MINISTRE DES ENSEIGNEMENTS  
SUPERIEUR DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE ET DE L'INNOVATION

BURKINA FASO  
Unité-Progrès-Justice

Année universitaire 2014-2015

SECRETARIAT GENERAL

UNIVERSITE POLYTECHNIQUE  
DE BOBO-DIOULASSO (U.P.B)



UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE  
EN SCIENCES ET TECHNIQUES

Ecole doctorale Sciences et Techniques

Laboratoire de Mathématiques  
et d'Informatique (L.A.M.I)

**MÉMOIRE DU DIPLÔME D'ÉTUDES APPROFONDIES (D.E.A)  
DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

Option : Analyse

Spécialité : Equations Différentielles Ordinaires

**Thème:**  
**Modélisation mathématique de la dengue :**  
**Stratégies de contrôle.**

Présenté par Harouna OUEDRAOGO

Soutenu publiquement le 12 Janvier 2017 devant le jury composé de :

Président : Monsieur Sado TRAORE – Maître de Conférences- U.P.B

Membres : Monsieur Aboudramane GUIRO – Maître de Conférences –U.P.B

Monsieur Boureima SANGARE –Maître-Assistant –U.P.B

Directeur de mémoire : Monsieur Aboudramane GUIRO – Maître de Conférences –U.P.B

# Modélisation mathématique de la dengue: stratégies de contrôle.

HAROUNA OUEDRAOGO

17 janvier 2017

# Remerciements

J'exprime mes sincères gratitude à mon directeur de mémoire, le professeur Aboudramane GUIRO, pour sa grande générosité humaine et intellectuelle sans les quelles jamais je n'aurais pu venir à bout de mes travaux.  
Merci pour tout professeur.

J'adresse mes sincères remerciements au président du jury, le professeur Sado TRAORE, Directeur de l'Unité de Formation et de Recherche en Sciences et Technique (l'UFR-ST), pour son engagement dans notre formation et pour avoir accepté présidé ce jury.

Merci professeur.

Je remercie le professeur Boureima SANGARE, pour ses enseignements et surtout pour avoir accepté d'être membre du jury.

Merci professeur.

J'exprime mes remerciements à tous les enseignants de l'Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso, particulièrement ceux de l'Unité de Formation et de Recherche en Sciences et Technique (l'UFR-ST) ; pour leur disponibilité, leurs précieux enseignements qui est d'une grande utilité pour la jeune génération et ma personne en particulier.

Merci chers enseignants

Je remercie mes camarades de promotion, mes amis ainsi que les aînés du laboratoire Dramane OUEDRAOGO, Bakary TRAORE et bien d'autres ; chacun pour ses conseils et encouragement durant la rédaction de ce mémoire.

Je remercie mes parents qui m'ont soutenu affectueusement durant mes études.

Je pense à ma tendre famille qui ma toujours soutenu durant mes études.

Pour terminer je remercie tous ceux de près ou de loin qui ont travaillé à la réalisation de ce mémoire.

# Dédicaces

Je dédie ce travail à :

- mon père, Tindéba Ouédraogo,
- ma mère, Larbo Ouédraogo,
- mes frères et soeurs.

# Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iv
Introduction	2
<b>1 Rappels de quelques notions de base</b>	<b>4</b>
1.1 Quelques notions sur les systèmes différentiels ordinaires . . . . .	4
1.2 Attractivité et stabilité de point d'équilibre . . . . .	4
1.3 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	5
1.4 Définition d'un contrôle . . . . .	6
1.5 Notion de contrôle optimal . . . . .	6
1.6 Quelques propriétés matricielles . . . . .	7
1.7 Critère de Routh . . . . .	8
1.8 Existence de solution au sens de Cauchy-Lipschitz . . . . .	9
<b>2 Modélisation de la dengue</b>	<b>10</b>
2.1 Définition du modèle de base . . . . .	10
2.2 Recherche des points d'équilibre . . . . .	12
2.2.1 Point d'équilibre sans maladie . . . . .	12
2.2.2 Point d'équilibre endémique . . . . .	12
2.3 Étude de la stabilité des points d'équilibre . . . . .	15
2.3.1 Étude de la stabilité de l'équilibre sans maladie . . . . .	16
2.3.2 Étude de la stabilité de l'équilibre endémique . . . . .	17
<b>3 Contrôle optimal de la dengue</b>	<b>25</b>
3.1 Présentation du problème . . . . .	25
3.1.1 Formulation du problème . . . . .	25
3.1.2 Formulations mathématiques . . . . .	26
3.2 Caractérisation du problème de contrôle optimal . . . . .	27
3.3 Système d'optimalité . . . . .	31
<b>4 Résultats numériques</b>	<b>33</b>
4.1 Méthodologie . . . . .	33
4.2 Résultats . . . . .	34
4.3 Simulation numérique . . . . .	34
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>39</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>

# Resumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'article intitulé '*contrôle optimal des moustiques Aedes aegypti par la technique de stérilisation des insectes et l'utilisation des insecticides*' due à R. C. A. THOMÉ, H. M. YANG ET L. ESTEVA [30]. Nous présentons un modèle mathématique qui décrit la dynamique d'une population de moustique lorsqu'un moustique mâle stérile est soumis à un contrôle biologique, basé sur l'utilisation des insecticides.

Pour analyser l'effort minimal afin de réduire la fertilité des moustiques femelles, on cherche pour le contrôle optimal considéré, le coût de l'utilisation des insecticides, le coût de la production des produits contre les moustiques et leur livraison aussi bien que le coût social. Le contrôle optimal est obtenu par l'application du principe du maximum de Pontryagin.

## Mots et expression clés :

Modélisation mathématique, dengue, contrôle optimal, Principe du Maximum de Pontryagin, technique d'insecte stérile, Aedes aegypti, insecticide.

# Abstract

In this memory, we developpe an article named '*optimal control of Aedes aegypti mosquitoes by the sterile insect technique and insecticide*' which is due to R. C. A. THOMÉ, H. M. YANG AND L. ESTEVA [30] . We present a mathematical model to describe the dynamics of mosquitoes population when sterile male mosquitoes (produced by irradiation) are introduced as a biological control, besides the application of insecticide. In order to analyse the minimal effort to reduce the fertile female mosquitoes, we search for the optimal control considering the cost of insecticide application, the cost of the production of irradiated mosquitoes and their delivery as well as the social cost (proportional to the number of fertilized females mosquitoes). The optimal control is obtained by applying the Pontryagin's Maximum Principle.

## Keywords :

Mathematical modeling, dengue, optimal control, Pontryagin's Maximum Principle, sterile insect technique, Aedes aegypti, insecticide.

# Introduction

La maladie de la dengue est actuellement un problème crucial de santé publique pour les populations des régions tropicales du monde en particulier au Burkina Faso. L'agent causale de la dengue est un virus de la famille des flavivirus. On rencontre quatre (04) stéréotypes qui sont *DENI*, *DENII*, *DENIII* et *DENIV*. L'infection d'une forme de la dengue produit une immunité permanente pour celle-ci, mais seulement une immunité temporaire pour les autres formes [12]. C'est-à-dire que l'infection de la dengue *DENI* entraîne une immunité permanente pour cette forme mais une immunité temporaire pour la dengue *DENII*, *DENIII*, *DENIV*. Ainsi, tout individu qui vit dans une zone endémique peut être atteint plus d'une fois.

Le virus de la dengue est un arbovirus (un type de virus dont les vecteurs sont des insectes qui se nourrissent du sang) au même titre que la fièvre jaune ou du chikungunya transmis par des moustiques de type *Aedes*. En effet, le moustique responsable de la dengue est l'*Aedes Aegypti*.

Le moustique *Aedes Aegypti* est un petit moustique, long de 5 millimètres environ, de couleur sombre que l'on peut reconnaître grâce aux marques blanches bien visibles sur ses pattes et un dessin en forme de lyre sur son thorax. Il est originaire d'Afrique, mais on le trouve maintenant dans les régions tropicales à travers le monde [18].

Le virus est transmis à l'homme par la piqûre d'un moustique femelle "*Aedes aegypti*" qui est le principal transmetteur. Avec l'expansion géographique du vecteur et le virus [23], les incidents liés à l'infection de la dengue se sont manifestement augmentés ces dernières décennies.

En 2005, la dengue était considérée comme la plus infectieuse. Sa distribution (au plan) mondiale est comparée à la malaria et selon les estimations plus 2,5 milliard de personnes vivent [23] dans des zones à risque. Il n'y a pas de vaccin contre la dengue. Par ailleurs, des efforts sont faits pour éviter la multiplication des moustiques. Au nombre de ces efforts, on peut citer des mécanismes de contrôle incluant :

- (1) un contrôle chimique des populations adultes par le Dichloro-Diphényl-Trichloroéthane (DDT) ;
- (2) un contrôle chimique des larves par les larvicides ;
- (3) la réduction des sites de reproduction des moustiques par élimination des ordures, évacuer des récipients les contenus non nécessaires, etc ;
- (4) contrôle biologique par l'utilisation des parasites et/ou des prédateurs des moustiques femelles ;
- (5) une manipulation génétique des moustiques femelles pour produire des insectes stériles.

La technique des insectes stériles (SIT) est un contrôle biologique par lequel le processus de reproduction naturelle des insectes est perturbé par l'utilisation des "mutagens" tel que la radiation gamma qui rend les insectes stériles. Ces insectes stériles alors

libre dans l'environnement à un grand nombre, s'accouplent avec les insectes qui y étaient présents.

La femelle indigène qui s'accouple avec un mâle stérile peut produire des oeufs, mais ces oeufs ne peuvent pas s'écouter (éclore). Ainsi, le nombre d'insectes indigènes baisse et le rapport insecte stérile sur insecte normal augmente ; ce qui conduit à une extinction de la population indigène.

La technique des insectes stériles (SIT) a été conçue pour la première fois par Knippling [19], et utilisée successivement en 1958 en Floride pour contrôler les insectes "screwworm" [20, 21]. Depuis lors, la libération des insectes stériles a été utilisée avec des succès variés [4]. Les exemples sont :

- les insectes screwworm aux USA, Mexique et en Libye ;
- les insectes des fruits Méditerranéen (*Ceratitis capitata* wiedemann) aux USA et au Mexique ;
- les insectes Melon (*Dacus cucurbitae* coquillett) au Japon et en Taiwan ;
- les insectes Tsé-tsé (*Glossina* species) en Tanzanie, Zimbabwe et en Haute volta ;
- Boll weevil (*Anthonomus grandis* Boheman) dans le sud-est des USA ;
- les insectes des fruits mexicain (*Anastrepha ludens* Loew) aux USA et au Mexique ;
- les papillons Gypsy (*Lymantria dispar* Linnaeus) aux USA et au Canada.
- La lutte contre la mouche tsé-tsé (*Glossina* species) au Burkina Faso voir (Sidibe et al).

Les modèles mathématiques ont été faits pour aider efficacement les techniques des insectes stériles (voir par exemple dans [19], [7] – [25]). L'un des modèles envisage une combinaison de la technique des insectes stériles (SIT) avec autres mesures de contrôle comme les pesticides [5] ou la libération des parasites [13].

L'objectif dans ce travail, est d'utiliser la théorie du contrôle optimal pour évaluer l'efficacité de l'application des deux méthodes à savoir la SIT et les insecticides sur une population de moustiques. Nous voulons trouver l'effort minimal nécessaire pour réduire la fertilité des moustiques femelles en considérant le coût de l'application des insecticides, le coût de la production des moustiques prédateurs et le coût social. On désigne par coût social, toute dépense relative à la maladie comme traitement des infections et d'éventuel décès.

La suite du mémoire est structurée ainsi qu'il suit :

Dans le chapitre 1, nous faisons un rappel de quelques notions de base sur les *EDO* et le contrôle optimal. En effet, après quelques définitions de notions sur les systèmes différentiels ordinaires, nous donnons également la notion de point d'équilibre et leurs stabilités. En plus, nous rappelons quelques propriétés sur les matrices et des résultats d'existence de solution au sens de Cauchy Lipschitz, utilisés dans les autres chapitres.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude du modèle de base dans lequel nous définissons le modèle ; ainsi que les points d'équilibre et leurs stabilités.

Dans le chapitre 3, nous présentons le problème du contrôle optimal. Ainsi, nous faisons une formulation mathématique du problème et une caractérisation du problème du contrôle optimal.

Dans le chapitre 4, nous établissons les résultats numériques. Par conséquent, nous décrivons la méthodologie ainsi que les résultats obtenus et les courbes issues de ces résultats. Nous donnons enfin une conclusion et des perspectives, pour la suite de nos travaux.

# Chapitre 1

## Rappels de quelques notions de base

Nous présentons dans ce chapitre les définitions de notions mathématiques utilisées dans la suite du travail.

### 1.1 Quelques notions sur les systèmes différentiels ordinaires

Considérons le système d'équation différentielle ordinaire, définit par :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x); \quad (1.1)$$

où  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in \Omega$  avec  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^0((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n)$ .

Le système (1.1) est dit autonome lorsque la fonction  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1.2)$$

et non-autonome sinon.

Le système (1.1) est linéaire si

$$f(t, x) = A(t)x(t) \quad (1.3)$$

avec  $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et non linéaire sinon.

### 1.2 Attractivité et stabilité de point d'équilibre

**Définition 1.2.1** (*Point d'équilibre*)

Un point  $\bar{x} \in \Omega$  est dit point d'équilibre pour le système (1.1) si  $f(t, \bar{x}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$ .

**Définition 1.2.2** (*Attractivité locale*)

Un point  $\bar{x}$  est dit localement attractif (ou que le système (1.1) est attractif en  $\bar{x}$ ) s'il existe un voisinage  $U \subset \Omega$  de  $\bar{x}$  tel que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, x) = \bar{x}, \forall x \in U.$$

$\bar{x}$  est localement attractif signifie que  $\bar{x}$  attire les trajectoires du système dans son voisinage.

**Définition 1.2.3** (Attractivité globale)

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des points  $x \in \Omega$  pour lesquels  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, x) = \bar{x}$ .

-  $\mathcal{A}$  est appelé bassin d'attraction de  $\bar{x}$ .

- Un point d'équilibre est globalement attractif si  $\mathcal{A} = \Omega$ .

$\bar{x}$  est globalement attractif signifie que  $\bar{x}$  attire les trajectoires issues de tous les points situés sur l'ensemble de définition  $\Omega$  du système.

**Définition 1.2.4** (Stabilité d'un point d'équilibre)

Soit  $\bar{x} \in \Omega$  un point d'équilibre du système (1.1). On dit que  $\bar{x}$  est un point d'équilibre stable pour (1.1) (ou que le système (1.1) est stable en  $\bar{x}$ ) si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un nombre réel positif  $\eta$  tel que pour tout  $x \in \Omega$  avec  $\|x(0) - \bar{x}\| < \eta$ , on a  $\|f(t, x(0)) - \bar{x}\| < \epsilon$ . (Ici  $x(0)$  est la condition initiale à  $t = 0$ ).

**Remarque 1.2.1** Si le système n'est pas stable en  $\bar{x}$ , on dit qu'il est instable.

**Définition 1.2.5** (Stabilité asymptotique)

-  $\bar{x}$  est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif (localement).

-  $\bar{x}$  est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

**Définition 1.2.6** Soit  $\dot{x} = f(x)$  un système autonome de classe  $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$  et  $\bar{x}$  un point d'équilibre, on appelle système linéarisé en  $\bar{x}$  le système linéaire

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x,$$

où  $Df(\bar{x})$  est la dérivée de  $f$  en  $\bar{x}$ .

## 1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

**Définition 1.3.1** (Fonction de Lyapunov)

On appelle fonction de Lyapunov en  $\bar{x}$ , où  $\bar{x}$  est un point d'équilibre du système (1.1), une fonction  $V$  telle que sur un voisinage  $U$  de  $\bar{x}$ , on ait les propriétés suivantes :

- (i)  $V(x) \geq 0$  pour tout  $x \in U$  ;
- (ii)  $V(x) = 0$  si et seulement si,  $x = \bar{x}$  ;
- (iii)  $\dot{V}(x) \leq 0$  pour tout  $x \in U$ .

**Remarque 1.3.1** Une fonction qui vérifie les deux premières propriétés de la définition précédente est dite définie positive sur  $U$ .

**Remarque 1.3.2** Une fonction de Lyapunov est une fonction qui est décroissante sur les trajectoires et bornée inférieurement.

**Théorème 1.3.1** (Stabilité au sens de Lyapunov)

Soit  $\bar{x}$  un point d'équilibre du système (1.1).

- S'il existe une fonction de Lyapunov en  $\bar{x}$  pour ce système alors  $\bar{x}$  est point d'équilibre stable.

- Si en outre  $\dot{V}$  est définie négative, c'est-à-dire  $\dot{V}(x) < 0$  et  $\dot{V}(\bar{x}) = 0$  alors,  $\bar{x}$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

## 1.4 Définition d'un contrôle

Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ .

Considérons  $A$ ,  $B$  et  $r$  trois applications localement intégrables sur  $I$  à valeur respectivement dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.4.1** On appelle système de contrôle linéaire ou système contrôlé le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), & \forall t \in I \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

où l'ensemble des contrôles  $u$  est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur  $I$  à valeur dans le sous-ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ .

La théorie d'existence de solution d'équation différentielle (1.4) assure que pour tout contrôle  $u$ , le système (1.4) admet une unique solution

$$x(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

absolument continue.

Soit  $R(\cdot) : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la résolvante du système linéaire homogène

$$\dot{x} = A(t)x(t)$$

définie par

$$\dot{R}(t) = A(t)R(t), \quad R(0) = Id.$$

Notons que si  $A(t) = A$  est une constante sur  $I$  alors  $R(t) = e^{tA}$ ,  $\dot{R}(t) = Ae^{tA}$ ,  
 $R(0) = e^0 = Id$ .

La solution  $x(\cdot)$  du système (1.4) associée au contrôle  $u$  est donnée par

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds,$$

pour tout  $t \in I$ .

Cette application dépend de  $u$ ; donc si on change la fonction  $u$ , on obtient une autre trajectoire dans  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.5 Notion de contrôle optimal

**Définition 1.5.1** L'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $T > 0$  est défini par

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) | u \in L^\infty([0, T], \Omega)\},$$

où  $x_u(\cdot)$  est la solution du système (1.4) associée au contrôle  $u$ .

Autrement dit,  $Acc(x_0, T)$  est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.4) au temps  $T$ , lorsqu'on fait varier le contrôle  $u$ .

**Remarque 1.5.1**  $Acc(x_0, 0) = \{x_0\}$ .

### **Théorème 1.5.1** [31]

Considérons le système de contrôle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

où  $f$  est  $C^1$  de  $\mathbb{R}^{1+n+m}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , les contrôles  $u$  sont à valeurs dans un compact  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ , et/ou éventuellement on a des contraintes sur l'état

$$c_1(x) \leq 0, \dots, c_r(x) \leq 0,$$

où  $c_1, \dots, c_r$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $M_0$  et  $M_1$  des compacts de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $M_1$  est accessible depuis  $M_0$ .

Soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble des contrôles à valeurs dans  $\Omega$  joignant  $M_0$  à  $M_1$ . Soient  $f^0$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{1+n+m}$ , et  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère le coût

$$C(u) = \int_0^{t(u)} f^0(t, x(t), u(t)) dt + g(t(u), x(t(u))),$$

où  $t(u) \geq 0$  est tel que  $x(t(u)) \in M_1$ .

On suppose que :

- il existe un réel positif  $b$  tel que toute trajectoire associée à un contrôle  $u \in \mathcal{U}$  est uniformément bornée par  $b$  sur  $[0, t(u)]$ , ainsi que le temps  $t(u)$ , i.e

$$\exists b > 0 \mid \forall u \in \mathcal{U}, \forall t \in [0, t(u)], \quad t(u) + \|x_u(t)\| \leq b;$$

- pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ , l'ensemble

$$\tilde{V} = \left\{ \left( \begin{array}{c} f(t, x, u) \\ f^0(t, x, u) + \gamma \end{array} \right) \mid u \in \Omega, \gamma \geq 0 \right\}$$

est convexe.

Alors il existe un contrôle optimal  $u$  sur  $[0, t(u)]$  tel que la trajectoire associée joint  $M_0$  à  $M_1$  en temps  $t(u)$  et en coût minimal.

Pour un problème de contrôle optimal à temps final fixé, on impose  $t(u) = T$  (et en particulier, on suppose que la cible  $M_1$  est accessible depuis  $M_0$  en temps  $T$ ).

Pour la preuve de ce théorème voir [31] théorème 6.2.1.

## **1.6 Quelques propriétés matricielles**

### **Définition 1.6.1** (Rayon spectral)

Soit  $M$  une matrice carrée.

On appelle spectre de  $M$ , l'ensemble des valeurs propres de  $M$  noté  $\sigma(M)$ .

On appelle rayon spectral, le nombre réel  $\rho(M)$  défini par

$$\rho(M) = \max_{\lambda \in \sigma(M)} |\lambda|.$$

**Remarque 1.6.1** On dit qu'une matrice  $M$  est stable si ses valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives.

On dit aussi que la matrice est de Hurwitz.

### Définition 1.6.2 (Matrice Coopérative)

On appelle matrice coopérative ou matrice de Metzler, toute matrice  $M = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients extra-diagonaux sont positifs. C'est à dire

$$b_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$$

**Théorème 1.6.1** Si  $M$  est une matrice de Metzler, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice de Metzler  $M$  est asymptotiquement stable.
2. La matrice de Metzler  $M$  est inversible et  $-M^{-1} \geq 0$ .
3. Il existe  $c > 0$  tel que  $Mc \ll 0$ .
4. Il existe  $c \gg 0$  tel que  $Mc \ll 0$ .

$c$  est un vecteur colonne dont le nombre de lignes est égal à la dimension de  $M$ .

**Définition 1.6.3** Soit  $M$  une matrice de Metzler inversible.

On appelle décomposition régulière de  $M$ , toute décomposition de la forme

$$M = F + V$$

où  $F \geq 0$  et  $V$  est une matrice de Metzler asymptotiquement stable.

## 1.7 Critère de Routh

Pour démontrer qu'un système est asymptotiquement stable, calculer les valeurs propres du système et étudier le signe de leurs parties réelles n'est pas souvent un moyen très commode. Une méthode algébrique a été développée par Routh et Hurwitz reposant sur le signe de déterminants particuliers, les déterminants de Routh.

Nous avons vu qu'après linéarisation du système, on obtenait l'équation

$$\dot{x} = J(\bar{x})x$$

et donc les valeurs propres de  $J(\bar{x})$  sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(J(\bar{x}) - XI) = 0$$

ici  $J$  désigne la matrice jacobienne de la fonction  $f$  de dimension  $n$ .

On note

$$\begin{aligned} P(X) &= \det(J(\bar{x}) - XI) \\ &= X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots + a_{n-1} X + a_n. \end{aligned}$$

On appelle déterminant de Routh les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{aligned} h_1 &= a_1 \\ h_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 \\ h_{j < n} &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_j \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Les termes  $h_{jk}$  pour  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  de la matrice de Routh sont définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} h_{jk} = a_{2j-k} & \text{pour } 0 < 2j - k < n \\ h_{jk} = 1 & \text{pour } 2j = k \\ h_{jk} = 0 & \text{pour } 2j < k \text{ ou } 2j > n. \end{cases}$$

**Proposition 1.7.1** *Le système est asymptotiquement stable si les déterminants de Routh sont positifs, c'est-à-dire pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $h_i > 0$ .*

## 1.8 Existence de solution au sens de Cauchy-Lipschitz

**Théorème 1.8.1** *(Existence et unicité de solution locale de Cauchy-Lipschitz)*

*Supposons que la fonction  $f(t, x)$  est continue par rapport à  $t$  et satisfait la condition de Lipschitz*

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \|, \forall x, y \in \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1].$$

*Alors, il existe  $\eta > 0$  tel que l'équation (1.1) ait une solution sur  $[t_0, t_0 + \eta]$ .*

**Théorème 1.8.2** *(Existence et unicité de solution globale de Cauchy-Lipschitz)*

*Supposons que la fonction  $f(t, x)$  est continue par rapport à  $t$  et satisfait la condition de Lipschitz*

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1].$$

*Alors, l'équation (1.1) admet une unique solution sur  $[t_0, t_1]$ .*

# Chapitre 2

## Modélisation de la dengue

### 2.1 Définition du modèle de base

Le modèle est dû à L. Esteva, H. M. Yang [10] où un système d'équations différentielles non linéaire a été formulé pour évaluer l'efficacité de la technique d'insectes stériles appliquée à une population de moustiques.

Dans ce paragraphe nous présentons le modèle :

- On désigne par  $A$  la taille de la population des insectes en phase immature (oeuf, larve et pupae) à un temps  $t$ .

Pour la phase adulte, on considère les compartiments suivants :

- les femelles avant accouplement  $I$  ;
- les femelles fécondes accouplées  $F$  ;
- les femelles non fécondes accouplées  $U$  ;
- les insectes mâles  $M$  ;
- la taille de la population des insectes stériles au temps  $t$  est désigné par  $M_T$ .

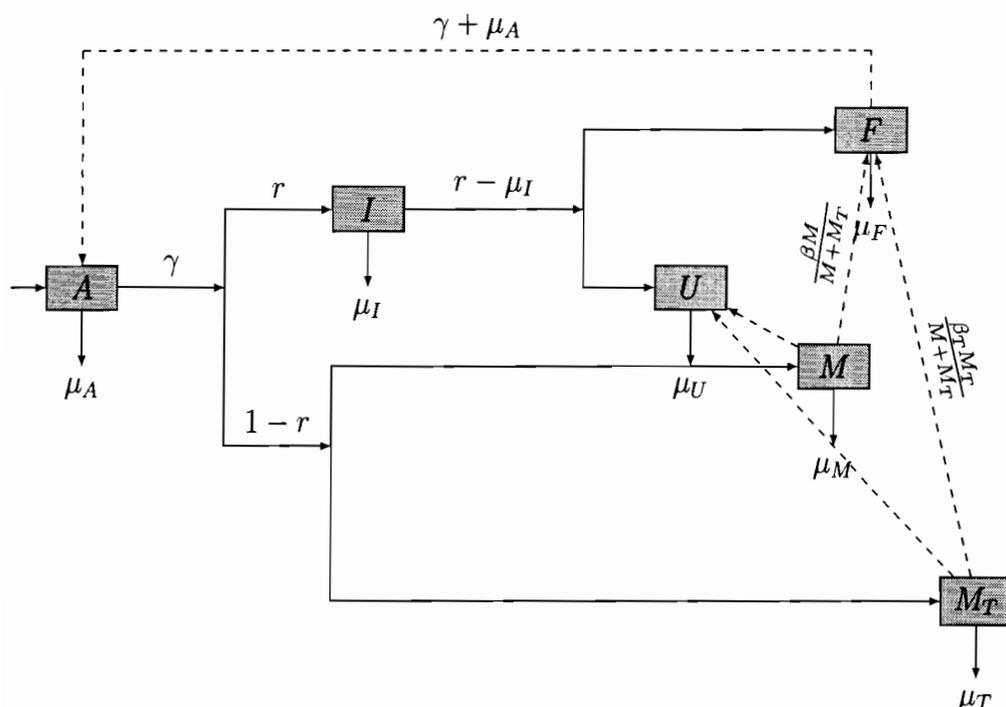


FIGURE 2.1 – Diagramme de transfert.

Le modèle est donné par le système d'Equation Différentielle Ordinaire (EDO) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = \Phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) F - (\gamma + \mu_A) A \\ \frac{dI}{dt} = r\gamma A - \frac{\beta MI}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - \mu_I I \\ \frac{dF}{dt} = \frac{\beta MI}{M + M_T} - \mu_F F \\ \frac{dM}{dt} = (1 - r)\gamma A - \mu_M M \\ \frac{dM_T}{dt} = \alpha - \mu_T M_T \end{array} \right. \quad (2.1)$$

et le reste des insectes femelles non fertiles accouplées est caractérisé par l'équation :  
 $\frac{dU}{dt} = \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - \mu_U U.$

Dans les équations ci-dessus :

- $\mu_A$  : désigne le taux de mortalité des formes immatures ;
- $\mu_I$  : désigne le taux de mortalité des femelles non accouplées ;
- $\mu_F$  : désigne le taux de mortalité des femelles fécondes accouplées ;
- $\mu_U$  : désigne le taux de mortalité des femelles non fécondes accouplées ;
- $\mu_M$  : désigne le taux de mortalité des mâles naturels ;
- $\mu_T$  : désigne le taux de mortalité des insectes mâle stériles ;

$\Phi$  : est le taux d'oviposition par moustique femelle qui est proportionnel à la densité des femelles.

$C$  correspond à la quantité d'éléments nutritifs disponibles dans l'espace.

La population aquatique devient des moustiques à un taux  $\gamma$  ; une proportion de  $r$  se transforme en femelle et une proportion de  $1 - r$  en mâle.

Le moustique femelle s'accouple une fois dans sa vie et dépose ses oeufs dans plusieurs endroits durant sa vie [27].

On suppose que le taux d'accouplement des femelles non accouplées avec les moustiques mâles naturels est donné par

$$\frac{\beta M}{M + M_T}.$$

Lorsque l'irradiation des moustiques est placé artificiellement, le taux d'accouplement effectif a diminué à cause de la stérilisation.

On suppose que le taux d'accouplement des femelles avec un mâle irradié est donné par

$$\frac{\beta_T M_T}{M + M_T} \text{ où } \beta_T = pq\beta \text{ et } 0 \leq p, q \leq 1.$$

Le paramètre  $p$  est relatif à l'efficacité des mâles stériles introduits dans la distribution spatiale des insectes femelles ;  $q$  correspond à la modification physiologique induite par la technique de stérilisation.

Finalement,  $\alpha$  est le taux d'insectes mâles stériles isolé et atomisés. En effet, il s'agit d'une mise en évidence de l'utilisation des insecticides ; qui concerne de façon générale tous les moustiques. La constante  $\alpha$  regroupe les mâles stériles et les insectes stérilisés suite à l'application de la technique de stérilisation des insectes (SIT).

## 2.2 Recherche des points d'équilibre

### 2.2.1 Point d'équilibre sans maladie

À l'absence d'insectes naturels (femelle fertile) et en présence d'une population constante d'insectes stériles, on a :

$$A = 0; I = 0; F = 0; M = 0$$

et

$$\frac{dM_T}{dt} = 0 \quad (M_T = cste)$$

$$\frac{dM_T}{dt} = 0 \implies \alpha - \mu_T M_T = 0$$

i.e  $M_T = \frac{\alpha}{\mu_T}$ .

Par conséquent, l'équilibre sans maladie du système (2.1) est donné par  $P_0 = (0, 0, 0, 0, \frac{\alpha}{\mu_T})$ .

### 2.2.2 Point d'équilibre endémique

Soient  $\bar{A}, \bar{I}, \bar{F}, \bar{M}$  et  $\bar{M}_T$  les composantes du point d'équilibre endémique, elles vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \Phi(1 - \frac{\bar{A}}{C})\bar{F} - (\gamma + \mu_A)\bar{A} = 0 & (i) \\ r\gamma\bar{A} - \frac{\beta\bar{M}\bar{I}}{\bar{M} + \bar{M}_T} - \frac{\beta_T\bar{M}_T\bar{I}}{\bar{M} + \bar{M}_T} - \mu_I\bar{I} = 0 & (ii) \\ \frac{\beta\bar{M}\bar{I}}{\bar{M} + \bar{M}_T} - \mu_F\bar{F} = 0 & (iii) \\ (1 - r)\gamma\bar{A} - \mu_M\bar{M} = 0 & (iv) \\ \alpha - \mu_T\bar{M}_T = 0 & (v) \end{cases}$$

Déterminons  $\bar{A}, \bar{I}, \bar{F}, \bar{M}$  et  $\bar{M}_T$ .

De (v), on a  $\bar{M}_T = \frac{\alpha}{\mu_T}$ .

Exprimons  $\bar{I}, \bar{F}$  et  $\bar{M}$  en fonction de  $\bar{A}$ .

De l'équation (iv), on a :  $\bar{M} = \frac{(1 - r)\gamma\bar{A}}{\mu_M}$ .

De (i), on a :  $\bar{F} = \frac{(\gamma + \mu_A)\bar{A}}{\Phi(1 - \frac{\bar{A}}{C})} \implies \bar{F} = \frac{(\gamma + \mu_A)C\bar{A}}{\Phi(C - \bar{A})}$ .

De (ii), on a :

$$\begin{aligned}
 r\gamma\bar{A} &= \frac{\beta\bar{M}\bar{I}}{\bar{M} + \bar{M}_T} + \frac{\beta_T\bar{M}_T\bar{I}}{\bar{M} + \bar{M}_T} + \mu_I\bar{I} \\
 r\gamma\bar{A} &= \bar{I}\left(\frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} + \frac{\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} + \mu_I\right) \\
 \bar{I} &= \frac{r\gamma\bar{A}(\bar{M} + \bar{M}_T)}{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T + \mu_I(\bar{M} + \bar{M}_T)} \\
 &= \frac{r\gamma\bar{A}(\bar{M} + \frac{\alpha}{\mu_T})}{(\beta + \mu_I)\bar{M} + (\beta_T + \mu_I)\frac{\alpha}{\mu_T}}.
 \end{aligned}$$

Comme  $A$  est la taille de la phase immature, alors les autres compartiments sont issus de  $A$ . Ainsi, nous avons exprimé les composantes  $\bar{I}$ ,  $\bar{F}$  et  $\bar{M}$  en fonction de  $\bar{A}$ .

Par ailleurs, la composante  $\bar{A}$  est tel que :  $\bar{A}$  est solution de l'équation du second degré

$$P(A) = aA^2 + bA + c; \quad (2.2)$$

avec

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{C} \frac{\Phi r \gamma \beta}{(\gamma + \mu_A)(\beta + \mu_I)\mu_F} \\
 b &= 1 - \frac{\Phi r \gamma \beta}{(\gamma + \mu_A)(\beta + \mu_I)\mu_F} \\
 c &= \frac{(\beta_T + \mu_I)\mu_M \alpha}{(\beta + \mu_I)(1 - r)\gamma\mu_T}.
 \end{aligned}$$

De l'expression de  $\bar{F}$ , il s'ensuit que l'équilibre endémique doit satisfaire  $0 < \bar{A} < C$ .

**Déterminons les hypothèses sur le polynôme  $P$  pour que  $\bar{A}$  soit dans  $]0; C[$ .**

Pour ce faire, calculons les images des bords de l'intervalle  $]0; C[$  par le polynôme  $P$  :

$$P(0) = c > 0;$$

$$P(C) = aC^2 + bC + c.$$

Par ailleurs,

$$aC^2 = \frac{C\Phi r \gamma \beta}{(\gamma + \mu_A)(\beta + \mu_I)\mu_F}$$

et

$$bC = C - \frac{C\Phi r \gamma \beta}{(\gamma + \mu_A)(\beta + \mu_I)\mu_F}.$$

$$\text{Donc } P(C) = C + c$$

$$\text{i.e que } P(C) = C + \frac{(\beta_T + \mu_I)\mu_M \alpha}{(\beta + \mu_I)(1 - r)\gamma\mu_T} > 0.$$

Calculons la dérivée de  $P$  par rapport à  $A$

$$\frac{dP}{dA}(A) = 2aA + b$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dA}(C) &= 2aC + b \\ &= \frac{2\Phi r \gamma \beta}{(\gamma + \mu_A)(\beta + \mu_I)\mu_F} + 1 - \frac{\Phi r \gamma \beta}{(\gamma + \mu_A)(\beta + \mu_I)\mu_F}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{dP}{dA}(C) = \frac{\Phi r \gamma \beta}{(\gamma + \mu_A)(\beta + \mu_I)\mu_F} + 1 > 0$ .

Le polynôme  $P(A)$  a une ou deux racines dans l'intervalle  $]0; C[$  si et seulement si :

$$(i) \quad \frac{dP}{dA}(0) < 0$$

et

$$(ii) \quad b^2 - 4ac > 0.$$

On définit le nombre moyen secondaire produit par un seul insecte femelle par :

$$R = \frac{\Phi r \gamma \beta}{(\gamma + \mu_A)(\beta + \mu_I)\mu_F} \quad (2.3)$$

et la proportion d'insectes femelles non fertiles accouplées avec les autres insectes fertiles est donnée par :

$$S = \frac{(\beta_T + \mu_I)\mu_M \alpha}{(\beta + \mu_I)(1 - r)\gamma C \mu_T}. \quad (2.4)$$

**Remarque 2.2.1** La constante  $R$  ci-dessus désigne, dans notre étude, le taux de reproduction de base généralement noté  $R_0$ .

On remarque que :  $c = CS$ ,  $a = \frac{R}{C}$  et  $b = 1 - R$ .

Le polynôme (2.2) dévient :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{R}{C}A^2 + (1 - R)A + SC \\ &= \frac{R}{C}A^2 - (R - 1)A + SC. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les conditions d'existence biologique d'équilibre endémique sont :

$$R > 1 \quad (2.6)$$

et

$$S \leq \frac{(R - 1)^2}{4R} \equiv S^c. \quad (2.7)$$

Calculons le discriminant associé au polynôme (2.2) :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac > 0 \\ &= (R - 1)^2 - 4RS > 0 \\ \sqrt{\Delta} &= \sqrt{(R - 1)^2 - 4RS} \\ &= (R - 1)\sqrt{1 - \frac{4RS}{(R - 1)^2}}. \end{aligned}$$

Calculons les racines du polynôme  $P$  :

$$\begin{aligned}\bar{A}_- &= \frac{R-1 - (R-1)\sqrt{1 - \frac{4RS}{(R-1)^2}}}{\frac{2R}{C}} \\ &= \frac{(R-1)C}{2R} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4RS}{(R-1)^2}} \right] \\ \bar{A}_+ &= \frac{R-1 + (R-1)\sqrt{1 - \frac{4RS}{(R-1)^2}}}{\frac{2R}{C}} \\ &= \frac{(R-1)C}{2R} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4RS}{(R-1)^2}} \right].\end{aligned}$$

On désigne donc par  $P_{1-} = (\bar{A}_-, \bar{I}, \bar{F}, \bar{M}, \bar{M}_T)$  et  $P_{1+} = (\bar{A}_+, \bar{I}, \bar{F}, \bar{M}, \bar{M}_T)$  les points d'équilibre endémique du système (2.1).

On note que si  $S = \frac{(R-1)^2}{4R}$  alors les points d'équilibre  $P_{1-}$  et  $P_{1+}$  se résument au point d'équilibre  $P_1$  avec  $\bar{A} = \frac{(R^* - 1)C}{2R^*}$  qui fournit le seuil de la condition minimale

$$R^* = (1 + 2S) \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 2S)^2}} \right] \geq 1 \quad (2.8)$$

pour l'existence d'équilibre endémique.

## 2.3 Étude de la stabilité des points d'équilibre

Dans ce paragraphe, on analyse les conditions de stabilité des points d'équilibre.

Calculons la matrice jacobienne du système (2.1) en tout point de coordonnée  $(A, I, F, M, M_T)$ .

Soit  $J$  cette matrice ; on a alors :

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\Phi F}{C} - (\mu_A + \gamma) & 0 & \Phi(1 - \frac{A}{C}) & 0 & 0 \\ r\gamma & -\mu_I - \frac{\beta M + \beta_T M_T}{M + M_T} & 0 & J_{2,4} & J_{2,5} \\ 0 & \frac{\beta M}{M + M_T} & -\mu_F & J_{3,4} & J_{3,5} \\ (1-r)\gamma & 0 & 0 & -\mu_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_T \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$J_{2,5} = \frac{(\beta - \beta_T)MI}{(M + M_T)^2}; \quad J_{3,5} = -\frac{\beta MI}{(M + M_T)^2}; \quad J_{3,4} = \frac{\beta M_T I}{(M + M_T)^2}; \quad J_{2,4} = \frac{(\beta_T - \beta)M_T I}{(M + M_T)^2}.$$

### 2.3.1 Étude de la stabilité de l'équilibre sans maladie

**Proposition 2.3.1** *Le point équilibre sans maladie  $P_0$  est localement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice jacobienne au point  $P_0$  sont à parties réelles strictement négatives.*

**Preuve 2.3.1** *Pour le point d'équilibre trivial (sans maladie)  $P_0 = (0, 0, 0, 0, \frac{\alpha}{\mu_T})$ , la matrice jacobienne (2.9) devient :*

$$J_{P_0} = \begin{pmatrix} -(\mu_A + \gamma) & 0 & \Phi & 0 & 0 \\ r\gamma & -\mu_I - \beta_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_F & 0 & 0 \\ (1-r)\gamma & 0 & 0 & -\mu_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_T \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Déterminons les valeurs propres de (2.10). Pour ce faire, déterminons son polynôme caractéristique  $P(X)$  où  $X$  est l'indéterminé :

$P(X) = \det(J_{P_0} - XI_5)$  où  $I_5$  désigne la matrice identité d'ordre 5

$$P(X) = \begin{vmatrix} -(\mu_A + \gamma) - X & 0 & \Phi & 0 & 0 \\ r\gamma & -\mu_I - \beta_T - X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_F - X & 0 & 0 \\ (1-r)\gamma & 0 & 0 & -\mu_M - X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_T - X \end{vmatrix}.$$

En développant suivant les lignes, on a :

$$P(X) = (-\mu_T - X) \begin{vmatrix} -(\mu_A + \gamma) - X & 0 & \Phi & 0 \\ r\gamma & -\mu_I - \beta_T - X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_F - X & 0 \\ (1-r)\gamma & 0 & 0 & -\mu_M - X \end{vmatrix}$$

$$P(X) = (-\mu_T - X)(-\mu_M - X) \begin{vmatrix} -(\mu_A + \gamma) - X & 0 & \Phi \\ r\gamma & -\mu_I - \beta_T - X & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_F - X \end{vmatrix}$$

$$P(X) = (-\mu_T - X)(-\mu_M - X)(-\mu_I - \beta_T - X)(-\mu_F - X)(-\mu_A - \gamma - X)$$

$$P(X) = 0 \implies (-\mu_T - X)(-\mu_M - X)(-\mu_I - \beta_T - X)(-\mu_F - X)(-\mu_A - \gamma - X) = 0.$$

Ainsi, on a :

$$X = -\mu_T, X = -\mu_M, X = -\mu_F, X = -\mu_I - \beta_T, X = -\gamma - \mu_A$$

$$Sp(J_{P_0}) = \{-\mu_T, -\mu_M, -\mu_F, -\mu_I - \beta_T, -\gamma - \mu_A\}.$$

Comme toutes les valeurs propres sont de signe négatifs alors le point d'équilibre  $P_0$  est localement stable.

**Théorème 2.3.1** *Le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable si  $R \leq 1$ .*

**Preuve 2.3.2** *Considérons la fonction de Lyapunov  $V$  définie par :*

$$V : \mathbb{R}_+^5 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, I, F, M, M_T) \longmapsto V(A, I, F, M, M_T);$$

avec

$$V(A, I, F, M, M_T) = \frac{r\gamma}{\mu_A + \gamma} A + I + \frac{\Phi r\gamma}{(\mu_A + \gamma)\mu_F} F.$$

En effet;

$$V(A, I, F, M, M_T) \geq 0, \quad \forall (A, I, F, M, M_T) \in \mathbb{R}_+^5;$$

$$V(0, 0, 0, 0, \frac{\alpha}{\mu_T}) = 0;$$

vérifions que  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ ;

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{r\gamma}{\mu_A + \gamma} \frac{dA}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{\Phi r\gamma}{(\mu_A + \gamma)\mu_F} \frac{dF}{dt} \\ &= \frac{r\gamma}{\mu_A + \gamma} \left[ \Phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) F - (\gamma + \mu_A) A \right] + r\gamma A - \frac{\beta MI}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - \mu_I I \\ &\quad + \frac{\Phi r\gamma}{(\mu_A + \gamma)\mu_F} \left( \frac{\beta MI}{M + M_T} - \mu_F F \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{r\gamma\Phi}{(\mu_A + \gamma)C} AF - \frac{\beta MI}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - \frac{(M + M_T)\mu_I I}{M + M_T} \\ &\quad + \frac{\Phi r\gamma\beta}{\mu_F(\mu_A + \gamma)(M + M_T)} MI \\ &= -\frac{r\gamma\Phi}{(\mu_A + \gamma)C} AF - \frac{\beta_T + \mu_I}{M + M_T} M_T I - \frac{\beta + \mu_I}{M + M_T} \left( 1 - \frac{\Phi r\gamma\beta}{\mu_F(\mu_A + \gamma)(\beta + \mu_I)} \right) MI \\ &= -\frac{r\gamma\Phi}{(\mu_A + \gamma)C} AF - \frac{\beta_T + \mu_I}{M + M_T} M_T I - \frac{\beta + \mu_I}{M + M_T} (1 - R) MI. \end{aligned}$$

Comme  $R \leq 1$  alors  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ .

D'après les résultats de stabilité de LaSalle Lyapunov,  $P_0$  est globalement asymptotiquement stable pour  $R \leq 1$ .

## 2.3.2 Étude de la stabilité de l'équilibre endémique

**Proposition 2.3.2** *Le point d'équilibre endémique est localement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice jacobienne au point  $P$  sont à parties réelles strictement négatives.*

**Preuve 2.3.3** Pour le point d'équilibre endémique  $P = (\bar{A}, \bar{I}, \bar{F}, \bar{M}, \bar{M}_T)$  la matrice jacobienne (2.9) devient :

$$J_P = \begin{pmatrix} -\frac{\Phi\bar{F}}{C} - (\mu_A + \gamma) & 0 & \Phi(1 - \frac{\bar{A}}{C}) & 0 & 0 \\ r\gamma & -\mu_I - \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} & 0 & J_{P_4} & J_{P_1} \\ 0 & \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} & -\mu_F & J_{P_3} & J_{P_2} \\ (1-r)\gamma & 0 & 0 & -\mu_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_T \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$\text{où } J_{P_1} = \frac{(\beta - \beta_T)\bar{M}\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2}; \quad J_{P_2} = -\frac{\beta\bar{M}\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2}; \quad J_{P_3} = \frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2}; \quad J_{P_4} = \frac{(\beta_T - \beta)\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2}.$$

Soit  $P(X)$  (où  $X$  est l'indéterminé) le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne (2.11) ; alors, on a :

$P(X) = \det(J_P - XI_5)$  où  $I_5$  désigne la matrice identité d'ordre 5.

$$P(X) = \begin{vmatrix} P_{1,1} & 0 & \Phi(1 - \frac{\bar{A}}{C}) & 0 & 0 \\ r\gamma & P_{2,2} & 0 & P_{2,4} & P_{2,5} \\ 0 & \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} & -\mu_F - X & P_{3,4} & P_{3,5} \\ (1-r)\gamma & 0 & 0 & -\mu_M - X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_T - X \end{vmatrix}$$

$$P_{1,1} = -\frac{\Phi\bar{F}}{C} - (\mu_A + \gamma) - X; \quad P_{2,2} = -\mu_I - \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} - X$$

$$P_{2,4} = \frac{(\beta_T - \beta)\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2}; \quad P_{2,5} = \frac{(\beta - \beta_T)\bar{M}\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2}; \quad P_{3,4} = \frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2}; \quad P_{3,5} = -\frac{\beta\bar{M}\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2}.$$

En fixant la dernière ligne puis en faisant varier les colonnes, on a :

$$P(X) = (-\mu_T - X) \begin{vmatrix} P_{1,1} & 0 & \Phi(1 - \frac{\bar{A}}{C}) & 0 \\ r\gamma & P_{2,2} & 0 & \frac{(\beta_T - \beta)\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} \\ 0 & \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} & -\mu_F - X & \frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} \\ (1-r)\gamma & 0 & 0 & -\mu_M - X \end{vmatrix}.$$

En fixant encore la dernière ligne puis en faisant varier les colonnes, on a :

$$\begin{aligned}
P(X) &= (-\mu_T - X)(-(1-r)\gamma) \begin{vmatrix} 0 & \Phi(1 - \frac{\bar{A}}{C}) & 0 \\ -\mu_I - \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} - X & 0 & \frac{(\beta_T - \beta)\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} \\ \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} & -\mu_F - X & \frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} \end{vmatrix} \\
+(-\mu_T - X)(-\mu_M - X) & \begin{vmatrix} -\frac{\Phi\bar{F}}{C} - (\mu_A + \gamma) - X & 0 & \Phi(1 - \frac{\bar{A}}{C}) \\ r\gamma & -\mu_I - \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} - X & 0 \\ 0 & \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} & -\mu_F - X \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Posons  $P(X) = (-\mu_T - X)Q(X)$ ; ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
Q(X) &= \gamma\Phi(1-r) \left(1 - \frac{\bar{A}}{C}\right) \begin{vmatrix} -\mu_I - \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} - X & \frac{(\beta_T - \beta)\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} \\ \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} & \frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} \end{vmatrix} \\
+(-\mu_M - X) & \begin{vmatrix} -\frac{\Phi\bar{F}}{C} - (\mu_A + \gamma) - X & 0 & \Phi(1 - \frac{\bar{A}}{C}) \\ r\gamma & -\mu_I - \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} - X & 0 \\ 0 & \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} & -\mu_F - X \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(X) &= \gamma\Phi(1-r) \left(1 - \frac{\bar{A}}{C}\right) \left[ \left( -\mu_I - \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} - X \right) \frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} \left( \frac{(\beta_T - \beta)\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} \right) \right] \\
&\quad + (-\mu_M - X) \left( -\frac{\Phi\bar{F}}{C} - (\mu_A + \gamma) - X \right) \left( -\mu_I - \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} - X \right) (-\mu_F - X) \\
&\quad + r\gamma\Phi(-\mu_M - X) \left(1 - \frac{\bar{A}}{C}\right) \left( \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right)
\end{aligned}$$

Nous allons utiliser les identités suivantes :

$$\frac{\Phi\bar{F}}{C} + \mu_A + \gamma = \left( \mu_A + \gamma \right) \frac{C}{C - \bar{A}},$$

$$r\gamma\Phi \left(1 - \frac{\bar{A}}{C}\right) \left( \frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) = \mu_F(\mu_A + \gamma) \left( \mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right),$$

$$(1-r)\gamma\Phi \left(1 - \frac{\bar{A}}{C}\right) \frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} = \frac{\mu_F\mu_M(\mu_A + \gamma)\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}.$$

$$\begin{aligned}
Q(X) = & \gamma\Phi(1-r)\left(1-\frac{\bar{A}}{C}\right)\left[\left(-\mu_I-\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}-X\right)\frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M}+\bar{M}_T)^2}\right. \\
& \left. -\frac{\beta\bar{M}}{\bar{M}+\bar{M}_T}\left(\frac{(\beta_T-\beta)\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M}+\bar{M}_T)^2}\right)\right] \\
& +(\mu_M+X)((\mu_A+\gamma)\frac{\bar{C}}{C-\bar{A}}+X)\left(\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}+X\right)(\mu_F+X) \\
& -\mu_F(\mu_M+X)(\mu_A+\gamma)\left(\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(X) = & \gamma\Phi(1-r)\left(1-\frac{\bar{A}}{C}\right)\left[\left(-\mu_I-\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}-X\right)\frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M}+\bar{M}_T)^2}\right. \\
& \left. -\frac{\beta\bar{M}}{\bar{M}+\bar{M}_T}\left(\frac{(\beta_T-\beta)\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M}+\bar{M}_T)^2}\right)\right] \\
& [\mu_M\mu_F+(\mu_F+\mu_M)X+X^2][(\mu_A+\gamma)\left(\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}\right)\frac{C}{C-\bar{A}} \\
& +\left((\mu_A+\gamma)\frac{C}{C-\bar{A}}+\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}\right)X+X^2] \\
& -\mu_F(\mu_M+X)(\mu_A+\gamma)\left(\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(X) = & X^4 + \left(\mu_F + \mu_M + (\mu_A + \gamma)\frac{C}{C-\bar{A}} + \mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}\right) X^3 \\
& \left(\mu_M\mu_F + (\mu_A + \gamma)\frac{C}{C-\bar{A}}\left(\mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}\right)\right. \\
& \left. + (\mu_F + \mu_M)(\mu_A + \gamma)\frac{C}{C-\bar{A}} + (\mu_F + \mu_M)\left(\mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}\right)\right) X^2 \\
& + \left(-\frac{\mu_F\mu_M(\mu_A + \gamma)\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} - \mu_F(\mu_A + \gamma)\left(\mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}\right)\right. \\
& \left. + \mu_M\mu_F(\mu_A + \gamma)\frac{C}{C-\bar{A}} + \mu_M\mu_F\left(\mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}\right)\right. \\
& \left. + (\mu_F + \mu_M)(\mu_A + \gamma)\frac{C}{C-\bar{A}}\left(\mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}\right)\right) X \\
& - (1-r)\gamma\Phi\left(1-\frac{\bar{A}}{C}\right)\left(\mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}\right)\frac{\beta\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2} \\
& - (1-r)\gamma\Phi\left(1-\frac{\bar{A}}{C}\right)\frac{\beta\bar{M}}{\bar{M} + \bar{M}_T}\left(\frac{(\beta_T - \beta)\bar{M}_T\bar{I}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)^2}\right) \\
& + \mu_M\mu_F(\mu_A + \gamma)\left(\mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}\right)\frac{C}{C-\bar{A}} \\
& - \mu_M\mu_F(\mu_A + \gamma)\left(\mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(X) = & X^4 + \left( \mu_F + \mu_M + (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} + \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) X^3 \\
& + \left( (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} \left[ \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \mu_F + \mu_M \right] \right. \\
& + \left. \left( \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) (\mu_F + \mu_M) + \mu_M \mu_F \right) X^2 \\
& + \left( \left[ \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right] [-\mu_F(\mu_A + \gamma) + \mu_M \mu_F] \right. \\
& + \left. (\mu_F + \mu_M)(\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} + \mu_F \mu_M (\mu_A + \gamma) \left( \frac{C \bar{M} + \bar{M}_T \bar{A}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A})} \right) \right) X \\
& + \frac{\mu_F \mu_M (\mu_A + \gamma) \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \left( -\mu_I - 2 \frac{\beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) \\
& + \frac{\mu_M \mu_F (\mu_A + \gamma)}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A})} \left( (\mu_I + \beta) \bar{M} + (\mu_I + \beta_T) \bar{M}_T \right) \bar{A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(X) = & X^4 + \left( \mu_F + \mu_M + (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} + \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) X^3 \\
& + \left( (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} \left[ \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \mu_F + \mu_M \right] \right. \\
& + \left. \left( \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) (\mu_F + \mu_M) + \mu_M \mu_F \right) X^2 \\
& + \left( \left[ \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right] \left[ -\mu_F(\mu_A + \gamma) + \mu_M \mu_F \right] \right. \\
& + \left. (\mu_F + \mu_M)(\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} + \mu_F \mu_M (\mu_A + \gamma) \left( \frac{C \bar{M} + \bar{M}_T \bar{A}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A})} \right) \right) X \\
& + \frac{\mu_F \mu_M (\mu_A + \gamma) (\beta_T + \mu_I) \alpha}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A}) \mu_T} \left( -\frac{\mu_I (C - \bar{A})}{\beta_T + \mu_I} - 2 \frac{\beta_T (C - \bar{A}) \bar{M}_T}{(\bar{M} + \bar{M}_T) (\beta_T + \mu_I)} \right. \\
& + \left. \left( \frac{(\mu_I + \beta) \bar{M} \mu_T}{(\mu_I + \beta_T) \alpha} + 1 \right) \bar{A} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(X) &= X^4 + \left( \mu_F + \mu_M + (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} + \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) X^3 \\
&+ \left( (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} \left[ \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \mu_F + \mu_M \right] \right. \\
&+ \left. \left( \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) (\mu_F + \mu_M) + \mu_M \mu_F \right) X^2 \\
&+ \left( \left[ \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right] \left[ \mu_F (\mu_A + \gamma) \frac{\bar{A}}{C - \bar{A}} + \mu_M \mu_F \right. \right. \\
&+ \left. \left. \mu_M (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} \right] + \mu_F \mu_M (\mu_A + \gamma) \left( \frac{C \bar{M} + \bar{M}_T \bar{A}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A})} \right) \right) X \\
&+ \frac{\mu_F \mu_M (\mu_A + \gamma) (\mu_I + \beta_T) \alpha}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A}) \mu_T CS} (\bar{A}^2 + 2CS\bar{A} - C^2S).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$Q(X) = X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4; \quad (2.12)$$

avec

$$a_1 = \mu_F + \mu_M + (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} + \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} \left[ \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} + \mu_F + \mu_M \right] \\
&+ \left( \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) (\mu_F + \mu_M) + \mu_M \mu_F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= \left[ \mu_I + \frac{\beta \bar{M} + \beta_T \bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right] \left[ \mu_F (\mu_A + \gamma) \frac{\bar{A}}{C - \bar{A}} + \mu_M \mu_F + \mu_M (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} \right] \\
&+ \mu_F \mu_M (\mu_A + \gamma) \left( \frac{C \bar{M} + \bar{M}_T \bar{A}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A})} \right)
\end{aligned}$$

$$a_4 = \frac{\mu_F \mu_M (\mu_A + \gamma) (\mu_I + \beta_T) \alpha}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A}) \mu_T CS} (\bar{A}^2 + 2CS\bar{A} - C^2S).$$

**Remarque 2.3.1** (Routh-Hurwitz) Les racines du polynôme (2.12) sont à parties réelles strictement négatives si et seulement si, les coefficients  $a_i > 0$ ,  $i = 1 \dots 4$  et  $(a_1 a_2 - a_3) a_3 > a_1^2 a_4$ .

Dans la suite, on cherche à appliquer le critère de Routh-Hurwitz.

On remarque que les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  du polynôme (2.12) sont positifs.

Vérifions que  $a_4 > 0$ .

Soit

$$s(\bar{A}) = \bar{A}^2 + 2CS\bar{A} - C^2S; \quad (2.13)$$

$a_4 > 0$  si et seulement si  $s(\bar{A}) > 0$ .

Déterminons les racines du polynôme  $s(\bar{A})$ .

Calculons son discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4C^2S^2 + 4C^2S > 0 \\ \sqrt{\Delta} &= 2CS\sqrt{1 + \frac{1}{S}}.\end{aligned}$$

Soient  $\bar{A}_1$  et  $\bar{A}_2$  les racines du polynôme  $s(\bar{A})$ , on a :

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= -CS\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{S}}\right) \\ \bar{A}_2 &= CS\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{S}}\right).\end{aligned}$$

Comme  $\bar{A} \in \mathbb{R}^+$ , nous allons travailler avec la racine positive  $\bar{A}_2$ .

Posons  $\bar{A}_2 = A^* = CS\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{S}}\right)$  et de (2.7), on a :

$$A^* > \frac{2CS}{R-1}. \quad (2.14)$$

Maintenant, évaluons le polynôme (2.5) ; on utilisera le polynôme (2.13) et les inégalités (2.7) et (2.14).

On obtient alors :

$$\begin{aligned}P(A^*) &= \frac{R}{C}(-2CSA^* + C^2S) - (R-1)A^* + CS \\ &= -(2RS + R-1)A^* + (R+1)CS \\ &< -(2RS + R-1)\frac{2CS}{R-1} + (R+1)CS \\ &< -\frac{4RCS^2}{R-1} + (R-1)CS \\ &< (R-1)CS\left(\frac{4RS}{(R-1)^2} - 1\right) < 0,\end{aligned}$$

d'après les conditions d'existence biologique (2.6) et (2.7). L'inégalité  $P(A^*) < 0$  implique que  $\bar{A}_- < A^* < \bar{A}_+$ .

Ainsi,  $s(\bar{A})$  est tel que :

$$\begin{cases} s(\bar{A}) < 0 & \text{pour } \bar{A} < A^* \\ s(\bar{A}) > 0 & \text{pour } \bar{A} > A^* \end{cases},$$

par conséquent, le coefficient  $a_4 < 0$  pour  $\bar{A} = \bar{A}_-$  et  $a_4 > 0$  pour  $\bar{A} = \bar{A}_+$ .

Vérifions que  $(a_1a_2 - a_3)a_3 > a_1^2a_4$ .

$$\begin{aligned}
(a_1a_2 - a_3)a_3 &= \left[ \left( \mu_F + \mu_M + (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} + \mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) \right. \\
&\quad \left( (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} \left[ \mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} + \mu_F + \mu_M \right] \right. \\
&\quad \left. + \left( \mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) (\mu_F + \mu_M) + \mu_M\mu_F \right) \\
&\quad - \left( \left[ \mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right] \left[ \mu_F(\mu_A + \gamma) \frac{\bar{A}}{C - \bar{A}} + \mu_M\mu_F \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mu_M(\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} \right] + \mu_F\mu_M(\mu_A + \gamma) \left( \frac{C\bar{M} + \bar{M}_T\bar{A}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A})} \right) \right) \left. \right] \\
&\quad \left[ \left( \mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right) \left[ \mu_F(\mu_A + \gamma) \frac{\bar{A}}{C - \bar{A}} + \mu_M\mu_F \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mu_M(\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} \right] + \mu_F\mu_M(\mu_A + \gamma) \left( \frac{C\bar{M} + \bar{M}_T\bar{A}}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A})} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1^2a_4 &= \left( \mu_F + \mu_M + (\mu_A + \gamma) \frac{C}{C - \bar{A}} + \mu_I + \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right)^2 \\
&\quad \left( \frac{\mu_F\mu_M(\mu_A + \gamma)(\mu_I + \beta_T)\alpha}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A})\mu_TCS} (\bar{A}^2 + 2CS\bar{A} - C^2S) \right) \\
&= \left[ \mu_F^2 + \mu_M^2 + (\mu_A + \gamma)^2 \frac{C^2}{(C - \bar{A})^2} + \mu_I^2 + \left( \frac{\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} \right)^2 + 2\mu_F\mu_M \right. \\
&\quad \left. + 2(\mu_A + \gamma) \frac{C\mu_F}{C - \bar{A}} + 2\mu_F\mu_I + 2 \frac{\mu_F\beta\bar{M} + \mu_F\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} + 2\mu_M\mu_I \right. \\
&\quad \left. + 2(\mu_A + \gamma) \frac{C\mu_M}{C - \bar{A}} + 2 \frac{\mu_M\beta\bar{M} + \mu_M\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} + 2(\mu_A + \gamma) \frac{C\mu_I}{C - \bar{A}} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\mu_I\beta\bar{M} + \mu_I\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M} + \bar{M}_T} + 2 \frac{(\mu_A + \gamma)(\beta\bar{M} + \beta_T\bar{M}_T)}{(C - \bar{A})(\bar{M} + \bar{M}_T)} \right] \\
&\quad \left[ \frac{\mu_F\mu_M(\mu_A + \gamma)(\mu_I + \beta_T)\alpha}{(\bar{M} + \bar{M}_T)(C - \bar{A})\mu_TCS} (\bar{A}^2 + 2CS\bar{A} - C^2S) \right].
\end{aligned}$$

Le développement de ces deux résultats nous montre que  $(a_1a_2 - a_3)a_3 > a_1^2a_4$ .

Comme  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont positives ;  $a_4 > 0$  pour  $\bar{A} = \bar{A}_+$ , de plus  $(a_1a_2 - a_3)a_3 > a_1^2a_4$  ; alors d'après le critère de Routh-Hurwitz les racines du polynôme (2.12) ont des parties réelles négatives.

On conclut que le point d'équilibre  $P_{1+}$  est localement asymptotiquement stable. Mais étant donné que  $a_4 < 0$  pour  $\bar{A} = \bar{A}_-$ , le point d'équilibre  $P_{1-}$  est toujours instable.

**Théorème 2.3.2** Lorsque  $R > 1$  et  $\frac{(R-1)^2}{4RS} > 1$ , les points d'équilibre endémiques  $P_{1-}$  et  $P_{1+}$ , sont atteints. Dans ce cas,  $P_{1-}$  est toujours instable et  $P_{1+}$  est stable.

**Preuve 2.3.4** Pour la preuve de ce théorème, on utilise le principe de Routh-Hurwitz décrit ci-dessus ; on conclut que le point d'équilibre  $P_{1-}$  est toujours instable et  $P_{1+}$  est stable.

# Chapitre 3

## Contrôle optimal de la dengue

### 3.1 Présentation du problème

#### 3.1.1 Formulation du problème

L'objectif ici est de minimiser le coût des insecticides ainsi que le coût de la production et la libération d'insectes stériles. Pour ce faire, on considère les variables de contrôle suivantes :

- $u_1(t)$  définit le coût de l'investissement en insecticide à un temps  $t$ .
- $u_2(t)$  définit le coût de l'investissement en production et libération d'insectes stériles.

La variable  $u_1$  donne des informations sur la quantité d'insecticide pouvant être utilisée;  $u_2$  est relatif au nombre de moustiques stériles,  $M_T$ , qui peut être libéré à un temps  $t$ .

**On cherche à minimiser le nombre de femelles fertiles.**

À cet effet, on considère l'index de performance suivant :

$$J(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_0^T (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 F^2 - c_4 M_T^2) dt \quad (3.1)$$

où ;

- $c_1$  est le coût de l'utilisation des insecticides ;
- $c_2$  est le coût de la production et libération d'insectes stériles ;
- $c_3$  est le coût social ;
- $c_4$  est la pénalité.

Le coût social dépend du nombre d'infection de la dengue qui sont directement liées avec le nombre de piqûres de moustique.

On suppose que le coût social est proportionnel à la densité des moustiques femelles fertiles.

Dans le problème du contrôle, on suppose le temps final fixé et trois variables dynamique à ce temps. De plus, on suppose la fonctionnelle coût quadratique [6], [8], [17], l'index de performance est une fonction non linéaire. Les termes quadratiques comme la pénalisation [15] – [29], amplifient les effets d'une grande variations des variables.

Chaque terme quadratique est multiplié par un coefficient  $c_i, i = 1, \dots, 4$ ; qui établit une importance relative au terme de contrôle du coût de la dengue.

**Remarque 3.1.1** *Lorsqu'on minimise l'index de performance  $J$ , la population d'insectes stériles est maximisée. Cela parce que l'on veut que l'insecticide  $u_1$  ne puisse pas réduire la population de mâles stériles  $u_2$  libérés.*

### 3.1.2 Formulations mathématiques

Mathématiquement, le problème du contrôle optimal est formulé comme une minimisation de la fonctionnelle  $J$  définie en (3.1) relatif au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = \Phi\left(1 - \frac{A}{C}\right)F - (\gamma + \mu_A)A \\ \frac{dI}{dt} = r\gamma A - \frac{\beta MI}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - (\mu_I + u_1)I \\ \frac{dF}{dt} = \frac{\beta MI}{M + M_T} - (\mu_F + u_1)F \\ \frac{dM}{dt} = (1 - r)\gamma A - (\mu_M + u_1)M \\ \frac{dM_T}{dt} = u_2 - (\mu_T + u_1)M_T. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Où les conditions initiales sont les coordonnées de l'équilibre endémique du système (2.1) pour  $\alpha = 0$  (lorsque la maladie persiste cela veut dire que le taux de femelles fertiles croit et le taux de mâles stériles tend vers zero) qui sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(0) = A_0 = \frac{(R - 1)C}{R} \\ I(0) = I_0 = \frac{r\gamma A_0}{(\mu_I + \beta)} \\ F(0) = F_0 = \frac{(\gamma + \mu_A)CA_0}{\Phi(C - A_0)} \\ M(0) = M_0 = \frac{(1 - r)\gamma A_0}{\mu_M} \\ M_T(0) = M_{T0} = 0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

En effet,

lorsque  $\alpha = 0$  alors, on a :

$$\begin{aligned} S &= \frac{(\beta_T + \mu_I)\mu_M \alpha}{(\beta + \mu_I)(1 - r)\gamma C \mu_T} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{(R - 1)C}{R}, \\ F_0 &= \frac{(\gamma + \mu_A)CA_0}{\Phi(C - A_0)} \end{aligned}$$

et

$$M_0 = \frac{(1 - r)\gamma A_0}{\mu_M}$$

$$\frac{\alpha}{\mu_T} = 0.$$

Par suite,

$$I_0 = \frac{r\gamma A_0}{(\mu_I + \beta)}.$$

Les variables de contrôle  $u_1$  et  $u_2$  sont positives. Ce scénario suppose que les mécanismes de contrôle sont introduits dans l'étude au stade où la population de moustiques est à un temps  $t = 0$ .

L'un de nos objectifs est de contrôler l'introduction de moustiques stériles  $M_T$ . Le taux constant  $\alpha$  dans le système (2.1) est remplacé par la fonction de contrôle  $u_2$ .

Le contrôle d'insecticide  $u_1$  dans (3.2) apparait comme la mortalité supplémentaire seulement dans les équations correspondant à la forme adulte des moustiques.

Il est supposé que l'insecticide est efficace seulement dans le stade adulte et non dans la phase aquatique.

## 3.2 Caractérisation du problème de contrôle optimal

Considérons le système de contrôle général

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \quad (3.4)$$

où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  et le problème de minimisation du coût de la forme

$$C(u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.5)$$

avec  $T$  fixé.

**Définition 3.2.1** *Le Hamiltonien du système (3.4) est la fonction*

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, p, u) \longmapsto H(t, x, p, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$  et  $p$  est le vecteur adjoint.

De plus, si le vecteur adjoint  $p(\cdot)$  est absolument continu sur  $[0, T]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et un réel  $p^0 \leq 0$  tels que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non-trivial ;

alors l'Hamiltonien  $H$  associé au système (3.4) et au coût (3.5) est donné par :

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u).$$

Soient  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t))$  le vecteur adjoint associé au système de contrôle (3.2).

Posons  $\lambda^0 = -\frac{1}{2}$  ;

$$f^0(t, x, u) = -(c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 F^2 - c_4 M_T^2) \quad \text{et}$$

$$f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), f_2(t, x, u), f_3(t, x, u), f_4(t, x, u), f_5(t, x, u)).$$

Où  $x(A, I, F, M, M_T) \in \mathbb{R}_+^5$  ;

$u(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2$  et  $t \in \mathbb{R}_+$  ;

$$f_1(t, x, u) = \Phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) F - (\gamma + \mu_A) A ;$$

$$f_2(t, x, u) = r\gamma A - \frac{\beta M I}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - (\mu_I + u_1) I ;$$

$$f_3(t, x, u) = \frac{\beta M I}{M + M_T} - (\mu_F + u_1) F ;$$

$$f_4(t, x, u) = (1 - r)\gamma A - (\mu_M + u_1) M ;$$

$$f_5(t, x, u) = u_2 - (\mu_T + u_1) M_T .$$

Ainsi, le Hamiltonien de notre problème est donné par :

$$\begin{aligned} H &= \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle + \lambda^0 f^0(t, x, u) \\ &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 + \lambda_5 f_5 + \lambda^0 f^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \lambda_1 \left[ \Phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) F - (\gamma + \mu_A) A \right] + \lambda_2 \left[ r\gamma A - \frac{\beta M I}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - (\mu_I + u_1) I \right] \\ &+ \lambda_3 \left[ \frac{\beta M I}{M + M_T} - (\mu_F + u_1) F \right] + \lambda_4 [(1 - r)\gamma A - (\mu_M + u_1) M] \\ &+ \lambda_5 [u_2 - (\mu_T + u_1) M_T] + \frac{1}{2} [c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 F^2 - c_4 M_T^2] . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dans (3.6),  $\lambda_j$ ;  $j = 1, \dots, 5$  sont des variables adjoints; elles déterminent le système adjoint qui avec le système étudié en (3.2) donne le système d'optimalité. On pourra considérer toute valeur positive comme variable de contrôle, en incluant les cas :

$$u_1 = u_2 = 0 .$$

Le principe du maximum de Pontryagin [11] dit que les variables de contrôle sans contrainte  $u_1^*$  et  $u_2^*$  satisfont à la relation

$$\frac{\partial H}{\partial u_1^*} = \frac{\partial H}{\partial u_2^*} .$$

On trouve  $\frac{\partial H}{\partial u_i}$ , et pour obtenir  $u_i^*$ ,  $i = 1, 2$ ; on résout les dérivées partielles de  $H$  par rapport à  $u_i$  égales à zéro :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u_1^*} = c_1 u_1^* - \lambda_2 I - \lambda_3 F - \lambda_4 M - \lambda_5 M_T = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u_2^*} = c_2 u_2^* + \lambda_5 = 0 . \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} u_1^* = \frac{\lambda_2 I + \lambda_3 F + \lambda_4 M + \lambda_5 M_T}{c_1} \\ u_2^* = -\frac{\lambda_5}{c_2} . \end{cases} \quad (3.7)$$

Le principe du maximum de Pontryagin établit que les équations suivantes :

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$H(x(t), u^*(t), \lambda(t), t) \equiv \max_{u \in U} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \quad (3.9)$$

sont des conditions nécessaires qui doivent être satisfaites par le contrôle optimal  $u(t)$  et les variables d'étude  $x(t)$  [22].

Le système (3.8) fait allusion au système adjoint. Dans notre problème, il devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial A}, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I}, \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial F}, \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial M} \quad \text{et} \quad \frac{d\lambda_5}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial M_T}. \end{aligned}$$

Remplaçons  $H$  par son expression dans chacune des équations ci-dessus :

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial \left( \lambda_1 \left[ \Phi \left( 1 - \frac{A}{C} \right) F - (\gamma + \mu_A) A \right] \right)}{\partial A} \\ &\quad - \frac{\partial \left( \lambda_2 \left[ r\gamma A - \frac{\beta M I}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - (\mu_I + u_1) I \right] \right)}{\partial A} \\ &\quad - \frac{\partial \left( \lambda_3 \left[ \frac{\beta M I}{M + M_T} - (\mu_F + u_1) F \right] \right)}{\partial A} - \frac{\partial \left( \lambda_4 [(1-r)\gamma A - (\mu_M + u_1) M] \right)}{\partial A} \\ &\quad - \frac{\partial \left( \lambda_5 [u_2 - (\mu_T + u_1) M_T] \right)}{\partial A} - \frac{\partial \left( \frac{1}{2} [c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 F^2 - c_4 M_T^2] \right)}{\partial A} \\ &= \left( \Phi \frac{F}{C} + \gamma + \mu_A \right) \lambda_1 - r\gamma \lambda_2 - (1-r)\gamma \lambda_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial \left( \lambda_1 \left[ \Phi \left( 1 - \frac{A}{C} \right) F - (\gamma + \mu_A) A \right] \right)}{\partial I} \\ &\quad - \frac{\partial \left( \lambda_2 \left[ r\gamma A - \frac{\beta M I}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - (\mu_I + u_1) I \right] \right)}{\partial I} \\ &\quad - \frac{\partial \left( \lambda_3 \left[ \frac{\beta M I}{M + M_T} - (\mu_F + u_1) F \right] \right)}{\partial I} - \frac{\partial \left( \lambda_4 [(1-r)\gamma A - (\mu_M + u_1) M] \right)}{\partial I} \\ &\quad - \frac{\partial \left( \lambda_5 [u_2 - (\mu_T + u_1) M_T] \right)}{\partial I} - \frac{\partial \left( \frac{1}{2} [c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 F^2 - c_4 M_T^2] \right)}{\partial I} \\ &= \left( \frac{\beta M}{M + M_T} + \frac{\beta_T M_T}{M + M_T} + \mu_I + u_1 \right) \lambda_2 - \frac{\beta M}{M + M_T} \lambda_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_3}{dt} &= \frac{\partial \left( \lambda_1 \left[ \Phi \left( 1 - \frac{A}{C} \right) F - (\gamma + \mu_A) A \right] \right)}{\partial F} \\
&\quad - \frac{\partial \left( \lambda_2 \left[ r\gamma A - \frac{\beta MI}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - (\mu_I + u_1) I \right] \right)}{\partial F} \\
&\quad - \frac{\partial \left( \lambda_3 \left[ \frac{\beta MI}{M + M_T} - (\mu_F + u_1) F \right] \right)}{\partial F} - \frac{\partial \left( \lambda_4 [(1-r)\gamma A - (\mu_M + u_1) M] \right)}{\partial F} \\
&\quad - \frac{\partial \left( \lambda_5 [u_2 - (\mu_T + u_1) M_T] \right)}{\partial F} - \frac{\partial \left( \frac{1}{2} [c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 F^2 - c_4 M_T^2] \right)}{\partial F} \\
&= -c_3 F - \Phi \left( 1 - \frac{A}{C} \right) \lambda_1 + (\mu_F + u_1) \lambda_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_4}{dt} &= \frac{\partial \left( \lambda_1 \left[ \Phi \left( 1 - \frac{A}{C} \right) F - (\gamma + \mu_A) A \right] \right)}{\partial M} \\
&\quad - \frac{\partial \left( \lambda_2 \left[ r\gamma A - \frac{\beta MI}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - (\mu_I + u_1) I \right] \right)}{\partial M} \\
&\quad - \frac{\partial \left( \lambda_3 \left[ \frac{\beta MI}{M + M_T} - (\mu_F + u_1) F \right] \right)}{\partial M} - \frac{\partial \left( \lambda_4 [(1-r)\gamma A - (\mu_M + u_1) M] \right)}{\partial M} \\
&\quad - \frac{\partial \left( \lambda_5 [u_2 - (\mu_T + u_1) M_T] \right)}{\partial M} - \frac{\partial \left( \frac{1}{2} [c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 F^2 - c_4 M_T^2] \right)}{\partial M} \\
&= [(\beta - \beta_T) \lambda_2 - \beta \lambda_3] \frac{M_T I}{(M + M_T)^2} + (\mu_M + u_1) \lambda_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_5}{dt} &= -\frac{\partial\left(\lambda_1\left[\Phi\left(1-\frac{A}{C}\right)F-(\gamma+\mu_A)A\right]\right)}{\partial M_T} \\
&\quad -\frac{\partial\left(\lambda_2\left[r\gamma A-\frac{\beta MI}{M+M_T}-\frac{\beta_T M_T I}{M+M_T}-(\mu_I+u_1)I\right]\right)}{\partial M_T} \\
&\quad -\frac{\partial\left(\lambda_3\left[\frac{\beta MI}{M+M_T}-(\mu_F+u_1)F\right]\right)}{\partial M_T} -\frac{\partial\left(\lambda_4\left[(1-r)\gamma A-(\mu_M+u_1)M\right]\right)}{\partial M_T} \\
&\quad -\frac{\partial\left(\lambda_5\left[u_2-(\mu_T+u_1)M_T\right]\right)}{\partial M_T} -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left[c_1 u_1^2+c_2 u_2^2+c_3 F^2-c_4 M_T^2\right]\right)}{\partial M_T} \\
&= c_4 M_T - [(\beta - \beta_T)\lambda_2 - \beta\lambda_3] \frac{MI}{(M + M_T)^2} + (\mu_T + u_1)\lambda_5.
\end{aligned}$$

En regroupant les résultats de nos différentes dérivées, on obtient le système suivant (appelé aussi système de transversalité) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d\lambda_1}{dt} = \left(\Phi\frac{F}{C} + \gamma + \mu_A\right)\lambda_1 - r\gamma\lambda_2 - (1-r)\gamma\lambda_4 \\
\frac{d\lambda_2}{dt} = \left(\frac{\beta M}{M + M_T} + \frac{\beta_T M_T}{M + M_T} + \mu_I + u_1\right)\lambda_2 - \frac{\beta M}{M + M_T}\lambda_3 \\
\frac{d\lambda_3}{dt} = -c_3 F - \Phi\left(1 - \frac{A}{C}\right)\lambda_1 + (\mu_F + u_1)\lambda_3 \\
\frac{d\lambda_4}{dt} = [(\beta - \beta_T)\lambda_2 - \beta\lambda_3] \frac{M_T I}{(M + M_T)^2} + (\mu_M + u_1)\lambda_4 \\
\frac{d\lambda_5}{dt} = c_4 M_T - [(\beta - \beta_T)\lambda_2 - \beta\lambda_3] \frac{MI}{(M + M_T)^2} + (\mu_T + u_1)\lambda_5.
\end{array} \right. \quad (3.10)$$

Finalement, on analyse les conditions de transversalité pour les variables adjoint.

Dans notre problème, il n'y a pas de valeur finie pour les variables d'étude ; ces conditions sont données à un temps final  $T$  par

$$\lambda_i(T) = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.11)$$

### 3.3 Système d'optimalité

Le système d'optimalité décrit comment le système se comporte sous l'application du contrôle qui minimise  $J$ .

Il est obtenu en prenant le système (3.2), avec le système adjoint (3.10), le contrôle optimal  $u$  dont les composantes sont données par le système (3.7), la condition initiale (3.3) et les conditions de transversalités (3.11) qui est données par le système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= \Phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) F - (\gamma + \mu_A) A \\
\frac{dI}{dt} &= r\gamma A - \frac{\beta MI}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - (\mu_I + u_1) I \\
\frac{dF}{dt} &= \frac{\beta MI}{M + M_T} - (\mu_F + u_1) F \\
\frac{dM}{dt} &= (1 - r)\gamma A - (\mu_M + u_1) M \\
\frac{dM_T}{dt} &= u_2 - (\mu_T + u_1) M_T \\
\frac{d\lambda_1}{dt} &= \left(\Phi \frac{F}{C} + \gamma + \mu_A\right) \lambda_1 - r\gamma \lambda_2 - (1 - r)\gamma \lambda_4 \\
\frac{d\lambda_2}{dt} &= \left(\frac{\beta M}{M + M_T} + \frac{\beta_T M_T}{M + M_T} + \mu_I + u_1\right) \lambda_2 - \frac{\beta M}{M + M_T} \lambda_3 \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= -c_3 F - \Phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) \lambda_1 + (\mu_F + u_1) \lambda_3 \\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= [(\beta - \beta_T) \lambda_2 - \beta \lambda_3] \frac{M_T I}{(M + M_T)^2} + (\mu_M + u_1) \lambda_4 \\
\frac{d\lambda_5}{dt} &= c_4 M_T - [(\beta - \beta_T) \lambda_2 - \beta \lambda_3] \frac{MI}{(M + M_T)^2} + (\mu_T + u_1) \lambda_5 \\
u_1^* &= \frac{\lambda_2 I + \lambda_3 F + \lambda_4 M + \lambda_5 M_T}{c_1} \\
u_2^* &= -\frac{\lambda_5}{c_2} \\
A(0) &= A_0 = \frac{(R - 1)C}{R} \\
I(0) &= I_0 = \frac{r\gamma A_0}{(\mu_I + \beta)} \\
F(0) &= F_0 = \frac{(\gamma + \mu_A) C A_0}{\Phi(C - A_0)} \\
M(0) &= M_0 = \frac{(1 - r)\gamma A_0}{\mu_M} \\
M_T(0) &= M_{T0} = 0 \\
\lambda_i(T) &= 0, i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \right. \tag{3.12}$$

# Chapitre 4

## Résultats numériques

Dans ce chapitre, on propose quelques simulations pour résoudre numériquement le système d'optimalité (3.12).

### 4.1 Méthodologie

La méthode numérique traite deux points limites du problème ([30]), séparés de conditions au bord au temps  $t = 0$  et  $t = T$ .

Dans nos simulations, on utilise la période  $T = 120$ . Cette valeur est choisie pour représenter le temps (en jours) au cours duquel, la stratégie de libération des moustiques est appliquée (autour de 04 mois). Puisque le système d'optimalité (3.12) a fixé les conditions au temps final pour les variables adjoints, il ressort qu'il est difficile de le résoudre numériquement.

Une méthode est d'utiliser l'approche de la différence finie. Dans [8], les auteurs utilisent le logiciel *package COLDAE* [1] qui résout la différentielle au bord et les équations différentielles algébriques donnant les points-gaussien.

Ici, on utilise le logiciel *package bvp4c* [28] de *MATLAB* qui résout les systèmes d'équations différentielles ordinaires avec deux conditions au bord.

Un facteur important à considérer est que le système d'optimalité est en général un problème non linéaire, puisqu'il a besoin d'une approximation initiale pour commencer la méthode de Newton. Il est bon de connaître que la convergence de la méthode de Newton's est étroitement lié à l'approximation initiale de la solution. Pour notre système d'optimalité (3.12), il est pratiquement impossible de deviner une approximation initiale garantissant cette convergence. Une méthode pour résoudre le problème est d'utiliser la méthode analytique de continuation [2, 16]. C'est une technique standard et puissante utilisée pour résoudre les problèmes non linéaire a deux bords.

L'idée qui est derrière la méthode analytique de continuation est de transformer le problème en un problème à un paramètre. Pour le système d'optimalité (3.12), on utilise le temps  $T$  comme paramètre. Quand  $T = 120$ , on retrouve le problème original. Pour  $T = 1$ , le problème est simple à résoudre, et la solution peut être utilisée comme une approximation initiale tout près du problème au temps  $T = 1 + \Delta t$ , avec  $\Delta t$  suffisamment petit. Ce processus continu jusqu'à ce que le problème désiré soit résolu. Les valeurs successives des paramètres choisis sont reconnues comme un chemin d'homotopie.

## 4.2 Résultats

Notre but est de comprendre les effets de deux mécanismes conflictuels de contrôle, nommé, l'application des insecticides et la libération de moustiques mâles stérilisés. Pour l'épidémiologie et les paramètres démographiques dans toutes les simulations, on utilise les valeurs données dans [34] (voir tableau ci-dessous); les conditions initiales pour les variables d'étude sont données par :

$$A_0 = 2,95; I_0 = 0,24; F_0 = 4,99; M_0 = 2,97 \text{ et } M_{T_0} = 0.$$

On déterminera la stratégie optimale obtenue pour différent ensemble de valeurs pour le coût défini par la fonctionnelle (3.1). Comme référence, on utilise les valeurs  $c_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Pour ce cas, la valeur de  $J = 0,6625$ . Les figures 4.1 et 4.2 illustrent les trajectoires optimales  $u_1^*$  et  $u_2^*$ , définit respectivement la forme chaise (le bas du chaise est presque un plateau constant) et la forme cloche (le haut de la cloche est presque un plateau constant).

Les figures 4.1, 4.2 montrent que le taux maximal de mortalité induit par les insecticides (la mesure d'application des insecticides) est dix fois plus élevé que le taux maximal de mortalité induit par la libération d'insectes stériles. Une autre remarque est qu'une grande quantité d'insecticide peut être utilisée pendant la première journée, lorsque des insectes stériles sont libérés à un taux presque constant.

Les figures 4.3 – 4.7 présentent des trajectoires optimales de différents stades d'une population de moustiques. Comme c'était exigé, la population de moustiques irradiés suit le seul modèle de contrôle  $u_2$ . D'autre part, on observe que la courbe correspondante à la phase aquatique, des femelles fécondes accouplées, les insectes mâles sont semblables à la forme inverse du graphe d'éradication de moustiques d'investissement  $u_2$  et la trajectoire des femelles non accouplées est semblable à l'inverse du trajectoire de l'utilisation des insecticides  $u_1$ .

On définit la réduction des variables (pourcentage) par  $D_X = (X_0 - X^*)100/X_0$ , où  $X_0$  représente les valeurs initiales des variables d'étude  $A, I, F$  et  $M$ ; et  $X^*$  est le quasi-constant plateau rechercher par ces variables.

## 4.3 Simulation numérique

Dans ce paragraphe, nous donnons les valeurs numériques utilisées pour les simulations ainsi que les courbes correspondantes.

Le tableau suivant donne les paramètres ainsi que leurs valeurs dans le programme de simulation.

a	b	c	d	e	f	g
6.353	0.0583	0.0337	0.0337	0.0337	0.06	0.07

h	r	i	j	k	l	m	n	o
0.121	0.5	0.7	0.5	3	1	1	1	1

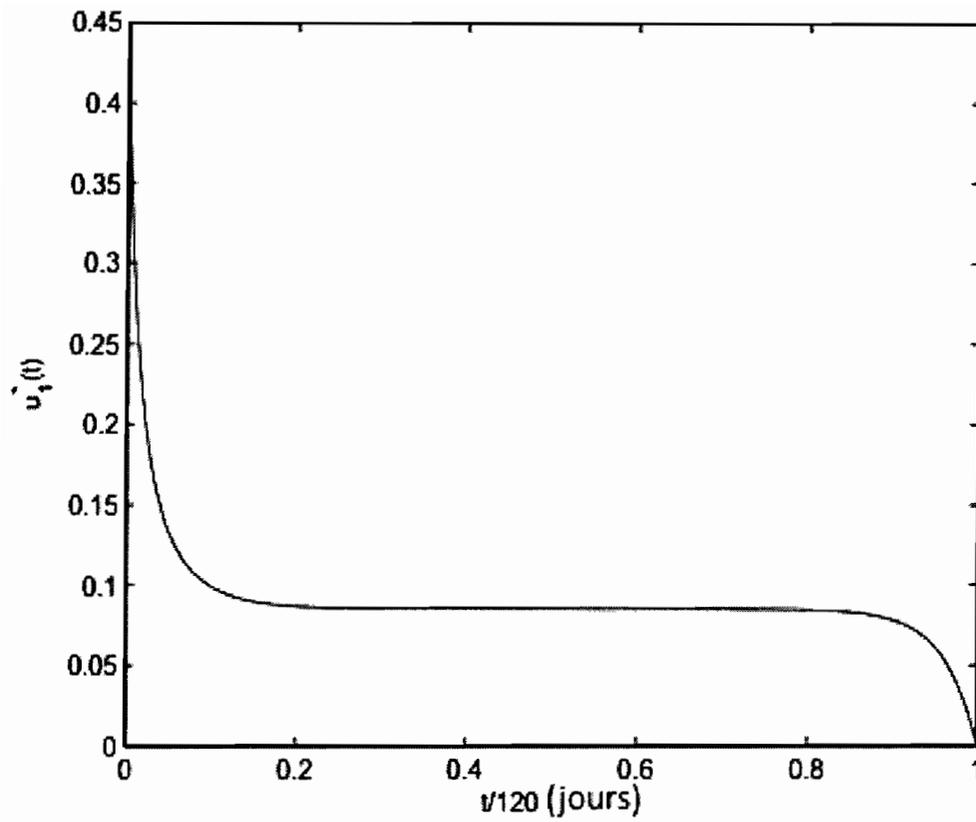


FIGURE 4.1 – l'utilisation des insecticides.

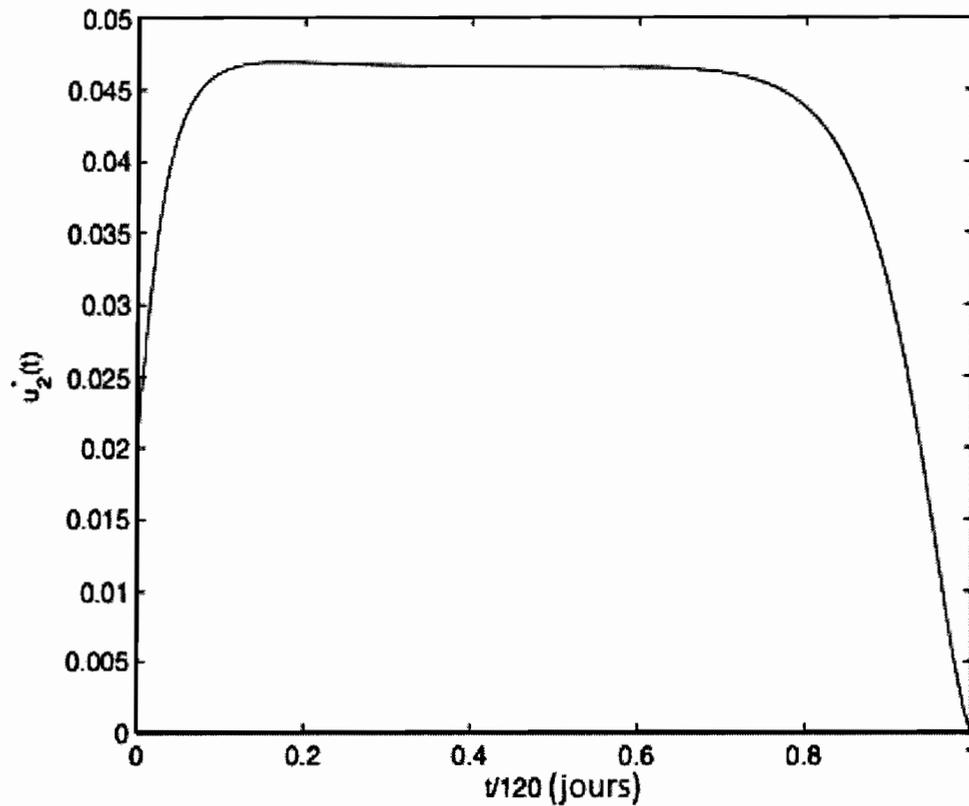


FIGURE 4.2 – la technique de stérilisation

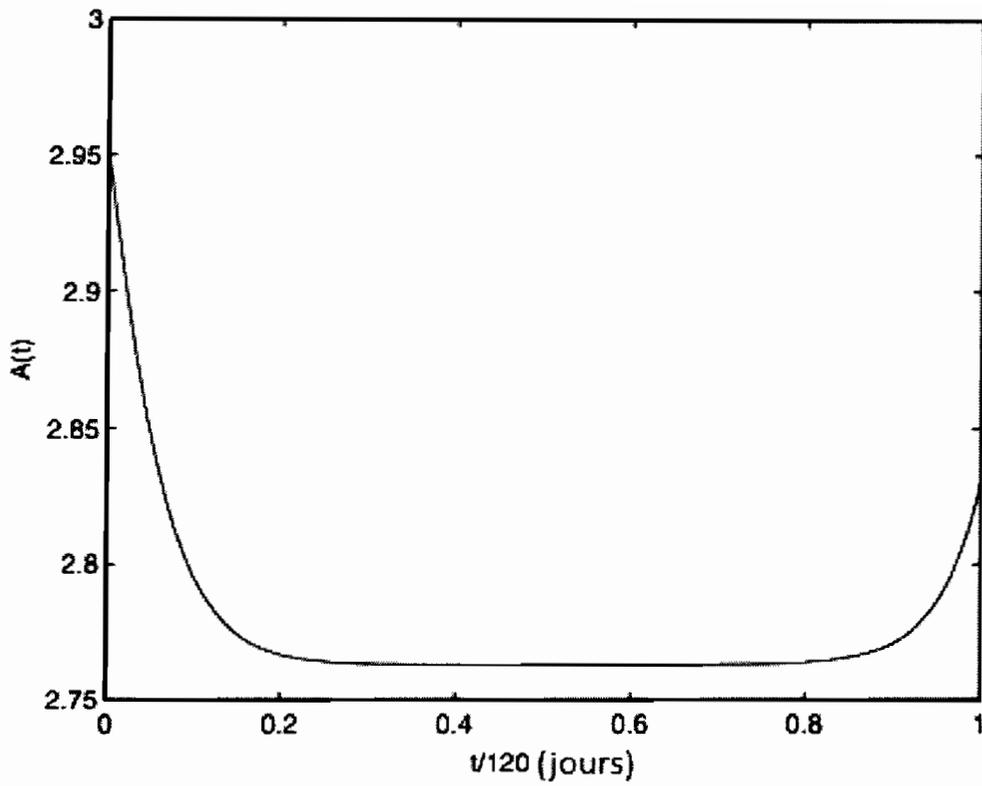


FIGURE 4.3 - forme immature

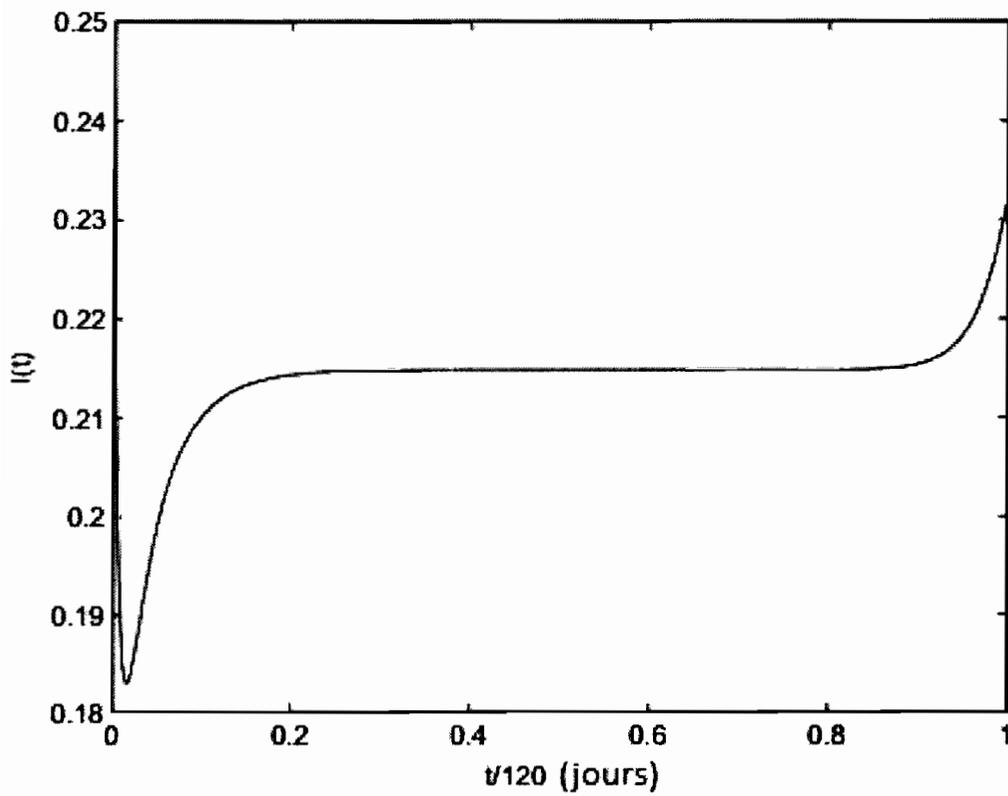


FIGURE 4.4 - femelles non accouplées

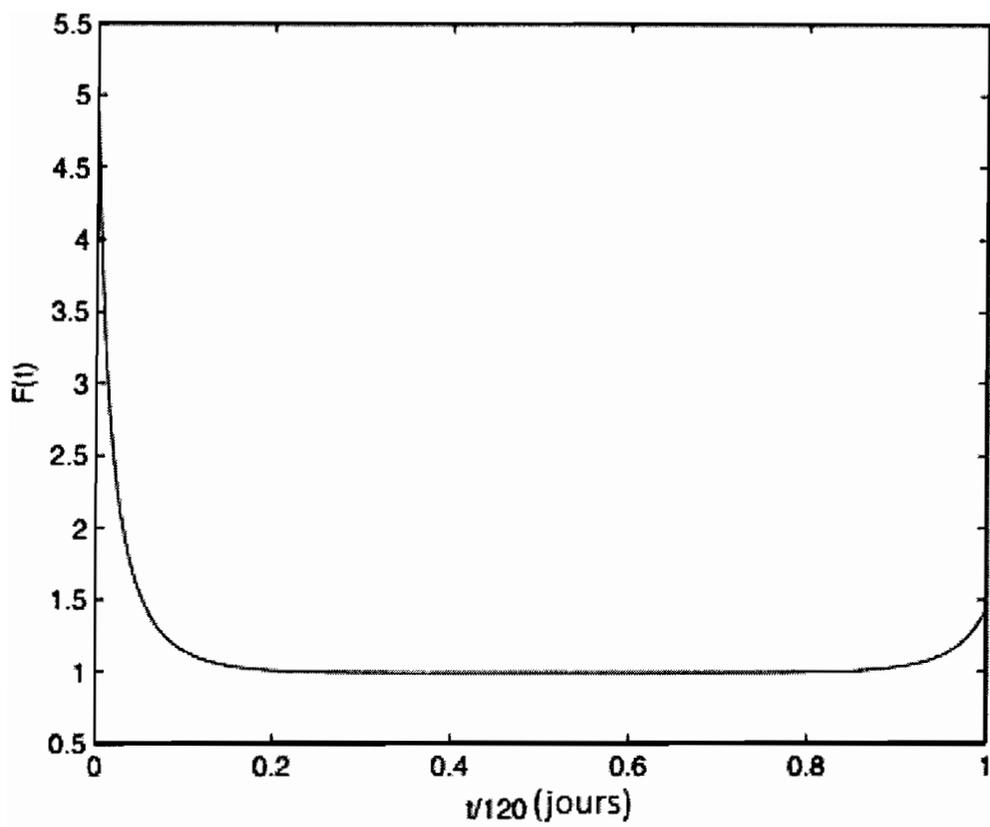


FIGURE 4.5 – femelles fécondes accouplées

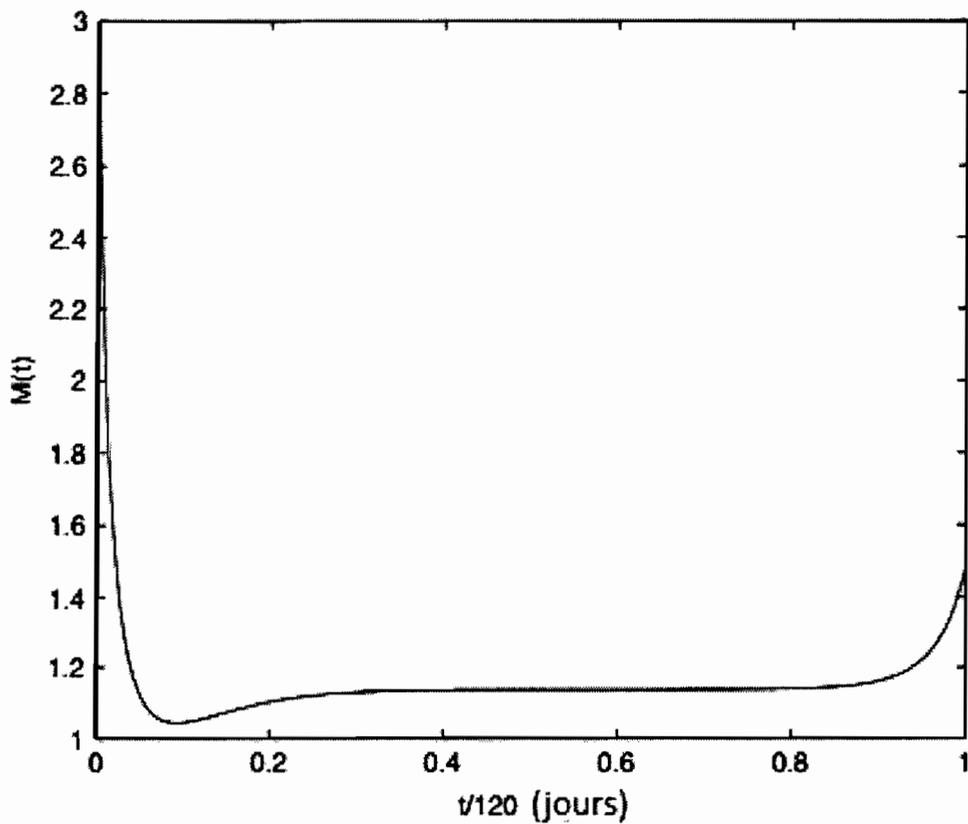


FIGURE 4.6 – mâles fertiles

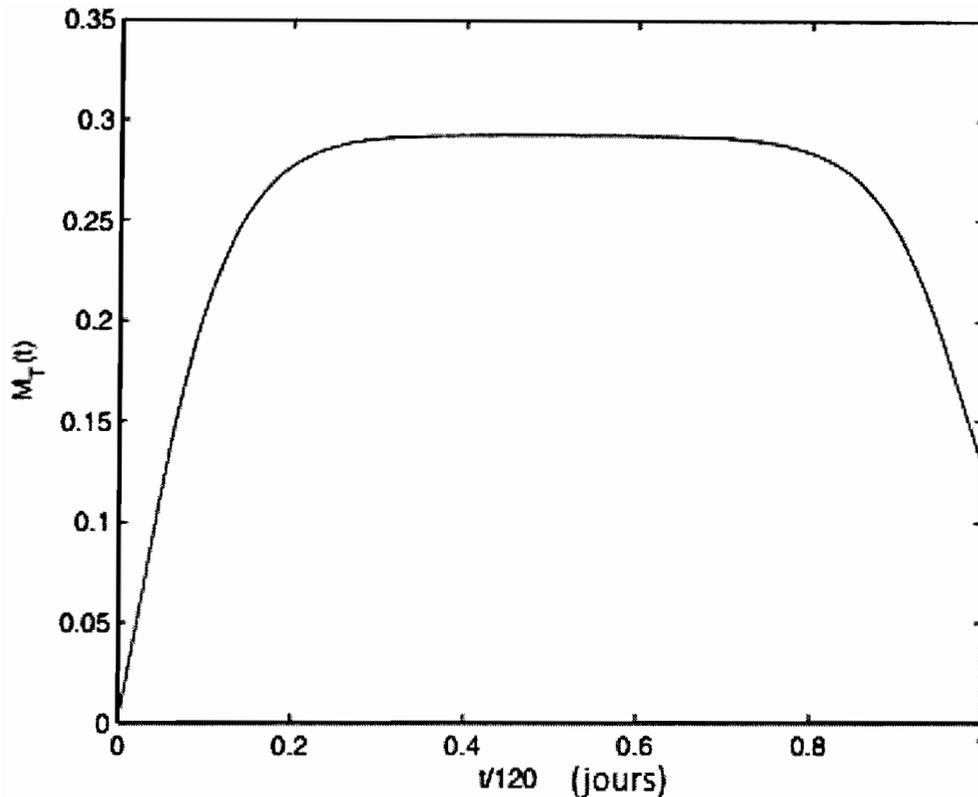


FIGURE 4.7 – insectes stériles

La figure 4.1 donne l'évolution du paramètre de contrôle  $u_1$  (relatif à l'utilisation des insecticides) au cours de l'expérience.

La figure 4.2 donne l'évolution du paramètre de contrôle  $u_2$  (relatif à libération d'insectes stériles) au cours de l'expérience.

La figure 4.3 montre l'évolution des individus du compartiment  $A$  (forme immature) au cours de l'expérience.

La figure 4.4 montre l'évolution des individus du compartiment  $I$  (femelles non accouplées) au cours de l'expérience.

La figure 4.5 donne l'évolution des individus du compartiment  $F$  (femelles fécondes accouplées) au cours de l'expérience.

La figure 4.6 donne l'évolution des individus du compartiment  $M$  (mâles fertiles) au cours de l'expérience.

La figure 4.7 donne l'évolution des individus du compartiment  $M_T$  (insectes stériles) au cours de l'expérience.

# Conclusion et perspectives

Les modèles mathématiques (en épidémiologie) sont conçus dans le but de comprendre, de prévoir ou de contrôler l'évolution d'une épidémie. Dans ce mémoire, nous avons étudié un modèle de contrôle de l'épidémie de la dengue ; dont le modèle de base a été pris dans [10]. Ce qui nous a conduit à l'utilisation de deux mécanismes de contrôle à savoir la technique de stérilisation des insectes (*SIT*) et l'utilisation des insecticides. L'utilisation de produits chimiques est, certes, très efficace mais pour des enjeux environnementaux et de santé publique, il serait préférable de concentrer les efforts sur la prévention individuelle. La technique de stérilisation des insectes a lui aussi un effet négatif sur la taille de la population à long terme. Nous avons également observé l'efficacité de ces deux stratégies de contrôle à travers nos simulations. On a aussi observé les changements qui interviennent lorsqu'on introduit les paramètres de contrôle dans les différentes équations constituant le modèle.

Dans ce travail, on ne tient pas compte des conditions climatiques ni de l'espace. Par conséquent, nous envisageons poursuivre le travail en considérant, un espace bien défini et en tenant compte des conditions climatiques tel que la température.

Nous envisageons également construire et étudier, un modèle moustique-humain ; ceci permettra de comprendre et d'expliquer comment le transfert du virus s'effectue entre le vecteur (le moustique) et l'hôte (l'Homme).

# Bibliographie

- [1] U.M. ASCHER, R.J. SPITERI, *Collocation software for boundary value differential-algebraic equation*, *SIAM J. Sci. Comput.* 15 (1994) 938-952.
- [2] U.M. ASCHER, R.M.M. MATTHEIJ, R.D. RUSSELL, *Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations*, *SIAM*, (1995).
- [3] H.J. BARCLAY, *Pest population stability under sterile release*, *Res. Pop. Ecol.* 24 (1982) 405-416.
- [4] A.C. BARTLETT, *Insect sterility, insect genetics, and insect control*, in : D. Pimentel (Ed.), *Handbook of Pest Management in Agriculture*, vol. II, *CRC Press*, Boca Raton, FL, 1990, pp. 279-287.
- [5] H.J. BARCLAY, *Models for the sterile insect release method with the concurrent release of pesticides*, *Ecol. Model.* 11 (1980) 167-178.
- [6] M.A.L. CAETANO, T. YONEYAMA, *Optimal end sub-optimal control in Dengue epidemics*, *Optim. Control Appl. Meth.* 22 (2001) 63-73.
- [7] W.G. COSTELLO, H.M. TAYLOR, *Mathematical models of the sterile male technique of insect control*, in : A. Charnes, W.R. Lynn (Eds.), *Mathematical Analysis of Decision Problems in Ecology*, *Lecture Notes Biomathematics*, vol.5, *Springer-Verlag*, Berlin, 1975, pp.318-359.
- [8] R.V. CULSHAW, S. RUAN, R.J. SPITERI, *Optimal HIV treatment by maximizing immune response*, *J. Math.Biol.* 48 (2004) 545-562.
- [9] K. DIETZ, *The effect of immigration on genetic control*, *Theor. Popul. Biol.* 9 (1976) 58-67.
- [10] L. ESTEVA, H. M. YANG, *Mathematical model to assess the control of Aedes aegypti mosquitoes by the sterile insect technique*, *Math.Biosci.*198 (2005) 132-147.
- [11] W. FLEMING, R. RISHEL, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, *Springer-Verlag*, New York, 1975.
- [12] D.J. GUBLER, *Dengue*, in :T.P Monath (Ed.), *The Arboviruses : Epidemiology and Ecology*, vol. II, *CRC*, Boca Raton, FL, 1986, p.213.
- [13] G.W. HARRISON, H.J. BARCLAY, P. VAN DEN DRIESCHE, *Analysis of a sterile insect release model with predation*, *J. Math. Biol.* 16 (1982) 33-44.
- [14] Y. ITO, *A model of sterile insect release for eradication of the melon fly Dacus cucurbitae Coquillett*, *Appl. Ent. Zool.* 12 (1977) 303-312.
- [15] H.R. JOSHI, *Optimal control of an HIV immunology model*, *Optim. Control Appl. Meth.* 23 (2002) 199-213.
- [16] H.B. KELLER *Numerical solution of two-point boundary value problems*, *Reginal Conference Series in Applied Mathematics No. 24*, *SIAM*, Philadelphia, 1976.

- [17] D. KIRSHNER, S. LENHART, S. SERBIN, *Optimal control of chemotherapy of HIV*, *J. Math. Biol.* 35 (1997) 775-792.
- [18] A. KLEIN, S. NILUSMAS, *La modélisation de l'épidémie du chinkungunya. Projet TER Master 1 SITN (2015)*
- [19] E.F. KNIPLING, *Possibilities of insect control or eradication through the use of sexually sterile male*, *J. Econ. Entomol.* 48 (1955) 459-462.
- [20] E.F. KNIPLING, *The basic principles of insect population suppression and management*, *Agriculture Handbook 512*, U.S. Dept. of Agriculture, Washington, DC, 1979.
- [21] E.F. KNIPLING, *Sterile insect technique as a screwworm control measure : the concept and its development*, in : O.H. Graham (Ed.), *symposium on Eradication of the Screwworm from the United States and Mexico*, *Misc. Publ. Entomol. Soc. America*, 62, College Park, MD, 1985, pp.4-7.
- [22] A. LEITAO, *Cálculo Variacional e Controle Ótimo*, 23 Colquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [23] N.A. MAIDANA, H.M. YANG, *Describing the geographic propagation of dengue disease by travelling waves*, *Math. Biosci.* 215 (2008) 64-77.
- [24] C. PIO, H.M. YANG, L. ESTEVA, *Assessing the suitability of sterile insect technique applied to Aedes aegypti*, *J. Biol. Syst.* 16 (2008) 565-577.
- [25] R.E. PLANT, M. MANGEL, *Modeling and simulation in agricultural pest management*, *SIAM Rev.* 29 (1987) 235-261.
- [26] T. PROUT *The joint effects of the release of sterile males and immigration of fertilized females on a density regulated population*, *Theor. Popul. Biol.* 13 (1978) 40-71.
- [27] P. REITER, M.A. AMADOR, R.M. ANDERSON, G.G. CLARK, *Short report : dispersal of Aedes aegypti in an urban area after blood feeding as demonstrated by rubidium-marked eggs*, *Am. J. Trop. Med. Hyg.* 52 (2) (1995) 177-179.
- [28] L.F. SHAMPINE, M.W. REICHEL, J. KIERZENKA, *Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c*.
- [29] R.F. STENGEL, R. GHIGLIZZA, N. KULKARNI, O. LAPLACE, *Optimal control of innate immune response*, *Optim. Control Appl. Meth.* 23 (2002) 91-104.
- [30] R. C. A. THOMÉ, H. M. YANG, L. ESTEVA *Optimal control of Aedes aegypti mosquitoes by the sterile insect technique and insecticide*
- [31] E. TRÉLAT *Note de cours de contrôle optimal : théorie et applications*
- [32] H.J. WEARING, *Ecological and immunological determinants of dengue epidemics*, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 103 (2006) 11802-11807.
- [33] H.M. YANG, *Modelling vaccination strategy against directly transmitted diseases using a series of pulses*, *J. Biol. Syst.* 6 (2) (1998) 187-212.
- [34] H.M. YANG, M.L.G. MACORIS, K.C. GALVANI, M.T.M. ANDRIGHETTI, D.M.V. WANDERLEY, *Assessing the effects of temperature on the population of Aedes aegypti, vector of dengue*, *Epidem. Infect.* 137 (8) (2009) 1188-1202.